中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

(鄉土)教材獎

050414

在多邊形中尋找反正切函數是否搞錯了甚麼

學校名稱：國立屏東高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳柏澔 高二 梁耘睿 高二 曾俊哲	張宮明

關鍵詞：多邊形、反正切函數

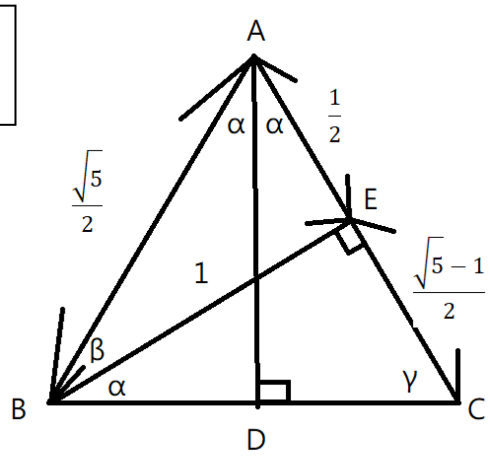
摘要

本文由六個結合 tan−1 的等式及其所搭配的無字證明圖形出發，結合多邊形的性質發展出新的圖形，並以向量以及三角函數佐以證明 tan−1 與多邊形的全新等式，並且討論四邊形中四個角的不同狀況以得出不同定理。本文最大的價值在於:我們將國中學過的鏢形三內角相加等於一外角的特性加以運用到四邊形，並結合高中所學的三角函數以及反三角函數和利用了方格紙將圖形座標化後以內積公式去求出各個條件下四邊形的一般式，因此我們能夠利用此一般式快速地利用座標來去算出不同四邊形的關係式。而本文最大的特色在於，我們將大部分國中及高中所學知識融會貫通後，將其運用在我們報告中，且在本文中我們利用了假設各點並小心的驗算列出了各圖形在各個條件下的一般式。

壹、研究動機:

國中時，我們都曾經作過科展，於是上高中後，我們便踏入了這個我們既熟悉又陌生的科展領域：數學科。在開始這門研究時，我們充滿了自信，相信著我們肯定能創作出一件好作品。一開始的我們勢如破竹，研究如飛梭般的進展，但好景不常，很快的我們遇到了許多瓶頸。找不到可推廣方向、因資料太過龐大無法計算算是小事，最慘的就是在科展博覽會上見到了自己的主題被別人研究透徹的光景。在我們面如死灰，大量的找尋新題目時，科展指導老師給了我們一篇有趣的數學文章，作者 REX H. WU 用短短的兩頁，介紹了好幾個有關於反三角函數的公式:

，



(1) arctanφ = arctan($\frac{1}{2}$) + ($\frac{1}{2}$)arctan2，

(2) arctanφ - arctan($\frac{1}{\varphi}$) = arctan($\frac{1}{2}$)

(3) 2arctan($\frac{1}{\varphi}$) = arctan2

(4) arctanφ + ($\frac{1}{2}$)arctan2 = $\frac{\pi}{2}$ =2arctan($\frac{1}{\varphi}$) + arctan($\frac{1}{2}$)

(5) arctanφ - 2arctan($\frac{1}{\varphi}$) = arctan($\frac{1}{2}$) - ($\frac{1}{2}$)arctan2

(6) arctanφ = $\frac{\pi}{4}$ + ($\frac{1}{2}$)arctan($\frac{1}{2}$)

作者 RE.0 X H. WU 用畫圖的方式，列出了以上的五個等式，但唯一的缺點便是證明並不完善，故我們決定先詳細證明之，但在證明的過程中，我們也開始對這個主題有了許多的發想，包括將數列、方格紙、向量等等的數學主題融合進去，於是在如此的構想之下，我們就這麼開始了

貳、研究目的:

根據此題目，我們準備了下述的幾個研究目的

1、如何以圖形和文字詳細證明上述六個式子。

2、將上述六個式子進行一般式推廣。

3、將費氏數列帶進其中，找尋規律。

4、將其三角形的反三角函數等式推廣成多邊形的反三角函數等式。

參、研究設備及器材:

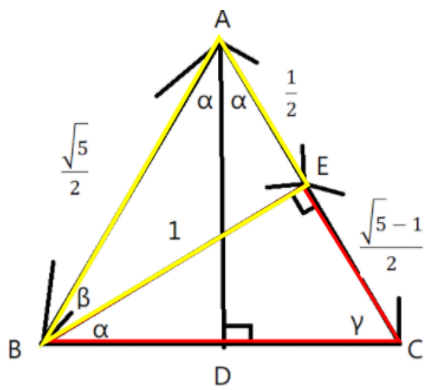
鉛筆、橡皮擦、紙、筆記型電腦、手機。

肆、研究過程與方法:

第一部分：原式的圖形詳細證明及一般化證明

在上述文章中，我們得到了作者提供的六個反三角函數式，但因為作者說明的不完全，**第一步**我們決定以圖形及文字證明的方式來詳細證明此六個式子。而**第二步**則是將各式進行一般化的操作。

第一式介紹



$\varphi=\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$，$\frac{1}{\varphi}=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

（1）第一式證明: $\arctan\varphi = \arctan(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})\arctan 2$

在 ΔBCE 中，$\tan\gamma=\frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}}=\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$，又 $\gamma=\alpha+\beta$

故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}=\varphi$，則可得

$\arctan\varphi=\arctan\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}=\alpha+\beta$

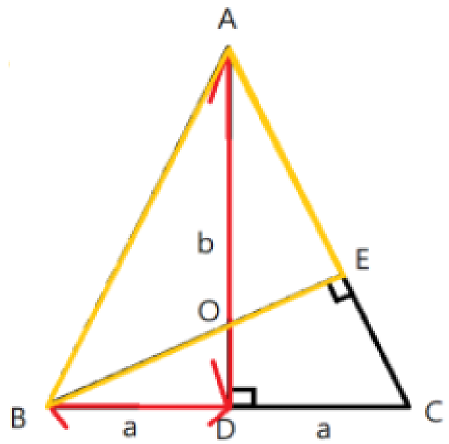
在 ΔABE 中，$\tan\beta=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$，故 $\arctan\frac{1}{2}=\beta$

在 ΔABE 中，tan2α= $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ =2 ，故 arctan2 =2α，$\frac{1}{2}$arctan2 =α

故 arctan(φ)=γ=α+β，代入原式，(α+β)=β+α 得證

（2）我們將第一式推廣成定理一

定理一:arctan($\frac{b}{a}$)=arctan($\frac{b^2-a^2}{2ab}$) + $\frac{1}{2}$arctan($\frac{2ab}{b^2-a^2}$)



證明:

因為 ΔABC 是等腰三角形

$$\text{由圖可知}\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2} = \overline{AC}$$

由 ΔABC 面積可知 2a × b × $\frac{1}{2} = \sqrt{a^2+b^2} \times \overline{BE} \times \frac{1}{2}$

可得 $\overline{BE} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

而由 ΔABE 中，利用畢氏定理可得$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2$-$\overline{AE}^2$,$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2$-$\overline{BE}^2$

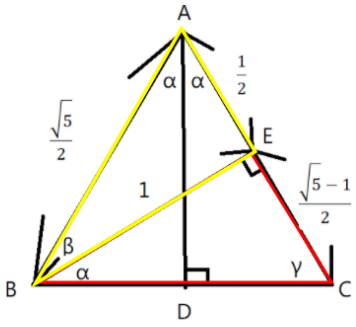
$\overline{AE}^2 = a^2+b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$,得$\overline{AE} = \frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

設∠BAD= ∠CAD=α，∠ABE=β，∠ACD= ∠ABD=γ，且 γ=α+β

tanγ= $\frac{b}{a}$，tanβ= $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{b^2-a^2}{2ab}$，tan2α= $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{2ab}{b^2-a^2}$

可推得 arctan($\frac{b}{a}$)=arctan($\frac{b^2-a^2}{2ab}$) + $\frac{1}{2}$arctan($\frac{2ab}{b^2-a^2}$)

第二式介紹



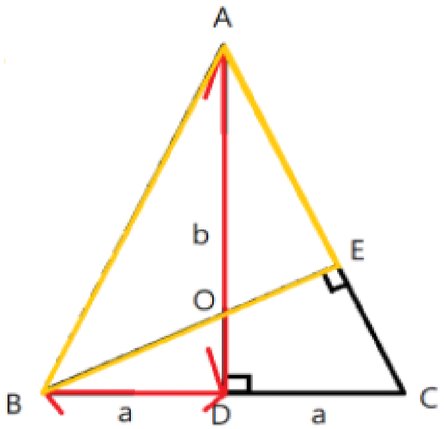
(1) 第二式證明:arctanφ - arctan($\frac{1}{\varphi}$) = arctan($\frac{1}{2}$),

在 ΔABE 中，tanβ= $\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$，故 arctan($\frac{1}{2}$)=β

在 ΔBCE 中，tanα= $\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1} = \frac{1}{\varphi}$，故 arctan($\frac{1}{\varphi}$)=α

在 ΔBCE 中，tanγ= $\frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ =φ，由圖可知 γ=α+β，

故 arctan(φ)=γ=α+β，代入原式 (α+β)-α=β,故得證



(2) 我們將第二式推廣成定理二

定理二:arctan$\frac{b}{a}$-arctan$\frac{a}{b}$ =arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$

證明:

因為 ΔABC 是等腰三角形

由圖可知$\underline{AB} = \sqrt{a^2+b^2} = \underline{AC}$

由 ΔABC 面積可知 2a × b × $\frac{1}{2} = \sqrt{a^2+b^2} \times \underline{BE}\ \frac{1}{2}$

可得$\underline{BE} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

而由 ΔABE 中，利用畢氏定理可得$\underline{BE}^2 = \underline{AB}^2$-$\underline{AE}^2$,$\underline{AE}^2 = \underline{AB}^2$-$\underline{BE}^2$

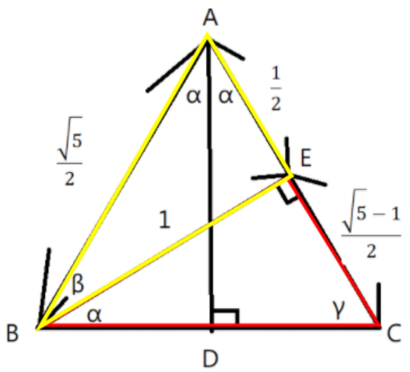
$\underline{AE}^2 = a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$，得$\underline{AE} = \frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

設∠BAD= ∠CAD=α,∠ABE=β,∠ACD= ∠ABD=γ，且 γ-α=β

tanγ= $\frac{b}{a}$ ，tanα= $\frac{\underline{BD}}{\underline{AD}} = \frac{a}{b}$，tanβ= $\frac{\underline{AE}}{\underline{BE}} = \frac{b^2-a^2}{2ab}$

