中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

團隊合作獎

050416

環環相扣-一道數論問題延伸高階線性遞迴數列之探討

學校名稱：臺北市立成淵高級中學

作者：	指導老師：
高一 黃品崴 高一 卓煒珊 高一 吳欣霓	林鳳美

關鍵詞：數論問題、盧卡斯數列、高階線性遞迴數列

摘要

從科學研習月刊中「森棚教官的數學題」的一道數論問題：

「你可以找到多少組正整數對(a,b)，讓a的平方減5是b的倍數，b的平方減5是a的倍數？」觀察到盧卡斯數列相鄰奇數項滿足原問題的解，也發現某數列與原問題的解間滿足充分條件，於是延伸問題改為數列恆等式，推廣更一般情形，即k階整係數齊次線性遞迴數列，簡稱k階線性遞迴數列。本作品建構兩種k階線性遞迴數列來探討，其兩數列分別是由盧卡斯數列及費氏數列類推而得。

第一種數列是利用特徵複數根性質來探討，而第二種數列是配合k階 **Cassini** 恆等式來求其解。最後利用兩個恆等式或不等式來描述上述兩種數列，是由 Vandermonde 行列式來論證。

壹、研究動機

閱讀科學研習月刊中「森棚教官的數學題」的一道數學問題，參考游森棚[3]，如下：

「**你可以找到多少組正整數對(a,b)，讓a^2-5是b的倍數，b^2-5是a的倍數？**」

文章中提到$4^2-5=11\times1$ 為11的倍數,$11^2-5=4\times29$ 為4的倍數，代表$(a,b)=(4,11)$為其解，進一步發現$a=4,b=11$分別為**盧卡斯數列** (Lucas squence)：

$$a_0^{(2)}=2,\ a_1^{(2)}=1,\ a_n^{(2)}=a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)},\ \forall n\ge 2$$

的第三項$a_3^{(2)}$及第五項$a_5^{(2)}$，美妙地是奇數項，因而可猜測盧卡斯數列中奇數項均滿足其解，

進行檢驗$a_7=29, a_9=76$滿足$29^2-5=11\times76$為76的倍數，所以上述其解(a,b)則可用數列

$a_{n-2}^{(2)},a_n^{(2)},a_{n+2}^{(2)}$來表示，即$\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$，其中$n$為奇數。 (1)

滿足(1)式的數列是否僅有盧卡斯數列中的奇數項滿足呢？那麼可以考慮更一般的2階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$來做探討，給定非零整數ℓ_n(當ℓ_n值與n無關時，記作ℓ)且正整數t $(1\le t\le n)$，將(1)式改為(2)式：

$$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)}\text{，也可改為2階行列式形式：}\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}\text{。} \quad (2)$$

(2)式中若$t=1$，即稱為**費氏數列中的二階 Cassini 恆等式**。

更進一步推廣至k階線性遞迴數列，分別探討兩數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$，其中$\left\{a_n^{(k)}\right\}$考慮(3)式的解

與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$考慮(4)式的解。

$$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}\text{，也可改為}k\text{階行列式：}\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(k)} & a_{n+t}^{(k)} \\ a_{n-t}^{(k)} & a_n^{(k)} \end{vmatrix}\text{，其中}1\le t\le n\text{。} \tag{3}$$

$$n\text{階行列式：}\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix}\text{，其中}t=1\text{。} \tag{4}$$

注意(4)式即**推廣k階 Cassini 恆等式**，於是我們進行研究有了這篇作品。

貳、研究目的

一、探討 2 階線性遞迴數列滿足原問題(1)式的解之條件，探討其性質。

二、探討 2 階線性遞迴數列滿足(2)式的解之條件，探討其性質。

三、推廣至k階線性遞迴數列滿足(3)式的解之條件，探討其性質。

四、推廣至k階線性遞迴數列滿足(4)式的解之條件，探討其性質。

五、利用兩個恆等式或不等式來描述上述兩種數列k階線性遞迴，並論證之。

參、研究設備及器材

筆、紙、電腦、GeoGebra5.0 動態幾何繪圖板。

肆、研究過程或方法

一、名詞定義與預備知識

由於盧卡斯數列相鄰奇數項滿足原問題的解，也發現某數列與原問題的解間滿足充分條件，於是延伸問題改為數列恆等式，本作品建構兩種k階線性遞迴數列來探討，其兩數列分別是由盧卡斯數列及費氏數列類推而得，參見**定義 1** 與**定義 2**，特別是兩數列的遞迴關係是相同的，但初始條件是不同的。

【定義 1】(**k階整係數齊次線性遞迴數列**，張福春[1]及張福春[2]、Alfred S. [4])

給定一數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$，若存在k (≥ 2) 個整數$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_k$，其中$c_k\ne 0$，滿足兩條件：

(i) **(初始條件)** $a_i^{(k)}=\gamma_i$, 其中 $i=0,1,2,\cdots,k-1$且$\gamma_i\in R$

(ii) (**遞迴關係**) $a_n^{(k)}=c_1a_{n-1}^{(k)}+c_2a_{n-2}^{(k)}+c_3a_{n-3}^{(k)}+\cdots+c_ka_{n-k}^{(k)},\ n\ge k$ (5)

則稱數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$為k**階整係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱為k**階線性遞迴數列**$\left\{a_n^{(k)}\right\}$。

【註】數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$的一般解是由(5)式中初始條件來決定，參見**預備定理 1**與**預備定理 2**。

【定義 2】(k**階整係數齊次線性遞迴數列**，張福春[1]及張福春[2]、Alfred S. [4])

給定一數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$，若存在$k\ (\ge 2)$個整數$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_k$，其中$c_k\ne 0$，滿足兩條件：

(i) (**初始條件**) $b_1^{(k)}=1,b_i^{(k)}=0,$ 其中 $i=0,-1,-2,\cdots,-(k-2)$

(ii) (**遞迴關係**) $b_n^{(k)}=c_1b_{n-1}^{(k)}+c_2b_{n-2}^{(k)}+c_3b_{n-3}^{(k)}+\cdots+c_kb_{n-k}^{(k)},\ n\ge k$ (6)

則稱數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$為k**階整係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱為k**階線性遞迴數列**$\left\{b_n^{(k)}\right\}$。

【註】(6)式中2階線性遞迴數列為**費氏數列**。

由張福春[1]及張福春[2]知**定義 1**與**定義 2**中的k階線性遞迴數列的特徵方程式為

$$f(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\cdots-c_k=0\ 。\tag{7}$$

(7)式中特徵根可能的情形有相異實根或相等實根(即重根情形)或共軛複根，注意特徵共軛複根的情形即相異特徵實根的一個特例。本作品中減少繁雜的論證過程，所以在探討數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$的一般式時，取$d_i=1$來探討，參見**預備定理 1**。

【預備定理 1】(特徵根為相異實根或共軛複根，張福春[1]及張福春[2])

設k階實係數線性遞迴關係式如(7)式的特徵多項式為$f(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\cdots-c_k=0$。

(i)若$f(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)$，其中特徵根$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$均為相異實根或共軛複根，則數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$的一般解為$a_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}d_i\alpha_i^n$，其中$d_i$為常數$(i=1,2,\cdots,k)$。

(ii)承(i)，若$d_1=d_2=\cdots=d_k=1$，則$a_0^{(k)}=k,a_1^{(k)}=c_1,a_2^{(k)}=c_1^2+2c_2$。

【證明】(i) 張福春[1]及張福春[2]。(ii)由於數列的特徵方程式為(7)式，

所以由**根與根之間關係**知$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=c_1$且$\sum_{i\ne j}\alpha_i\alpha_j=-c_2$。

由(i)知$a_0^{(k)}=\alpha_1^0+\alpha_2^0+\alpha_3^0+\cdots+\alpha_k^0=k,a_1^{(k)}=\alpha_1^1+\alpha_2^1+\alpha_3^1+\cdots+\alpha_k^1=c_1$且

$$a_2^{(k)}=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\cdots+\alpha_k^2=\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)^2-2\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j=c_1^2+2c_2 \text{。} \quad \blacksquare$$

【預備定理 2】(特徵根有相等實根情形，張福春[1]及張福春[2])

設k階整係數線性遞迴關係式如(7)式的特徵多項式為$f(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\cdots-c_k=0$。

若$f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{p_i}$，其中特徵根$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$相異，且$\alpha_i$為$p_i$次重根，則(i)數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$的一般解為$a_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{m}\left(d_{i1}+nd_{i2}+n^2d_{i3}+\cdots+n^{p_i-1}d_{ip_i}\right)\alpha_i^n$，其中$d_{ij}$為常數 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,p_i)$。

(ii)若數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$的一般解為$a_n^{(2)}=\left(1+n\right)\alpha^n$，則$a_0^{(2)}=1,\ a_1^{(2)}=c_1,\ a_2^{(2)}=-3c_2$。

【證明】(i) 張福春[1]及張福春[2]。 (ii)若α為數列的特徵方程式

$f(x)=x^2-c_1x-c_2=0$之二重根，則$2\alpha=c_1,\alpha^2=-c_2$。由於$a_n^{(2)}=\left(1+n\right)\alpha^n$，則

$a_0^{(2)}=\left(1+0\right)\alpha^0=1,\ a_1^{(2)}=\left(1+1\right)\alpha^1=2\alpha=c_1$且$a_2^{(2)}=\left(1+2\right)\alpha^2=3\alpha^2=3(-c_2)=-3c_2$。 $\blacksquare$

【預備定理 3】(范德蒙行列式，Vandermonde determinant)

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \text{。}$$

二、探討2階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$

(一)盧卡斯數列

求原問題的解(a,b)可用數列來求解，即滿足(1)式問題的解($\ell=5$)，可以檢驗出此數列解為**盧卡斯數列**：$a_0^{(2)}=2,a_1^{(2)}=1,\ a_n^{(2)}=a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)},\quad \forall n\ge 2$的奇數項，證明參見**定理 1**。

【定理 1】(盧卡斯數列中的奇數項滿足(1)式問題的解)

設$\left\{a_n^{(2)}\right\}$為盧卡斯數列中的奇數項之數列，其中n為奇數，則$\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$。

【證明】由於α_1,α_2為盧卡斯數列的特徵方程式$x^2-x-1=0$之兩相異實根，所以$\alpha_1\alpha_2=-1$且

$a_n^{(2)}=\alpha_1^n+\alpha_2^n$，又由**預備定理 1**知$a_4^{(2)}=\alpha_1^4+\alpha_2^4=7$，所以

$$\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=(\alpha_1^n+\alpha_2^n)^2-5=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+\left(2\alpha_1^n\alpha_2^n-5\right)$$
$$=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+\left[2\cdot(-1)^n-5\right]=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(-7)$$

又 $a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}=(\alpha_1^{n-2}+\alpha_2^{n-2})(\alpha_1^{n+2}+\alpha_2^{n+2})=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(\alpha_1\alpha_2)^{n-2}\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4\right)$

$$=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(-1)^{n-2}\cdot 7=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(-7)$$

因此，$\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$。 ■

由**定理 1**知盧卡斯數列中的奇數項滿足(1)式，那麼若我們考慮盧卡斯數列中的偶數項滿足(1)式，此時ℓ為何？若ℓ為整數，則參見**定理 2**。

【定理 2】(盧卡斯數列中的偶數項滿足(1)式問題的解)

設$\left\{a_n^{(2)}\right\}$為盧卡斯數列中的偶數項之數列，其中n為偶數，若$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$，則$\ell=-5$。

【證明】仿照**定理 1**證明方式，可知$\alpha_1\alpha_2=-1$且由**預備定理 1**知$a_4^{(2)}=\alpha_1^4+\alpha_2^4=7$。

考慮$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=(\alpha_1^n+\alpha_2^n)^2-\ell=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+\left(2\alpha_1^n\alpha_2^n-\ell\right)$

$$=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+\left(2(-1)^n-\ell\right)=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+\left(2-\ell\right),$$

又 $a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}=(\alpha_1^{n-2}+\alpha_2^{n-2})(\alpha_1^{n+2}+\alpha_2^{n+2})=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(\alpha_1\alpha_2)^{n-2}\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4\right)$

$$=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(-1)^{n-2}\cdot 7=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+7$$

