中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050410

光纖通路

學校名稱：裕德學校財團法人新北市裕德高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 蔡秉翰	陳明仁
高二 謝易衡	蔡孟璇
高二 楊佩蓁	

關鍵詞：K 標差圖、基爾霍夫定理、橫排推移

摘要

n個城市建立光纖網路，以最經濟的連接方式，需(n−1)段連線，探討共有幾種建立方法$\mathcal{L}(k,\mathrm{n})$（但限定城市標號差不得大於k，k∈N），我們依照條件逐步排出，驗證資料[2]中的發現，當k＝2時，得到規則$\mathcal{L}(2,\mathrm{n})=3\,\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)-\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-2)$，$n\geq 3$，而前後兩項的比值正是黃金比例的平方$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx 2.618$。接著，我們繼續探討$\mathcal{L}(3,\mathrm{n})$各項的值，並尋找關係式，發現前後兩項的比值似乎也趨近於某個定數。另外，我們觀察到，若$\mathrm{k}=\mathrm{n}-1$，則$\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n})=n^{n-2}$，這就是凱萊公式[7]。因此我們繼續以『橫排推移』的方式探討並發現$\mathcal{L}(\mathrm{n}-2,\mathrm{n})$的公式。在$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})$在經過多方面的嘗試，我們也發現它跟n有規律性的關連，進一步地研究終於提出它是n進位的式子的猜想。另外，我們也以生成樹來探討我們的問題，並引用基爾霍夫定理矩陣[6]來計算我們的推理，證明吻合。

壹、 研究動機

我們由歷屆科展的作品[2]中，發現一個建立網路的有趣問題，卻還沒解決，在原作者努力下僅推導到$\mathcal{L}(3,7)=1485$，我們嘗試各種方式來探討，發現原作數據有誤，正確的連接方法應該是1488種。這個看似單純的題目卻充滿挑戰，因此，我們進一步的研究探討：

1.「標號差」為3時有幾種建立方法：$\mathcal{L}(3,8)=$？，$\mathcal{L}(3,9)=$？，$\mathcal{L}(3,10)=$？……。
2.「標號差」為4時有幾種建立方法：$\mathcal{L}(4,5)=$？，$\mathcal{L}(4,6)=$？，$\mathcal{L}(4,7)=$？……。
3.「標號差」為5、6、7、8、9……的建立方法，並尋找它們前後項之間的關連性。
4. 除了以上『縱』的推導計算，我們也研究『橫』的關係，除了凱萊公式[7]以外，我們也希望獲得其他關係式。

貳、 研究目的及問題

一、 名詞與符號定義

（一）生成樹

1. 生成子圖(sub-graph)：指滿足V(G’)=V(G)的G的子圖G’

2. 樹狀結構(樹狀圖)⟹某結構由有限節點組成有層次關係的集合

(1)每個節點都只有有限個子節點或無節點。

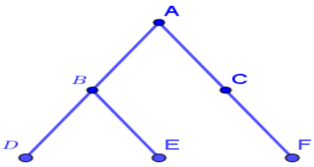
(2)無父節點的節點叫做根(root)，其餘非根節點必存在一個父節點。

(3)沒有迴路。

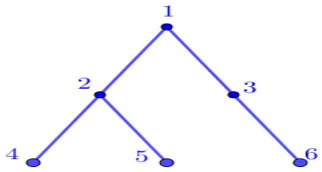
結合 1、2 就是生成樹的定義。

(二)圖標號(Labeling):在 G=(V,E)中，頂點標記 V 的集合(整數)

例如：



圖(一)



圖(二)

標號差：在已標記的 G 中，對於任意邊 e, e 的標號差是其兩個頂點之間的標號的絕對差值。換句話說，如果標號為 i 和 j 的 e 的端點，e 的標號差為|i - j|。

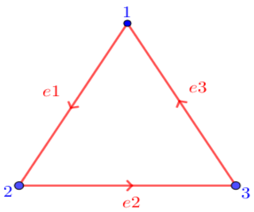
(三) $\mathcal{L}(k, n)$：符合標號差≤ k，n個節點所形成的生成樹(經標號)的集合的個數。

(四)關聯矩陣(incident matrix)

$V_{(G)} = n\,, E_{(G)} = m,$ incident matrix 為 n×m 的矩陣，

將 G 中頂點標為$V_1 \sim V_n$ ，邊標為$e_1 \sim e_m$

$$\text{在}M_{(G)}\text{中，}M_{ij}\begin{cases} 1, V_i\text{是}e_j\text{的起點} \\ -1, V_i\text{是}e_j\text{的終點} \\ 0, otherwise \end{cases}$$



圖(三)