可推得 arctan$\frac{b}{a}$-arctan$\frac{a}{b}$ =arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$

第三式介紹



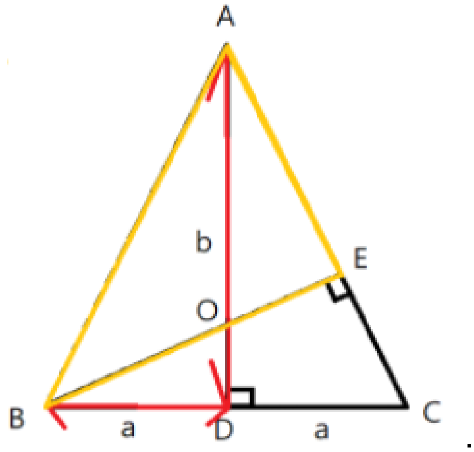
(1) 第三式證明:2 arctan($\frac{1}{\varphi}$) = arctan2

在 ΔBCE 中，tanα= $\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1} = \frac{1}{\varphi}$，

故 arctan($\frac{1}{\varphi}$)=α，2arctan($\frac{1}{\varphi}$)= 2α，

在 ΔABE 中，tan2α= $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ $=2$ ，故 arctan2=2α，

故 2arctan($\frac{1}{\varphi}$)= 2α，代入原式，2α=2α,故得證



(2)我們將第三式推廣成定理三

定理三:2arctan$\frac{a}{b}$ = arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$

證明:

因為 ΔABC 是等腰三角形

由圖可知$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=\overline{AC}$

由 ΔABC 面積可知 2a × b ×$\frac{1}{2}=\sqrt{a^2+b^2}$×$\overline{BE}$×$\frac{1}{2}$

可得$\overline{BE}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

而由 ΔABE 中，利用畢氏定理可得$\overline{BE}^2=\overline{AB}^2$-$\overline{AE}^2$,$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2$-$\overline{BE}^2$

$\overline{AE}^2=a^2+b^2-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$,得$\overline{AE}=\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

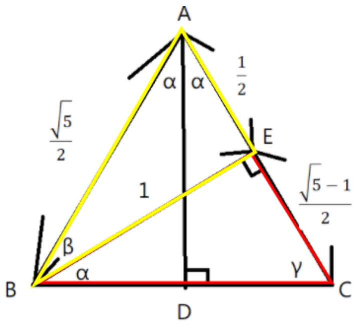
設∠BAD= ∠CAD=α，∠ABE=β，∠ACD= ∠ABD=γ，且 γ=α+β

在 ΔABD 中，tanα= $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{a}{b}$，arctan$\frac{a}{b}$ = α

在 ΔABE 中，tan2α= $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{2ab}{b^2-a^2}$，arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$ = 2α

可推得 $2\arctan\frac{a}{b} = \arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}$

第四式介紹

(1)第四式證明: 

$\arctan\varphi + (\frac{1}{2})\arctan 2 = \frac{\pi}{2} = 2\arctan(\frac{1}{\varphi}) + \arctan(\frac{1}{2})$

在 ΔBCE 中，$\tan\gamma = \frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$，故 $\arctan\varphi = \gamma$

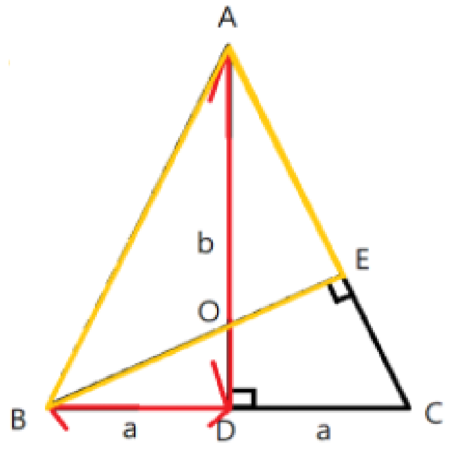
在 ΔABE 中，$\tan 2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$，故 $\arctan 2 = 2\alpha$，$\frac{1}{2}\arctan 2 = \alpha$

在 ΔBCE 中，$\alpha+\gamma = \arctan\varphi + \frac{1}{2}\arctan 2 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$,故得證

在 ΔBCE 中，$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1} = \frac{1}{\varphi}$，故 $\arctan(\frac{1}{\varphi}) = \alpha$，$2\arctan(\frac{1}{\varphi}) = 2\alpha$

在 ΔABE 中，$\tan\beta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$，故 $\arctan(\frac{1}{2}) = \beta$

在 ΔABE 中，$2\alpha+\beta = 2\arctan(\frac{1}{\varphi}) + \arctan(\frac{1}{2}) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$,故得證



(2)我們將第四式推廣成定理四

定理四: 2arctan$\frac{a}{b}$ + arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ $=$ $\frac{1}{2}$arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$ + arctan$\frac{b}{a}$ $=\frac{\pi}{2}$

證明:

因為 ΔABC 是等腰三角形

由圖可知$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=\overline{AC}$

由 ΔABC 面積可知 2a × b ×$\frac{1}{2}=\sqrt{a^2+b^2}$×$\overline{BE}$×$\frac{1}{2}$

可得$\overline{BE}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

而由 ΔABE 中，利用畢氏定理可得$\overline{BE}^{\,2}=\overline{AB}^{\,2}$-$\overline{AE}^{\,2}$,$\overline{AE}^{\,2}=\overline{AB}^{\,2}$-$\overline{BE}^{\,2}$

$\overline{AE}^2=a^2+b^2-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$,得$\overline{AE}=\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

設∠BAD= ∠CAD=α，∠ABE=β,∠ACD= ∠ABD=γ，且 γ=α+β

在 ΔABD 中，tanγ= $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{b}{a}$,arctan$\frac{b}{a}$ =γ

在 ΔABE 中，tan2α= $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{2ab}{b^2-a^2}$

arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$ $=$ 2α，α= $\frac{1}{2}$arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$

在 ΔBCE 中，α+γ= $90^\circ=\frac{\pi}{2}$,故$\frac{1}{2}$arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$+arctan$\frac{b}{a}$ $=90^\circ=\frac{\pi}{2}$

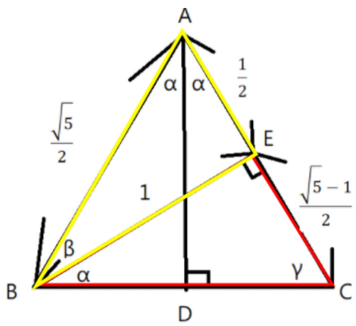
在 ΔABD 中，tanα= $\frac{\underline{BD}}{\underline{AD}} = \frac{a}{b}$， arctan$\frac{a}{b}$ =α,2arctan$\frac{a}{b}$ = 2α

在 ΔABE 中，tanβ= $\frac{\underline{AE}}{\underline{BE}} = \frac{b^2-a^2}{2ab}$,arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ =β

在 ΔABE 中，2α+β= $90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$,故 2arctan$\frac{a}{b}$+arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ = $90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$

可推得 2arctan$\frac{a}{b}$+arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ = $\frac{1}{2}$arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$+arctan$\frac{b}{a}$ = $\frac{\pi}{2}$

第五式介紹



(1)第五式證明:

arctanφ-2 arctan($\frac{1}{\varphi}$) = arctan($\frac{1}{2}$)-($\frac{1}{2}$)arctan2

在 ΔBCE 中，tanγ= $\frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ =φ 故 arctanφ=γ

在 ΔBCE 中，tanα= $\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1} = \frac{1}{\varphi}$，故 arctan($\frac{1}{\varphi}$)=α，2arctan($\frac{1}{\varphi}$)= 2α

在 ΔABE 中， tanβ= $\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$，故 arctan($\frac{1}{2}$)=β

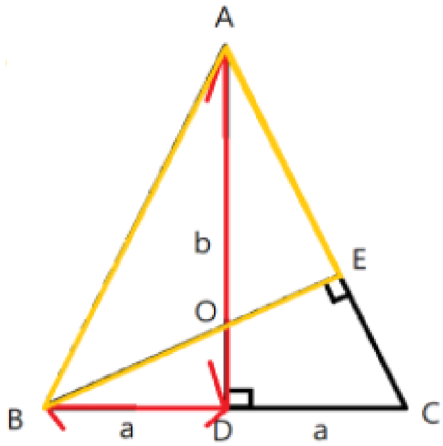
在 ΔABE 中，tan2α= $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ = 2 ，故 arctan2=2α，$\frac{1}{2}$arctan2 = α

arctanφ- 2 arctan($\frac{1}{\varphi}$) = arctan($\frac{1}{2}$)-($\frac{1}{2}$)arctan2

⇒γ-2α=β-α

⇒γ=β+α

因 ΔABC 為等腰三角形，故得證



(2)我們將第五式推廣成定理五

定理五:arctan$\frac{b}{a}$ -2arctan$\frac{a}{b}$ =arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ -arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$

證明:

因為 ΔABC 是等腰三角形

由圖可知$\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2} = \overline{AC}$

由 ΔABC 面積可知 2a × b × $\frac{1}{2} = \sqrt{a^2+b^2} \times \overline{BE} \times \frac{1}{2}$

可得$\overline{BE} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

而由 ΔABE 中，利用畢氏定理可得$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2$-$\overline{AE}^2$,$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2$-$\overline{BE}^2$

$\overline{AE}^2 = a^2+b^2-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$，得$\overline{AE} = \frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

設∠BAD= ∠CAD=α,∠ABE=β,∠ACD= ∠ABD=γ，且 γ=α+β

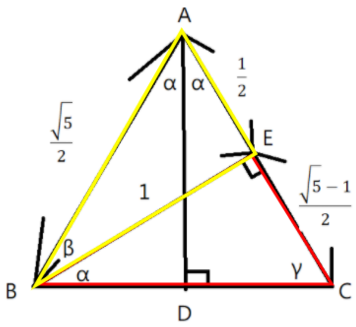
在 ΔABD 中，tanγ=$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{b}{a}$、tanα=$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{a}{b}$

在 ΔABE 中，tanβ=$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{b^2-a^2}{2ab}$、tan∠2α=$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{2ab}{b^2-a^2}$

從原式證明的 γ- 2α=β-α

可得 arctan$\frac{b}{a}$ -2arctan$\frac{a}{b}$ =arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ -arctan$\frac{2ab}{b^2-a^2}$

第六式介紹



(1)第六式證明:

arctanφ= $\frac{\pi}{4}$ + ($\frac{1}{2}$)arctan($\frac{1}{2}$)