由$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$得到$2-\ell=7$，因此，$\ell=-5$。 ■

(二)特徵相異實根或共軛複根的2階線性遞迴數列滿足(2)式之解

由**定理 1**與**定理 2**知**盧卡斯數列**滿足(1)式的解，現在探討2階線性遞迴數列一般的情形：$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$滿足(2)式的解。注意到2階線性遞迴數列中特徵方程式的根情形包含相異實根、相等實根及一組共軛複根之情形，底下先從相異特徵實根及共軛複根討論。

設α_1,α_2為2階線性遞迴數列中特徵方程式的特徵相異實根(或共軛複根)，則由**預備定理 1**知 $a_n^{(2)}=\alpha_1^n+\alpha_2^n$且由**根與根係數關係**知$\alpha_1\alpha_2=-c_2$。(2)式為$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)}$，因為

$$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=(\alpha_1^n+\alpha_2^n)^2-\ell_n=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+\left(2\alpha_1^n\alpha_2^n-\ell_n\right)=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+\left(2(-c_2)^n-\ell_n\right),$$

又 $a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)}=(\alpha_1^{n-t}+\alpha_2^{n-t})(\alpha_1^{n+t}+\alpha_2^{n+t})=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(\alpha_1\alpha_2)^{n-t}\left(\alpha_1^{2t}+\alpha_2^{2t}\right)$

$$=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(-c_2)^{n-t}\left(\alpha_1^{2t}+\alpha_2^{2t}\right)\quad(\because a_{2t}^{(2)}=\alpha_1^{2t}+\alpha_2^{2t})=\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}+(-c_2)^{n-t}a_{2t}^{(2)}$$

由 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)}$ 知 $\cancel{\alpha_1^{2n}}+\cancel{\alpha_2^{2n}}+\left(2(-c_2)^n-\ell_n\right)=\cancel{\alpha_1^{2n}}+\cancel{\alpha_2^{2n}}+(-c_2)^{n-t}a_{2t}^{(2)}$，即

$$\ell_n=2(-c_2)^n-(-c_2)^{n-t}a_{2t}^{(2)}\text{。}\tag{8}$$

【定理 3】(特徵相異實根或共軛複根的 2 階線性遞迴數列滿足(2)式之解)

設 $\left\{a_n^{(2)}\right\}$ 為 2 階線性遞迴數列，若數列滿足(2)式且 α_1,α_2 為數列的特徵方程式 $x^2-c_1x-c_2=0$ 之兩相異實根(或一組共軛複根)，若 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)}$，其中 $1\le t\le n$，則

(i) $\ell_n=2(-c_2)^n-(-c_2)^{n-t}a_{2t}^{(2)}$。(ii)當 $c_2=1$ 且 n 為奇數時，$\ell_n=\begin{cases}-2-a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為奇數}\\-2+a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為偶數}\end{cases}$。(iii)當 $c_2=1$ 且 n 為偶數時，$\ell_n=\begin{cases}2+a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為奇數}\\2-a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為偶數}\end{cases}$。(iv)當 $c_2=-1$ 時，$\ell=2-a_{2t}^{(2)}$。

【證明】(i)由(8)式知 $\ell_n=2(-c_2)^n-(-c_2)^{n-t}a_{2t}^{(2)}$。

若簡化(8)式，可考慮 $c_2=\pm1$ 的情形，底下討論。

(ii)當 $c_2=1$ 且 n 為奇數時，$\ell_n=\begin{cases}-2-a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為奇數}\\-2+a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為偶數}\end{cases}$。

例如：當 $t=2$ 時，數列 $\left\{a_n^{(2)}\right\}$：$a_n^{(2)}=2a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)}$ 為 $2,2,6,14,34,82,198,478,1154,2786,\cdots$，

當 $n=5$ 時，$\ell_5=-2+a_4^{(2)}=32$，滿足 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$：

$$\left(a_5^{(2)}\right)^2-\ell_5=a_3^{(2)}\times a_7^{(2)}\Leftrightarrow 82^2-32=14\times478\text{。}$$

注意當 c_1 為負整數時，數列亦滿足 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$。

例如：當 $t=2$ 時，數列 $\left\{a_n^{(2)}\right\}$：$a_n^{(2)}=-a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)}$ 為 $2,-1,3,-4,7,-11,\cdots$，

當 $n=3$ 時，$\ell_3=-2+a_4^{(2)}=5$，滿足 $\left(a_3^{(2)}\right)^2-\ell_3=a_1^{(2)}\times a_5^{(2)}\Leftrightarrow(-4)^2-5=(-1)\times(-11)$。

(iii)當 $c_2=1$ 且 n 為偶數時，$\ell_n=\begin{cases}2+a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為奇數}\\2-a_{2t}^{(2)},\text{其中 } t \text{ 為偶數}\end{cases}$。

例如：當$t=2$時，數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$：$a_n^{(2)}=2a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)}$為$2,2,6,14,34,82,198,478,1154,2786,\cdots$，

當$n=6$時，$\ell_6=2-a_4^{(2)}=-32$，滿足$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$：

$$\left(a_6^{(2)}\right)^2-\ell_6=a_4^{(2)}\times a_8^{(2)}\Leftrightarrow 198^2-(-32)=34\times1154\text{。}$$

(iv)當$c_2=-1$時，$\ell=2(-c_2)^n-\left(-c_2\right)^{n-t}a_{2t}^{(2)}=2-a_{2t}^{(2)}$。

例如：當$t=2$時，數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$：$a_n^{(2)}=3a_{n-1}^{(2)}-a_{n-2}^{(2)}$為$2,3,7,18,47,123,322,843,2207,5778,\cdots$，

當$n=5$時，$\ell=2-a_4^{(2)}=-45$，滿足$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$：

$$\left(a_5^{(2)}\right)^2-\ell=a_3^{(2)}\times a_7^{(2)}\Leftrightarrow 123^2-(-45)=18\times843\text{。}$$

當$n=6$時，$\ell=2-a_4^{(2)}=-45$，滿足$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$：

$$\left(a_6^{(2)}\right)^2-\ell=a_4^{(2)}\times a_8^{(2)}\Leftrightarrow 322^2-(-45)=47\times2207\text{。}$$

注意當c_1為負整數時，數列亦滿足(2)式。

例如：當$c_2=-1,t=2$且$n=3$時，$\left\{a_n^{(2)}\right\}$：$a_n^{(2)}=-a_{n-1}^{(2)}-a_{n-2}^{(2)}$為$2,-1,-1,2,-1,-1,\cdots$，

$\ell=2-a_4^{(2)}=3$，滿足$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$：

$$\left(a_3^{(2)}\right)^2-\ell=a_1^{(2)}\times a_5^{(2)}\Leftrightarrow 2^2-3=(-1)\times(-1)\text{。}$$ ■

(三)特徵二重實根的2階線性遞迴數列滿足(2)式之解

接著我們探討(2)式的問題之解為2階線性遞迴數列：$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$的特徵二重實根之情形，由**預備定理 2**知數列的一般解為$a_n^{(2)}=\left(1+n\right)\alpha^n$。

【性質 1】(二階線性遞迴數列中的二階 Cassini 恆等式延伸性質，參考文獻資料[5][6])

設α為二階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$的特徵二重實根，其中數列的一般解為$a_n^{(2)}=\left(1+n\right)\alpha^n$，則對於任意正整數$n$，$\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)}\\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=t^2\alpha^{2n}$，其中$1\le t\le n$。

【證明】由行列式性質知

$$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (1+n)\alpha^n & (1+n+t)\alpha^{n+t} \\ (1+n-t)\alpha^{n-t} & (1+n)\alpha^n \end{vmatrix}=\alpha^{2n}\cdot t^2=t^2\alpha^{2n}$$

因此，對於任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}=t^2\alpha^{2n}$。 ■

【定理 4】(特徵二重實根的2**階線性遞迴數列滿足(2)式之解)**

設$\{a_n^{(2)}\}$為2階線性遞迴數列，若數列滿足(2)式且α為數列的特徵方程式$x^2-c_1x-c_2=0$之二重實根，則(i)$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}=t^2\alpha^{2n}=(-c_2)^n t^2$。(ii)當$c_2=-1$時，$\ell=t^2$。

【證明】(i)由**性質 1**式知$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}=t^2\alpha^{2n}$。又由**根與根係數關係**知$\alpha^2=-c_2$，所以

$$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}=t^2\alpha^{2n}=t^2(-c_2)^n=(-c_2)^n t^2 \text{。}$$

例如：當$t=2$時，數列$\{a_n^{(2)}\}$：$a_n^{(2)}=2a_{n-1}^{(2)}-a_{n-2}^{(2)}$為

$$a_0^{(2)}=1,a_1^{(2)}=2,a_2^{(2)}=3,a_3^{(2)}=4,a_4^{(2)}=5,a_5^{(2)}=6 \text{，}$$

當$n=3,t=2$時，$\ell_3=-4c_2^n=-4(-1)^3=4$，滿足$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$：

$$\left(a_3^{(2)}\right)^2-\ell_3=a_1^{(2)}\times a_5^{(2)} \Leftrightarrow 4^2-4=2\times 6 \text{。}$$

(ii)由於$\alpha^2=-c_2>0$，所以$c_2<0$。當$c_2=-1$時，$\ell=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}=(1)^n t^2=t^2$。 ■

(四)2**階線性遞迴數列滿足(2)式中**$t=1$**之解**

【性質 2】(**二階線性遞迴數列中的二階 Cassini 恆等式**，參考文獻資料[5][6])

設$\{a_n^{(2)}\}$為二階線性遞迴數列，若$a_0^{(2)}=2,a_1^{(2)}=c_1,a_2^{(2)}=c_1^2+2c_2$，則對於任意正整數$n$，

$$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)} \\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-1)^n c_2^{n-1}(c_1^2+4c_2) \text{。}$$

【證明】(3)式中由**行列式性質**知

$$\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}-c_1a_n^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}-c_1a_{n-1}^{(2)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & c_2a_{n-1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & c_2a_{n-2}^{(2)}\end{vmatrix}=-c_2\begin{vmatrix}a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\\ a_{n-2}^{(2)} & a_{n-1}^{(2)}\end{vmatrix}$$

由迭代過程可得 $\ell_n=-c_2\begin{vmatrix}a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\\ a_{n-2}^{(2)} & a_{n-1}^{(2)}\end{vmatrix}=\cdots=(-c_2)^{n-1}\begin{vmatrix}a_1^{(2)} & a_2^{(2)}\\ a_0^{(2)} & a_1^{(2)}\end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}\begin{vmatrix}c_1 & c_1^2+2c_2\\ 2 & c_1\end{vmatrix}$

$$=(-c_2)^{n-1}(-c_1^2-4c_2)=(-1)^n c_2^{n-1}(c_1^2+4c_2)\text{ 。}$$

因此，對於任意正整數 n，$\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=(-1)^n c_2^{n-1}(c_1^2+4c_2)$ 。 ■

【定理 5】(2 階線性遞迴數列滿足(2)式中 $t=1$ 之解)

設 $\{a_n^{(2)}\}$ 為 2 階線性遞迴數列，若數列滿足(2)式且 α_1,α_2 為數列的特徵方程式 $x^2-c_1x-c_2=0$ 之兩根，則(i) $\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=(-1)^n c_2^{n-1}(c_1^2+4c_2)$ 。(ii)當 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 時，$\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=\alpha^{2n}=(-1)^n c_2^n$ 。(iii)當 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 且 $c_2=-1$ 時，$\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=1$ 且 $c_1=\pm2$ 。

【證明】(i)由**性質 2**式知 $\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=(-1)^n c_2^{n-1}(c_1^2+4c_2)$ 。

(ii)當 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 時，由**性質 1**知 $\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=\alpha^{2n}=(-1)^n c_2^n$ 。

例如：數列 $\{a_n^{(2)}\}$ ： $a_n^{(2)}=2a_{n-1}^{(2)}-a_{n-2}^{(2)}$ 為 $a_0^{(2)}=1,a_1^{(2)}=2,a_2^{(2)}=3,a_3^{(2)}=4,a_4^{(2)}=5,a_5^{(2)}=6$ ，