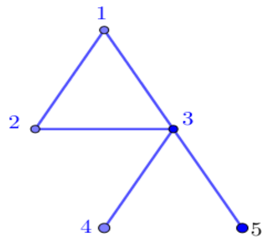
$$M_{(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

矩陣

（五）拉氏矩陣(Laplacian matrix)

A. 是一種 n×m 的矩陣

B. $L_{ij}\begin{cases}-1，\ i\neq j，\ V_i,V_j\text{相鄰}\\ \deg(V_i)，\ i=j\end{cases}$



圖(四)

$$L_{(G)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

矩陣

二、 研究問題：我們探討：

1.「標號差」為 3 時有幾種建立方法：$\mathcal{L}(3,8)=$ ？，$\mathcal{L}(3,9)=$ ？，$\mathcal{L}(3,10)=$ ？ ……。

2.「標號差」為 4 時有幾種建立方法：$\mathcal{L}(4,5)=$ ？，$\mathcal{L}(4,6)=$ ？，$\mathcal{L}(4,7)=$ ？ ……。

3.「標號差」為 5、6、7、8、9……的建立方法，並尋找它們前後項之間的關連性。

4. 除了以上『縱』的推導計算，我們也研究『橫』的關係，除了凱萊公式[7]以外，我們也希望獲得其他關係式。

參、 研究設備及器材

筆、紙、電腦、網路、Python 程式語言。

肆、 研究過程或方法

一、文獻探討：

(一)引理 Prüfer 序列：

定義：在生成樹圖 T 中，V(T)=n 且 E(T)=n-1，而每個節點上都有 1～n 標號。此時，我們能對不同的生成樹產生 Prüfer 序列(長度=n-2)，若且為若，不同的序列會對應到不同的生成樹。

(二)引理 Kirchhoff Theorem(基爾霍夫定理)

定義：又稱矩陣樹定理，是指圖的生成樹數量等於調和矩陣(去除最後一行和一列)的行列式。

例如：$\mathcal{L}(2,4)$為det$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$刪掉最後一行一列後計算行列式值，得到 8。

我們發現繼續在有限制的條件下，也驗證了$\mathcal{L}(3,5)$、$\mathcal{L}(4,6)$、$\mathcal{L}(5,7)$ ... 等。

$$\mathcal{L}(3,5) = det\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 75$$

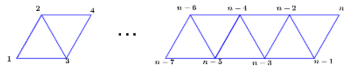
$$\mathcal{L}(4,5) = det\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 864$$

(八)引理 Caley 公式

計算在完全圖中的生成樹(經標號後的)的總數，若有 n 個頂點，生成樹的數量是 n^{n-2}。

二、研究流程架構

- 光纖通路
  - $\mathcal{L}(1,n)$
  - $\mathcal{L}(2,n)$ — 手算和圖形求其數值 — 原作 — 一般項
    - 找出關係式 — 證明



  - $\mathcal{L}(3,n)$ — 手算和圖形求其數值 — 原作 — $\mathcal{L}(3,7)$錯誤
    - 嘗試找出前後項的關係式
    - 發現各項之間比例有些關連性
    - 自創連接方法
  - $\mathcal{L}(4,\mathrm{n}),\mathcal{L}(5,\mathrm{n}),\mathcal{L}(6,\mathrm{n})\ldots$ — 利用基爾霍夫矩陣定理驗證 — 尋找『縱』的關係
  - $\mathcal{L}(n-1,\mathrm{n})$ — $\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n}) = n^{n-2}$，$\mathrm{n}\geq 2$
  - 『橫』的關係
    - $n^{n-2}=\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n})=\mathcal{L}(\mathrm{n},\mathrm{n})=\mathcal{L}(\mathrm{n}+1,\mathrm{n})=\cdots\cdots$
    - $\mathcal{L}(\mathrm{n}-2,\mathrm{n})=(n-2)n^{n-3} = n^{n-2}-2\cdot n^{n-3}$，$\mathrm{n}\geq 3$
  - 以 n 進位探討
    - $\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})=n^{n-2}-6n^{n-3}+10n^{n-4}-4n^{n-5}$，$\mathrm{n}\geq 5$
    - $\mathcal{L}(\mathrm{n}-4,\mathrm{n})=n^{n-2}-12n^{n-3}+52n^{n-4}-100n^{n-5}+83n^{n-6}-24n^{n-7}$，$n\geq 7$
    - 繼續研究$\mathcal{L}(\mathrm{n}-5,\mathrm{n})\cdots\cdots$

三、研究過程

(一)研究方向一：$\mathcal{L}(1,n)$、$\mathcal{L}(2,n)$、$\mathcal{L}(3,n)$、$\mathcal{L}(4,n)$⋯⋯⋯

