中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050411

一個集團免疫機率模型之探討

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 胡欣	龔詩尹
	楊昌宸

關鍵詞：集團免疫機率模型、二項式係數、同餘

摘要

本研究延續國中獨立研究，結合高中機率課程，建構二維與三維之集團免疫機率模型，特殊n之研究結果如下，其他情形請參閱內文：

一、

（一）二維：$n=2^k$時，具有抗體之總人數與無抗體之總人數的比例，必須維持奇數對奇數，模型才會有免疫效果。

$n=2^k+1$時，模型具不具備免疫效果，僅跟第一位與第n位有關。

（二）三維：$n=2^k+1$時，模型具不具備免疫效果，僅跟對應於正三角形三頂點位置的 3 人有關。

二、

（一）二維：$n=2^k$時，具有免疫效果之機率為 $\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{n-2}$ 。

$n=2^k+1$時，具有免疫效果之機率為 $2pq$ 。

（二）三維：$n=2^k+1$時，具有免疫效果之機率為 $\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)$ 。

三、

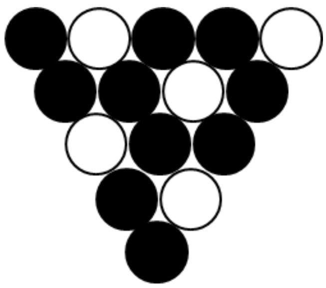
（一）二維：免疫效果的期望人數為 $1+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ ，特別是等機率時，期望人數為 3 人。

（二）三維：免疫效果的期望人數請參閱內文，特別是等機率時，期望人數為 6 人。

壹、研究動機

面對 2020 年新冠肺炎肆虐全球，世界各國使用不同的防疫政策來打擊 COVID-19，其中英國所提出的「佛系防疫」引起全球關注，其理念基於集團免疫（herd immunity）：當群體中有很大比例的人獲得免疫力時，其他沒有免疫力的個體就能受到保護而不被感染。然而，這樣的防疫邏輯並沒有足夠的科學證據予以證明。也正因為它的機制尚未被釐清，本研究擬將國中階段所參與之縣內獨立研究競賽獲得甲等之問題，結合高中所學，建構一個機率模式，進行試探性研究，詮釋並探討集團免疫的相關問題。

為了方便敘述所建構的機率模式，假設一群人的集團免疫效果，是經過每相鄰兩人的交互影響，若這兩人中，恰有一人具有足夠的抗體，則免疫效果產生，反之則無，帶有足夠抗體者以黑色球表示，未帶有足夠抗體者以白色球表示。依據這樣的假設，這個機率模式，刻畫這 n 個人的集團免疫效果，必須先完成底下的 n 個步驟，再根據最底下那顆球的顏色，來決定集團免疫效果，若為黑色表示有免疫效果，若為白色，則表示無。首先，第 1 步根據隨機的方式，亦即隨機產生了第一列總數 n 個的黑球與白球之序列。接下來第 $2\sim n$ 步，依據黑白配黑色，同色配白色的規則來產生，例如：$n=5$，如下圖所示，這 5 人的集團免疫效果，是看最底下的那顆球是什麼顏色來決定，答案是黑色，也就是有集團免疫效果：



這個機率模型，一般性來考慮時，我們將延續獨立研究時的想法，也考慮三維空間的模型。這個機率模型，是底座為正三角形之正四面體，刻畫這 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個人的集團免疫效果，一樣要先完成底下的 n 個步驟，然後看最上面的那顆球之顏色，若為黑色表示有免疫效果，若為白色，則表示無。首先，第 1 步根據隨機的方式，亦即隨機產生了第一層（最底層），總數 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個的黑球與白球之正三角形。接下來第 $2\sim n$ 層，則依據一顆黑與兩顆白、或是三顆全黑時配黑色，其餘配白色的規則來產生上一層。

貳、研究目的

一、有無抗體比例如何影響集團免疫效果

分別探討二維與三維的情況下，對任意給定之n，黑球總數與白球總數的比例，如何影響集團免疫效果。也就是，二維的情況下，第一行的黑球總數與白球總數的比例是多少的條件下，這n人不可能達到集團免疫效果。同理，三維的情況下，最底層之黑球總數與白球總數的比例是多少的條件下，此時，這$\frac{n(n+1)}{2}$人不可能達到集團免疫效果。

二、集團具有免疫效果之機率

探討在隨機給定的人數下，具有集團免疫效果之機率值。也就是，二維時，隨機給定第一行之n個球，則最底下那顆球是黑色的機率為何？三維時，隨機給定最底層之$\frac{n(n+1)}{2}$個球，則最上面那顆球是黑色的機率為何？

三、集團具有免疫效果之期望人數

分別探討二維與三維的情況下，具有集團免疫效果的期望人數之值。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦。

肆、研究過程或方法

一、文獻回顧

與本研究有密切關聯之文獻有兩篇，茲簡述如下：

（一）周家萱、詹雅涵、黃子恆之神算研究

1. 研究目的：

科學研習月刊 2015 年 54 卷 4 期第 48 頁第 6 題，問n是多少時，可以由第一列直接預測最後一列球的顏色？如何判斷？使用基本單元的設計研究平面的四層結構。同時，將延伸研究三維空間研究正四面體（如下圖）。

(圖片來源:周家萱、詹雅涵、黃子恆(2016)。神算。)

2. 符號設定：

(1) 倒立正三角形之情形：

令紅色以 0 代表，綠色以 1 代表，藍色以 2 代表。又 $G_{i,j}^{n}$ 表示邊長 之倒立正三角形，由上而下，由左而右，第 i 列第 j 行的數值。

(2) 正四面體之情形：

令紅色以 0 代表，綠色以 1 代表，藍色以 2 代表，黃色以 3 代表。又 $T_{i,j,k}^{n}$ 表示邊長 n 之正四面體，由上而下第 k 層，第 i 列第 j 行的數值。

3. 主要研究結果：

(1) 倒立正三角形之情形：

a. $G_{i,j}^{n}+G_{i,j+1}^{n}+G_{i+1,j}^{n}\equiv 0 \pmod 3$，$1\le i\le n-1$，$1\le j\le n-1$。

b. $G_{t+m+1,s+1}^{n}\equiv(-1)^{m-1}\times\left(\sum_{j=0}^{m-1}C_{j}^{m-1}G_{t+1,s+j+1}^{n}\right) \pmod 3$，$0\le t\le n-1$，$0\le s\le n-1$，

$0\le m\le n-1$，$1\le t+m\le n-1$，$1\le s+m\le n-1$，其中組合數

$$C_{j}^{m-1}=\frac{(m-1)!}{j!(m-1-j)!}=\frac{(m-1)\times(m-2)\times\cdots\times(m-j)}{j\times(j-1)\times\cdots\times 2\times 1}$$ 。

(2) 正四面體之情形：

a. $T_{i,j,k}^{n}+T_{i+1,j,k}^{n}+T_{i+1,j+1,k}^{n}+T_{i,j,k-1}^{n}\equiv 0 \pmod 4$。

b. $T_{1,1,1}^{n}\equiv(-1)^{k-1}\times\left\{\sum_{i=1}^{k}C_{i-1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{k}C_{j-1}^{k-1}T_{i,j,k}^{n}\right)\right\} \pmod 4$，$i+j\le k$。