當 $n=3,t=1$ 時， $\ell_3=\alpha^{2n}=c_2^{2n}=1$ ，滿足 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=a_{n-1}^{(2)}\times a_{n+1}^{(2)}$ ：

$$\left(a_3^{(2)}\right)^2-\ell_3=a_2^{(2)}\times a_4^{(2)}\Leftrightarrow 4^2-1=3\times5\text{ 。}$$

(iii)當 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 且 $c_2=-1$ 時， $\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\ a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=\alpha^{2n}=(-1)^n c_2^n=(-1)^{2n}=1$ 。

因為 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ ，所以 $c_1=\pm2$ 。

例如： $\{a_n^{(2)}\}$ ： $a_n^{(2)}=-2a_{n-1}^{(2)}-a_{n-2}^{(2)}$ 為 $a_0^{(2)}=1,a_1^{(2)}=-2,a_2^{(2)}=3,a_3^{(2)}=-4,a_4^{(2)}=5,a_5^{(2)}=-6$ ，

$n=3,t=1$時，$\ell=1$，滿足$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-1}^{(2)}\times a_{n+1}^{(2)}$：

$$\left(a_3^{(2)}\right)^2-\ell=a_2^{(2)}\times a_4^{(2)}\Leftrightarrow(-4)^2-1=3\times 5\text{。}\qquad\blacksquare$$

三、探討3階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(3)}\right\}$

進一步利用3階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(3)}\right\}$：$a_n^{(3)}=c_1a_{n-1}^{(3)}+c_2a_{n-2}^{(3)}+c_3a_{n-3}^{(3)}$的一般化情形來探討(3)式的問題之解，而3階線性遞迴數列的特徵實根分為相異三實根、三重實根、二重實根及一組共軛複根等四種情形來探討。

(一)特徵相異實根或一組共軛複根的3階線性遞迴數列滿足(3)式之解

接著我們探討(3)式的問題之解為3階線性遞迴數列：$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+c_3a_{n-3}$的相異特徵實根或一實根一共軛複根之情形，設$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$為3階線性遞迴數列的特徵方程式$x^3-c_1x^2-c_2x-c_3=0$之三相異實根(或一實根一組共軛複根)，而為了減少繁瑣論證過程，取數列的一般解為$a_n^{(3)}=\alpha_1^n+\alpha_2^n+\alpha_3^n$，參見**預備定理 2**，由**根與根之間係數關係**知$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=c_3$。

(3)式為$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(3)}\times a_{n+t}^{(3)}$：

因為$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_n=(\alpha_1^n+\alpha_2^n+\alpha_3^n)^2-\ell_n=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{2n}+2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\ell_n$

又$a_{n-t}^{(3)}\times a_{n+t}^{(3)}=(\alpha_1^{n-t}+\alpha_2^{n-t}+\alpha_3^{n-t})(\alpha_1^{n+t}+\alpha_2^{n+t}+\alpha_3^{n+t})=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{2n}+\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$

由$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(3)}\times a_{n+t}^{(3)}$，所以

$$\cancel{\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{2n}}+2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\ell_n=\cancel{\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{2n}}+\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$$

即$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$ (9)

【定理 6】(特徵相異實根或一共軛複根的3階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

設$\left\{a_n^{(3)}\right\}$為3階線性遞迴數列，其中$m\in N\cup\{0\}$，若$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(3)}\times a_{n+t}^{(3)}$且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$為數列的特徵方程式$x^3-c_1x^2-c_2x-c_3=0$之兩相異實根(或一共軛複根)，則

(i) $\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$。

(ii)當 $t=1$ 時，$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$。

【證明】(i)參見(9)式，故 $\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$。

(ii)若(9)式要簡化，不妨考慮 $t=1$ 的情形，即

$$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]。\tag{10}$$

例如：數列 $\left\{a_n^{(3)}\right\}$：$a_n^{(3)}=2a_{n-1}^{(3)}+a_{n-2}^{(3)}-2a_{n-3}^{(3)}$ 為 $3,2,6,8,18,32,66,128,258,512,1026,\cdots$，

當 $n=2$ 時，代入(10)式得 $\ell_2=2\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^2-\sum_{1\le i<j\le 3}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{2-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]=20$，滿足

$$\left(a_2^{(3)}\right)^2-\ell_2=a_1^{(2)}\times a_3^{(2)}\Leftrightarrow 6^2-20=2\times 8 \text{ 。} \qquad \blacksquare$$

(二)特徵三重實根的3階線性遞迴數列滿足(3)式之解

現在考慮三重實根情形，令 α 為3階線性遞迴數列的特徵方程式 $x^3-c_1x^2-c_2x-c_3=0$ 之三重實根，而為了減少繁瑣論證過程，不失一般性，由**預備定理 2** 知可取其數列的一般解為 $a_n^{(3)}=\left(1+n+n^2\right)\alpha^n$。底下探討(3)式考慮 $\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)}\\ a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)}\end{vmatrix}$，參見**性質 3**。

【性質 3】(**3階線性遞迴數列中的二階 Cassini 恆等式延伸性質**，參考文獻資料[5][6])

設 α 為3階線性遞迴數列 $\left\{a_n^{(3)}\right\}$ 的特徵三重實根，其中數列的一般解為 $a_n^{(3)}=\left(1+n+n^2\right)\alpha^n$，則對於任意正整數 n，$\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)}\\ a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)}\end{vmatrix}=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}$。

【證明】由**行列式性質**知

$$\begin{aligned}\ell_n&=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)}\\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\left(1+n+n^2\right)\alpha^n & \left[1+(n+t)+(n+t)^2\right]\alpha^{n+t}\\ \left[1+(n-t)+(n-t)^2\right]\alpha^{n-t} & \left(1+n+n^2\right)\alpha^n\end{vmatrix}\\&=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}\end{aligned}$$

因此，任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)} \\ a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)} \end{vmatrix}=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}$。 ■

【定理 7】(特徵三重實根的3階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

設$\left\{a_n^{(3)}\right\}$為3階線性遞迴數列，其中$m\in N\cup\{0\}$，若數列滿足(3)式且α為數列的特徵三重實根，

則(i) $\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)} \\ a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)} \end{vmatrix}=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}$，其中$3\alpha^2=-c_2$。

(ii)當$t=1$時，$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(3)} & a_{n+1}^{(3)} \\ a_{n-1}^{(3)} & a_n^{(3)} \end{vmatrix}=\left(2n^2+2n-2\right)\alpha^{2n}$，其中$3\alpha^2=-c_2$。

【證明】(i)由**性質 3**式知$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)} \\ a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)} \end{vmatrix}=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}$，又由**根與根係數關係**知

$\alpha^3=-c_2$，所以$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)} \\ a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)} \end{vmatrix}=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}$，其中$\alpha^3=-c_2$。

(ii)當$t=1$時，由(i)知$\ell_n=\begin{vmatrix} a_n^{(3)} & a_{n+1}^{(3)} \\ a_{n-1}^{(3)} & a_n^{(3)} \end{vmatrix}=\left(2n^2+2n-2\right)\alpha^{2n}$。 (11)

例如：取$\alpha=1$為例，由**預備定理 2**知數列：

$$a_n^{(3)}=3a_{n-1}^{(3)}-3a_{n-2}^{(3)}+a_{n-3}^{(3)}\text{為}1,3,7,13,21,31,43,57,73,91,\cdots\text{。}$$

當$n=6$時，代入(11)式得$\ell_6=2\left(6^2+6-1\right)\cdot1^{12}=82$，滿足$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_n=a_{n-1}^{(3)}\times a_{n+1}^{(3)}$時，

$\left(a_6^{(3)}\right)^2-\ell_6=a_5^{(2)}\times a_7^{(2)}\Leftrightarrow 43^2-82=31\times57$。 ■

(三)特徵二重實根的3階線性遞迴數列滿足(3)式之解

接著探討二重實根的情形，令α_1,α_2為3階線性遞迴數列的特徵方程式

$x^3-c_1x^2-c_2x-c_3=0$之相異兩實根，其中α_1為二重根，而為了減少繁瑣論證過程，由**預備定理 3**知3階線性遞迴數列的一般解為$a_n^{(3)}=\left(1+n\right)\alpha_1^n+\alpha_2^n$。底下探討(3)式為

$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(3)}\times a_{n+t}^{(3)}$：

因為$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_n=\left[\left(1+n\right)\alpha_1^n+\alpha_2^n\right]^2-\ell_n=\left(1+n\right)^2\alpha_1^{2n}+2\left(1+n\right)\alpha_1^n\alpha_2^n+\alpha_2^{2n}-\ell_n$ (12)

又$a_{n-t}^{(3)}\times a_{n+t}^{(3)}=\left[\left(1+n-t\right)\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}\right]\cdot\left[\left(1+n+t\right)\alpha_1^{n+1}+\alpha_2^{n+1}\right]$

$$=\left[\left(1+n\right)\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}-t\alpha_1^{n-1}\right]\cdot\left[\left(1+n\right)\alpha_1^{n+1}+\alpha_2^{n+1}+t\alpha_1^{n+1}\right]$$

$$=\left[(1+n)^2-t^2\right]\alpha_1^{2n}+(1+n)\alpha_1^{n-1}\alpha_2^{n-1}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+t^2\alpha_1^2-t\alpha_2^2)+\alpha_2^{2n} \tag{13}$$

【定理 8】(3階線性遞迴數列且特徵二重實根滿足(3)式的之性質)

設$\left\{a_n^{(3)}\right\}$為3階線性遞迴數列，其中$m\in N\cup\{0\}$，若數列滿足(3)式且α_1為數列的特徵二重實根及另一實根為α_2，則(i)$\ell_n=t^2\alpha_1^{2n}+2\left(1+n\right)\alpha_1^n\alpha_2^n-(1+n)\alpha_1^{n-1}\alpha_2^{n-1}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+t^2\alpha_1^2-t\alpha_2^2)$。

(ii)當$t=1$時，$\ell_n=\alpha_1^{2n}+2\left(1+n\right)\alpha_1^n\alpha_2^n-2(1+n)\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n-1}$。

【證明】(i)由(12)式=(13)式知

$$\ell_n=t^2\alpha_1^{2n}+2\left(1+n\right)\alpha_1^n\alpha_2^n-(1+n)\alpha_1^{n-1}\alpha_2^{n-1}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+t^2\alpha_1^2-t\alpha_2^2)\text{。}$$

(ii)當$t=1$時，由(i)知$\ell_n=\alpha_1^{2n}+2\left(1+n\right)\alpha_1^n\alpha_2^n-2(1+n)\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n-1}$。 (14)

例如：取$\alpha_1=1,\alpha_2=-1$為例，由**預備定理 2** 知數列：$a_n^{(3)}=a_{n-1}^{(3)}+a_{n-2}^{(3)}-a_{n-3}^{(3)}$為

$$2,1,4,3,6,5,8,7,10,9,12,\cdots\text{。}$$

當$n=6$時，代入(14)式得$\ell_6=29$，滿足$\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell_6=a_{n-1}^{(3)}\times a_{n+1}^{(3)}$時，

$\left(a_6^{(3)}\right)^2-\ell_6=a_5^{(2)}\times a_7^{(2)}\Leftrightarrow 8^2-29=5\times 7$。 ■

四、探討k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$

進一步利用k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$：$a_n^{(k)}=c_1a_{n-1}^{(k)}+c_2a_{n-2}^{(k)}+\cdots+c_ka_{n-k}^{(k)}$的一般化情形來探討(3)式的問題之解。將$k$階線性遞迴數列的特徵實根分為$k$個相異實根、$p$個相異實根$\frac{k-p}{2}$組共軛複根($p=1,2,\cdots,k$)、$k-m$個相異實根及$m$重根($m=2,\cdots,k$)等三種情形來探討。

(一)特徵相異k實根或相異p實根及$\frac{k-p}{2}$組共軛複根的k階線性遞迴數列滿足(3)式之解

設$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$為$k$階線性遞迴數列的特徵方程式$x^k-c_1x^3-c_2x^2-\cdots-c_{k-1}x-c_k=0$之$k$相異實根(或$p$個相異實根$\frac{k-p}{2}$組共軛複根)，而為了減少繁瑣論證過程，取數列的一般解為

$a_n^{(k)}=\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_k^n$，參見**預備定理 2**。

底下探討(3)式為$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=a_{n-1}^{(k)}\times a_{n+1}^{(k)}$：