1.$\mathcal{L}(1,n)$的建立方法：

$\mathcal{L}(1,2)=1$ 1-2

$\mathcal{L}(1,3)=1$ 1-2-3

$\mathcal{L}(1,4)=1$ 1-2-3-4

⋮ ⋮

$\mathcal{L}(1,n)=1$ 1-2-3-4…….n

2.$\mathcal{L}(2,n)$ 的建立方法[表一]：

$\mathcal{L}(2,2)=1$	1-2		
$\mathcal{L}(2,3)=3$	1-2-③	③-1-2	1-③-2
$\mathcal{L}(2,4)=8$	1-2-3 | ④	1-2-④-3	1-2-3-④
	④-3-1-2	3-1-2-④	
	1-3-2 | ④	1-3-④-2	1-3-2-④

我們發現，若 2、3 相連，則連上 4 有三種方法；若 2、3 被 1 分開，則連上 4 剩下兩種方法；當$\mathcal{L}(2,2)$要加入 3 時，若 2、3 分開，則少一種。

所以得到$\mathcal{L}(2,4)=3\mathcal{L}(2,3)-\mathcal{L}(2,2)=8$。

[表二]

$\mathcal{L}(2,5)=21$	1-2-3-⑤ | 4-⑤	1-2-4-⑤-3-⑤ | ⑤	1-2-3-⑤-4-⑤ | ⑤
	⑤-4-⑤-3-2-1 | ⑤	⑤-3-1-2-4-⑤	
	⑤-4-⑤ | 1-3-2 ∟⑤	1-3-⑤-4-2 | | ⑤ ⑤	1-3-2-4-⑤ | ⑤

我們發現若 3、4 相連，則連上 5 有三種方法；若 3、4 被 1、2 分開，則連上 5 只剩兩種方法；當$\mathcal{L}(2,3)$要加入 4 時，$\mathcal{L}(2,3)$的每一種都恰有一個使 3、4 分開，所以各少一種。所以得到$\mathcal{L}(2,5) = 3\mathcal{L}(2,4) - \mathcal{L}(2,3) = 3 \times 8 - 3 = 21$。

$\boxed{\text{推論}}$：(1) $\mathcal{L}(2，\mathrm{n}) = 3\mathcal{L}(2，\mathrm{n}-1) - \mathcal{L}(2，\mathrm{n}-2)$

(2)我們發現 1, 3, 8, 21……是費氏數列的偶數項，我們導出一般式：

$\because\ \mathcal{L}(2，\mathrm{n}) = 3\mathcal{L}(2，\mathrm{n}-1) - \mathcal{L}(2，\mathrm{n}-2)$

令 $\mathcal{L}(2，\mathrm{n}) - \alpha\mathcal{L}(2，\mathrm{n}-1) = \beta\left(\mathcal{L}(2，\mathrm{n}-1) - \alpha\mathcal{L}(2，\mathrm{n}-2)\right)$

則 $\mathcal{L}(2，\mathrm{n}) = (\alpha+\beta)\mathcal{L}(2，\mathrm{n}-1) - \alpha\beta\mathcal{L}(2，\mathrm{n}-1)$

$\therefore \begin{cases} \alpha+\beta = 3 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha,\beta$即為$x^2 - 3x + 1 = 0$之兩根

$\therefore$令$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$,$\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 令 $\mathcal{L}(2，\mathrm{n}) = k\alpha^n + l\beta^n$ 則$\begin{cases} \mathcal{L}(2，2) = k\alpha^2 + l\beta^2 = 1 \\ \mathcal{L}(2，1) = k\alpha^1 + l\beta^1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7+3\sqrt{5}}{2}k + \frac{7-3\sqrt{5}}{2}l = 1 \cdots\cdots ① \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}l = 0 \cdots\cdots ② \end{cases}$ ①−②×3 得$-k - l = 1 \Rightarrow l = -k - 1$

代入② $\frac{3+\sqrt{5}}{2}k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(-k-1) = 0 \Rightarrow k = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ $l = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - 1 = \frac{-(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$

$\therefore\ \mathcal{L}(2，\mathrm{n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$

3. $\mathcal{L}(3,\mathrm{n})$的建立方法：[表三]

$\mathcal{L}(3,2) = 1$	1-2		
$\mathcal{L}(3,3) = 3$	1-2-③	③-1-2	1-③-2
$\mathcal{L}(3,4) = 16$	1-2-3-④	1-2-④-3	1-2-3 └④
	1-④-2-3	④-1-2-3	
	1-3-2-④	1-3-④-2	1-3-2 └④
	1-④-3-2	④-1-3-2	
	3-1-2-④	3-1-④-2	3-1-2 └④