（二）研究者、蔡昀倢、陳映彤再戰神算研究

1. 研究目的：

推廣周家萱、詹雅涵、黃子恆之神算研究至球色三種以上，以及配色規則一般化前述研究之情況下，探討二維中，最後一顆球的顏色，僅由第一列最左最右兩端的球色來決定的 n 值。另外，探討三維中，最上面那顆球的顏色，僅由最底層正三角形三頂點之球色來決定的 n 值。

2. 符號設定：

假設平面的倒立正三角形情形有 p 種顏色之球色，將其數字化代號 $0,1,\cdots,p-1$，立體的正四面體情形有 q 種顏色之球色，將其數字化為 $0,1,\cdots,q-1$。另外，稱邊長為 n 之倒立正三角形，係指每邊由 n 個球所排成，進而稱邊長為 n 之正四面體，係指底座為每邊由 n 個球堆疊所成之正四面體，此處，其底座為正立之正三角形。設函數 $y=f(a,b) \pmod{p}$ 表示倒立正三角形之顏色配置，其中，a 表示 y 的緊鄰左上之球色的代號，b 表示 y 的緊鄰右上之球色的代號，$a,b\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$。當 $p=3$，$f(a,b)=2a+2b\equiv -a-b \pmod{3}$ 時，即為周家萱、詹雅涵、黃子恆在神算研究中，平面情形之配色設定。另外，設函數 $y=g(a,b,c) \pmod{q}$ 表示正四面體之顏色配置，其中，a,b,c 表示 y 的緊鄰下層之三顆球的代號，其相對位置如下圖所示：

$a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,q-1\}$。當 $q=4$，$g(a,b,c)=3a+3b+3c\equiv -a-b-c \pmod{4}$ 時，即為周家萱、詹雅涵、黃子恆在神算研究中，正四面體之配色設定。

3. 主要研究結果：

(1) 任意給定倒立之正三角形之第一列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 後，在配色規則 $f(a,b)\equiv \alpha a+\beta b \pmod{p}$ 下，假設最後最底下那顆球之代號為 λ，若 p 為

質數，$\alpha^{n-1} \equiv \alpha \pmod{p}$，$\beta^{n-1} \equiv \beta \pmod{p}$，且 $n = p^k + 1$，其中 k 為給定之正整數，則 $\lambda = f(x_1, x_n) \pmod{p}$，亦即，最底下那顆球的顏色，僅由倒立正三角形之第一列的最左與最右這兩顆球的顏色來決定。

(2) 任意給定邊長為 n 之正四面體最底層的 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個球，假設由上到下，由左到右依序表成 $x_1, x_2, \cdots, x_{0.5n(n+1)}$ 後，此時最底層三頂點之代號變成 $x_1, x_{0.5n(n-1)+1}, x_{0.5n(n+1)}$，在配色規則 $g(a,b,c) \equiv \alpha a + \beta b + \gamma c \pmod{q}$ 下，假設最後最上面那顆球之代號為 λ，若 q 為質數，$\alpha^{n-1} \equiv \alpha \pmod{q}$，$\beta^{n-1} \equiv \beta \pmod{q}$，$\gamma^{n-1} \equiv \gamma \pmod{q}$ 且 $n = q^k + 1$，其中 k 為給定之正整數，則 $\lambda = g\left(x_1, x_{0.5n(n-1)+1}, x_{0.5n(n+1)}\right) \pmod{q}$，亦即，最上面那顆球的顏色，僅由正四面體最底層之三頂點的球之顏色來決定。

(3) 本研究當 $p = 3$ 時，即周家萱、詹雅涵、黃子恆之神算研究中，倒立正三角形之情形，此時，若 $n = 3^k + 1$，其中 k 為給定之正整數，則可得到最底下那顆球的顏色，僅由倒立正三角形之第一列的最左與最右這兩顆球的顏色來決定。然而，當 $q = 4$ 時，即周家萱、詹雅涵、黃子恆之神算研究中，正四面體之情形，此時，因為 $q = 4$ 不為質數，取 $\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 2$，根據本研究可得，對任意 $n \geq 3$，最上面那顆球的顏色，無法僅由正四面體最底層之三頂點的球之顏色來決定。

二、研究問題推導計算

考慮二維與三維之集團免疫機率模型時，帶有抗體者以黑色球表示，未帶有抗體者以白色球表示。

在二維之集團免疫機率模型，令 n 表示第一列的球數，X_i 表示第一列由左到右數第 i 球的球色狀態，且

$$X_i=\begin{cases}1, & 黑球,\\ 0 & 白球。\end{cases}$$

假設 X_i 是黑球之機率為 p ，白球之機率為 q ， $p+q=1$ ，且 $X_1,X_2,X_3,\cdots$ 為獨立。

在三維之集團免疫機率模型，假設集團排成一個每邊 n 人之正三角形。為方便起見，這 $\frac{n(n+1)}{2}$ 人，由上到下，由左到右依序排列為 $X_{11},X_{21},X_{22},X_{31},X_{32},X_{33},\cdots,X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ii},\cdots,X_{n1},X_{n2},\cdots,X_{nn}$ ，亦即 X_{ij} 表示由上往下第 i 列，由左到右第 j 個之數，其取值為

$$X_{ij}=\begin{cases}1, & 黑球,\\ 0 & 白球。\end{cases}$$

假設 X_{ij} 是黑球之機率為 p ，白球之機率為 q ， $p+q=1$ ，且 $X_{11},X_{21},X_{22},X_{31},X_{32},\cdots$ 為獨立。此時，該集團是否具免疫效果，是根據文獻[2]之配色規則 $a+b+c \pmod 2$ ，再檢視最上面那顆球是黑色與否來決定，此處， a,b,c 之配置，請參閱肆、一、（二）2.。

（一）探討黑球總數與白球總數的比例，如何影響集團免疫效果。

1. 二維情形：

根據二維模型演算定義，不難計算當 $n\geq 2$ ，且第一列為 n 顆球時，最底下那顆球之值為

$$X_1+C_1^{n-1}X_2+C_2^{n-1}X_3+\cdots+C_{n-2}^{n-1}X_{n-1}+X_n \pmod 2 \text{。} \qquad (4.2.1.1)$$

因為對任意 $i=1,2,\cdots,n-2$ ， $C_i^{n-1}\equiv 0$ 或 $1 \pmod 2$ ，因此，想知道黑球總數與白球總數的比例，如何影響集團免疫效果時，可根據（4.2.1.1）式來判斷即可。首先，根據國中獨立研究之結果，以及（4.2.1.1）式，可知，當 $n=2^k+1$ ，其中， k 為非負整數時，本機率模型具不具備免疫效果，跟全部之黑球總數與白球總數的比例無關，而是僅跟第 1 位與第 n 位之有無抗體情形關連。然而，根據張鎮華教授（1986）[4] 之結果，當 $n=2^k$ ，其中， k 為大於 1 之整數時，此時（4.2.1.1）式變成

$$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{n-1}+X_n \pmod 2，$$

故本機率模型具備免疫效果之充分必要條件為

$$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{n-1}+X_n \equiv 1 \pmod 2。$$