因為$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=(\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_k^n)^2-\ell_n=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{2n}+2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\ell_n$

又$a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}=(\alpha_1^{n-t}+\alpha_2^{n-t}+\cdots+\alpha_k^{n-t})(\alpha_1^{n+t}+\alpha_2^{n+t}+\cdots+\alpha_k^{n+t})$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{2n}+\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$$

由$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=a_{n-1}^{(k)}\times a_{n+1}^{(k)}$，所以

$$\cancel{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{2n}}+2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\ell_n=\cancel{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{2n}}+\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$$

即$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$

(15)

【定理 9】(相異k實根或相異p實根及$\frac{k-p}{2}$組共軛複根的k階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

設$\left\{a_n^{(k)}\right\}$為k階線性遞迴數列，若數列滿足(4)式且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$為數列的特徵方程式

$x^k-c_1x^3-c_2x^2-\cdots-c_{k-1}x-c_k=0$之相異$k$實根或相異$p$實根及$\frac{k-p}{2}$組共軛複根，則

(i)$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$。

(ii)當$t=1$時，$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$。

【證明】(i)參見(15)式，故$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$。

(ii)當$t=1$時，由(i)知$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$。 (16)

例如：考慮 4 階線性遞迴數列中取四個特徵相異實根為$\alpha_1=3,\alpha_2=2,\alpha_3=1,\alpha_4=-1$為

例。

數列$\left\{a_n^{(4)}\right\}$：$a_n^{(4)}=5a_{n-1}^{(4)}-5a_{n-2}^{(4)}-5a_{n-3}^{(4)}+6a_{n-4}^{(4)}$為$3,5,15,35,93,245,675,1895,\cdots$，

當$n=2$時，代入(16)式得$\ell=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]=50$，滿足

$$\left(a_2^{(4)}\right)^2-\ell_2=a_1^{(4)}\times a_3^{(4)}\Leftrightarrow 15^2-50=5\times 35\text{。}\qquad\blacksquare$$

(二)特徵k重實根的k階線性遞迴數列滿足(3)式之解

接著探討特徵k重根的情形，令α為k階線性遞迴數列的特徵方程式 $x^k-c_1x^3-c_2x^2-\cdots-c_{k-1}x-c_k=0$之$k$重實根，而為了減少繁瑣論證過程，由**預備定理 2**知可取其數列的一般解為$a_n^{(k)}=\left(1+n+n^2+\cdots+n^{k-1}\right)\alpha^n$。底下探討(3)式的問題為 $\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}$：

因為$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=\left[\left(1+n+\cdots+n^{k-1}\right)\alpha^n\right]^2-\ell_n=\left(1+n+\cdots+n^{k-1}\right)^2\alpha^{2n}-\ell_n$

令$f_k^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{k-1}\right)^2$，則$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=f_k^{(k)}(n)\alpha^{2n}-\ell_n$。 (17)

又$a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}=f_k^{(k)}(n-t)\alpha^{n-t}\cdot f_k^{(k)}(n+t)\alpha^{n+t}=f_k^{(k)}(n-t)\cdot f_k^{(k)}(n+t)\cdot\alpha^{2n}$。 (18)

【定理 10】(特徵k重實根的k階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

設$\left\{a_n^{(k)}\right\}$為k階線性遞迴數列，若數列滿足(3)式且α為數列的特徵k重實根，若 $f_k^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{k-1}\right)^2$，則(i)$\ell_n=\left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-t)f_k^{(k)}(n+t)\right]\alpha^{2n}$，其中$\alpha^k=-c_2$。

(ii)當$t=1$時，$\ell_n=\left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-1)f_k^{(k)}(n+1)\right]\alpha^{2n}$，其中$\alpha^k=-c_2$。

【證明】(i)由**根與根係數關係**知$\alpha^k=-c_2$。由(17)式=(18)式知

$f_k^{(k)}(n)\alpha^{2n}-\ell_n=f_k^{(k)}(n-t)\cdot f_k^{(k)}(n+t)\cdot\alpha^{2n}$，移項化簡

$$\ell_n=\left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-t)f_k^{(k)}(n+t)\right]\alpha^{2n}\text{。}$$

(ii)當$t=1$時，由(i)知$\ell_n=\left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-1)f_k^{(k)}(n+1)\right]\alpha^{2n}$。 (19)

當 $k=4$ 時，$\ell_n=\left[f_4^{(4)}(n)-f_4^{(4)}(n-1)f_4^{(4)}(n+1)\right]\alpha^{2n}=\left(3n^4+4n^3-n^2-6n+1\right)\alpha^{2n}$ 。

當 $k=5$ 時，

$$\ell_n=\left[f_5^{(5)}(n)-f_5^{(5)}(n-1)f_5^{(5)}(n+1)\right]\alpha^{2n}=\left(4n^6+6n^5-n^4-6n^3-7n^2+2n-4\right)\alpha^{2n}\text{ 。}$$

其中由根與根係數知 $k\alpha^2=-c_2$ 。

例如：取 $\alpha=1$ 為例，則 4 階線性遞迴數列特徵方程式為 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ 及由**預備定理 2**知數列： $a_n^{(4)}=4a_{n-1}^{(4)}-6a_{n-2}^{(4)}+4a_{n-3}^{(4)}-a_{n-4}^{(4)}$ 為 $1,4,15,40,85,156,\cdots$ 。

當 $n=4$ 時，代入(19)式得 $\ell_4=\left(3\cdot4^4+4\cdot4^3-4^2-6\cdot4+1\right)\cdot1^{2n}=985$ ，滿足

$\left(a_n^{(4)}\right)^2-\ell_n=a_{n-1}^{(4)}\times a_{n+1}^{(4)}$ 時，$\left(a_4^{(4)}\right)^2-\ell_4=a_3^{(4)}\times a_5^{(4)}\Leftrightarrow85^2-985=40\times156$。 ■

(三)特徵 $k-m$ 個相異實根及 m 重根的 k 階線性遞迴數列滿足(3)式之解

接著探討特徵 $k-m$ 個相異實根及 m 重根的情形，其中 $m\,(2\le m<k)$ 重實根。令 α_1 為 k 階線性遞迴數列的特徵方程式 $x^k-c_1x^3-c_2x^2-\cdots-c_{k-1}x-c_k=0$ 之 m 重實根，其餘的實根分別為 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{k-m+1}$ ，而為了減少繁瑣論證過程，由**預備定理 3** 知可取其數列的一般解為

$$a_n^{(k)}=\left(1+n+\cdots+n^{m-1}\right)\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_{k-m+1}^n=\left(\sum_{i=0}^{m-1}n^i\right)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n\text{ 。}$$

底下探討(3)式為 $\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}$ ：

因為 $\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=\left[\left(\sum_{i=0}^{m-1}n^i\right)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n\right]^2-\ell_n$

令 $f_m^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{m-1}\right)^2$ ，則 $\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n-\ell_n$ 。 (20)

又 $a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}=\left(f_m^{(k)}(n-t)\alpha_1^{n-t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\cdot\left(f_m^{(k)}(n+t)\alpha_1^{n+t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n+1}\right)$ (21)

【定理 11】(特徵 $k-m$ 個相異實根及 m 重根的 k 階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

設 $\left\{a_n^{(k)}\right\}$ 為 k 階線性遞迴數列，若數列滿足(3)式且 α_1 為數列的特徵 m 重實根 $(2\le m<k)$ ，其餘的實根分別為 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{k-m+1}$ ，若 $f_m^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{m-1}\right)^2$ ，則

(i) $\ell_n=f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n-\left(f_m^{(k)}(n-t)\alpha_1^{n-t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\left(f_m^{(k)}(n+t)\alpha_1^{n+t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n+1}\right)$ 。

(ii)當$t=1$時，$\ell_n = f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n - \left(f_m^{(k)}(n-1)\alpha_1^{n-1} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\left(f_m^{(k)}(n+1)\alpha_1^{n+1} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_i^{n+1}\right)$。

【證明】(i)由(20)式=(21)式知

$$f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n - \ell_n = \left(f_m^{(k)}(n-t)\alpha_1^{n-t} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\cdot\left(f_m^{(k)}(n+t)\alpha_1^{n+t} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n+1}\right)$$，移項化簡

$$\ell_n = f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n - \left(f_m^{(k)}(n-t)\alpha_1^{n-t} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\cdot\left(f_m^{(k)}(n+t)\alpha_1^{n+t} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n+1}\right)。$$

(ii)當$t=1$時，由(i)知

$$\ell_n = f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n - \left(f_m^{(k)}(n-1)\alpha_1^{n-1} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\cdot\left(f_m^{(k)}(n+1)\alpha_1^{n+1} + \sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_i^{n+1}\right)。 \quad (22)$$

例如1：取$\alpha_1=1, \alpha_2=-1, m=3$為例，則4階線性遞迴數列特徵方程式為

$x^4-2x^3+2x-1=0$

及由**預備定理 2**知數列：$a_n^{(4)}=2a_{n-1}^{(4)}-2a_{n-3}^{(4)}+a_{n-4}^{(4)}$為$2,4,8,14,22,27,\cdots$。

當$n=3$時，代入(20)式得$\ell_3=20$，滿足

$\left(a_n^{(4)}\right)^2-\ell_n=a_{n-1}^{(4)}\times a_{n+1}^{(4)}$時，$\left(a_3^{(4)}\right)^2-\ell_3=a_2^{(4)}\times a_4^{(4)} \Leftrightarrow 14^2-20=8\times 22$。

例如2：取$\alpha_1=1, \alpha_2=-1, \alpha_3=-2, m=2$為例，則4階線性遞迴數列特徵方程式為

$x^4+x^3-3x^2-x+2=0$及由**預備定理 2**知數列：

$$a_n^{(4)}=-a_{n-1}^{(4)}+3a_{n-2}^{(4)}+a_{n-3}^{(4)}-2a_{n-4}^{(4)}\text{為}3,-1,8,-5,22,-27,\cdots。$$

當$n=3$時，代入(22)式得$\ell_3=-151$，滿足

$\left(a_n^{(4)}\right)^2-\ell_n=a_{n-1}^{(4)}\times a_{n+1}^{(4)}$時，$\left(a_3^{(4)}\right)^2-\ell_3=a_2^{(4)}\times a_4^{(4)} \Leftrightarrow (-5)^2-(-151)=8\times 22$。 ■

五、探討k階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$

我們注意到k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$滿足(3)式之解，其中ℓ值在計算上是複雜的，於是建構新數列使得ℓ值在計算上是清晰可見的，這數列是k階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$，參見**定義 2**。同時推廣至k階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$時，數列的初始條件為$b_1=1, b_i=0,$ 其中$i=0,-1,-2,\cdots,-(k-2)$。美妙地(4)式之解即k**階 Cassini 恆等式**。

(一)費氏數列

【性質 4】(**費氏數列中的二階 Cassini 恆等式**，參考文獻資料[5][6])

設$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為二階線性遞迴數列，則對於任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$。

【證明】由行列式性質知

$$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)}-b_n^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)}-b_{n-1}^{(2)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_{n-2}^{(2)} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \\ b_{n-2}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \end{vmatrix}$$

由迭代過程可得$\ell_n=-\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \\ b_{n-2}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \end{vmatrix}=\cdots=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} b_1^{(2)} & b_2^{(2)} \\ b_0^{(2)} & b_1^{(2)} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$。

因此，對於任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$。 ■

【定理 12】(費氏數列滿足(4)式的解)

設$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為費氏數列，(i)若$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為費氏數列中的偶數項之數列，則$\ell=-1$。(ii)若$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為費氏數列中的奇數項之數列，則$\ell=1$。

【證明】由性質 4 知$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$。

(i)若$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為費氏數列中的偶數項之數列，則$\ell=(-1)^{n-1}=-1$。

例如：費氏數列$\left\{b_n^{(2)}\right\}:b_0^{(2)}=0,b_1^{(2)}=1,b_2^{(2)}=1,b_3^{(2)}=2,b_4^{(2)}=3,b_5^{(2)}=5,b_6^{(2)}=8,\cdots$。