	3-④-1-2	④-3-1-2	
	1-④-3 ∟2		
$\mathcal{L}(3,5)=75$	1-2-⑤-3-⑤-4-⑤ |　| ⑤　⑤	1-2-⑤-4-⑤-3-⑤ |　| ⑤　⑤	┌⑤ 1-2-⑤-3-⑤ | ⑤-4-⑤
	1-4-⑤-2-⑤-3-⑤ |　| ⑤　⑤	⑤-4-1-2-⑤-3-⑤ | ⑤	
	1-3-⑤-2-⑤-4-⑤ |　| ⑤　⑤	1-3-⑤-4-⑤-2-⑤ |　| ⑤　⑤	⑤ | 1-3-⑤-2-⑤ | ⑤-4-⑤
	1-4-⑤-3-⑤-2-⑤ |　| ⑤　⑤	⑤-4-1-3-⑤-2-⑤ | ⑤	
	⑤-3-1-2-⑤-4-⑤ | ⑤	⑤-3-1-4-⑤-2-⑤ | ⑤	⑤-3-1-2-⑤ | 4-⑤
	⑤-3-⑤-4-1-2-⑤ | ⑤	⑤-4-⑤-3-1-2-⑤ | ⑤	
	⑤-2-⑤ | 1-4-⑤-3-⑤ ∟⑤	①-3-5-2-① | 4-①	

我們發現若 2、3、4 連在一起，則加入 5 會有五種連法；若 2、3、4 分成兩部分，則加入 5 剩四種連法；若 2、3、4 完全分開成三部分，則加入 5 剩三種連法；新增種連法：以最高數 5 為中心，環繞 2、3、4 共三個分支，共三種連法；由以上分析，我們繼續探討得到：$\mathcal{L}(3,6)=101+106+79+24+15+11=336$

$$\mathcal{L}(3,7)=101+106+79+79+60+79+106+101+101+60+64+64+45+82$$
$$+82+106+72+55+45+1=1488$$

4. $\mathcal{L}(4,n)$的建立方法[表四]，[表五]

$\mathcal{L}(4,2)=1$	1-2		
$\mathcal{L}(4,3)=3$	1-2-③	③-1-2	1-③-2
$\mathcal{L}(4,4)=16$	1-2-3-④	1-2-④-3	1-2-3 ∟④
	1-④-2-3	④-1-2-3	
	1-3-2-④	1-3-④-2	1-3-2 ∟④
	1-④-3-2	④-1-3-2	
	3-1-2-④	3-1-④-2	3-1-2 ∟④
	3-④-1-2	④-3-1-2	
	1-④-3 ∟2		

$\mathcal{L}(4,5)=7\mathcal{L}(4,4)+6+4+2+1=125$

$\mathcal{L}(4,6)$之 ①＝233	1-2-3-4-5	1-2-3-5-4	1-2-3-4 ∟5
	1-2-5-3-4	1-2-3-4 ∟5	1-5-2-3-4
	5-1-2-3-4	共 7x6+6＝48 種	
	1-2-4-3 也是 7x6+6＝48 種		
	1-2-3 ∟4 也是 7x6+6＝48 種		
	1-4-2-3-5 也是 7x6+6＝48 種		
	4-1-2-3-5	4-1-2-5-3	4-1-2-3 ∟ 5
	4-1-5-2-3	4-1-2-3 ∟5	4-5-1-2-3
	5-4-1-2-3	共 6x6+5＝41 種	
$\mathcal{L}(4,6)$之 ②＝233	1-3-2-4-5		
$\mathcal{L}(4,6)$之 ③＝198	3-1-2-5 ∟4	3-1-2 ∟4-5	5-3-1-2 ∟4
	┌5 3-1-2 ∟4		

$\mathcal{L}(4,6)$之 ④=88	┌④ 1-5-3 └2　有 7 種		
	┌④ 1-④-5-④-3-④ | ④-2-④　有 7x6 種	④-1-5-3 | 2 有 6 種	合計有 7x6+6 = 48種
	1-③-5-4 | ③-2-③	4 | ③-1-5-2	合計有 7x3+6 = 27種
	1-②-5-4 └3	┌4 ②-1-5-3	合計有 7+6 = 13種
$\mathcal{L}(4,6)$之 ⑤=48	1-4-3-5 └2	5-1-4-3 └2	

$\mathcal{L}(4,6) = 864$ ， $\mathcal{L}(4,7) = 5636$ ， $\mathcal{L}(4,8) = 35840 \cdots\cdots$

(二)研究方向二： $\mathcal{L}(n-1,n)$、$\mathcal{L}(n-2,n)$、$\mathcal{L}(n-3,n)\cdots\cdots$

1. 根據以上「研究方向一」討論出來的數據，製作出以下表格[表六]

n / k	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	8	21	55	144	
3	1	3	16	75	336	1488	6580
4	1	3	16	125	336	5635	35840
5	1	3	16	125	336	12005	104448
6	1	3	16	125	336	16807	196608