因此，總數$n=2^k$人之集團免疫機率模式，可得具有抗體之總人數與無抗體之總人數的比例，必須維持奇數對奇數，機率模型才會有免疫效果。

為了考慮其他情況，對任意n元序對$\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)$，定義對應關係$T$:

$\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\to\left(T_1,T_2,\cdots,T_{4n}\right)$如下：

$$T_i=\begin{cases} t_i & 當\ 1\le i\le n, \\ 2t_{i-n} & 當\ n+1\le i\le 2n, \\ 2t_{i-2n} & 當\ 2n+1\le i\le 3n, \\ 4t_{i-3n} & 當\ 3n+1\le i\le 4n. \end{cases}$$

記成$T\left(\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\right)=\left(T_1,T_2,\cdots,T_{4n}\right)$。$T$的 2 次合成$T^2$為

$T^2\left(\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\right)=T\left(T\left(\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\right)\right)$，因此，$T^2\left(\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\right)$為$4^2n$元序對，記成$T^2\left(\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\right)=\left(T_1^2,T_1^2,\cdots,T_{4^2n}^2\right)$，其滿足當$1\le i\le 4n$，恆有$T_i^2=T_i$，所以，對任意正整數$k$，當$1\le i\le 4^{k-1}n$，恆有$T_i^k=T_i^{k-1}$，且$T^k\left(\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\right)$為$4^kn$元序對，最後定義$\Psi=\lim\limits_{n\to\infty}T^n$，記成$\Psi=\left(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\cdots\right)$。不難觀察出對任意正整數$i$，恆有$\Psi_i=T_i^i$。今取$\left(t_1,t_2,t_3,t_4\right)=\left(1,2,2,4\right)$，可得

$$T\left(\left(1,2,2,4\right)\right)=\left(1,2,2,4,2,4,4,8,2,4,4,8,4,8,8,16\right)，$$

$$T^2\left(\left(1,2,2,4\right)\right)=\begin{pmatrix} 1,2,2,4,2,4,4,8,2,4,4,8,4,8,8,16, \\ 2,4,4,8,4,8,8,16,4,8,8,16,8,16,16,32, \\ 2,4,4,8,4,8,8,16,4,8,8,16,8,16,16,32, \\ 4,8,8,16,8,16,16,32,8,16,16,32,16,32,32,64 \end{pmatrix},$$

所以，

$$\Psi=\left(1,2,2,4,2,4,4,8,2,4,4,8,4,8,8,16,2,4,4,8,4,8,8,16,4,8,8,16,8,16,16,32,\cdots\right)。$$

根據上面定義，以及利用張鎮華教授（1986）[4] 之結果，可得對任意之n，滿足$C_i^n \equiv 1 \pmod 2$之$i\,(0 \le i \le n)$的個數恰為Ψ_{n+1}，例如: $n=0$時，滿足$C_i^n \equiv 1 \pmod 2$之$i\,(0 \le i \le n)$的個數等於$\Psi_1 = 1$個，$n=1$時，滿足$C_i^n \equiv 1 \pmod 2$之$i\,(0 \le i \le n)$的個數等於$\Psi_2 = 2$個，$n=2$時，滿足$C_i^n \equiv 1 \pmod 2$之$i\,(0 \le i \le n)$的個數等於$\Psi_3 = 2$個，$n=3$，滿足$C_i^n \equiv 1 \pmod 2$之$i\,(0 \le i \le n)$的個數等於$\Psi_4 = 4$個。

現在回到我們的n人之集團免疫機率模式，根據（4.2.1.1）式，我們可得這個式子，在同餘 2 的作用下，恰好會有Ψ_n個X_i留下來，其餘的X_i都因為乘上 0 而消失了。因此，留下來的Ψ_n人中，帶有抗體的人數，必須為奇數，機率模型才會有免疫效果。

2. 三維情形：

根據歸納推導，當$n \ge 2$時，可得最上面那顆球的代號為

$$X_{11} + X_{n1} + X_{nn} + \sum_{\substack{i+j+l=n-1,\\ 0 \le i,j,l \le n-2}} \frac{(n-1)!}{i!\,j!\,l!} X_{h(i,j,l)} \pmod 2, \qquad (4.2.1.2)$$

其中$X_{h(i,j,l)}$適當地對應三頂點X_{11}, X_{n1}, X_{nn}以外之所有代號，故三維之集團免疫機率模型具有免疫效果之充分必要條件為

$$X_{11} + X_{n1} + X_{nn} + \sum_{\substack{i+j+l=n-1,\\ 0 \le i,j,l \le n-2}} \frac{(n-1)!}{i!\,j!\,l!} X_{h(i,j,l)} \equiv 1 \pmod 2$$

因此，要達到免疫效果，黑球總數與白球總數之比例，取決於（4.2.1.2）式中，在同餘 2 的作用下，共有幾項非 0 之X_{ij}相加來決定。

事實上，（4.2.1.2）式中$\frac{n(n+1)}{2}$個係數，恰好對應到$(a+b+c)^{n-1}$展開式中，同類項合併後，所得之$\frac{n(n+1)}{2}$個項的係數，具體言之，

$$(a+b+c)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!\,j!\,(n-1-i-j)!} a^i b^j c^{n-1-i-j} ,$$

其中

$$\frac{(n-1)!}{i!\,j!(n-1-i-j)!},\ 0\le i\le n-1,\ 0\le j\le n-1-i,$$

共有$\frac{n(n+1)}{2}$個係數，恰好對應到（4.2.1.2）式中之$\frac{n(n+1)}{2}$個係數。另外，因為

$$\frac{(n-1)!}{i!\,j!(n-1-i-j)!}=C_i^{n-1}C_j^{n-1-i}$$

所以（4.2.1.2）式中，在同餘 2 的作用下，共有幾項非 0 之X_{ij}相加之問題，變成

$$C_i^{n-1}C_j^{n-1-i},\ 0\le i\le n-1,\ 0\le j\le n-1-i, \qquad (4.2.1.3)$$

在同餘 2 的作用下，共有幾個非 0 之項。轉變成這個方向的問題時，就可根據上面二維時定義的Ψ_n值來表達，因為（4.2.1.3）式可以寫成

$$\begin{array}{l}
C_0^{n-1}C_0^{n-1},C_0^{n-1}C_1^{n-1},C_0^{n-1}C_2^{n-1},\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,C_0^{n-1}C_{n-2}^{n-1},C_0^{n-1}C_{n-1}^{n-1},\\
C_1^{n-1}C_0^{n-2},C_1^{n-1}C_1^{n-2},C_1^{n-1}C_2^{n-2},\cdots,\cdots,\cdots,C_1^{n-1}C_{n-3}^{n-2},C_1^{n-1}C_{n-2}^{n-2},\\
C_2^{n-1}C_0^{n-3},C_2^{n-1}C_1^{n-3},C_2^{n-1}C_2^{n-3},\cdots,\cdots,\cdots,C_2^{n-1}C_{n-3}^{n-3},\\
\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_{n-3}^{n-1}C_0^{2},C_{n-3}^{n-1}C_1^{2},C_{n-3}^{n-1}C_2^{2}\\
C_{n-2}^{n-1}C_0^{1},C_{n-2}^{n-1}C_1^{1},\\
C_{n-1}^{n-1}C_0^{0},
\end{array}$$