當$n=4$時，滿足$\left(b_n^{(2)}\right)^2-\ell=b_{n-1}^{(2)}\times b_{n+1}^{(2)}$時，$\left(b_4^{(2)}\right)^2-\ell=b_3^{(2)}\times b_5^{(2)}\Leftrightarrow 3^2-(-1)=2\times 5$。

(ii)若$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為費氏數列中的奇數項之數列，則$\ell=(-1)^{n-1}=1$。

當$n=5$時，滿足$\left(b_n^{(2)}\right)^2-\ell=b_{n-1}^{(2)}\times b_{n+1}^{(2)}$時，$\left(b_5^{(2)}\right)^2-\ell=b_4^{(2)}\times b_6^{(2)}\Leftrightarrow 5^2-1=3\times 8$。 ■

(二) 2 階線性遞迴數列

【性質 5】(二階 Cassini 恆等式，參考文獻資料[5][6])

設$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為二階線性遞迴數列，則對於任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}$。

【證明】改寫成行列式形式來證明。

$$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)}-c_1b_n^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)}-c_1b_{n-1}^{(2)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & c_2b_{n-1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & c_2b_{n-2}^{(2)} \end{vmatrix}=-c_2\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \\ b_{n-2}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \end{vmatrix}$$

由迭代過程可得

$$\begin{aligned}\left(b_n^{(2)}\right)^2-b_{n-1}^{(2)}b_{n+1}^{(2)}&=-c_2\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \\ b_{n-2}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^2\begin{vmatrix} b_{n-2}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \\ b_{n-3}^{(2)} & b_{n-2}^{(2)} \end{vmatrix}\\ &=\cdots=(-c_2)^{n-1}\begin{vmatrix} b_1^{(2)} & b_2^{(2)} \\ b_0^{(2)} & b_1^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}\end{aligned}$$

因此，對於任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}$。 ■

【定理 13】(2 階線性遞迴數列滿足(4)式的解)

設$\{b_n^{(2)}\}$為 2 階線性遞迴數列，則(i) $\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}$。(ii)若$\{b_n^{(2)}\}$為其數列中的偶數項之數列，則$\ell_n=-c_2^{n-1}$。(iii)若$\{b_n^{(2)}\}$為費氏數列中的奇數項之數列，則$\ell_n=c_2^{n-1}$。

【證明】(i)由**性質 5** 知$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}$。

(ii)若$\{b_n^{(2)}\}$為 2 階線性遞迴數列中的偶數項之數列，則$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}=-c_2^{n-1}$。

例如：當$c_1=2,c_2=3$時，數列

$$\{b_n^{(2)}\}:b_0^{(2)}=0,b_1^{(2)}=1,b_2^{(2)}=2,b_3^{(2)}=7,b_4^{(2)}=20,b_5^{(2)}=61,b_6^{(2)}=182,b_7^{(2)}=547,\cdots$$

當$n=6$時，$\ell_6=-3^5=-243$，滿足$\left(b_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=b_{n-1}^{(2)}\times b_{n+1}^{(2)}$時，

$$\left(b_6^{(2)}\right)^2-\ell_6=b_5^{(2)}\times b_7^{(2)}\Leftrightarrow 182^2-(-243)=61\times547$$

(ii)若$\{b_n^{(2)}\}$為 2 階線性遞迴數列中的奇數項之數列，則$\ell_n=c_2^{n-1}$。

當$n=5$時，$\ell_5=3^4=81$滿足$\left(b_n^{(2)}\right)^2-\ell_n=b_{n-1}^{(2)}\times b_{n+1}^{(2)}$時，

$$\left(b_5^{(2)}\right)^2-\ell_5=b_4^{(2)}\times b_6^{(2)}\Leftrightarrow 61^2-81=20\times182$$ ■

(三)3階線性遞迴數列

【性質 6】(3階 **Cassini** 恆等式，參考文獻資料[5][6])

設$\left\{b_n^{(3)}\right\}$為三階線性遞迴數列，則對於任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n+1}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^{n-2}$。

【證明】因為$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n+1}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n+1}^{(3)}-c_1b_n^{(3)}-c_2b_{n-1}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)}-c_1b_{n-1}^{(3)}-c_2b_{n-2}^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)}-c_1b_{n-2}^{(3)}-c_2b_{n-3}^{(3)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & c_3b_{n-2}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & c_3b_{n-3}^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & c_3b_{n-4}^{(3)} \end{vmatrix}$

$$=c_3\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-4}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3\begin{vmatrix} b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \\ b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^2\begin{vmatrix} b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \\ b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} \\ b_{n-5}^{(3)} & b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} \end{vmatrix}$$

由迭代過程可得

$$\ell_n=c_3^2\begin{vmatrix} b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \\ b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} \\ b_{n-5}^{(3)} & b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} \end{vmatrix}=\cdots=c_3^{n-2}\begin{vmatrix} b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} \\ b_0^{(3)} & b_1^{(3)} & b_2^{(3)} \\ b_{-1}^{(3)} & b_0^{(3)} & b_1^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=c_3^{n-2}\cdot 1=c_3^{n-2}$$

因此，對於任意正整數n，$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n+1}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^{n-2}$。 ■

【定理 14】(3**階線性遞迴數列滿足(4)式的解**)

設$\left\{b_n^{(3)}\right\}$為3階線性遞迴數列，則

(i) $\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n+1}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^{n-2}$。(ii)當$c_3=1$時，$\ell=1$。(iii)當$c_3=-1$時，$\ell_n=(-1)^{n-2}$。

【證明】(i)由**性質 6** 知$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n+1}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^{n-2}$。

例如：當$c_1=2,c_2=1,c_3=3$時，數列

$$\left\{b_n^{(3)}\right\}:b_0^{(3)}=0,b_1^{(3)}=1,b_2^{(3)}=2,b_3^{(3)}=5,b_4^{(3)}=15,b_5^{(3)}=41,b_6^{(3)}=112,b_7^{(3)}=310,\cdots$$ 。

當 $n=5$ 時，$\ell_5=3^3=27$，$\ell_5=\begin{vmatrix} b_4^{(3)} & b_5^{(3)} & b_6^{(3)} \\ b_3^{(3)} & b_4^{(3)} & b_5^{(3)} \\ b_2^{(3)} & b_3^{(3)} & b_4^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^3 \Leftrightarrow \ell_5=\begin{vmatrix} 15 & 41 & 112 \\ 5 & 15 & 41 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}=27$。

當 $n=6$ 時，$\ell_6=3^4=81$，$\ell_6=\begin{vmatrix} b_5^{(3)} & b_6^{(3)} & b_7^{(3)} \\ b_4^{(3)} & b_5^{(3)} & b_6^{(3)} \\ b_3^{(3)} & b_4^{(3)} & b_5^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^4 \Leftrightarrow \ell_6=\begin{vmatrix} 41 & 112 & 310 \\ 15 & 41 & 112 \\ 5 & 15 & 41 \end{vmatrix}=81$。

(ii)由(i)知 $\ell=c_3^{n-2}=1^{n-2}=1$。(iii)當 $c_3=-1$ 時，$\ell_n=c_3^{n-2}=(-1)^{n-2}$。 ■

(四) k 階線性遞迴數列

【性質 7】(k 階 Cassini 恆等式)

設 $\left\{b_n^{(k)}\right\}$ 為 k 階線性遞迴數列，則對於任意正整數 n，

$$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix}=\begin{cases} (c_k)^{n-k+1}, \text{其中 } k \text{ 為奇數} \\ (-c_k)^{n-k+1}, \text{其中 } k \text{ 為偶數} \end{cases}$$ 。

【證明】

$$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & c_k b_{n-k+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & c_k b_{n-k}^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & c_k b_{n-k-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & c_k b_{n-2k+2}^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$=c_k\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_{n-k}^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-k-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-2k+2}^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$\ell_n=\begin{cases} c_k\cdot\Delta_1, \text{其中 } k \text{ 為奇數} \\ -c_k\cdot\Delta_1, \text{其中 } k \text{ 為偶數} \end{cases}, \Delta_1=\begin{vmatrix} b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \cdots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ b_{n-k-1}^{(k)} & b_{n-k}^{(k)} & \ddots & b_{n-3}^{(k)} & b_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+2}^{(k)} & b_{n-2k+3}^{(k)} & \cdots & b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

由迭代過程可得

$$\ell_n=\begin{cases} c_k\cdot\Delta_1,\text{其中}k\text{ 為奇數} \\ -c_k\cdot\Delta_1,\text{其中}k\text{ 為偶數}\end{cases},\Delta_1=\begin{vmatrix} b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_{n}^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \cdots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ b_{n-k-1}^{(k)} & b_{n-k}^{(k)} & \ddots & b_{n-3}^{(k)} & b_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+2}^{(k)} & b_{n-2k+3}^{(k)} & \cdots & b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{cases} \left(c_k\right)^{n-k+1}\cdot\Delta_2,\text{其中}k\text{ 為奇數} \\ \left(-c_k\right)^{n-k+1}\cdot\Delta_2,\text{其中}k\text{ 為偶數}\end{cases},\Delta_2=\begin{vmatrix} b_{1}^{(k)} & b_{2}^{(k)} & \cdots & b_{k-1}^{(k)} & b_{k}^{(k)} \\ b_{0}^{(k)} & b_{1}^{(k)} & \cdots & b_{k-2}^{(k)} & b_{k-1}^{(k)} \\ b_{-1}^{(k)} & b_{0}^{(k)} & \ddots & b_{k-3}^{(k)} & b_{k-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{-k+2}^{(k)} & b_{-k+3}^{(k)} & \cdots & b_{0}^{(k)} & b_{1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

由於$b_1=1,b_i=0,$ 其中 $i=0,-1,-2,\cdots,-(k-2)$，所以$\Delta_2=1$，故

$$\ell_n=\begin{cases} \left(c_k\right)^{n-k+1},\text{其中}k\text{ 為奇數} \\ \left(-c_k\right)^{n-k+1},\text{其中}k\text{ 為偶數}\end{cases}$$ 。 ■

【定理 15】(k **階線性遞迴數列滿足(4)式的解)**

設$\left\{b_n^{(k)}\right\}$為k階線性遞迴數列，則(i)$\ell_n=(-1)^{k+1}c_k^{n-k+1}$。(ii)當$k$為奇數且$c_k=1$時，$\ell=1$。(iii)當$k$為偶數且$c_k=1$時，$\ell=-1$。(iv)當$c_k=-1$時，$\ell_n=(-1)^{n+2}$。

【證明】(i)由**性質 7** 知$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_{n}^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_{n}^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix}=(-1)^{k+1}c_k^{n-k+1}$ 。

(ii)當k為奇數且$c_k=1$時，$\ell=(-1)^{k+1}c_k^{n-k+1}=1$。(iii)當$k$為偶數且$c_k=1$時，$\ell=(-1)^{k+1}c_k^{n-k+1}=-1$。(iv)當$c_k=-1$時，$\ell_n=(-1)^{k+1}c_k^{n-k+1}=(-1)^{n+2}$。 ■

六、探討k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$間性質

(一) 2 階線性遞迴數列

接著探討兩個 2 階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$間是否有恆等式呢？若特徵相異實根時，數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$的一般式為$a_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^n$，而數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$的一般式為$b_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}d_i\alpha_i^n$，其中$d_i$ $(1\le i\le k)$為常數。由於數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$中有d_i，所以先求d_i，鎖定數列$\left\{b_n^{(2)}\right\}$討論起，參見**性質 8**。我們要討

論二個恆等式，其中第一個恆等式為$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=\lambda_1 b_n^{(2)}$，且$\lambda_1\in R$，當考慮數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$的特徵相等實根時，由**預備定理 2**知$a_n^{(2)}=\left(1+n\right)\alpha^n$，所以

$$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=(1+n-1)\alpha^{n-1}+(1+n+1)\alpha^{n+1}=n\alpha^{n-1}+(n+2)\alpha^{n+1}$$

若要滿足第一個恆等式，係數要相等，即$n=n+2$，顯然不合，故底下僅討論數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$為兩相異實根或有共軛複根的情形，令特徵複數根為α_1,α_2，參見**定理 16-18**。

【性質 8】(2**階線性遞迴數列**$\left\{b_n^{(2)}\right\}$**的一般式性質**)

設α_1,α_2為2階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(2)}\right\}$的特徵方程式之兩相異實根或共軛複根，則

$$b_n^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}\left(\alpha_1^n-\alpha_2^n\right)\text{。}$$