發現$\mathcal{L}(n-1,n) = n^{n-2}$的關係。

2. $\mathcal{L}(n-1,n)$：我們繼續探討最大標號節點 n 的度數對其生成樹個數的影響：[表七]

n / 標號 n 的度數	2	3	4	5	6	7
1	1	2	9	64	625	7776
2		1	6	48	500	6480
3			1	12	150	2160
4				1	20	360
5					1	30
6						1

對應為[表八]

n 標號 n 的度數	2	3	4	5	6	7
1	1	1×2^1	1×3^2	1×4^3	1×5^4	1×6^5
2		1×2^0	2×3^1	3×4^2	4×5^3	5×6^4
3			1×3^0	3×4^1	6×5^2	10×6^3
4				1×4^0	4×5^1	10×6^2
5					1×5^0	5×6^1
6						1×6^0

我們有以下的發現：

$$\mathcal{L}(3,4)=C_1^3\mathcal{L}(2,3)+C_2^3C_1^2\,\mathcal{L}(1,2)+C_3^3=9+6+1=C_0^2\times 3^2+C_1^2\times 3^1+C_2^2\times 3^0$$

$$=C_0^2\times 3^2+C_1^2\times 3^1+C_2^2\times 3^0=(3+1)^2=4=16$$

$$\mathcal{L}(4,5)=C_1^4\mathcal{L}(3,4)+C_2^4\left(C_2^2 2!\,\mathcal{L}(2,3)+\frac{C_1^2C_1^1}{2!}2!\,Z_2^2\right)+C_3^4\left(C_1^1\frac{3!}{2!}\right)+C_4^4$$

$$=64+48+12+1=C_0^3\times 4^3+C_1^3\times 4^2+C_2^3\times 4^1+C_3^3\times 4^0=(4+1)^3=5^3=125$$

$$\mathcal{L}(5,6)=C_1^5\mathcal{L}(4,5)+C_2^5\left(C_3^3 2!\,\mathcal{L}(3,4)+C_2^3C_1^1 2!\,\mathcal{L}(2,3)\mathcal{L}(1,2)\right)$$

$$+C_3^5\left(C_2^2\frac{3!}{2!}\mathcal{L}(2,3)+\frac{C_1^2C_1^1}{2!}3!\,\mathcal{L}(1,2)^2\right)+C_4^5\left(C_1^1\frac{4!}{3!}\mathcal{L}(1,2)\right)+C_5^5$$

$$=625+500+150+20+1$$

$$=C_0^4\times 5^4+C_1^4\times 5^3+C_2^4\times 5^2+C_3^4\times 5^1+C_4^4\times 5^0=(5+1)^4=6^4=1296$$

$$\mathcal{L}(6,7)=C_1^6\mathcal{L}(5,6)+C_2^6\left(C_4^4\times 2!\times\mathcal{L}(4,5)+C_3^4\times 2!\times\mathcal{L}(3,4)\mathcal{L}(1,2)+\frac{C_2^4C_2^2}{2!}\times\right.$$

$$\left.2!\,\mathcal{L}(2,3)^2\right)+C_3^6\left(C_3^3\frac{3!}{2!}\mathcal{L}(3,4)+C_2^3C_1^1\times 3!\,\mathcal{L}(2,3)\mathcal{L}(1,2)+\frac{C_1^3C_1^2C_1^1}{3!}\times 3!\,\mathcal{L}(1,2)^3\right)+$$

$$C_4^6\left(C_2^2\frac{4!}{3!}\mathcal{L}(2,3)+\frac{C_1^2C_1^1}{2!}\frac{4!}{2!}\mathcal{L}(1,2)^2\right)+C_5^6\times\frac{5!}{4!}\mathcal{L}(1,2)+C_6^6=C_0^5 6^5+C_1^5 6^4+C_2^5 6^3+C_3^5 6^2+$$

$$C_4^5 6+C_5^5=\mathbf{(6+1)^5=7^5}$$

3. $\mathcal{L}(\mathrm{n}-2,\mathrm{n})=(n-2)n^{n-3}$

4.$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})$：

$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})$與 n 的關係式並不是那麼明顯，但是在經過多方面的試驗後終於有了進展，我們嘗試以 n 進位來探討，赫然發現它有規律性的關連：

$\mathcal{L}(3,n)$

100	4
300	5
1320	6
4224	7
14664	8
43806	9
128544	10
358906	11
1010164	12
23⑪6725	13
67201224	14

$\mathcal{L}(4,\mathrm{n})$

1000	5
4000	6
22300	7
106000	8
671440	9
1424736	10
5080252	11
16⑪22⑪30	12
589121⑪91	13
173⑪60168	14