所以，在同餘 2 的作用下，（4.2.1.3）式中，共有

$$\left(C_0^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\left(C_2^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-2}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1$$

個非 0 之項。因此，（4.2.1.2）式中，在同餘 2 的作用下，共有

$\left(C_0^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1$項非 0 之$X_{ij}$相加。

例如：$n=2^k+1$時，根據文獻[2]，對任意$1\le i\le n-2$，恆有$C_i^{n-1}\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ 2)$，

故（4.2.1.2）變成

$$X_{11}+X_{n1}+X_{nn}+\sum_{\substack{i+j+l=n-1,\\ 0\le i,j,l\le n-2}}\frac{(n-1)!}{i!\,j!\,l!}X_{h(i,j,l)}\equiv X_{11}+X_{n1}+X_{nn}\equiv 1 \pmod 2 。$$

故此時之機率模型具不具備免疫效果，僅跟對應於正三角形三頂點位置的 3 位有關，此時三人中，恰有一位或三位具有抗體時，機率模型才會有免疫效果。

（二）探討在隨機給定的人數下，具有集團免疫效果之機率值。

1. 二維情形：

當 $p=q=\frac{1}{2}$ 且 $n=2$ 時，可以證得最底下那顆球之值為 1 之機率為 $\frac{1}{2}$ ，理由如下：因為最底下那顆球之值為 $X_1+X_2 \pmod 2$，故要得到 $X_1+X_2=1$ 時，必須取 $X_1=1, X_2=0$ 或 $X_1=0, X_2=1$ ，故機率等於

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} 。$$

同理，可推得一般情形之 n 時，最底下那顆球之值為 1 之機率為 $\frac{1}{2}$ 。在這樣的假設下，這個集團免疫機率模型，顯示每增加 1 人，則具有免疫效果的機率為 $\frac{1}{2}$ 。

當 $p\neq q$ 且 $n=2$、3 時，可以證得最底下那顆球之值為 1 之機率為 $2pq$，$n=4$ 時，最底下那顆球之值為 $X_1+X_2+X_3+X_4 \pmod 2$ ，所以，最底下那顆球為黑球，則必 $X_1+X_2+X_3+X_4\equiv 1 \pmod 2$。亦即，$X_1,X_2,X_3,X_4$ 中，必為 1 個 1 與 3 個 0，或是，3 個 1 與 1 個 0，故得機率為

$$\frac{4!}{3!1!}\times pq^3+\frac{4!}{3!1!}\times p^3q 。$$

$n=5$ 時，最底下那顆球之值為 $X_1+X_5 \pmod 2$ ，所以，最底下那顆球為黑球，則必 $X_1+X_5\equiv 1 \pmod 2$。亦即，X_1,X_5 中，必為 1 個 1 與 1 個 0，故得機率為 $2pq$ 。 $n=6$ 時，最底下那顆球之值為

$X_1+X_2+X_5+X_6 \pmod 2$，所以，最底下那顆球為黑球，則必

$X_1+X_2+X_5+X_6 \equiv 1 \pmod 2$，故得機率為

$$\frac{4!}{3!1!}\times pq^3+\frac{4!}{3!1!}\times p^3q\text{ 。}$$

$n=7$時，最底下那顆球之值為$X_1+X_3+X_5+X_7 \pmod 2$，所以，最底下那顆球為黑球，則必$X_1+X_3+X_5+X_7 \equiv 1 \pmod 2$，故得機率為

$$\frac{4!}{3!1!}\times pq^3+\frac{4!}{3!1!}\times p^3q\text{ 。}$$

$n=8$時，最底下那顆球之值為

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8 \pmod 2$，所以，最底下那顆球為黑球，則必$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8 \equiv 1 \pmod 2$。亦即，$X_1, X_5$中，必為 5 個 1 與 3 個 0，3 個 1 與 5 個 0，1 個 1 與 7 個 0，7 個 1 與 1 個 0，故得機率為

$$\frac{8!}{5!3!}\times p^5q^3+\frac{8!}{5!3!}\times p^3q^5+\frac{8!}{7!1!}\times pq^7+\frac{8!}{7!1!}\times p^7q\text{ 。}$$

為了計算一般情形之n的機率，令

$$a_n=P\left(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{n-1}+X_n \equiv 1 \pmod 2\right)\text{ 。}$$

因為

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i \equiv 1 \pmod 2\right) &= P\left(X_n=1,\sum_{i=1}^{n-1}X_i \equiv 0 \pmod 2\right)+\\
&\quad P\left(X_n=0,\sum_{i=1}^{n-1}X_i \equiv 1 \pmod 2\right)\\
&= P\left(X_n=1\right)P\left(\sum_{i=1}^{n-1}X_i \equiv 0 \pmod 2\right)+ \qquad (4.2.2.1)\\
&\quad P\left(X_n=0\right)P\left(\sum_{i=1}^{n-1}X_i \equiv 1 \pmod 2\right)\\
&= p\left(1-a_{n-1}\right)+qa_{n-1}=p+\left(q-p\right)a_{n-1}.
\end{aligned}$$

所以，$a_n = p + (q-p)a_{n-1}$。又因為前面的推導知$a_2 = 2pq$，此遞迴公式進一步計算可得

$$
\begin{aligned}
a_n &= (q-p)a_{n-1} + p = (q-p)\left\{(q-p)a_{n-2} + p\right\} + p = (q-p)^2 a_{n-2} + (q-p)p + p \\
&= (q-p)^{n-2} a_2 + p\left\{(q-p)^{n-3} + (q-p)^{n-4} + \cdots + 1\right\} \\
&= 2pq(q-p)^{n-2} + \frac{p\left\{1-(q-p)^{n-2}\right\}}{1-(q-p)} = 2pq(q-p)^{n-2} + \frac{1}{2}\left\{1-(q-p)^{n-2}\right\} \\
&= \frac{1}{2} + \left(2pq - \frac{1}{2}\right)(q-p)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

根據上式a_n公式，當$n = 2^k$時，則最底下那顆球為黑球之充要條件為

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{n-1} + X_n \equiv 1 \pmod 2 \text{，}$$

因此，機率為

$$P\left(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{n-1} + X_n \equiv 1 \pmod 2\right) = \frac{1}{2} + \left(2pq - \frac{1}{2}\right)(q-p)^{n-2}.$$

事實上，根據肆、二、（一） 1. 所定義之$\Psi = \left(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \cdots\right)$。對於一般情形之$n$的機率值，在同餘2的作用下，共有$\Psi_n$項非0之$X_i$相加，扣除$X_1$與$X_n$，亦即存在足碼$i_m$，$1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{\Psi_n - 2}$，