【證明】因為2階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$的特徵方程式為$x^2-c_1x-c_2=0$，而特徵複數根為

α_1,α_2，不失一般性，令$|\alpha_1|\geq|\alpha_2|$，所以$\alpha_1+\alpha_2=c_1$且$\alpha_1\alpha_2=-c_2$，故

$$\alpha_1-\alpha_2=\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2}=\sqrt{c_1^2+4c_2}\text{。}$$

(23)

又由**預備定理 1-2**知$b_0^{(2)}=d_1\alpha_1^0+d_2\alpha_2^0=d_1+d_2=0, b_1^{(2)}=d_1\alpha_1^1+d_2\alpha_2^1=1$知

$d_1=-d_2$代入 $d_1\alpha_1+d_2\alpha_2=1$推得$\alpha_1-\alpha_2=\dfrac{1}{d_1}=-\dfrac{1}{d_2}=\sqrt{c_1^2+4c_2}$，因此，

$d_1=\dfrac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}, d_2=-\dfrac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}$，並且$b_n^{(2)}=\dfrac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}\left(\alpha_1^n-\alpha_2^n\right)$。 ■

【定理 16】(2**階線性遞迴數列數列**$\left\{a_n^{(2)}\right\}$**與**$\left\{b_n^{(2)}\right\}$**間的恆等式**)

設α_1,α_2為2階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$與$\left\{b_n^{(2)}\right\}$的特徵方程式之兩相異實根或共軛複根，則

(i)當$c_2=1$時，$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=(c_1^2+4c_2)b_n^{(2)}$。(ii)當$c_2=\pm1$時，$\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2=c_1(c_1^2+4c_2)b_{2n}^{(2)}$。

【證明】(i)因為$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=\left(\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}\right)+\left(\alpha_1^{n+1}+\alpha_2^{n+1}\right)=\alpha_1^n\left(\alpha_1^{-1}+\alpha_1\right)+\alpha_2^n\left(\alpha_2^{-1}+\alpha_2\right)$

我們要證明$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=\lambda_1 b_n^{(2)}$，其中$\lambda_1\in R$，所以$\alpha_1^{-1}+\alpha_1=\alpha_2^{-1}+\alpha_2$，得

$\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_1\alpha_2^2$。又$\alpha_1+\alpha_2=c_1,\alpha_1\alpha_2=-c_2$，所以$\alpha_2-c_2\alpha_1=\alpha_1-c_2\alpha_2$，故$c_2=1$。

令$c_2=1$，則$\alpha_1\alpha_2=-1$，即$\alpha_1^{-1}=-\alpha_2,\alpha_2^{-1}=-\alpha_1$。故

$$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=\alpha_1^n\left(\alpha_1^{-1}+\alpha_1\right)+\alpha_2^n\left(\alpha_2^{-1}+\alpha_2\right)=\alpha_1^n\left(-\alpha_2+\alpha_1\right)-\alpha_2^n\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\text{。}$$

由**性質 8** 中(23)式知$\alpha_1-\alpha_2=\sqrt{c_1^2+4c_2}$，因此，

$$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=\sqrt{c_1^2+4c_2}\left(\alpha_1^n-\alpha_2^n\right)=\left(c_1^2+4c_2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}\left(\alpha_1^n-\alpha_2^n\right)\right]=\left(c_1^2+4c_2\right)b_n^{(2)}\text{。}$$

(ii)因為$\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2=\left(\alpha_1^{n+1}+\alpha_2^{n+1}\right)^2-\left(\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}\right)^2$

$$=\left(\alpha_1^{2n+2}-\alpha_1^{2n-2}\right)+\left(\alpha_2^{2n+2}-\alpha_2^{2n-2}\right)+2(\alpha_1\alpha_2)^n(\alpha_1\alpha_2-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1})$$

$$=\left(\alpha_1^{2n+2}-\alpha_1^{2n-2}\right)+\left(\alpha_2^{2n+2}-\alpha_2^{2n-2}\right)+2(\alpha_1\alpha_2)^n\left(\frac{(\alpha_1\alpha_2)^2-1}{\alpha_1\alpha_2}\right)$$

我們要證明$\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2=\lambda_2 b_{2n}^{(2)}$，其中$\lambda_2\in R$，令$(\alpha_1\alpha_2)^2=1$，則$\alpha_1\alpha_2=\pm1$，即$c_2=\pm1$。

故$\alpha_1^{-1}=\pm\alpha_2,\alpha_2^{-1}=\pm\alpha_1$。又$\alpha_1+\alpha_2=c_1$，由**性質 8** 中(23)式知

$$\alpha_1^2-\alpha_1^{-2}=(\alpha_1+\alpha_1^{-1})(\alpha_1-\alpha_1^{-1})=(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)=c_1\sqrt{c_1^2+4c_2}\text{。}$$

同理可知$\alpha_2^2-\alpha_2^{-2}=-c_1\sqrt{c_1^2+4c_2}$。因為

$$\begin{aligned}\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2&=\left(\alpha_1^{2n+2}-\alpha_1^{2n-2}\right)+\left(\alpha_2^{2n+2}-\alpha_2^{2n-2}\right)=\alpha_1^{2n}\left(\alpha_1^2-\alpha_1^{-2}\right)+\alpha_2^{2n}\left(\alpha_2^2-\alpha_2^{-2}\right)\\&=\left(c_1\sqrt{c_1^2+4c_2}\right)\alpha_1^{2n}-\left(c_1\sqrt{c_1^2+4c_2}\right)\alpha_2^{2n}=\left(c_1\sqrt{c_1^2+4c_2}\right)\left(\alpha_1^{2n}-\alpha_2^{2n}\right)\end{aligned}\text{。}$$

由**性質 8** 知$b_{2n}^{(2)}=\dfrac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}\left(\alpha_1^{2n}-\alpha_2^{2n}\right)$，故$\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2=\left(c_1\sqrt{c_1^2+4c_2}\right)\left(\alpha_1^{2n}-\alpha_2^{2n}\right)$。

$$=c_1(c_1^2+4c_2)\left[\frac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}\left(\alpha_1^{2n}-\alpha_2^{2n}\right)\right]=c_1(c_1^2+4c_2)b_{2n}^{(2)}$$

因此，當$c_2=\pm1$時，$\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2=c_1(c_1^2+4c_2)b_{2n}^{(2)}$。 ■

(二) k 階線性遞迴數列

現在要將由**定理 16** 中2階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$與$\left\{b_n^{(2)}\right\}$間的二個恆等式類推至k階線性遞迴數列，即$a_{n-1}^{(k)}+a_{n+1}^{(k)}=\lambda_1 b_n^{(k)}$且$\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2=\lambda_2 b_{2n}^{(k)}$是否存在，其中$\lambda_1,\lambda_2\in R$。同樣地，底下僅討論$k$階線性遞迴數列的特徵複數根為$k$個相異實根或有共軛複根的情形，令特徵複數根為$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，不失一般性，令$|\alpha_1|\geq|\alpha_2|\geq\cdots\geq|\alpha_k|$。底下先探討3階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(3)}\right\}$的情形。

【性質 9】(3**階線性遞迴數列**$\left\{b_n^{(3)}\right\}$**的一般式性質**)

設$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$為3階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(3)}\right\}$的特徵方程式之兩相異實根或有共軛複根，則

$$b_n^{(3)}=\frac{c_1-\alpha_3-\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}\alpha_1^n-\frac{c_1-\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\alpha_2^n+\frac{c_1-\alpha_2-\alpha_1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}\alpha_3^n\text{ 。}$$

【證明】先考慮$k=3$階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$的特徵方程式為$x^3-c_1x^2-c_2x-c_3=0$，設其特徵複數根為$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，所以由**定義 2** 知

$$\begin{cases} b_0^{(3)}=d_1\alpha_1^0+d_2\alpha_2^0+d_3\alpha_3^0=d_1+d_2+d_3=0 \\ b_1^{(3)}=d_1\alpha_1^1+d_2\alpha_2^1+d_3\alpha_3^1=1 \\ b_2^{(3)}=d_1\alpha_1^2+d_2\alpha_2^2+d_3\alpha_3^2=c_1 \end{cases}$$

令$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \alpha_1^2&\alpha_2^2&\alpha_3^2\end{vmatrix}$，則由**預備定理 3** 知$\Delta=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)$。又由**克拉瑪公式**知

$$d_1=\frac{\Delta_{d_1}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}0&1&1\\ 1&\alpha_2&\alpha_3\\ c_1&\alpha_2^2&\alpha_3^2\end{vmatrix}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}=\frac{(\alpha_3-\alpha_2)(c_1-\alpha_3-\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}=\frac{c_1-\alpha_3-\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}\text{ ，}$$

$$d_2=\frac{\Delta_{d_2}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&0&1\\ \alpha_1&1&\alpha_3\\ \alpha_1^2&c_1&\alpha_3^2\end{vmatrix}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}=\frac{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3+\alpha_1-c_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}=\frac{\alpha_3+\alpha_1-c_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}$$

$$d_3=\frac{\Delta_{d_3}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\ \alpha_1&\alpha_2&1\\ \alpha_1^2&\alpha_2^2&c_1\end{vmatrix}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)(c_1-\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}=\frac{c_1-\alpha_2-\alpha_1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}$$

因此，由**預備定理 1** 知

$$b_n^{(3)}=\frac{c_1-\alpha_3-\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}\alpha_1^n-\frac{c_1-\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\alpha_2^n+\frac{c_1-\alpha_2-\alpha_1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}\alpha_3^n\text{。}\qquad\blacksquare$$

【定理 17】(3階線性遞迴數列數列$\left\{a_n^{(3)}\right\}$與$\left\{b_n^{(3)}\right\}$間的不等式)

設$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$為3階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(3)}\right\}$與$\left\{b_n^{(3)}\right\}$的特徵方程式之三相異實根或有一組共軛複根，

則(i) $a_{n-1}^{(3)}+a_{n+1}^{(3)}\neq\lambda_1 b_n^{(3)}$，其中$\lambda_1\in R$。(ii)$\left(a_{n+1}^{(3)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(3)}\right)^2\neq\lambda_2 b_{2n}^{(3)}$，其中$\lambda_2\in R$。

【證明】(i)仿照**定理 16** 來證明。因為

$$\begin{aligned}a_{n-1}^{(3)}+a_{n+1}^{(3)}&=\left(\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\alpha_3^{n-1}\right)+\left(\alpha_1^{n+1}+\alpha_2^{n+1}+\alpha_3^{n+1}\right)\\&=\alpha_1^n\left(\alpha_1^{-1}+\alpha_1\right)+\alpha_2^n\left(\alpha_2^{-1}+\alpha_2\right)+\alpha_3^n\left(\alpha_3^{-1}+\alpha_3\right)\end{aligned}$$

我們要證明$a_{n-1}^{(3)}+a_{n+1}^{(3)}=\lambda_1 b_n^{(3)}$，其中$\lambda_1\in R$，所以由**性質 9** 知

$$\frac{\dfrac{c_1-\alpha_3-\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}}{\alpha_1^{-1}+\alpha_1}=\frac{-\dfrac{c_1-\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}}{\alpha_2^{-1}+\alpha_2}=\frac{\dfrac{c_1-\alpha_2-\alpha_1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}}{\alpha_3^{-1}+\alpha_3}\text{。}\tag{24}$$

考慮(24)式的第一個等號作化簡，由於$\alpha_1^{-1}+\alpha_1\neq 0,\alpha_2^{-1}+\alpha_2\neq 0$且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$為特徵相異實根，所以同乘$(\alpha_1^{-1}+\alpha_1)(\alpha_2^{-1}+\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)$得到

$$(c_1-\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2^{-1}+\alpha_2)-(c_1-\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_1^{-1}+\alpha_1)=0\text{。}\tag{25}$$

又$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=c_1,\alpha_1\alpha_2\alpha_3=c_3$，所以(25)式得到

$$\alpha_1(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2^{-1}+\alpha_2)-\alpha_2(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_1^{-1}+\alpha_1)=0\Rightarrow(\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-1-\alpha_1\alpha_2\right)=0$$