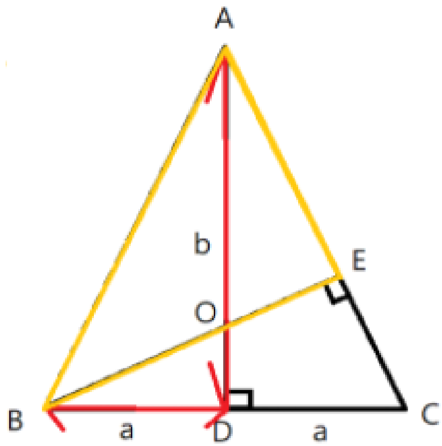
在 ΔBCE 中，tanγ= $\frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ =φ，由圖可知∠γ= ∠α+β

在 ΔABE 中，tanβ= $\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$，故 arctan($\frac{1}{2}$)=β，($\frac{1}{2}$)arctan($\frac{1}{2}$)= $\frac{\beta}{2}$

而由定理(四)可知 $\frac{\pi}{2}$ = β+2α，故 $\frac{\pi}{4}$ = α+$\frac{\beta}{2}$

故 arctan(φ)=γ=α+β，代入原式(α+β)= (α+$\frac{\beta}{2}$)+$\frac{\beta}{2}$，

故得證



(2)我們將第六式推廣成定理六

定理:arctan$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$

證明:

因為 ΔABC 是等腰三角形

由圖可知$\underline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2} = \underline{AC}$

由 ΔABC 面積可知 2a × b ×$\frac{1}{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$×$\underline{BE}$×$\frac{1}{2}$

可得$\underline{BE} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

而由 ΔABE 中，利用畢氏定理可得$\underline{BE}^2 = \underline{AB}^2$-$\underline{AE}^2$,$\underline{AE}^2 = \underline{AB}^2$-$\underline{BE}^2$

$\underline{AE}^2 = a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2- b^2)^2}{a^2+b^2}$,得$\underline{AE} = \frac{\left|a^2- b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2- a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

在 ΔABD 中,tanγ= $\frac{\underline{AD}}{\underline{BD}} = \frac{b}{a}$、 tanα= $\frac{\underline{BD}}{\underline{AD}} = \frac{a}{b}$

在 ΔABE 中,tanβ= $\frac{\underline{AE}}{\underline{BE}} = \frac{b^2-a^2}{2ab}$,故 arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ =β,$\frac{1}{2}$arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab} = \frac{1}{2}$β

而由原式可知 $\frac{\pi}{2}$ = 2α+β，故 $\frac{\pi}{4}$ = α+$\frac{\beta}{2}$

γ=α+β= (α+$\frac{\beta}{2}$)+$\frac{\beta}{2}$

可推得 arctan$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$

將上述六個我們研究出的定理整理如下(b > a)

定理一:arctan($\frac{b}{a}$)=arctan($\frac{b^2-a^2}{2ab}$) + $\frac{1}{2}$arctan($\frac{2ab}{b^2-a^2}$)

定理二:arctan$\frac{b}{a}$-arctan$\frac{a}{b}$ =arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$

定理三:2arctan$\frac{a}{b}$ = arctan$\frac{2ab}{b^2- a^2}$

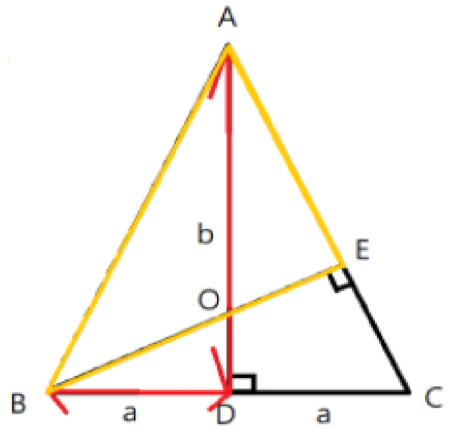
定理四:2arctan$\frac{a}{b}$+arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab} = \frac{1}{2}$arctan$\frac{2ab}{b^2- a^2}$+arctan$\frac{b}{a}$

定理五:arctan$\frac{b}{a}$ -2arctan$\frac{a}{b}$ =arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$ -arctan$\frac{2ab}{b^2- a^2}$

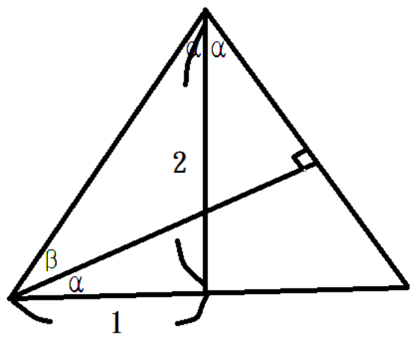
定理六:arctan$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$arctan$\frac{b^2-a^2}{2ab}$

推廣（一）: 費氏數列

我們先利用定理一作為探討對象，把費氏數列的前項以及後項分別當成分母和分子代入:



令分母$=\frac{1}{2}$底=a， 分子=高=b



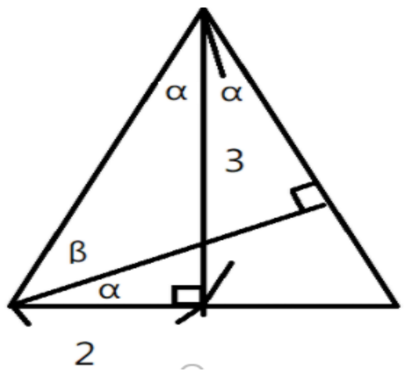
當 a=1，b=2 時，可得上面的

arctan2=α+β

將我們所得出的代入一般式得

$\arctan\frac{3}{4}=\beta$，$\arctan\frac{4}{3}=2\alpha$，$\frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3}=\alpha$

$\therefore \arctan 2=\arctan\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3}$



當 a=2，b=3 時，可得上面的

$\arctan\frac{3}{2}=\alpha+\beta$

將我們所得出的代入一般式得

$\arctan\frac{5}{12}=\beta$，$\arctan\frac{12}{5}=2\alpha$，$\frac{1}{2}\arctan\frac{12}{5}=\alpha$

$\therefore\arctan\frac{3}{2}=\arctan\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\arctan\frac{12}{5}$

以此類推，我們繼續往下運算了幾次，並製作了一張表格

公式$\frac{b}{a}$(b > a)	$\arctan(\frac{b}{a})=\arctan(\frac{b^2-a^2}{2ab})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{2ab}{b^2-a^2})$
$\frac{2}{1}$	$\arctan(\frac{f_3}{f_2})=\arctan(\frac{3}{4})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{4}{3})$
$\frac{3}{2}$	$\arctan(\frac{f_4}{f_3})=\arctan(\frac{5}{12})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{12}{5})$
$\frac{5}{3}$	$\arctan(\frac{f_5}{f_4})=\arctan(\frac{16}{30})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{30}{16})$
$\frac{8}{5}$	$\arctan(\frac{f_6}{f_5})=\arctan(\frac{39}{80})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{80}{39})$

設費氏數列為f_n

由上圖三角形

設 a= f_n b= f_{n+1} 並代入公式(一) 當 n>=2 時

則 $\arctan(\frac{f_{n+1}}{f_n})=\arctan(\frac{{f_{n+1}}^2-{f_n}^2}{2f_{n+1}f_n})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{2f_{n+1}f_n}{{f_{n+1}}^2-{f_n}^2})$

又$\frac{1}{2}\arctan(\frac{2f_{n+1}f_n}{{f_{n+1}}^2-{f_n}^2})=\frac{1}{2}\angle 2\alpha=\angle\alpha=\arctan(\frac{a}{b})=\arctan(\frac{f_n}{f_{n+1}})$

故可推得**定理七**: $\arctan(\frac{f_{n+1}}{f_n})=\arctan(\frac{{f_{n+1}}^2-{f_n}^2}{2f_{n+1}f_n})+\arctan(\frac{f_n}{f_{n+1}})$

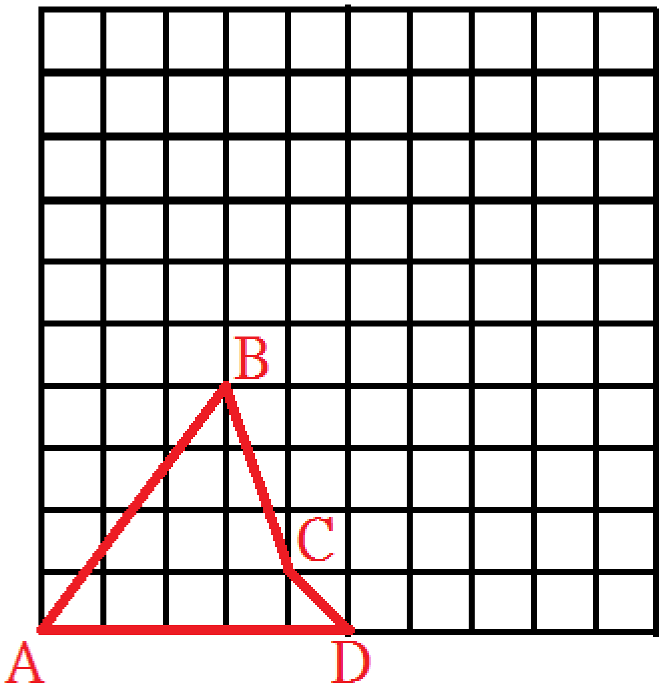
延伸研究:凹凸四邊形的反三角函數研究

研究緣由:在探究前面的式子時，我們遇到了些研究瓶頸，想不到該延伸至何處，就在這時，我們靈光一閃，想難道反三角函數只能讓區區兩角相加嗎。所以我們便開始讓多個角進行相加，試圖找出多個角相加的反三角函數式。首先便是四邊形的推廣。

對於四邊形的要求，我們先指定為一個凹四邊形(鏢型)ABCD，並固定其兩邊長$\underline{AB}$、$\underline{AD}$、以$\underline{BD}$內的點作為 C 點找出鏢型 ABCD，並藉由代數、三角函數、向量等等數學工具找出反三角函數與鏢型 ABCD 四個角的對應關聯。

*固定 A,B,D 點，調整 C 點座標

1. A(0,0) B(3,4) C(4,1) D(5,0)



∠BAD+∠ADC+∠ABC= ∠BCD

∠BCD=arctan($\frac{-1}{2}$) ∠BAD=arctan($\frac{4}{3}$)

∠ABC=arctan($\frac{13}{9}$) ∠ADC=arctan(1)

arctan($\frac{-1}{2}$)=arctan($\frac{4}{3}$)+arctan($\frac{13}{9}$)+arctan(1)

同理 設 C(x,y)

故 AB 向量(3,4)BA 向量(-3,-4) BC 向量(X-3,Y-4)CB 向量(3-X,4-Y)

CD 向量(5-X,-Y)DC 向量(X-5,Y) DA 向量(-5,0)AD 向量(5,0)