使得它的（4.2.1.1）變成

$$X_1 + X_{i_1} + X_{i_2} + X_{i_3} + \cdots + X_{i_{\Psi_n - 2}} + X_n \pmod 2 \text{，}$$

此時，利用$X_1, X_2, X_3, \cdots$具有同分佈，這個n的機率值等於

$$
\begin{aligned}
P\left(X_1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i^{n-1} X_{i+1} + X_n \equiv 1 \pmod 2\right) &= P\left(X_1 + \sum_{m=1}^{\Psi_n - 2} X_{i_m} + X_n \equiv 1 \pmod 2\right) \\
&= a_{\Psi_n}.
\end{aligned}
$$

例如：$n = 7$，$i_1 = 3$，$i_2 = 5$，此時，$\Psi_7 = 4$，所以得到

$$P\left(X_1+X_3+X_5+X_7\equiv 1\ (\text{mod}\ \ 2)\right)=a_4$$
$$=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^2$$
$$=\frac{4!}{3!1!}\times pq^3+\frac{4!}{3!1!}\times p^3q.$$

2. 三維情形：

根據二維的計算經驗，對任意之n，計算三維模型之免疫效果機率

$$P\left(X_{11}+X_{n1}+X_{nn}+\sum_{\substack{i+j+l=n-1,\\ 0\le i,j,l\le n-2}}\frac{(n-1)!}{i!\,j!\,l!}X_{h(i,j,l)}\equiv 1\ (\text{mod}\ 2)\right)$$

時，根據$X_{11},X_{21},X_{22},X_{31},X_{32},\cdots$為獨立且具同分布，只要知道（4.2.1.2）式中，在同餘 2 的作用下，共有幾項非 0 之X_{ij}相加即可。因此，根據肆、二、（一）2. 之計算，共有

$$\left(C_0^{n-1}\ (\text{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\text{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\text{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1$$

項非 0 之X_{ij}相加，故所求之機率值等於

$$P\left(X_{11}+X_{n1}+X_{nn}+\sum_{\substack{i+j+l=n-1,\\ 0\le i,j,l\le n-2}}\frac{(n-1)!}{i!\,j!\,l!}X_{h(i,j,l)}\equiv 1\ (\text{mod}\ 2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\lambda_n-2},$$

這裡，

$\lambda_n=\left(C_0^{n-1}\ (\text{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\text{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\text{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1$。

例如：$n=2$時，可得$\lambda_2=3$，故所求機率等於

$$P\left(X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 1\ (\text{mod}\ 2)\right)=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p).$$

$n=3$時，可得$\lambda_3=3$，故所求機率等於

$$P\left(X_{11}+X_{31}+X_{33}\equiv 1 \pmod 2\right)=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p).$$

$n=4$時，可得$\lambda_4=9$，故所求機率等於

$$P\left(X_{11}+X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\equiv 1 \pmod 2\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^7.$$

$n=5$時，可得$\lambda_5=3$，故所求機率等於

$$P\left(X_{11}+X_{51}+X_{55}\equiv 1 \pmod 2\right)=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p).$$

$n=6$時，可得$\lambda_6=9$，故所求機率等於

$$P\left(X_{11}+X_{21}+X_{22}+X_{51}+X_{55}+X_{61}+X_{62}+X_{65}+X_{66}\equiv 1 \pmod 2\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^7.$$

$n=7$時，可得$\lambda_7=9$，故所求機率等於

$$P\left(X_{11}+X_{31}+X_{33}+X_{51}+X_{55}+X_{71}+X_{73}+X_{76}+X_{77}\equiv 1 \pmod 2\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^7.$$

另外，根據文獻[2]，$n=2^k+1$時，對任意$1\le i\le n-2$，恆有$C_i^{n-1}\equiv 0 \pmod 2$，故（4.2.1.2）變成

$$X_{11}+X_{n1}+X_{nn} \pmod 2，$$

故此時的n之機率等於

$$P\left(X_{11}+X_{n1}+X_{nn}\equiv 1 \pmod 2\right)=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p).$$

（三）具有集團免疫效果的期望人數。

1. 二維情形：

為了計算集團免疫效果的期望人數，對任意之定數$r \in (0,1)$，假設$x \in [0,r]$，因為$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$為均勻收斂，故等號之兩邊對$x$微分時，右邊可對$x$逐項微分，變成

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\text{。}$$

假設隨機變數W表示以X_1為基礎開始增加，第 1 次出現免疫效果時，增加之人數。隨機變數W之嚴格數學定義如下：假設取值 0 與 1 之隨機變數I_i表示第i次增加 1 人後，其取值依據$i+1$人之機率模型的免疫狀態來決定，具體而言，令隨機變數

$$Y_n = X_1 + C_1^{n-1}X_2 + C_2^{n-1}X_3 + \cdots + C_{n-2}^{n-1}X_{n-1} + X_n\text{，}$$

故

$$I_i=\begin{cases}1, & \text{當 } Y_{i+1}\equiv 1 \pmod 2,\\ 0 & \text{當 } Y_{i+1}\equiv 0 \pmod 2\text{。}\end{cases}$$

然後定義$W=\min\{i\in N : I_i = 1\}$。因此，

$$\begin{aligned}\{W=1\}&=\{I_1=1\}=\{Y_2\equiv 1 \pmod 2\}=\{X_1+X_2\equiv 1 \pmod 2\}\\&=\{X_1=0,X_2\equiv 1\}\bigcup\{X_1=1,X_2\equiv 0\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{W=2\}&=\{I_1=0,I_2=1\}=\{Y_2\equiv 0 \pmod 2, Y_3\equiv 1 \pmod 2\}\\&=\{X_1+X_2\equiv 0 \pmod 2, X_1+2X_2+X_3\equiv 1 \pmod 2\}\\&=\{X_1+X_2\equiv 0 \pmod 2, X_2+X_3\equiv 1 \pmod 2\}\\&=\{X_1=0,X_2=0,X_3=1\}\bigcup\{X_1=1,X_2=1,X_3=0\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{W=3\}&=\{I_1=0,I_2=0,I_3=1\}\\&=\{Y_2\equiv 0 \pmod 2, Y_3\equiv 0 \pmod 2, Y_4\equiv 1 \pmod 2\}\\&=\{X_1+X_2\equiv 0 \pmod 2, X_2+X_3\equiv 0 \pmod 2, X_3+X_4\equiv 1 \pmod 2\}\\&=\{X_1=0,X_2=0,X_3=0,X_4=1\}\bigcup\{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=0\},\end{aligned}$$

以此類推可得

$$\{W=n\}=\{I_i=0,1\le i\le n-1,I_n=1\}=\{Y_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \ 2),2\le i\le n,Y_{n+1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \ 2)\}$$
$$=\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i+X_{i+1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \ 2)\}\right)\bigcap\{X_n+X_{n+1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \ 2)\}$$
$$=\{X_i=0,1\le i\le n,X_{n+1}=1\}\bigcup\{X_i=1,1\le i\le n,X_{n+1}=0\}。$$