但$\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}-1-\alpha_1\alpha_2\neq 0$，即$\alpha_1=\alpha_2$，與已知$\alpha_1,\alpha_2$為相異實根或共軛複根矛盾，因此，

$a_{n-1}^{(3)}+a_{n+1}^{(3)}\neq\lambda_1 b_n^{(3)}$，其中$\lambda_1\in R$。

(ii)仿照**定理 16** 來證明。因為

$$\left(a_{n+1}^{(3)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(3)}\right)^2=\left(\alpha_1^{n+1}+\alpha_2^{n+1}+\alpha_3^{n+1}\right)^2-\left(\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\alpha_3^{n-1}\right)^2$$
$$=\sum_{\ell=1}^{3}\left(\alpha_\ell^{2n+2}-\alpha_\ell^{2n-2}\right)+2\sum_{i>j}(\alpha_i\alpha_j)^n(\alpha_i\alpha_j-\alpha_i^{-1}\alpha_j^{-1})$$
$$=\sum_{\ell=1}^{3}\left(\alpha_\ell^{2n+2}-\alpha_\ell^{2n-2}\right)+2\sum_{i>j}(\alpha_i\alpha_j)^2\left[\frac{(\alpha_i\alpha_j)^n-1}{\alpha_i\alpha_j}\right]$$

我們要證明$\left(a_{n+1}^{(3)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(3)}\right)^2=\lambda_2 b_{2n}^{(3)}$，其中$\lambda_2\in R$，令$(\alpha_i\alpha_j)^2=1$，則$\alpha_i\alpha_j=\pm1$，故

$\alpha_i^{-1}=\pm\alpha_j,\alpha_j^{-1}=\pm\alpha_i$。

因為$\left(a_{n+1}^{(3)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(3)}\right)^2=\sum_{\ell=1}^{3}\left(\alpha_\ell^{2n+2}-\alpha_\ell^{2n-2}\right)=\sum_{\ell=1}^{3}\alpha_\ell^{2n}\left(\alpha_\ell^2-\alpha_\ell^{-2}\right)$。

仿照**定理 16** 中(i)來證明，由**性質 9** 知

$$\frac{\dfrac{c_1-\alpha_3-\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}}{\alpha_1^{-2}+\alpha_1}=\frac{-\dfrac{c_1-\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}}{\alpha_2^{-2}+\alpha_2}=\frac{\dfrac{c_1-\alpha_2-\alpha_1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}}{\alpha_3^{-2}+\alpha_3}$$

同樣可證明出$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$，與已知$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$為相異實根或共軛複根矛盾，因此，

$\left(a_{n+1}^{(3)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(3)}\right)^2\neq\lambda_2 b_{2n}^{(3)}$，其中$\lambda_2\in R$。 ■

【定理 18】(k **階線性遞迴數列數列**$\left\{a_n^{(k)}\right\}$**與**$\left\{b_n^{(k)}\right\}$**間的不等式)**

設$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$為$k$階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$的特徵方程式之$k$個相異實根或有共軛複根，

則(i) $a_{n-1}^{(k)}+a_{n+1}^{(k)}\neq\lambda_1 b_n^{(k)}$，其中$\lambda_1\in R$。(ii) $\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2\neq\lambda_2 b_{2n}^{(k)}$，其中$\lambda_2\in R$。

【證明】(i)仿照**定理 17** 來證明。因為

$$a_{n-1}^{(k)}+a_{n+1}^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^n\left(\alpha_i^{-1}+\alpha_i\right)$$

我們要證明$a_{n-1}^{(k)}+a_{n+1}^{(k)}=\lambda_1 b_n^{(k)}$，其中$\lambda_1\in R$，由**預備定理 3** 知$d_i$的值，同樣地考慮

$\dfrac{d_1}{\alpha_1^{-1}+\alpha_1}=\dfrac{d_2}{\alpha_2^{-1}+\alpha_2}=\cdots=\dfrac{d_k}{\alpha_k^{-1}+\alpha_k}$，化簡可證$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k$，與$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k$為相異實根或有共軛複根矛盾，因此，$a_{n-1}^{(k)}+a_{n+1}^{(k)}\neq\lambda_1 b_n^{(k)}$，其中$\lambda_1\in R$。

(ii)仿照**定理 17** 來證明。因為

$$\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2=\sum_{\ell=1}^{k}\left(\alpha_\ell^{2n+2}-\alpha_\ell^{2n-2}\right)+2\sum_{i>j}(\alpha_i\alpha_j)^2\left[\frac{(\alpha_i\alpha_j)^n-1}{\alpha_i\alpha_j}\right]$$

我們要證明$\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2=\lambda_2 b_{2n}^{(k)}$，其中$\lambda_2\in R$，令$(\alpha_i\alpha_j)^2=1$，則$\alpha_i\alpha_j=\pm1$，故

$\alpha_i^{-1}=\pm\alpha_j,\alpha_j^{-1}=\pm\alpha_i$。因為$\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2=\sum_{\ell=1}^{k}\left(\alpha_\ell^{2n+2}-\alpha_\ell^{2n-2}\right)$。

仿照**定理 17** 中(ii)來證明，同樣可證明出$\frac{d_1}{\alpha_1^{-2}+\alpha_1}=\frac{d_2}{\alpha_2^{-2}+\alpha_2}=\cdots=\frac{d_k}{\alpha_k^{-2}+\alpha_k}$，使得

$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k$與$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k$為相異實根或有共軛複根矛盾，因此，

$$\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2\neq\lambda_2 b_{2n}^{(k)}\text{，其中 }\lambda_2\in R\text{。}$$ ■

伍、討論

(一)原數學問題之解為非數列的解

原數學問題可延伸為對於任意正整數ℓ，滿足$b|(a^2-\ell)$且$a|(b^2-\ell)$，可存在$\ell|a,\ell|b$的(a,b)的解。例如：

當$\ell=1$時，(a,b)的解為$(2,3)$、$(3,4)$、$(3,8)$、$(4,5)$、$(4,15)$、$(5,6)$、$(5,24)$、$(6,7)$等等。

當$\ell=2$時，(a,b)的解為$(2,2)$。當$\ell=3$時，(a,b)的解為$(3,3)$、$(3,6)$、$(6,33)$等等。

(二)$d_1,d_2,\cdots,d_k\in R$ 的解

當考慮(3)式的解時，是利用數列一般式求解，特別取$d_1=d_2=\cdots=d_k=1$，事實上可考慮$d_1,d_2,\cdots,d_k\in R$的ℓ_n值，底下推導四種情形：

(i)當數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$的特徵兩相異實根或特徵兩複根時，$\ell_n=d_1d_2[2-(\alpha_1^{-t}\alpha_2^{t}+\alpha_2^{-t}\alpha_1^{t})]$。

(ii)當數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$的特徵二重實根時，

$$\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)}\\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\left(d_{1+}d_2n\right)\alpha^n & [d_{1+}d_2(n+t)]\alpha^{n+t}\\ [d_{1+}d_2(n-t)]\alpha^{n-t} & \left(d_{1+}d_2n\right)\alpha^n\end{vmatrix}=(\alpha^n d_2 t)^2\text{ 。}$$

(iii)當數列$\left\{a_n^{(3)}\right\}$的特徵三重實根時，

$$\ell_n=\begin{vmatrix}a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)}\\ a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)}\end{vmatrix}=[d_3t^2(-d_1+2nd_2+2n^2d_3-d_3t^2)]\alpha^{2n}\text{ 。}$$

(iv)當數列$\left\{a_n^{(3)}\right\}$的特徵二重實根時，

$$\begin{aligned}\ell_n &= 2d_2d_3\alpha_1^n\alpha_2^n + 2d_1d_3\alpha_1^n\alpha_2^n - 2d_1d_3\alpha_1^{n-1}\alpha_2^{n+1} + d_2^2t^2\alpha_1^{2n} - 2d_1d_3\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n-1} \\ &\quad - 2d_2d_3n\alpha_1^{n-1}\alpha_2^{n+1} - d_2d_3 + \alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n-1}\end{aligned}$$

由上例子可知取 $d_i = 1$時，的確是減少繁雜的論證過程。

陸、研究結果

我們發現盧卡斯數列中的奇數項滿足「森棚教官的數學題」的一道數學問題之解，於是用2階線性遞迴數列來解此問題，又由延伸問題：(1)~ (4)式中k階線性遞迴數列的解，特別是利用兩種k階線性遞迴數列求其解，其結果如下：

(一)推導出2階線性遞迴數列滿足原問題(1)式的解之ℓ_n值，參見**定理 1-2**。

(二)利用2階線性遞迴數列的一般式及行列式性質推導滿足(2)式的解之ℓ_n值，參見**定理 3-5**。

(三)利用k階線性遞迴數列的一般式及行列式性質推導滿足(3)式的解之ℓ_n值，參見**定理 6-11**。

(四)利用行列式性質推導滿足(4)式的k階線性遞迴數列之解及其ℓ_n值，參見**定理 12-15**。

(五)利用數列的一般式及 Vandermonde 行列式來探討兩種k階線性遞迴數列間的恆等式或不等式，參見**定理 16-18**。

柒、結論與未來展望

本作品從科學研習月刊中「森棚教官的數學題」的一道數學問題：「互相牽制」為研究核心，美妙地發現盧卡斯數列中的奇數項滿足這問題的解，於是進行提問：「盧卡斯數列中的偶數項能滿足這問題的解嗎？」；「那麼推廣至k階線性遞迴數列的延伸問題為何呢？」首先將原問題改為數列的恆等式：(3)式，定義為ℓ_n值(當ℓ_n值與n無關時，記作ℓ)。為了解決這兩個問題，先從由盧卡斯數列而類推至k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$，透過特徵複數根性質來論證，過程中部分性質是用行列式來論證，得到ℓ_n值較為漂亮，但推廣至k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$滿足(3)式之解，其中ℓ_n值在計算上是複雜的，於是建構新數列(由費氏數列而類推)使得ℓ_n值

在計算上是清晰可見的，這數列是 k 階線性遞迴數列 $\left\{b_n^{(k)}\right\}$，於是修改(3)式，即(4)式，美妙地(4)式是 k 階行列式形式，即 **k 階 Cassini 恆等式**。

我們意想不到的原問題是數論問題，透過 k 階線性遞迴數列能透析此數學問題的所有樣貌，可見此問題是透過數列來探討，知有限解(盧卡斯數列的解)事實上是無窮之解。也可見推廣至 k 階線性遞迴數列時，費氏數列而類推數列中 ℓ_n 值較為漂亮，主因是 k 階 **Cassini** 恆等式，也說明費氏數列是個特殊數列，令人感到美妙極了。

最後將上述兩種 k 階整係數齊次線性遞迴數列探討兩者間的兩個恆等式或不等式，利用數列的一般式而論證，其中一恆等式是用 Vandermonde 行列式協助來論證。本作品使用到兩個行列式：k 階 **Cassini** 恆等式及 Vandermonde 行列式，的確行列式是好的數學工具。

捌、參考文獻資料

[1] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[3] 游森棚 (2014)。互相牽制。**科學研習月刊-森棚教官的數學題**。**56** (12)，54。

[4] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007). ***The fabulous Fibonacci numbers*.** Amherst, N.Y. : Prometheus Books.