(1)cos∠BCD= $\frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{|\vec{CB}||\vec{CD}|}$，cos∠BCD= $\frac{X^2+Y^2-8X-4Y+15}{\sqrt{X^2+Y^2-6X-8Y+25}\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}}$

，tan∠BCD= $\frac{-4X-2Y+20}{X^2+Y^2-8X-4Y+15}$

(2)cos∠BAD= $\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}||\vec{AD}|}$，cos∠BAD= $\frac{3x5+4x0}{5x5}=\frac{3}{5}$，tan∠BAD= $\frac{4}{3}$

(3)cos∠ADC= $\frac{\vec{DA}\cdot\vec{DC}}{|\vec{DA}||\vec{DC}|}$，cos∠ADC= $\frac{25-5X}{\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}\sqrt{25}}$，tan∠ADC= $\frac{Y}{5-X}$

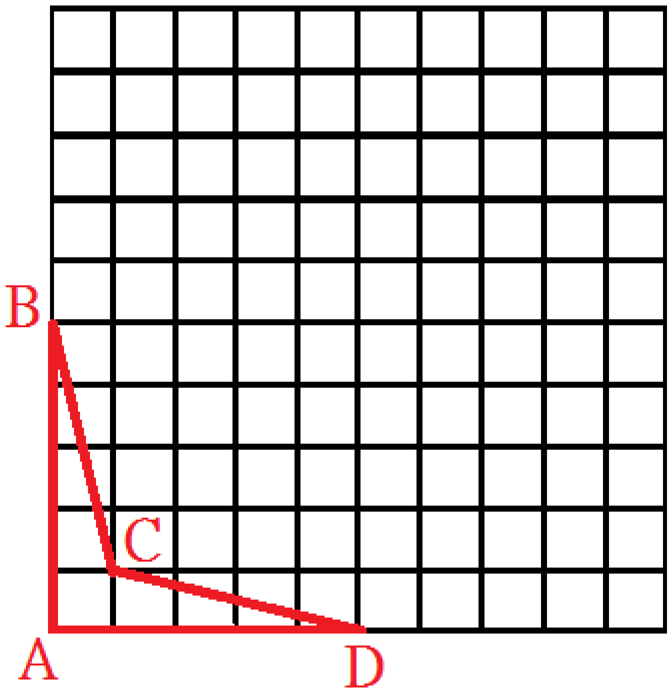
(4)cos∠ABC= $\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}$，cos∠ABC= $\frac{25-3X-4Y}{\sqrt{X^2+Y^2-6X-8Y+25}\sqrt{25}}$，tan∠ABC= $\frac{4X-3Y}{-3X-4Y+25}$

結合(1)(2)(3)(4)可推得下列一般式:

arctan($\frac{-4X-2Y+20}{X^2+Y^2-8X-4Y+15}$)=arctan($\frac{4}{3}$)+arctan($\frac{4X-3Y}{-3X-4Y+25}$)+arctan($\frac{Y}{5-X}$)

*固定 A,B,D 點，調整 C 點座標

2. A(0,0) B(0,5) C(1,1) D(5,0)



∠BAD+∠ABC+∠ADC= ∠BCD

∠BCD=arctan($\frac{-15}{8}$) ∠BAD=($\frac{\pi}{2}$) ∠ABC=arctan($\frac{1}{4}$) ∠ADC=arctan($\frac{1}{4}$)

arctan($\frac{-15}{8}$)= $\frac{\pi}{2}$+arctan($\frac{1}{4}$)+arctan($\frac{1}{4}$)

同理 設 C(x,y)

故 AB 向量(0,5)BA 向量(0,-5) BC 向量(X,Y-5)CB 向量(-X,5-Y)

CD 向量(5-X,-Y)DC 向量(X-5,Y) DA 向量(-5,0)AD 向量(5,0)

(1)cos∠BCD= $\frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{|\vec{CB}||\vec{CD}|}$，cos∠BCD= $\frac{X^2+Y^2-5X-5Y}{\sqrt{X^2+Y^2-10Y+25}\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}}$

，tan∠BCD= $\frac{5X+5Y-25}{X^2+Y^2-5X-5Y}$

(2)∠BAD=90 度= $\frac{\pi}{2}$

(3)cos∠ADC= $\frac{\vec{DA}\cdot\vec{DC}}{|\vec{DA}||\vec{DC}|}$，cos∠ADC= $\frac{25-5X}{\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}\sqrt{25}}$，tan∠ADC= $\frac{Y}{5-X}$

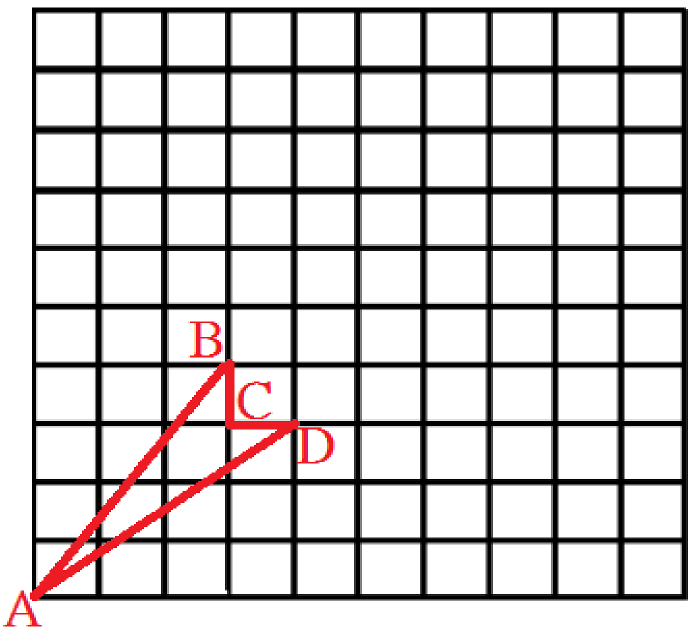
(4)cos∠ABC= $\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}$，cos∠ABC= $\frac{25-5Y}{\sqrt{X^2+Y^2-10Y+25}\sqrt{25}}$，tan∠ABC= $\frac{X}{5-Y}$

結合(1)(2)(3)(4)可推得下列一般式:

arctan($\frac{5X+5Y-25}{X^2+Y^2-5X-5Y}$)=arctan($\frac{X}{5-Y}$)+arctan($\frac{Y}{5-X}$)+($\frac{\pi}{2}$)

*固定 A,B,D 點，調整 C 點座標

3. A(0,0) B(3,4) C(3,3) D(4,3)



∠BAD+∠ABC+∠ADC= ∠BCD

∠BCD=($\frac{\pi}{2}$) ∠BAD=arctan($\frac{12}{25}$) ∠ABC=arctan($\frac{3}{4}$) ∠ADC=arctan($\frac{3}{4}$)

$\frac{\pi}{2}$ =arctan($\frac{12}{25}$)+arctan($\frac{3}{4}$)+arctan($\frac{3}{4}$)

同理 設 C(x,y)

故 AB 向量(3,4)BA 向量(-3,-4) BC 向量(X-3,Y-4)CB 向量(3-X,4-Y)

CD 向量(4-X,3-Y)DC 向量(X-4,Y-3) DA 向量(-4,-3)AD 向量(4,3)

(1)cos∠BCD= $\frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{|\vec{CB}||\vec{CD}|}$, cos∠BCD= $\frac{X^2+Y^2-7X-7Y+24}{\sqrt{X^2+Y^2-6X-8Y+25}\sqrt{X^2+Y^2-8X-6Y+25}}$

,tan∠BCD=($\frac{x+y-7}{X^2+Y^2-7x-7y+29}$)

(2)cos∠BAD= $\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}||\vec{AD}|}$, cos∠BAD= $\frac{3x4+4x3}{5x5}=\frac{24}{25}$, tan∠BAD= $\frac{7}{24}$

(3)cos∠ADC= $\frac{\vec{DA}\cdot\vec{DC}}{|\vec{DA}||\vec{DC}|}$, cos∠ADC= $\frac{25-4X-3Y}{\sqrt{X^2+Y^2-8X-6Y+25}\sqrt{25}}$

, tan∠ADC= $\frac{3X-4Y}{25-4X-3Y}$

(4)cos∠ABC= $\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}$, cos∠ABC= $\frac{25-3X-4Y}{\sqrt{X^2+Y^2-6X-8Y+25}\sqrt{25}}$

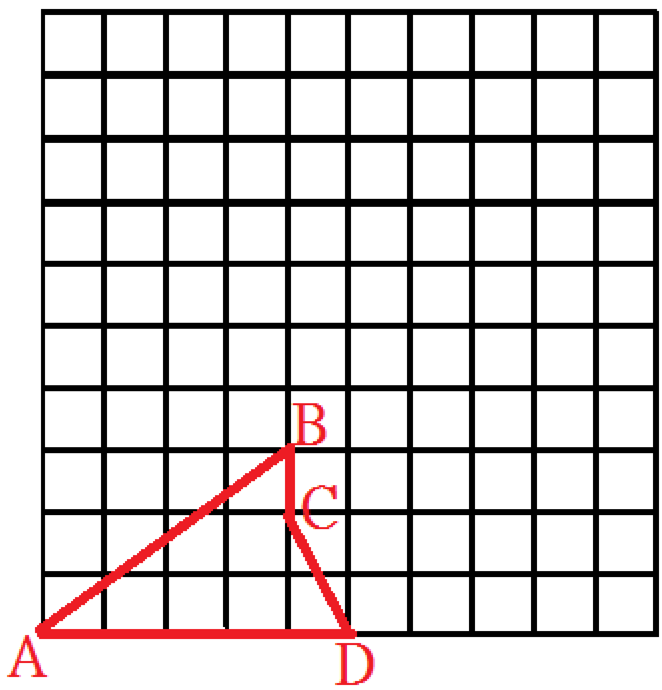
, tan∠ABC= $\frac{4X-3Y}{25-3X-4Y}$

結合(1)(2)(3)(4)可推得下列一般式:

arctan($\frac{x+y-7}{X^2+Y^2-7x-7y+29}$)=arctan($\frac{7}{24}$)+arctan($\frac{4x-3y}{-3x-4y+25}$)+arctan($\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}$)

*固定 A,B,D 點，調整 C 點座標

4. A(0,0) B(4,3) C(4,2) D(5,0)



∠BAD+∠ABC+∠ADC= ∠BCD

∠BCD=arctan(−2)，∠BAD=arctan($\frac{3}{4}$)，∠ABC=arctan($\frac{4}{3}$)

∠ADC=arctan(2)

arctan(-2)=arctan($\frac{3}{4}$)+arctan($\frac{4}{3}$)+arctan(2)

同理 設 C(x,y)