進一步計算

$$P(W=n)=p^n q+pq^n$$

所以，二維集團免疫效果的期望人數即為

$$1+EW=1+\sum_{n=1}^{\infty}nP(W=n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}n\left(p^n q+pq^n\right)=1+q\sum_{n=1}^{\infty}np^n+p\sum_{n=1}^{\infty}nq^n$$
$$=1+\frac{pq}{(1-p)^2}+\frac{pq}{(1-q)^2}=1+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}。$$

這裡，EW 要加 1，理由是因為定義隨機變數 W 時，乃是給定第一位的前提下，然後開始在排成一直線的集團增加一人。因此，在 $p=q=\frac{1}{2}$ 之假設下，集團免疫效果的期望人數等於 3 人。

2. 三維情形：

令

$$Z_n=X_{11}+X_{n1}+X_{nn}+\sum_{\substack{i+j+l=n-1,\\0\le i,j,l\le n-2}}\frac{(n-1)!}{i!\,j!\,l!}X_{h(i,j,l)}\quad 。$$

假設取值 0 與 1 之隨機變數 J_i 表示第 i 次邊長增加 1 後，其取值依據每邊 $i+1$ 人之三維機率模型的免疫狀態來決定，具體而言，

$$J_i=\begin{cases}1, & 當\ \mathrm{Z}_{i+1}\equiv 1\ \ (\mathrm{mod}\ \ \ 2),\\ 0 & 當\ \mathrm{Z}_{i+1}\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ \ \ 2)。\end{cases}$$

然後定義 $S=\min\{i\in N:J_i=1\}$。為了計算三維集團免疫效果的期望人數 ES，我們試著計算 $\{S=1\}$、$\{S=2\}$、$\{S=3\}$ 之機率如下：

$$
\begin{aligned}
P(\{S=1\}) &= P(\{J_1=1\}) = P(\{Z_2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= P(\{X_{11}+X_{21}+X_{22} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= P(\{X_{11}=0, X_{21}=0, X_{22}=1\} \cup \{X_{11}=0, X_{21}=1, X_{22}=0\} \cup \\
&\quad \{X_{11}=1, X_{21}=0, X_{22}=0\} \cup \{X_{11}=1, X_{21}=1, X_{22}=1\}) \\
&= 3pq^2 + p^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\{S=2\}) &= P(\{J_1=0, J_2=1\}) = P(\{Z_2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), Z_3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= P(\{X_{11}+X_{21}+X_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), X_{11}+X_{31}+X_{33} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= P(\{X_{11}+X_{21}+X_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= pP(\{X_{21}+X_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) P(\{X_{31}+X_{33} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) + \\
&\quad qP(\{X_{21}+X_{22} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) P(\{X_{31}+X_{33} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= 2p^2q(p^2+q^2) + 2pq^2(p^2+q^2) = 2pq(p^2+q^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\{S=3\}) &= P(\{J_1=0, J_2=0, J_3=1\}) \\
&= P(\{Z_2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), Z_3 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), Z_4 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= P(\{X_{11}+X_{21}+X_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), X_{11}+X_{31}+X_{33} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\
&\qquad X_{11}+X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= P(\{X_{11}+X_{21}+X_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\
&\qquad X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= pP(\{X_{21}+X_{22} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) P(\{X_{31}+X_{33} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \times \\
&\quad P(\{X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) + \\
&\quad qP(\{X_{21}+X_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \times \\
&\quad P(\{X_{31}+X_{33} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) P(\{X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}) \\
&= p(2pq)^2(p^4+6p^2q^2+q^4) + 4pq^2(p^2+q^2)^2(p^2+q^2) \\
&= 4p^3q^2(p^4+6p^2q^2+q^4) + 4pq^2(p^2+q^2)^3,
\end{aligned}
$$

先不要代入機率，進一步往下分析可得

$$
\begin{aligned}
\{S=4\} = \{ & X_{11}+X_{21}+X_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\
& X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\
& X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{51}+X_{55} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}
\end{aligned}
$$

$$\{S=5\}=\{X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 0 \pmod 2, X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{51}+X_{55}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{51}+X_{55}+X_{61}+X_{62}+X_{65}+X_{66}\equiv 1 \pmod 2\}$$

$$\{S=6\}=\{X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 0 \pmod 2, X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{51}+X_{55}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{51}+X_{55}+X_{61}+X_{62}+X_{65}+X_{66}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{61}+X_{62}+X_{65}+X_{66}+X_{71}+X_{73}+X_{75}+X_{77}\equiv 1 \pmod 2\}$$

這裡，我們觀察出下面規律，

$$\{S=n\}=\{X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 0 \pmod 2, X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{51}+X_{55}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{51}+X_{55}+X_{61}+X_{62}+X_{65}+X_{66}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$X_{61}+X_{62}+X_{65}+X_{66}+X_{71}+X_{73}+X_{75}+X_{77}\equiv 0 \pmod 2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$X_{n\alpha_1}+X_{n\alpha_2}+\cdots+X_{n\alpha_{\Psi_n}}+X_{(n+1)\beta_1}+X_{(n+1)\beta_2}+\cdots+X_{(n+1)\beta_{\Psi_{n+1}}}\equiv 1 \pmod 2\},$$

其中，$\alpha_i=\min\{i>\alpha_{i-1}: C_i^{n-1}\equiv 1 \pmod 2\}$, $\alpha_1=1$，

$\beta_i=\min\{i>\beta_{i-1}: C_i^{n}\equiv 1 \pmod 2\}$, $\beta_1=1$，Ψ_i之定義，請參閱肆、二、(一)

1.。因此

$$P(S=n)=p\left\{1-\left(\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right)\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right\}+$$
$$q\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{1-\left(\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right)\right\}$$
$$=p\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right\}+$$
$$q\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right\}$$

根據上式，即可計算

$$1+ES=1+\sum_{n=1}^{\infty}nP\left(S=n\right)。$$

這裡，ES 要加 1，理由是因為定義隨機變數 S 時，乃是給定第一位的前提下，然後開始在排成正三角形集團的每邊增加 1 人。因此，集團免疫效果的期望人數等於

$$\frac{\left(1+ES\right)\left(1+ES+1\right)}{2}=\frac{\left(1+ES\right)\left(2+ES\right)}{2}。$$

特別是，在 $p=q=\frac{1}{2}$ 時，上面的推導可知

$$P\left(S=n\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}。$$

所以，當 $p=q=\frac{1}{2}$ 時，

$$1+ES=1+\sum_{n=1}^{\infty}nP\left(S=n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=3。$$