$\mathcal{L}(5,\mathrm{n})$

10000	6
50000	7
314000	8
1578300	9
7272720	10
30855054	11
18883400	12
⑫563⑪047	13
71849132	14

$\mathcal{L}(6,\mathrm{n})$

100000	7
600000	8
4050000	9
22806000	10
111035900	11
5722⑩⑩800	12
24014⑫0⑫49	13
⑫07⑬968968	14

$\mathcal{L}(7,\mathrm{n})$

1000000	8
7000000	9
49600000	10
2⑩6390000	11
164⑪000000	12
92140⑫8⑫00	13
413095⑩4120	14

我們在$\mathcal{L}(3,n)$這些 n 進位沒發現前後項有何關連性，在$\mathcal{L}(4,n)$也沒發現，這些『縱』的觀察，沒有找到明確的關連性，但是，我們卻在『橫』的方面發現非常有趣的關係。

41(+51)　　　　　(5 進位)

1320(+61)　　　　(6 進位)

22300(+71)　　　　(7 進位)

314000(+81)　　　(8 進位)

4050000(+91)　　　(9 進位)

49600000(+101)　　(10 進位)

597000000(+101)　　(11 進位)

6980000000(+101)　　(12 進位)

79900000000(+101)　　(13 進位)

89⑩000000000(+101)　(14 進位)

99⑪0000000000(+101)　(15 進位)

$\mathcal{L}(2,5) = 21 \equiv 41_{(5)}$

$\mathcal{L}(3,6) = 336 \equiv 1320_{(6)}$

$\mathcal{L}(4,7) = 5635 \equiv 22300_{(7)}$

$\mathcal{L}(5,8) = 104448 \equiv 314000_{(8)}$

$\mathcal{L}(6,9) = 2158569 \equiv 4050000_{(9)}$

$\mathcal{L}(7,10) = 49600000_{(10)}$

$\mathcal{L}(8,11) = 1259579871 \equiv 597000000_{(11)}$

$\mathcal{L}(9,12) = 35115171840 \equiv 6980000000_{(12)}$

$\mathcal{L}(10,13) = 1067791513789 \equiv 79900000000_{(13)}$

$\mathcal{L}(11,14) = 35206423719936 \equiv 89⑩000000000_{(14)}$

$\mathcal{L}(12,15) = 1251907998046875 \equiv 99⑪0000000000_{(15)}$

$\mathcal{L}(3，6) = 336 \equiv 1320_{(6)} = (6+3)\cdot 6^2 + 2\cdot 6^1 = (1+3+5)\cdot 6^2 + 2\cdot 6^1$

$\mathcal{L}(4，7) = 5635 = 22300_{(7)} = (2\cdot 7+2)\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2 = (1+3+5+7)\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2$

$\mathcal{L}(5，8) = 104448 \equiv 314000_{(8)} = (3\cdot 8+1)\cdot 8^4 + 4\cdot 8^3$

$= (1+3+5+7+9)\cdot 8^4 + 4\cdot 8^3$

我們由關聯性得到：

$$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})=\sum_{k=1}^{n-3}(2\mathrm{k}-1)n^{n-4}+(n-4)n^{n-5}=(n-3)^2n^{n-4}+(n-4)n^{n-5}$$

$$=n^{n-2}-6n^{n-3}+10n^{n-4}-4n^{n-5}，\mathrm{n}\geq 5$$

我們發現第三個『橫』的關係$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})$也是 n 進位的式子。

5. $\mathcal{L}(\mathrm{n}-4,\mathrm{n})$

經過以上發現，我們猜想$\mathcal{L}(\mathrm{n}-4,\mathrm{n})$、$\mathcal{L}(\mathrm{n}-5,\mathrm{n})$可能也是 n 進位的式子。

令$\mathcal{L}(\mathrm{n}-4,\mathrm{n})=n^{n-2}+an^{n-3}+bn^{n-4}+cn^{n-5}+dn^{n-6}+en^{n-7}+fn^{n-8}$

$\mathcal{L}(4,8)=35840=8^6+8^5a+8^4b+8^3c+8^2d+8e+f$

$\mathcal{L}(5,9)=878688=9^7+9^6a+9^5b+9^4c+9^3d+9^2e+9f$

$\mathcal{L}(6,10)=22806000=10^8+10^7a+10^6b+10^5c+10^4d+10^3e+10^2f$

$\mathcal{L}(7,11)=634833760=11^9+11^8a+11^7b+11^6c+11^5d+11^4e+11^3f$

$\mathcal{L}(8,12)=19017732096=12^{10}+12^9a+12^8b+12^7c+12^6d+12^5e+12^4f$

$\mathcal{L}(9,13)=612811670640=13^{11}+13^{10}a+13^9b+13^8c+13^7d+13^6e+13^5f$

$$\begin{cases}35840=8^6+8^5a+8^4b+8^3c+8^2d+8e+f\\97632=9^6+9^5a+9^4b+9^3c+9^2d+9e+f\\228080=10^6+10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f\\476960=11^6+11^5a+11^4b+11^3c+11^2d+11e+f\\917136=12^6+12^5a+12^4b+12^3c+12^2d+12e+f\\1650480=13^6+13^5a+13^4b+13^3c+13^2d+13e+f\end{cases}$$