故 AB 向量(4,3)BA 向量(-4,-3) BC 向量(X-4,Y-3)CB 向量(4-X,3-Y)

CD 向量(5-X,-Y)DC 向量(X-5,Y) DA 向量(-5,0)AD 向量(5,0)

(1)cos∠BCD= $\frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{|\vec{CB}|\,|\vec{CD}|}$，cos∠BCD= $\frac{X^2+Y^2-9X-3Y+20}{\sqrt{X^2+Y^2-8X-6Y+25}\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}}$

，tan∠BCD= $\frac{-3x-y+15}{X^2+Y^2-9x-3y+20}$

(2)cos∠BAD= $\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AD}|}$，cos∠BAD= $\frac{4x5+3x0}{5x5}=\frac{4}{5}$，tan∠BAD= $\frac{3}{4}$

(3)cos∠ADC= $\frac{\vec{DA}\cdot\vec{DC}}{|\vec{DA}|\,|\vec{DC}|}$，cos∠ADC= $\frac{25-5X}{\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}\sqrt{25}}$，tan∠ADC= $\frac{Y}{5-X}$

(4)cos∠ABC= $\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\,|\vec{BC}|}$，cos∠ABC= $\frac{25-4X-3Y}{\sqrt{X^2+Y^2-8X-6Y+25}\sqrt{25}}$

，tan∠ABC= $\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}$

結合(1)(2)(3)(4)可推得下列一般式:

arctan($\frac{-3x-y+15}{X^2+Y^2-9x-3y+20}$)=arctan($\frac{3}{4}$)+arctan($\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}$)+arctan($\frac{y}{-x+5}$)

將上述整理為以下 4 個一般式:

1. A(0,0) B(3,4) C(X,Y) D(5,0)

arctan($\frac{-4X-2Y+20}{X^2+Y^2-8X-4Y+15}$)=arctan($\frac{4}{3}$)+arctan($\frac{4X-3Y}{-3X-4Y+25}$)+arctan($\frac{Y}{5-X}$)

2. A(0,0) B(0,5) C(X,Y) D(5,0)

arctan($\frac{5X+5Y-25}{X^2+Y^2-5X-5Y}$)=arctan($\frac{X}{5-Y}$)+arctan($\frac{Y}{5-X}$)+($\frac{\pi}{2}$)

3. A(0,0) B(3,4) C(X,Y) D(4,3)

arctan($\frac{x+y-7}{X^2+Y^2-7x-7y+24}$)=arctan($\frac{7}{24}$)+arctan($\frac{4x-3y}{-3x-4y+25}$)+arctan($\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}$)

4. A(0,0) B(4,3) C(X,Y) D(5,0)

arctan($\frac{-3x-y+15}{X^2+Y^2-9x-3y+20}$) =arctan($\frac{3}{4}$)+arctan($\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}$)+arctan($\frac{y}{-x+5}$)

將上述四個一般式在進行更深層的一般式推廣，且不再拘泥於$\overline{AB}$、$\overline{AD}$需要等長

設 A(0,0),B(a_1,b_1),C(x,y),D(a_2 ,b_2)

故 AB 向量(a_1,b_1)BA 向量(-a_1,-b_1) BC 向量(X-a_1,Y-b_1)CB 向量(a_1-X,b_1-Y)

CD 向量(a_2-X,b_2-Y)DC 向量(X-a_2,Y-b_2) DA 向量(-a_2,-b_2)AD 向量(a_2,b_2)

(1)cos∠BCD= $\frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{|\vec{CB}|\,|\vec{CD}|}$, cos∠BCD= $\frac{a_1a_2-a_1x-a_2x+x^2+b_1b_2-b_1y-b_2y+y^2}{\sqrt{(a_1-x)^2+(b_1-y)^2}\ \sqrt{(a_2-x)^2+(b_2-y)^2}}$

, tan∠BCD= $\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}$

(2)cos∠BAD= $\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AD}|}$, cos∠BAD= $\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\ \sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$

, tan∠BAD= $\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$

(3)cos∠ADC= $\frac{\vec{DA}\cdot\vec{DC}}{|\vec{DA}|\,|\vec{DC}|}$, cos∠ADC= $\frac{-a_2x+{a_2}^2-b_2y+{b_2}^2}{\sqrt{(-a_2)^2+(-b_2)^2}\ \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}$

，$\tan\angle ADC=\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+a_2{}^2+b_2{}^2}$

(4)$\cos\angle ABC=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\,|\vec{BC}|}$，$\cos\angle ABC=\frac{-a_1x+a_1{}^2-b_1y+b_1{}^2}{\sqrt{(a_1)^2+(b_1)^2}\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}$

，$\tan\angle ABC=\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+a_1{}^2+b_1{}^2}$

在(1)(2)(3)(4)後即可得到

定理八：$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$

$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+a_1{}^2+b_1{}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+a_2{}^2+b_2{}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$

*ps 此處的**定理八**暫可用在四銳角情況下使用

推廣:多邊形四角因為上面的四個角在不同角度下的變化

因為**定理八**只能用在四銳角的狀況下，故我們決定探討四角在非四銳角情形下，對多邊形反正切函數式的影響。首先我們先著重探討凹四邊形的情況:

前提定義: arctan 值轉換出的角度，我們將其界定於 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間

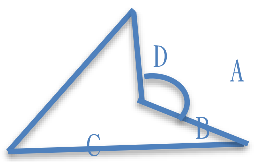
故角度介於0 ◦ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間時，原角度即為 arctan 值所對應的角度

則角度介於$\frac{\pi}{2}$與 π 之間時，原角度即為 arctan 值所對應的角度$+\pi$

則角度介於π與 $\frac{3\pi}{2}$ 之間時，原角度即為 arctan 值所對應的角度$+\pi$

最後角度介於$\frac{3\pi}{2}$與 2π 之間時，原角度即為 arctan 值所對應的角度$+2\pi$

狀況一: ∠A, ∠B, ∠C, ∠D 皆為銳角，得



$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$

$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+a_1{}^2+b_1{}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+a_2{}^2+b_2{}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$

狀況二:90° $< \angle A <$ 180°，∠B, ∠C, ∠D 皆為銳角，得

$$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)+\pi =$$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

我們將此定義為**定理九**

狀況三:90° $< \angle A <$ 180°，∠B, ∠C, ∠D 其中一角> 90°且< 180°，剩餘兩角為銳角，得

$$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)+\pi =$$

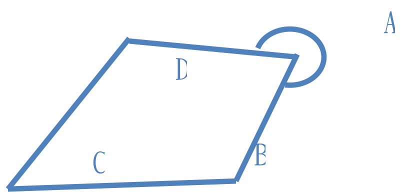
$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)+\pi$$

π*互相抵銷*推得

$$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

接下來我們探討幾個凸多邊形的狀況:



狀況四: 180° $< \angle A <$ 270°，∠B, ∠C, ∠D 其中一角> 90°且< 180°，剩餘兩角為銳角，則

$$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right) = + \pi$$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)+\pi$$

將 π 抵銷後，即得到

$$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

狀況五: 180° $< \angle A <$ 270°，∠B, ∠C, ∠D 其中一角> 180°且< 270°，餘兩角為銳角，得

$$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right) = + \pi$$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})+\pi$

將 π 抵銷後，即得到

$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})=$
$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})$

狀況六: $270^\circ < \angle A < 360^\circ$，$\angle$B, $\angle$C, $\angle$D 其中二角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$，剩餘一角為銳角，得

$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})+2\pi=$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\pi+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})+\pi$

將π抵銷後，即可得

$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})=$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})$

狀況七: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$，$60^\circ < \angle$B, $\angle$C, $\angle$D $< 90^\circ$，得

$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})+\pi=$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})$

狀況八: $270^\circ < \angle A < 360^\circ$，*三鈍角*$90^\circ < \angle$B, $\angle$C, $\angle$D $< 120^\circ$，得

$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})+2\pi=$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\pi+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\pi+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})+\pi$

將π削去後可得

$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})=$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})+\pi$

我們將此定義為**定理十**

狀況九: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$，∠B, ∠C, ∠D 其中二角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$，剩餘一角為銳角，得

$$\arctan\left(\frac{\left(b_1-b_2\right)x+\left(a_2-a_1\right)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-\left(a_1+a_2\right)x-\left(b_1+b_2\right)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)+\pi =$$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right) + \arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right) +\pi +\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)+\pi$$

將π消去後即可得

$$\arctan\left(\frac{\left(b_1-b_2\right)x+\left(a_2-a_1\right)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-\left(a_1+a_2\right)x-\left(b_1+b_2\right)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right) + \arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)+\pi$$

在整理之後我們得到了幾個定理:

首先是**定理八**:$\arctan\left(\frac{\left(b_1-b_2\right)x+\left(a_2-a_1\right)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-\left(a_1+a_2\right)x-\left(b_1+b_2\right)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

其在五個狀況下會成立

狀況一: ∠A, ∠B, ∠C, ∠D 皆為銳角

狀況三:$90^\circ < \angle A < 180^\circ$，∠B, ∠C, ∠D 其中一角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$，剩餘兩角為銳角

狀況四: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$，∠B, ∠C, ∠D 其中一角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$，剩餘兩角為銳角

狀況五: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$，∠B, ∠C, ∠D 其中一角$> 180^\circ$且$< 270^\circ$，餘兩角為銳角

狀況六: $270^\circ < \angle A < 360^\circ$，∠B, ∠C, ∠D 其中二角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$，剩餘一角為銳角

接下來是**定理九:** $\arctan\left(\frac{\left(b_1-b_2\right)x+\left(a_2-a_1\right)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-\left(a_1+a_2\right)x-\left(b_1+b_2\right)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)+\pi =$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

其在兩個狀況下會成立

狀況二 ：$90^\circ < \angle A < 180^\circ$，∠B, ∠C, ∠D 皆為銳角

狀況七 ：$180^\circ < \angle A < 270^\circ$，$60^\circ <$ ∠B, ∠C, ∠D $< 90^\circ$

最後是**定理十 ：** $\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}) =$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}) + \pi$

其在兩個狀況下會成立

狀況八: $270^\circ < \angle A < 360^\circ$，*三鈍角*$90^\circ <$ ∠B, ∠C, ∠D $< 120^\circ$

狀況九: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$，∠B, ∠C, ∠D 其中二角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$，剩餘一角為銳角

以上，便是我們對多邊形不同角度下的處理

伍、研究成果

經過一番努力，我們研究出了許多的反三角函數的一般式

（一）將作者提供的反三角函數式進行證明與一般化

定理一:$\arctan(\frac{b}{a})=\arctan(\frac{b^2-a^2}{2ab}) + \frac{1}{2}\arctan(\frac{2ab}{b^2-a^2})$

定理二:$\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{a}{b} =\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