亦即三維集團免疫效果的期望人數即為 $\frac{3\times4}{2}=6$ 人。

伍、研究結果

一、有無抗體比例如何影響集團免疫效果

（一）二維模型：

1. 當 $n=2^{k}$ 時，這 n 人中，具有抗體之總人數與無抗體之總人數的比例，必須維持奇數對偶數，機率模型才會有免疫效果。

2. 當 $n=2^{k}+1$ 時，機率模型具不具備免疫效果，僅跟第一位與第 n 位有關，此時兩位中，恰有一位具有抗體時，機率模型才會有免疫效果。

3. 其他情形之 n 時，則必存在 Ψ_n 人，使得這 Ψ_n 人中，具有抗體之總人數與無抗體之總人數的比例，必須維持奇數對奇數，機率模型才會有免疫效果。

（二）三維模型：

1. 在同餘 2 的作用下，（4.2.1.3）式中，共有

$$\left(C_0^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1$$

項非 0 之 X_{ij} 相加。故在對應的非 0 之 處，具有抗體之總人數，必須維持奇數，機率模型才會有免疫效果。

2. 當 $n=2^k+1$ 時，機率模型具不具備免疫效果，僅跟對應於正三角形三頂點位置的 3 位有關，此時三人中，恰有一位或三位具有抗體時，機率模型才會有免疫效果。

二、集團具有免疫效果之機率

假設某人具有新冠肺炎抗體之機率為 p ，不具抗體之機率為 $q=1-p$ 。

（一）二維模型：

1. 當 $n=2^k$ 時，具有免疫效果之機率為

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\equiv 1\ \left(\mathrm{mod}\ 2\right)\right)=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{n-2}.$$

2. 當 $n=2^k+1$ 時，具有免疫效果之機率為

$$P\left(X_1+X_n\equiv 1\ \left(\mathrm{mod}\ 2\right)\right)=2pq.$$

3. 其他情形之 n ，則必存在正整數 Ψ_n ，使得具有免疫效果之機率為

$$\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\Psi_n-2},$$

（二）三維模型：

1. 當 $n=2^k+1$ 時，具有免疫效果之機率為

$$\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right).$$

2. 其他情形之 n ，則必存在正整數 λ ，使得具有免疫效果之機率

$$\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\lambda-2},$$

這裡，

$$\lambda=\left(C_0^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1.$$

三、集團具有免疫效果之期望人數

（一）二維模型：

集團免疫效果的期望人數等於

$$1+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}.$$

特別是，在 $p=q=\dfrac{1}{2}$ 時，集團免疫效果的期望人數等於 3 人。

（二）三維模型：

集團免疫效果的期望人數等於

$$\frac{(1+ES)(2+ES)}{2},$$

這裡，$1+ES=1+\sum_{n=1}^{\infty}nP(S=n)$，

$$P(S=n)=p\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right\}+$$
$$q\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right\},$$

Ψ_i 之定義，請參閱肆、二、(一) 1.。

特別是，在 $p=q=\dfrac{1}{2}$ 時，集團免疫效果的期望人數等於 6 人。

陸、討論

有關 ES 之推導，本研究雖然推導出公式，但因 $P(S=n)$ 之公式，過於複雜，無窮級數求和時，雖然無法進一步化簡，但這裡，實際應用時，可以代入給定之 p 與 q 值，來計算近似值，即便如此，另一作法，因為對任意之 $i\geq 2$，Ψ_i 為偶數且 $\Psi_i\geq 2$，又

$$\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\le\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)=2pq\ ,$$

$$\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\le\frac{1}{2}\ ,$$

所以，對任意之正整數n，

$$\begin{aligned}P(S=n)&=p\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right\}+\\&\quad q\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)(q-p)^{\Psi_i-2}\right\}\\&\le p\times\left(\frac{1}{2}\right)\times(2pq)^{n-1}+q\times(2pq)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

因此，可得

$$\begin{aligned}ES&\le\frac{p}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(2pq)^{n-1}+2pq^2\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\frac{p}{2(1-2pq)^2}+8pq^2.\end{aligned}$$

另外，研究者推測ES之最小值等於 2，所以得到

$$2\le ES\le\frac{p}{2(1-2pq)^2}+8pq^2\ 。$$

柒、結論

本研究在三個待答問題之架構下，得到底下結論：

一、有無抗體比例如何影響集團免疫效果

（一）二維模型：

1. 當$n=2^k$時，這n人中，具有抗體之總人數與無抗體之總人數的比例，必須維持奇數對奇數，機率模型才會有免疫效果。
2. 當$n=2^k+1$時，機率模型具不具備免疫效果，僅跟第一位與第n位有關，此時兩位中，恰有一位具有抗體時，機率模型才會有免疫效果。
3. 其他情形之n時，則必存在Ψ_n人，使得這Ψ_n人中，具有抗體之總人數與無抗

體之總人數的比例，必須維持奇數對奇數，機率模型才會有免疫效果。

（二）三維模型：

1. 在同餘 2 的作用下，（4.2.1.3）式中，共有

$$\left(C_0^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1$$

項非 0 之 X_{ij} 相加。故在對應的非 0 之 X_{ij} 處，具有抗體之總人數，必須維持奇數，機率模型才會有免疫效果。

2. 當 $n=2^k+1$ 時，機率模型具不具備免疫效果，僅跟對應於正三角形三頂點位置的 3 位有關，此時三人中，恰有一位或三位具有抗體時，機率模型才會有免疫效果。

二、集團具有免疫效果之機率

假設某人具有新冠肺炎抗體之機率為 p ，不具抗體之機率為 $q=1-p$ 。

（一）二維模型：

1. 當 $n=2^k$ 時，具有免疫效果之機率為

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\equiv 1\ \left(\mathrm{mod}\ 2\right)\right)=\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{n-2}.$$

2. 當 $n=2^k+1$ 時，具有免疫效果之機率為

$$P\left(X_1+X_n\equiv 1\ \left(\mathrm{mod}\ 2\right)\right)=2pq.$$

3. 其他情形之 n ，則必存在正整數 Ψ_n ，使得具有免疫效果之機率為

$$\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\Psi_n-2},$$

（二）三維模型：

1. 當 $n=2^k+1$ 時，具有免疫效果之機率為

$$\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right).$$

2. 其他情形之n，則必存在正整數λ，使得具有免疫效果之機率

$$\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\lambda-2},$$

這裡，

$$\lambda=\left(C_0^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ 2)\right)\times\Psi_1.$$

三、集團具有免疫效果之期望人數

（一）二維模型：

集團免疫效果的期望人數等於

$$1+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}.$$

特別是，在$p=q=\dfrac{1}{2}$時，集團免疫效果的期望人數等於 3 人。

（二）三維模型：

集團免疫效果的期望人數等於

$$\frac{\left(1+ES\right)\left(2+ES\right)}{2},$$

這裡，$1+ES=1+\sum_{n=1}^{\infty}nP\left(S=n\right)$，

$$\begin{aligned}P\left(S=n\right)=&\ p\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\Psi_i-2}\right\}+\\&\ q\left\{\frac{1}{2}+\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\Psi_{n+1}-2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}-\left(2pq-\frac{1}{2}\right)\left(q-p\right)^{\Psi_i-2}\right\},\end{aligned}$$

Ψ_i之定義，請參閱肆、二、(一) 1.。特別是，在$p=q=\dfrac{1}{2}$時，集團免疫效果的期望人數等於 6 人。

綜上所述，本研究所設計之二維與三維之集團免疫效果機率模型，因為屬於研究者自創之模型，所以目前無相對應的機率模型之文獻結果，可以相互對照呼應，而值得一提的是，從等機率的二維模型之期望值來看，平均三人就具有免疫效果，或許與成語三人成虎之話語，