$$\begin{cases}26281a+2465b+217c+17d+e=-207505\\40951a+3439b+271c+19d+e=-338131\\61051a+4641b+331c+21d+e=-522661\\87781a+6095b+397c+23d+e=-774247\\122461a+7825b+469c+25d+e=-1107481\end{cases}$$

$$\begin{cases}34680a+1730b+72c+2d=-333234\\26730a+1454b+66c+2d=-251586\\20100a+1202b+60c+2d=-184530\\14670a+974b+54c+2d=-130626\end{cases}$$

$$\begin{cases}7950a+276b+6c=-81648\\6630a+252b+6c=-67056\\5430a+228b+6c=-53904\end{cases}$$

$$\begin{cases}1320a+24b=-14592\\1200a+24b=-13152\end{cases}$$

$$12\mathrm{a}=-1440$$

$\therefore \mathrm{a}=-12$, $\mathrm{b}=52$, $\mathrm{c}=-100$, $\mathrm{d}=83$, $\mathrm{e}=-24$, $\mathrm{f}=0$

$\therefore \mathcal{L}(\mathrm{n}-4,\mathrm{n})=n^{n-2}-12n^{n-3}+52n^{n-4}-100n^{n-5}+83n^{n-6}-24n^{n-7}$，$n\geq 7$

以上的推論，我們將$\mathcal{L}(10,14)$、$\mathcal{L}(11,15)$、$\mathcal{L}(12,16)$等等代入，發現都是吻合的。

6. $\mathcal{L}(\mathrm{n}-5,\mathrm{n})$

令$\mathcal{L}(\mathrm{n}-5,\mathrm{n})=n^{n-2}+an^{n-3}+bn^{n-4}+cn^{n-5}+dn^{n-6}+en^{n-7}+fn^{n-8}+gn^{n-9}$

$\mathcal{L}(4,9)=9^7+9^6a+9^5b+9^4\mathrm{c}+9^3d+9^2e+9f+g=226080$

$\mathcal{L}(5,10)=10^8+10^7a+10^6b+10^5c+10^4d+10^3e+10^2f+10g=7272720$

$\mathcal{L}(6,11)=11^9+11^8a+11^7b+11^6c+11^5d+11^4e+11^3f+11^2g=235669280$

$\mathcal{L}(7,12)=12^{10}+12^9a+12^8b+12^7c+12^6d+12^5e+12^4f+12^3g=7915843584$

$\mathcal{L}(8,13)=13^{11}+13^{10}a+13^9b+13^8c+13^7d+13^6e+13^5f+13^4g=279031830480$

$\mathcal{L}(9,14)=14^{12}+14^{11}a+14^{10}b+14^9c+14^8d+14^7e+14^6f+14^5g$

$=10376539613440$

$\mathcal{L}(10,15)=15^{13}+15^{12}a+15^{11}b+15^{10}c+15^9d+15^8e+15^7f+15^6g$

$=407820278250000$

$$\begin{cases} 9^7+9^6a+9^5b+9^4\mathrm{c}+9^3d+9^2e+9f+g=226080 \\ 10^7+10^6a+10^5b+10^4c+10^3d+10^2e+10f+g=727272 \\ 11^7+11^6a+11^5b+11^4c+11^3d+11^2e+11f+g=1947680 \\ 12^7+12^6a+12^5b+12^4c+12^3d+12^2e+12f+g=4580928 \\ 13^7+13^6a+13^5b+13^4c+13^3d+13^2e+13f+g=9769680 \\ 14^7+14^6a+14^5b+14^4c+14^3d+14^2e+14f+g=19293560 \\ 15^7+15^6a+15^5b+15^4c+15^3d+15^2e+15f+g=35803152 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 468559a+40451b+3439c+271d+19e+f=-4715839 \\ 771561a+61051b+4641c+331d+21e+f=-8266763 \\ 1214423a+87781b+6095c+397d+23e+f=-13711389 \\ 1840825a+122461b+7825c+469d+25e+f=-21727957 \\ 2702727a+166531b+9855c+547d+27e+f=-33141107 \\ 3861089a+221551b+1220c+631d+29e+f=-48936279 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 303002a+20100b+1202c+60d+2e=-3550924 \\ 442862a+26730b+1454c+66d+2e=-5444626 \\ 626402a+34680b+1730c+72d+2e=-8016568 \\ 861902a+44070b+2030c+78d+2e=-11413150 \\ 1158362a+55020b+2354c+94d+2e=-15795172 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 139860a+6630b+252c+6d=-1893702 \\ 183540a+7950b+276c+6d=-2571942 \\ 235500a+9390b+300c+6d=-3396582 \\ 296460a+10950b+324c+6d=-438022 \end{cases}$$