定理三:$2\arctan\frac{a}{b} = \arctan\frac{2ab}{b^2- a^2}$

定理四:$2\arctan\frac{a}{b}+\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2ab}{b^2- a^2}+\arctan\frac{b}{a}$

定理五:$\arctan\frac{b}{a} -2\arctan\frac{a}{b} =\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab} -\arctan\frac{2ab}{b^2- a^2}$

定理六:$\arctan\frac{b}{a} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

（二）把費式數列帶入其中得到的特殊關係式

設 a= f_n b= f_{n+1} 當 n>=2 時

定理七: $\arctan(\frac{f_{n+1}}{f_n}) = \arctan(\frac{{f_{n+1}}^2-{f_n}^2}{2f_{n+1}f_n}) + \arctan(\frac{f_n}{f_{n+1}})$

（三）將反三角函數應用於凹凸四邊形三內角相加等於外角的特性(**定理八**只適用於四銳角)

定理八：$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}) =$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})$

（四）探討**定理八**在不同角度下的情況

定理九: $\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})+\pi =$

$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})$

定理十 ： $\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}) =$

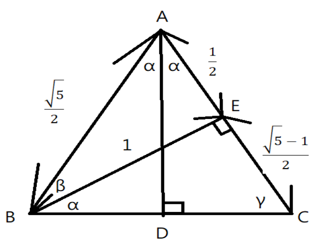
$\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}) + \pi$

陸、討論

但此研究雖聚焦於多邊形，但是我們目前只有針對到四邊形的反正切關係式。故我們認為如果有更深入研究的機會的話，我們希望能將圖形擴增至五邊形、六邊形……等等的多邊形。並期望能於各個多邊形的反正切關係式其中找尋出其中特有的規律。

柒、結論

本研究聚焦於：「反三角函數及圖形的各種關係」首先我們將重點放在證明原作者的反三角函數式，試著在其中找出某種規律，並推出一般式：+



定理一:$\arctan(\frac{b}{a})$=$\arctan(\frac{b^2-a^2}{2ab})$ + $\frac{1}{2}\arctan(\frac{2ab}{b^2-a^2})$

定理二:$\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

定理三:$2\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}$

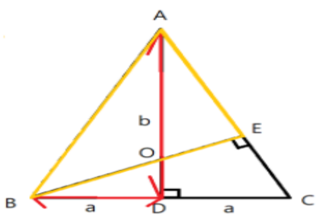
定理四:$2\arctan\frac{a}{b}+\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}=\frac{1}{2}\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}+\arctan\frac{b}{a}$

定理五:$\arctan\frac{b}{a}-2\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}-\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}$

定理六:$\arctan\frac{b}{a}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

接著，在證明以及觀察作者的圖形時，我們發現作者設計的邊長以及圖形似乎和費式數列有著某種關聯性，因此我們試著將費式數列代入：

設 a= f_n b= f_{n+1} 當 n>=2 時



定理七: $\arctan(\frac{f_{n+1}}{f_n})=\arctan(\frac{{f_{n+1}}^2-{f_n}^2}{2f_{n+1}f_n})+\arctan(\frac{f_n}{f_{n+1}})$

其後，我們思考，既然在三角形，能找出一般式使反三角函數滿足某幾角度相加會等於另一角，那麼在於多邊形是否也能找出一般式，我們利用了凹凸四邊形三內角相加等於外角的特性來證明

ｓｔｅｐ１：我們先用座標假設了四種凹凸四邊形

（１）A(0,0) B(3,4) C(X,Y) D(5,0)

（２）A(0,0) B(0,5) C(X,Y) D(5,0)

（３）A(0,0) B(3,4) C(X,Y) D(4,3)

（４）A(0,0) B(4,3) C(X,Y) D(5,0)

ｓｔｅｐ２：利用向量內積求出各角的ｔａｎ值，並將其寫成反三角函數的關係式

1. A(0,0) B(3,4) C(X,Y) D(5,0)

arctan($\frac{-4X-2Y+20}{X^2+Y^2-8X-4Y+15}$)=arctan($\frac{4}{3}$)+arctan($\frac{4X-3Y}{-3X-4Y+25}$)+arctan($\frac{Y}{5-X}$)

2. A(0,0) B(0,5) C(X,Y) D(5,0)

arctan($\frac{5X+5Y-25}{X^2+Y^2-5X-5Y}$)=arctan($\frac{X}{5-Y}$)+arctan($\frac{Y}{5-X}$)+($\frac{\pi}{2}$)

3. A(0,0) B(3,4) C(X,Y) D(4,3)

arctan($\frac{x+y-7}{X^2+Y^2-7x-7y+24}$)=arctan($\frac{7}{24}$)+arctan($\frac{4x-3y}{-3x-4y+25}$)+arctan($\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}$)

4. A(0,0) B(4,3) C(X,Y) D(5,0)

arctan($\frac{-3x-y+15}{X^2+Y^2-9x-3y+20}$) =arctan($\frac{3}{4}$)+arctan($\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}$)+arctan($\frac{y}{-x+5}$)

ｓｔｅｐ３：最後我們用座標假設了一個任意四邊形，並得出了最後的一般式，即為**定理八**

設 A(0,0),B(a_1,b_1),C(x,y),D(a_2 ,b_2)

定理八：arctan($\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}$)

arctan($\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+a_1^2+b_1^2}$) + arctan($\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+a_2^2+b_2^2}$) + arctan($\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$)

最後，我們探討了四個角的角度變化會遭遇的狀況，並列出了**狀況一到九**

狀況一: ∠A, ∠B, ∠C, ∠D 皆為銳角

狀況二 ：$90^\circ < \angle A < 180^\circ$ ，∠B, ∠C, ∠D 皆為銳角

狀況三:$90^\circ < \angle A < 180^\circ$ ，∠B, ∠C, ∠D 其中一角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$ ，剩餘兩角為銳角

狀況四: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$ ，∠B, ∠C, ∠D 其中一角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$ ，剩餘兩角為銳角

狀況五: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$ ，∠B, ∠C, ∠D 其中一角$> 180^\circ$且$< 270^\circ$ ，餘兩角為銳角

狀況六: $270^\circ < \angle A < 360^\circ$ ，∠B, ∠C, ∠D 其中二角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$ ，剩餘一角為銳角

狀況七 ：$180^\circ < \angle A < 270^\circ$ ，$60^\circ <$ ∠B, ∠C, ∠D $< 90^\circ$

狀況八: $270^\circ < \angle A < 360^\circ$ ，*三鈍角*$90^\circ <$ ∠B, ∠C, ∠D $< 120^\circ$

狀況九: $180^\circ < \angle A < 270^\circ$ ，∠B, ∠C, ∠D 其中二角$> 90^\circ$且$< 180^\circ$ ，剩餘一角為銳角

並在此九個狀況中找到了**定理九**與**定理十**

定理九: $\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)+\pi=$

$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$

定理十 ： $\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$

$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)+\pi$

以上便是我們這次科展的研究。

捌、參考文獻資料與其他

(一)反正切函數，二階線性遞迴數列與疊在一起的方格紙(2004) 郭子豪、李育霖

https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=96&a=6822&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=2761

【評語】050414

作者(們)由於一篇短論文引起的興趣，尋求一些特殊的三角形和四邊形相關的反正切函數的等式。作者非常用功，呈現也很仔細。前六個公式都是在等腰三角形上即可完成，由於這些等式出現黃金比例 (1.618)，因此也很自然地和費氏數列有關。作品的後半部將反三角公式推廣到多角度和，這部分則太過刻意。而且，因為討論的三角形和四邊形太特殊了，得出來的等式基本上沒有普遍性， 也就是說，我們不能用它來預測其他的三角形或四邊形的情況，是比較可惜的。另外，作品的標題不太合適，Wu 的文章也沒有列在參考文獻內。然能夠從課本相關的簡單等式中挖掘出新的結果， 是值得肯定的.

作品簡報

在多邊形尋求反正切函數是否搞錯了什麼

科別:數學科

組別:高級中等學校組

作品名稱:在多邊形尋求反正切函數是否搞錯了什麼

關鍵詞；多邊形、反正切函數、向量

壹、研究動機

有一次在我們思考著題目時，科展指導老師給了我們一篇有趣的數學文章，在這篇文章中作者 REX H.WU用短短的兩頁，介紹了六個有關反三角函數的公式:他用畫圖的方式，列出了以下的六個等式，但卻缺少了證明，故我們決定先詳細證明之，但在證明的過程中，我們也開始對這個主題有了許多的發想，包括將數列、方格紙、向量等等的數學主題融合進去並做延伸

(1) $\arctan\varphi = \arctan(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})\arctan 2$

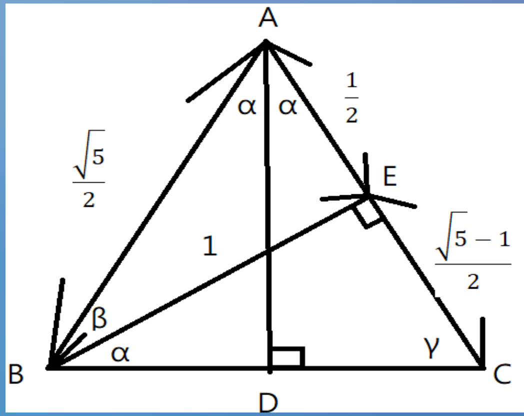
(2) $\arctan\varphi - \arctan(\frac{1}{\varphi}) = \arctan(\frac{1}{2})$

(3) $2\arctan(\frac{1}{\varphi}) = \arctan 2$

(4) $\arctan\varphi + (\frac{1}{2})\arctan 2 = \frac{\pi}{2} = 2\arctan(\frac{1}{\varphi}) + \arctan(\frac{1}{2})$

(5) $\arctan\varphi - 2\arctan(\frac{1}{\varphi}) = \arctan(\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})\arctan 2$