【評語】050416

作品利用遞迴數列方法，尋求數論問題 $a_n^2 - a_{n+1} a_{n-1}$ 一系列的整數解。推導清楚漂亮。進而推廣至高階的遞迴公式，以及費氏數列相關的問題。 作品有一定的難度。可惜沒有完全解決最初的教官問題。另外，定理９（ｉ）中，l_n 的表達式可做因式分解。而若 l_n 非常數，問題的趣味性有所減弱，這是可惜的地方。

作品簡報

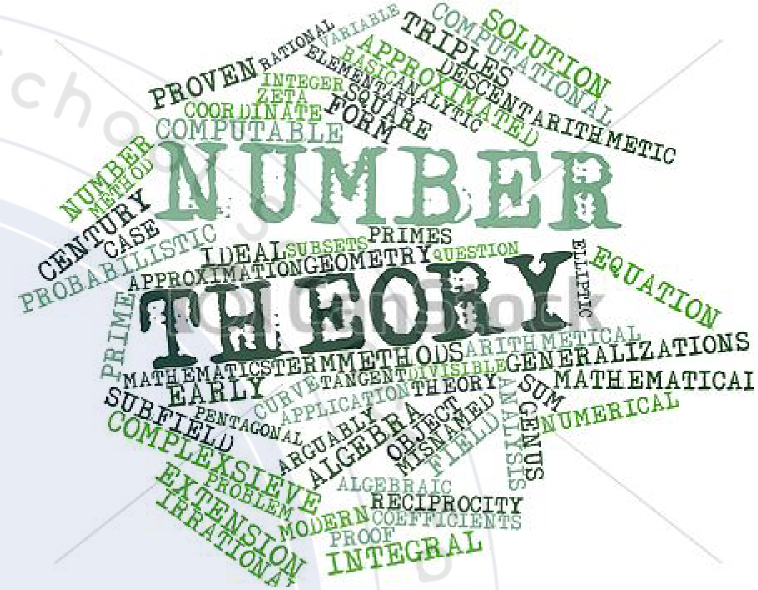
科別：數學科

組別：高級中等學校組

作品名稱：

環環相扣-

一道數論問題延伸高階線性遞迴數列之探討



n: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

F_n: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

L_n: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...

前言 (Introduction)

研究動機 (Research Motivation)

閱讀「森棚教官的數學題」的一道數論問題：**你可以找到多少組正整數對(a,b)，讓a^2-5是b 的倍數，b^2-5是 a的倍數？**

文章中提到的解$(a,b)=(4,11)$，也可增加其解 $(a,b)=(11,29)$，即

$$\begin{cases} 4^2-5=11\times 1 \\ 11^2-5=4\times 29 \end{cases}$$

4,11,29 為盧卡斯數

研究問題 (Research Problem)

1.原問題用數列來表示：若數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$為盧卡斯數列，則改為

$$\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)} \quad (1)$$

2.考慮更一般數列探討：$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}$ 或$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}$ (2)

3.建構第二種數列 $\left\{b_n^{(k)}\right\}$探討：讓 ℓ_n,ℓ 值是清晰可見

名詞定義 (Noun and Definition)

定義 1 給定一數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$，若存在$c_1, c_2, \ldots, c_k \in R$ 滿足兩條件

(i)**初始條件**： $a_i^{(k)} = \gamma_i$ ，其中 $-(k-1) \le i \le 0$ 且 $\gamma_i \in R$

(ii)**遞迴關係**： $a_n^{(k)} = c_1 a_{n-1}^{(k)} + c_2 a_{n-2}^{(k)} + c_3 a_{n-3}^{(k)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(k)},\ n \ge k$

則此數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$為k**階整係數齊次線性遞迴數列**，簡稱k**階線性遞迴數列**。

定義 2 將**定義 1的初始條件**改為

$$b_1^{(k)} = 1, b_i^{(k)} = 0,\ \text{其中}\ i = 0, -1, -2, \cdots, -(k-2)$$

則此數列為 k **階線性遞迴數列**。

盧卡斯數列

	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$a_3^{(2)}$	$a_4^{(2)}$
n	0	1	2	3	4
$a_n^{(2)}$	2	1	3	4	7

費氏數列

	$b_0^{(2)}$	$b_1^{(2)}$	$b_2^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$b_4^{(2)}$
n	0	1	2	3	4
$b_n^{(2)}$	0	1	1	2	3

研究方法 (Methods)

研究方法(I)　：特徵複數根性質求 ℓ_n

■ $\left(a_n^{(k)}\right)^2 - \ell_n = a_{n-t}^{(k)} \times a_{n+t}^{(k)}$ (2)

數列的一般式： $a_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} d_i \alpha_i^n$　　取 $d_1 = d_2 = \cdots = d_k = 1$

研究方法(II)　：(2)式改為行列式形式 $\ell = \begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}$ (3)

費氏數列中的二階Cassini恆等式 → k 階 Cassini 恆等式

■ (2)中考慮 $k = 2, t = 1$

$$\ell = \begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}$$

推廣

$$\ell = \begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix} \quad (4)$$

探討k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$

盧卡斯數列

定理 1 (奇數項滿足(1)式)

- $\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$

定理 2 (偶數項滿足(1)式)

- $\left(a_n^{(2)}\right)^2-(-5)=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$

2階線性遞迴數列 滿足 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell_n(\text{或}\ell)=a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)}$

性質	論證方式	研究結果
定理 3	特徵相異實根 二共軛複數根	$\ell_n=2(-c_2)^n-\left(-c_2\right)^{n-t}a_{2t}^{(2)}$ $c_2=-1\Rightarrow \ell=2-a_{2t}^{(2)}$
定理 4	特徵二重實根	$\ell_n=t^2\alpha^{2n}=(-c_2)^n t^2$ $c_2=-1\Rightarrow \ell=t^2$
定理 5	$t=1$	$\ell_n=(-1)^n c_2^{n-1}(c_1^2+4c_2)$ $\alpha_1=\alpha_2=\alpha, c_2=-1\Rightarrow \ell=1, c_1=\pm 2$ $\alpha_1=\alpha_2=\alpha\Rightarrow \ell=\alpha^{2n}=(-1)^n c_2^n$

k 階線性遞迴數列 滿足 $\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell_n=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}$

特徵相異 k 實根

特徵相異 p 實根 $\frac{k-p}{2}$ 組共軛虛根

相異 $k-m$ 實根 m 重實根

$m=2,3,\cdots,k$

定理 6 (數列滿足(2)式之解)

- $$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$$
- 當 $t=1$ 時，$\ell_n=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$

For Example： 考慮 $\alpha_1=3,\alpha_2=2,\alpha_3=1,\alpha_4=-1$

$$a_n^{(4)}=5a_{n-1}^{(4)}-5a_{n-2}^{(4)}-5a_{n-3}^{(4)}+6a_{n-4}^{(4)}$$

則當 $n=2$時，$\left(a_2^{(4)}\right)^2-\ell_2=a_1^{(4)}\times a_3^{(4)}\Leftrightarrow 15^2-50=5\times 35$

相異 $k-m$ 實根 m 重實根　探討特徵 k 重根的情形

定理 7 (數列滿足(2)式之解)

- 當 $k=m=3$ 時， $\ell_n = t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}$
- 當 $t=1$ 時， $\ell_n = \left(2n^2+2n-2\right)\alpha^{2n}$

由左式 $=\left(1+n+\cdots+n^{k-1}\right)^2\alpha^{2n}-\ell_n$　記作 $f_k^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{k-1}\right)^2$

↑ 特徵 k 重根

定理 8 (數列滿足(2)式之解)

- $\ell_n = \left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-t)\,f_k^{(k)}(n+t)\right]\alpha^{2n}$
- 當 $t=1$ 時， $\ell_n = \left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-1)\,f_k^{(k)}(n+1)\right]\alpha^{2n}$

相異 $k-m$ 實根m重實根　探討特徵 m重根的情形

由左式 $=\left(1+n+\cdots+n^{m-1}\right)^2\alpha^{2n}-\ell_n$　記作　$f_m^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{m-1}\right)^2$

特徵 m 重根

定理 9 (數列滿足(2)式之解)

■ $$\ell_n=f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n-\left(f_m^{(k)}(n-t)\alpha_1^{n-t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\left(f_m^{(k)}(n+t)\alpha_1^{n+t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n+1}\right)$$

■ 當 $t=1$ 時，

$$\ell_n=f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n-\left(f_m^{(k)}(n-1)\alpha_1^{n-1}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\left(f_m^{(k)}(n+1)\alpha_1^{n+1}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_i^{n+1}\right)$$

For Example：

■考慮 $a_n^{(4)}=-a_{n-1}^{(4)}+3a_{n-2}^{(4)}+a_{n-3}^{(4)}-2a_{n-4}^{(4)}$ ，則當 $n=3$ 時，$\ell_n=-151$

探討k階線性遞迴數列$\{b_n^{(k)}\}$

費氏數列中的二階Cassini恆等式

性質 1及定理 10

$$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$$

- ■當 n 為偶數時，$\ell=-1$
- ■當 n 為奇數時，$\ell=1$

性質 2及定理 11 (2階線性遞迴數列)

$$\ell_n=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-c_2)^{n-1}$$

- ■當 n 為偶數時，$\ell=-c_2^{n-1}$
- ■當 n 為奇數時，$\ell=c_2^{n-1}$

性質 3 (k階Cassini恆等式)

$$\ell_n=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix}=\begin{cases} (c_k)^{n-k+1}, \text{其中 } k \text{ 為奇數} \\ (-c_k)^{n-k+1}, \text{其中 } k \text{ 為偶數} \end{cases} \quad (4)$$

定理 12

$$\ell_n=\begin{cases}(c_k)^{n-k+1}, \text{其中 } k \text{ 為奇數}\\(-c_k)^{n-k+1}, \text{其中 } k \text{ 為偶數}\end{cases}$$

- ■當 k 為奇數且 $c_k=1$ 時，$\ell=1$
- ■當 k 為奇數且 $c_k=-1$ 時，$\ell_n=(-1)^{n-k+1}$
- ■當 k 為偶數且 $c_k=1$ 時，$\ell_n=(-1)^{n-k+1}$
- ■當 k 為偶數且 $c_k=-1$ 時，$\ell=1$

探討數列 $\left\{a_n^{(k)}\right\}$ 與 $\left\{b_n^{(k)}\right\}$ 間性質

性質	研究結果
定理 13	■當 $c_2=1$ 時， $a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=(c_1^2+4c_2)b_n^{(2)}$ ■當 $c_2=\pm1$ 時， $\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2=c_1(c_1^2+4c_2)b_{2n}^{(2)}$
定理 14	$a_{n-1}^{(k)}+a_{n+1}^{(k)}\neq\lambda_1 b_n^{(k)}$、$\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2\neq\lambda_2 b_{2n}^{(k)}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2\in R$

探討解為k階(非)齊次線性遞迴數列的情形

定義 3 遞迴關係改為$s_n = c_1 s_{n-1} + \gamma$，稱為1**階非齊次線性遞迴數列**。

定義 4 **不可擴張數列**是指(s_i, s_{i+1})或$(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)})$滿足原數論問題的解，其解中$\ell$值固定，同時**首項必須是最小值**。

➢1階非齊次線性遞迴數列

定理 15 $\ell = c_1^{i-2}\gamma(c_1 s_1 - s_1 + \gamma)$

■若$c_1 = 1$，則數列$\{s_n\}$分別為首項為$\gamma+1, \gamma+2, \cdots, 2\gamma$且公差$\gamma$的**等差數列**，並且滿足公差為$\gamma$的等差數列**最多有**$\gamma$**組**。

For Example：若$\gamma = 2$，則滿足公差為2的等差數列最多有2組
$3,5,7,9,11,13,15,\cdots$ 或 $4,6,8,10,12,14,16,\cdots$

➢ k階齊次線性遞迴數列$\{b_n^{(k)}\}$

■(i) 當k為奇數且$c_k = 1$時，$\ell = 1$。

■(ii)當k為偶數且$c_k = -1$時，$\ell = 1$。

以上兩種數列的情形均使得數列為不可擴張數列。

結論 (Conclusions)

✓**數列觀點**：解原數論問題延伸兩種 k 階齊次線性遞迴數列之性質。

✓探討兩種 k 階線性遞迴數列間的恆等式或不等式。

✓**數論觀點**：求解滿足(2)式中 k 階(非)齊次線性遞迴數列情形：

非齊次的數列 $\{s_n\}$ 中可探討出等差數列，此時 ℓ 為平方數；

齊次的數列為 $\{b_n^{(k)}\}$。注意以上兩種數列均滿足**不可擴張數列的條件**。

□**數論觀點**：考慮「$a^2-\ell$ **是** b **的倍數，** $b^2-\ell$ **是** a **的倍數？**」

由**佩爾方程式**求 (a,b) 及其解的限制條件，其中必存在的解有 $(n,n+\sqrt{\ell})$ 或 $(\sqrt{\ell},h\sqrt{\ell})$，其中 $h\in N$。

參考文獻資料 (References)

[1] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[3] 游森棚 (2014)。互相牽制。**科學研習月刊-森棚教官的數學題**。 **56** (12)，54。

[4] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007).***The fabulous Fibonacci numbers.*** Amherst, N.Y. : Prometheus Books.