不謀而合，另外，從等機率的三維模型之期望值來看，平均六人就具有免疫效果，這個結果也頗耐人尋味。

本研究採用數學建模的方式，來進行新冠肺炎的相關研究，在國內外學術刊物上，尚不多見，本研究結合高中數學之機率課程，提出二維與三維之兩種集團免疫機率模式，期待能應用到生醫或公衛領域，對於制訂防疫準則、政策或臨床學術研究，提供可參酌之理論基礎。

捌、參考資料及其他

1. 周家萱、詹雅涵、黃子恆（2016）。神算。第 56 屆全國科學展覽國小組最佳創意獎，科展群傑廳。
2. 研究者、蔡昀倢、陳映彤（2018）。再戰神算。彰化縣106 學年度國民中小學學生獨立研究競賽。
3. 游森棚（2015）。十二個課堂遊戲探索問題。科學研習月刊。54 卷 4 期，國立台灣科學教育館。
4. 張鎮華（1986）。組合數學與電腦的關係。數學傳播，10 卷 2 期，中央研究院數學研究所。

【評語】050411

這個作品是在正三角形以及正三角錐中，底邊以隨機方式擺上黑或白球，求頂端位置的球是黑色(免疫)的機率。雖然這個題目宣稱可以模擬「集團免疫機率」的數學模型，但是作者對於為何兩個具有免疫的人相遇卻會變成無免疫的情形，無法給出一個合理解釋。數學方面，比較有趣的部份是，第 9 頁的 T mapping，這是貫穿 2 維和 3 維的重要思路。將 n 維空間 lift 到 4n 維，再對 T^n 取極限，可惜無法給出 T^n 取極限之後的一般式，因此基本上只能視為是給出遞迴式但卻尚未能求解的情形，用途有限，對於大型模型的求解幫助有限，這是比較可惜的部分。

作品簡報

一個集團免疫機率模型之探討

集團免疫效果，會經過每相鄰兩人的交互影響，若這兩人中，恰有一人有免疫力，則免疫效果產生，反之則無。

- 黑球：有足夠抗體（有免疫力）者
- 白球：無足夠抗體（無免疫力）者

此機率模式透過 n 個步驟演算，再根據第 n 步那顆球的顏色，決定此集團的免疫效果。

二維模型

三維模型

三維的機率模型是底座為正三角形的正四面體，並且同樣經過 n 個步驟，再根據最上面那顆球的顏色，判斷這 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個人的集團免疫效果。

第 $2\sim n$ 步：依據一或三黑配黑色，兩黑配白色的規則產生上面一層，演算出第 $2\sim n$ 層。

最上面那顆球之顏色（第 n 層球之顏色）：

- 黑色：此集團有集團免疫效果
- 白色：此集團無集團免疫效果

研究目的

- 問題一：二維與三維的模型中，有無抗體人數的比例如何影響集團免疫效果？
- 問題二：二維與三維的模型中，具有集團免疫效果之機率值為何？
- 問題三：二維與三維的模型中，具有集團免疫效果的人數期望值為何？

二維模型基本假設

令 n 表示第一列球數，X_i 表示第一列由左到右第 i 球的球色狀態，其取值為

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{black ball} \\ 0, \text{white ball} \end{cases}$$

令黑球出現機率為 p，白球出現機率為 q，$p + q = 1$，且 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 為獨立。

三維模型基本假設

令 n 表示每邊人數，X_{ij} 表示由上到下第 i 列，由左而右第 j 球的球色狀態。其取值為

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{black ball} \\ 0, \text{white ball} \end{cases}$$

令黑球出現機率為 p，白球出現機率為 q，$p + q = 1$，且 $X_{11}, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32}, \cdots$ 為獨立。

主要解題關鍵 1 - 得出充要條件

(請參閱作品說明書：p.8, p.10)

二維模型具備免疫效果之充分必要條件為

$$X_1 + C_1^{n-1} X_2 + C_2^{n-1} X_3 + \cdots + C_{n-2}^{n-1} X_{n-1} + X_n \equiv 1 \pmod 2$$

三維模型具備免疫效果之充分必要條件為

$$X_{11} + X_{n1} + X_{nn} + \sum_{\substack{i+j+l=n-1,\\ 0\le i,j,l\le n-2}} \frac{(n-1)!}{i!\,j!\,l!} X_{h(i,j,l)} \equiv 1 \pmod 2$$

上式中 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個係數，恰好對應下式的係數

$$(a+b+c)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} C_i^{n-1} C_j^{n-1-i} a^i b^j c^{n-1-i-j}$$

主要解題關鍵 2 - 建置 Ψ 函數

(請參閱作品說明書：p.9)

$$T:(t_1,t_2,\cdots,t_n)\to(T_1,T_2,\cdots,T_{4n})$$

$$T_i=\begin{cases}t_i & \text{if } \ 1\le i\le n\\ 2t_{i-n} & \text{if } \ n+1\le i\le 2n\\ 2t_{i-2n} & \text{if } \ 2n+1\le i\le 3n\\ 4t_{i-3n} & \text{if } \ 3n+1\le i\le 4n\end{cases}$$

$$\Psi=\lim_{n\to\infty}T^n,\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\cdots)$$

* 0 Ψ_1
* * 1 Ψ_2
* • * 2 Ψ_3
* * * * 3 Ψ_4
* • • • * 4 Ψ_5
* * • • * * 5 Ψ_6
* • * • * • * 6 Ψ_7
* * * * * * * * 7 Ψ_8
* • • • • • • • * 8 Ψ_9

主要解題關鍵 3 - 刻劃非項數

(請參閱作品說明書：p.10, p.11)

在同餘 2 的作用下，二維之充要條件，共有 Ψ_n 項非 0 之 X_i 相加。

三維之充要條件，共有

$$\left(C_0^{n-1} \pmod 2\right)\times\Psi_n+\left(C_1^{n-1} \pmod 2\right)\times\Psi_{n-1}+\cdots+\left(C_{n-1}^{n-1} \pmod 2\right)\times\Psi_1$$

項非 0 之 X_{ij} 相加。

主要解題關鍵 4 - 遞迴式

(請參閱作品說明書：p.13)

為了一般性計算機率，令

$$a_n = P\left(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{n-1} + X_n \equiv 1 \pmod 2\right)$$

可觀察其具有遞迴關係

$$a_n = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv 1 \pmod 2\right)$$

$$= P\left(X_n = 1, \sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 0 \pmod 2\right) + P\left(X_n = 0, \sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 1 \pmod 2\right)$$

$$= P\left(X_n = 1\right) P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 0 \pmod 2\right) + P\left(X_n = 0\right) P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 1 \pmod 2\right)$$

主要解題關鍵 5 - 等比級數求期望值

(請參閱作品說明書：p.17)

對任意之定數 $r \in (0,1)$

假設 $x \in [0,r]$

因為 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 為均勻收斂

等號兩邊對 x 微分時，右式可對 x 逐項微分

可得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$