(6) $\arctan\varphi = \frac{\pi}{4} + (\frac{1}{2})\arctan(\frac{1}{2})$



貳、研究目的

根據此題目，我們準備了下述的幾個研究目的

1、如何以圖形和文字詳細證明上述六個式子。

2、將上述六個式子進行一般式推廣。

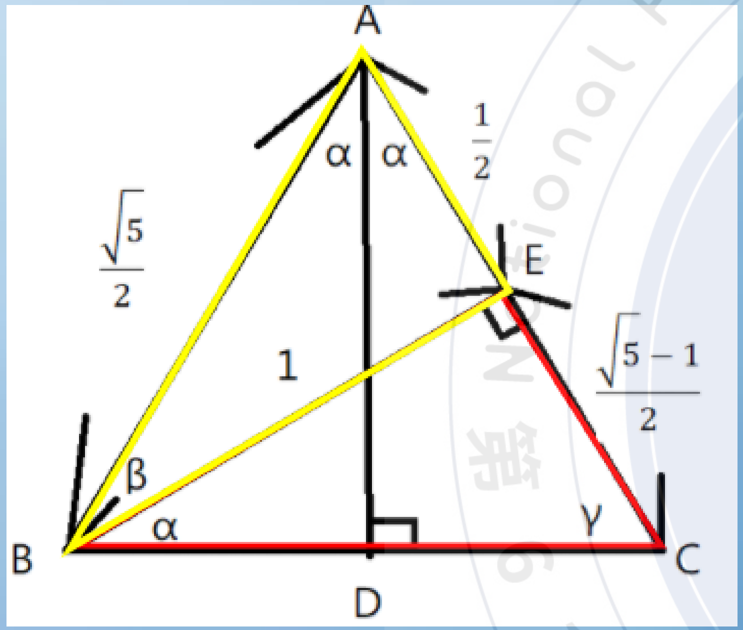
3、將其三角形的反正切函數等式推廣成多邊形的反正切函數等式。

參、研究過程與方法

第一部分 ： 原式的圖形詳細證明及一般化證明

在上述文章中，我們得到了作者提供的六個反三角函數式，但因為作者說明的不完全， **第一步**我們決定以圖形及文字證明的方式來詳細證明此六個式子。而**第二步**則是將各式進行一般化的操作。

(1) 第一式：$\arctan\varphi = \arctan(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})\arctan2$



$\varphi=\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$，$\frac{1}{\varphi}=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

證明:

在ΔBCE中，$\tan\gamma = \frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$，又$\gamma=\alpha+\beta$

故$\tan(\alpha+\beta) = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} = \varphi$，則可得

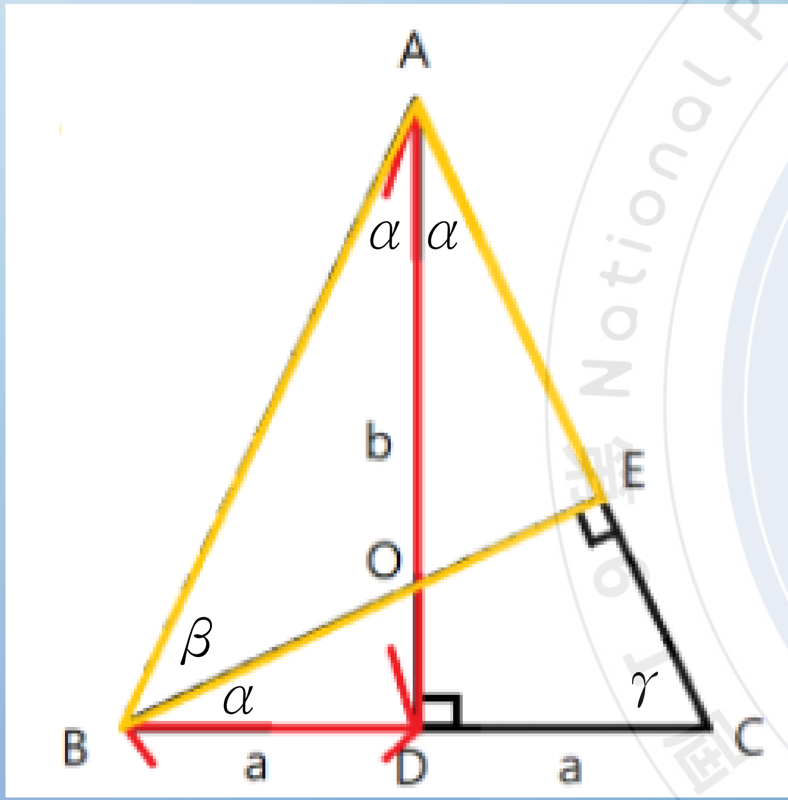
$\arctan\varphi = \arctan\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} = \alpha+\beta$

在ΔABE中，$\tan\beta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$，故$\arctan\frac{1}{2} = \beta$

在ΔABE中，$\tan2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$，故$\arctan2 = 2\alpha$，$\frac{1}{2}\arctan2 = \alpha$

故$\arctan(\varphi) = \gamma = \alpha+\beta$，代入原式，$(\alpha+\beta) = \beta+\alpha$ 得證

定理(一):$\arctan(\frac{b}{a})=\arctan(\frac{b^2-a^2}{2ab})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{2ab}{b^2-a^2})$



證明:

因為△ABC是等腰三角形

由△ABC面積可知$2a \times b \times \frac{1}{2}=\sqrt{a^2+b^2} \times \overline{BE} \times \frac{1}{2}$

可得 $\overline{BE} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

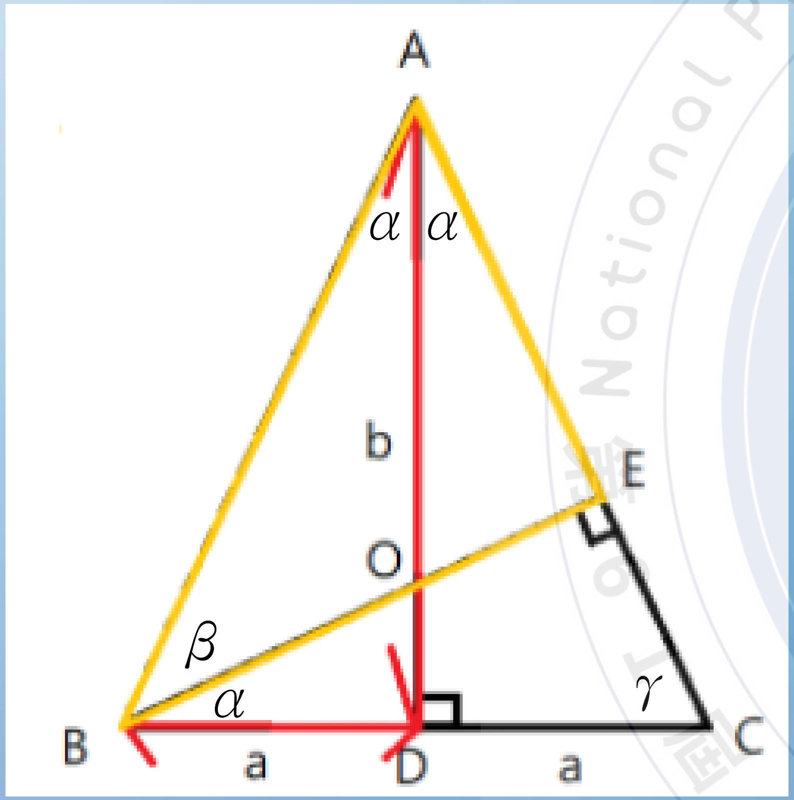
而由△ABE中，利用畢氏定理可得$\overline{BE}^2=\overline{AB}^2\overline{AE}^2$, $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2-\overline{BE}^2$

$\overline{AE}^2=a^2+b^2-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$, 得$\overline{AE}=\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

設∠BAD=∠CAD=α，∠ABE=β，∠ACD=∠ABD=γ，且$\gamma=\alpha+\beta$

$\tan\gamma=\frac{b}{a}$，$\tan\beta=\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{b^2-a^2}{2ab}$，$\tan2\alpha=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{2ab}{b^2-a^2}$

可推得$\arctan(\frac{b}{a})=\arctan(\frac{b^2-a^2}{2ab})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{2ab}{b^2-a^2})$



同定理一，我們將第(一)到(六)式推廣為以下的六個定理

定理(一): $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)=\arctan\left(\frac{b^2-a^2}{2ab}\right)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2ab}{b^2-a^2}\right)$

定理(二): $\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

定理(三): $2\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}$

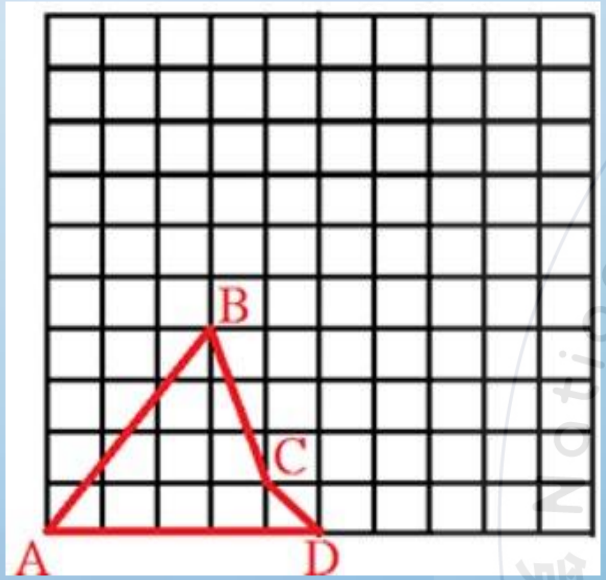
定理(四): $2\arctan\frac{a}{b}+\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}=\frac{1}{2}\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}+\arctan\frac{b}{a}$

定理(五): $\arctan\frac{b}{a}-2\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}-\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}$

定理(六): $\arctan\frac{b}{a}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

多邊形的推廣

1. A(0,0) B(3,4) C(4,1) D(5,0)



$\angle BAD+\angle ADC+\angle ABC=\angle BCD$

$\angle BCD=\arctan(\frac{-1}{2})$，$\angle BAD=\arctan(\frac{4}{3})$

$\angle ABC=\arctan(\frac{13}{9})$， $\angle ADC=\arctan(1)$

$\arctan(\frac{-1}{2})=\arctan(\frac{4}{3})+\arctan(\frac{13}{9})+\arctan(1)$

同理 設C(x,y)

故$\overrightarrow{AB}(3,4)$，$\overrightarrow{BA}(-3,-4)$，$\overrightarrow{BC}(X-3,Y-4)$，$\overrightarrow{CB}(3-X,4-Y)$

$\overrightarrow{CD}(5-X,-Y)$，$\overrightarrow{DC}(X-5,Y)$，$\overrightarrow{DA}(-5,0)$，$\overrightarrow{AD}(5,0)$

(1)$\cos\angle BCD=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{CD}|}$，$\cos\angle BCD=\frac{X^2+Y^2-8X-4Y+15}{\sqrt{X^2+Y^2-6X-8Y+25}\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}}$

，$\tan\angle BCD=\frac{-4X-2Y+20}{X^2+Y^2-8X-4Y+15}$

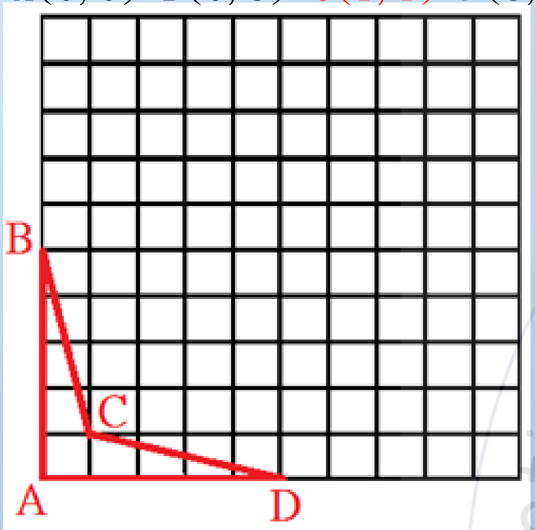
(2)$\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}|}$，$\cos\angle BAD=\frac{3x5+4x0}{5x5}=\frac{3}{5}$，$\tan\angle BAD=\frac{4}{3}$

(3)$\cos\angle ADC=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DA}|\,|\overrightarrow{DC}|}$，$\cos\angle ADC=\frac{25-5X}{\sqrt{X^2+Y^2-10X+25}\sqrt{25}}$，$\tan\angle ADC=\frac{Y}{5-X}$

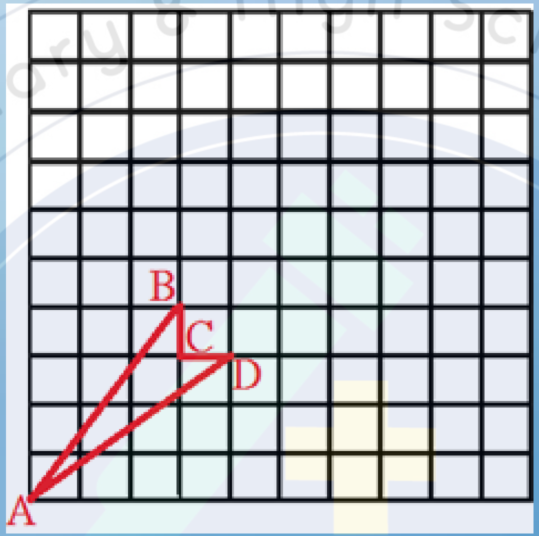
(4)$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|}$，$\cos\angle ABC=\frac{25-3X-4Y}{\sqrt{X^2+Y^2-6X-8Y+25}\sqrt{25}}$，$\tan\angle ABC=\frac{4X-3Y}{-3X-4Y+25}$

結合(1)(2)(3)(4)可推得下列一般式:$\arctan(\frac{-4X-2Y+20}{X^2+Y^2-8X-4Y+15})=\arctan(\frac{4}{3})+\arctan(\frac{4X-3Y}{-3X-4Y+25})+\arctan(\frac{Y}{5-X})$

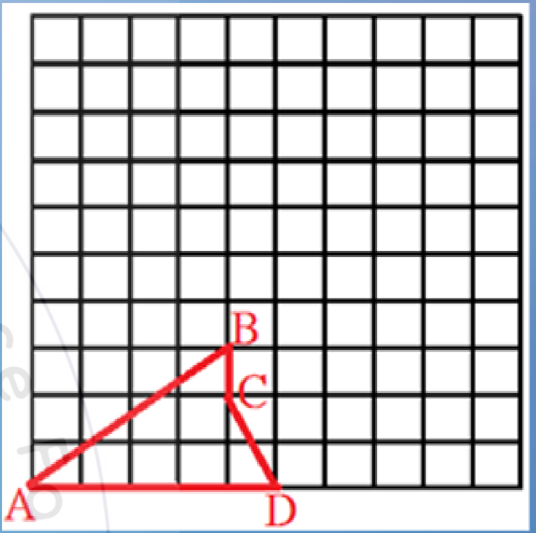
2. A(0, 0) B(0, 5) C(1, 1) D(5, 0)



3. A(0, 0) B(3, 4) C(3, 3) D(4, 3)



4. A(0, 0) B(4, 3) C(4, 2) D(5, 0)



1. A(0, 0) B(3, 4) C(X, Y) D(5, 0) $\arctan\left(\frac{-4X-2Y+20}{X^2+Y^2-8X-4Y+15}\right)=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\arctan\left(\frac{4X-3Y}{-3X-4Y+25}\right)+\arctan\left(\frac{Y}{5-X}\right)$

2. A(0, 0) B(0, 5) C(X, Y) D(5, 0) $\arctan\left(\frac{5X+5Y-25}{X^2+Y^2-5X-5Y}\right)=\arctan\left(\frac{X}{5-Y}\right)+\arctan\left(\frac{Y}{5-X}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)$

3. A(0, 0) B(3, 4) C(X, Y) D(4, 3) $\arctan\left(\frac{x+y-7}{X^2+Y^2-7x-7y+24}\right)=\arctan\left(\frac{7}{24}\right)+\arctan\left(\frac{4x-3y}{-3x-4y+25}\right)+\arctan\left(\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}\right)$

4. A(0, 0) B(4, 3) C(X, Y) D(5, 0) $\arctan\left(\frac{-3x-y+15}{X^2+Y^2-9x-3y+20}\right) =\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\arctan\left(\frac{3x-4y}{-4x-3y+25}\right)+\arctan\left(\frac{y}{-x+5}\right)$

將上述四個一般式在進行更深層的一般式推廣，且不再拘泥於AD、AB需要等長

設$A(0,0), B(a_1,b_1), C(x,y), D(a_2\ ,b_2)$

故$\overrightarrow{AB}(a_1,b_1)$，$\overrightarrow{BA}(-a_1,-b_1)$，$\overrightarrow{BC}(X-a_1,Y-b_1)$，$\overrightarrow{CB}(a_1-X,b_1-Y)$

$\overrightarrow{CD}(a_2-X,b_2-Y)$，$\overrightarrow{DC}(X-a_2,Y-b_2)$，$\overrightarrow{DA}(-a_2,-b_2)$，$\overrightarrow{AD}(a_2,b_2)$

(1) $\cos\angle BCD=\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{CD}|}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{a_1a_2-a_1x-a_2x+x^2+b_1b_2-b_1y-b_2y+y^2}{\sqrt{(a_1-x)^2+(b_1-y)^2}\ \sqrt{(a_2-x)^2+(b_2-y)^2}}$，$\tan\angle BCD=\dfrac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}$

(2) $\cos\angle BAD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}|}$，$\cos\angle BAD=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\ \sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$，$\tan\angle BAD=\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$

(3) $\cos\angle ADC=\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DA}|\,|\overrightarrow{DC}|}$，$\cos\angle ADC=\dfrac{-a_2x+{a_2}^2-b_2y+{b_2}^2}{\sqrt{(-a_2)^2+(-b_2)^2}\ \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}$，$\tan\angle ADC=\dfrac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}$

(4) $\cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|}$，$\cos\angle ABC=\dfrac{-a_1x+{a_1}^2-b_1y+{b_1}^2}{\sqrt{(a_1)^2+(b_1)^2}\ \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}$，$\tan\angle ABC=\dfrac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}$

$$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

肆、討論

推廣:多邊形四角因為上面的四個角在不同角度下的變化

因為**定理八**只能用在四銳角的狀況下，故我們決定探討四角在非四銳角情形下，對多邊形反正切函數式的影響。首先我們先著重探討凹四邊形的情況:

前提定義: arctan值轉換出的角度，我們將其界定於 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間

故角度介於0° 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間時，原角度即為arctan值所對應的角度

則角度介於$\frac{\pi}{2}$與 π 之間時，原角度即為arctan值所對應的角度+ π

則角度介於π與 $\frac{3\pi}{2}$ 之間時，原角度即為arctan值所對應的角度+ π

最後角度介於$\frac{3\pi}{2}$與 2π 之間時，原角度即為arctan值所對應的角度+ 2π

在整理之後我們得到了幾個定理:

首先是**定理八**:$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

其在五個狀況下會成立

狀況一: ∠A, ∠B, ∠C, ∠D皆為銳角

狀況三: 90° < ∠A < 180°，∠B, ∠C, ∠D其中一角> 90° 且< 180°，剩餘兩角為銳角

狀況四: 180° < ∠A < 270°，∠B, ∠C, ∠D其中一角> 90° 且< 180°，剩餘兩角為銳角

狀況五: 180° < ∠A < 270°，∠B, ∠C, ∠D其中一角> 180° 且< 270°，剩餘兩角為銳角

狀況六: 270° < ∠A < 360°，∠B, ∠C, ∠D其中二角> 90° 且< 180°，剩餘一角為銳角

接下來是**定理九**：$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)+\pi=$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)$$

其在兩個狀況下會成立

狀況二　：$90^\circ<\angle A<180^\circ$，$\angle B,\angle C,\angle D$皆為銳角

狀況七　：$180^\circ<\angle A<270^\circ$，$60^\circ<\angle B,\angle C,\angle D<90^\circ$

最後是**定理十**　：　$\arctan\left(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)}\right)=$

$$\arctan\left(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2}\right)+\arctan\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\right)+\pi$$

其在兩個狀況下會成立

狀況八：$270^\circ<\angle A<360^\circ$，三鈍角$90^\circ<\angle B,\angle C,\angle D<120^\circ$

狀況九：$180^\circ<\angle A<270^\circ$，$\angle B,\angle C,\angle D$其中二角$>90^\circ$且$<180^\circ$，剩餘一角為銳角

伍、結論

首先我們將重點放在證明原作者的反三角函數式，試著在其中找出某種規律，並推出一般式：

定理(一):$\arctan(\frac{b}{a})=\arctan(\frac{b^2-a^2}{2ab})+\frac{1}{2}\arctan(\frac{2ab}{b^2-a^2})$

定理(二):$\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

定理(三):$2\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}$

定理(四):$2\arctan\frac{a}{b}+\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}=\frac{1}{2}\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}+\arctan\frac{b}{a}$

定理(五):$\arctan\frac{b}{a}-2\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}-\arctan\frac{2ab}{b^2-a^2}$

定理(六):$\arctan\frac{b}{a}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\frac{b^2-a^2}{2ab}$

接下來我們將反三角函數應用於凹凸四邊形三內角相加等於外角的特性(**定理八**只適用於四銳角)

定理八：$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})=\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})$

最後探討**定理八**在不同角度下的情況

定理九：$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})+\pi=\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})$

定理十：$\arctan(\frac{(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y+(a_1a_2+b_1b_2)})=\arctan(\frac{-b_1x+a_1y}{-a_1x-b_1y+{a_1}^2+{b_1}^2})+\arctan(\frac{a_2y-b_2x}{-a_2x-b_2y+{a_2}^2+{b_2}^2})+\arctan(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2})+\pi$

陸、參考文獻資料與其他

(一)反正切函數，二階線性遞迴數列與疊在一起的方格紙(2004) 郭子豪、李育霖
https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=96&a=6822&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=2761

(二)
Rex H Wu.Proof Without Words;Some Arctangent Identities Involving 2 ,the Golden Ratio ,and Their Reciprocals