$$\begin{cases}23310a+1105b+42c+d=-315617\\30590a+1325b+46c+d=-428657\\39250a+1565b+50c+d=-566097\\49410a+1825b+54c+d=-730337\end{cases}$$

$$\begin{cases}7280a+220b+4c=-113040\\8660a+240b+4c=-137440\\10160a+260b+4c=-164240\end{cases}$$

$$\begin{cases}138a+2b=-2440\\150a+2b=-2680\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{a}=-20, \mathrm{b}=160, \mathrm{c}=-660, \mathrm{d}=1503, \mathrm{e}=-1872,\ \mathrm{f}-1176\ , \mathrm{g}=-288$

$\therefore \mathcal{L}(\mathrm{n}-5,\mathrm{n})=n^{n-2}-20n^{n-3}+160n^{n-4}-660n^{n-5}+1503n^{n-6}$

$-1872n^{n-7}+1176n^{n-8}-288n^{n-9}$，$n\geq 9$

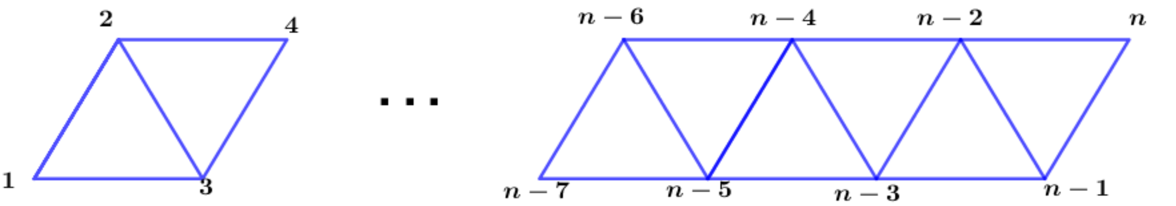
以上的推論，我們將$\mathcal{L}(11,16)$、$\mathcal{L}(12,17)$等等代入，發現也都是吻合的。

伍、 討論

一、引理 1. $\mathcal{L}(2,\mathrm{n})$的遞迴關係和一般式:

(一)遞迴關係：$\mathcal{L}(2,\mathrm{n})=3\,\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)-\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-2)$:

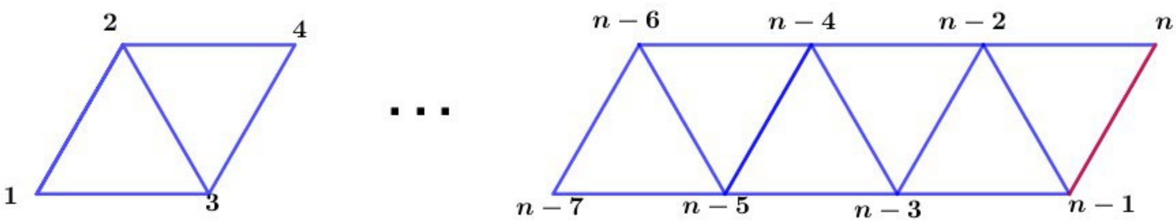
證明:先看到$\mathcal{L}(2,\mathrm{n})$母圖



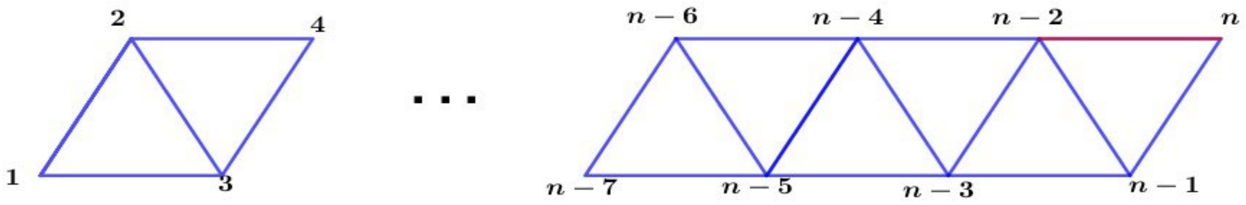
圖(十)

在圖中，我們分開討論:

a. 當 deg(n)=1，因為可將分支連到 V(n-1)抑或 V(n-2)，繼續向下連完所有點，如圖:



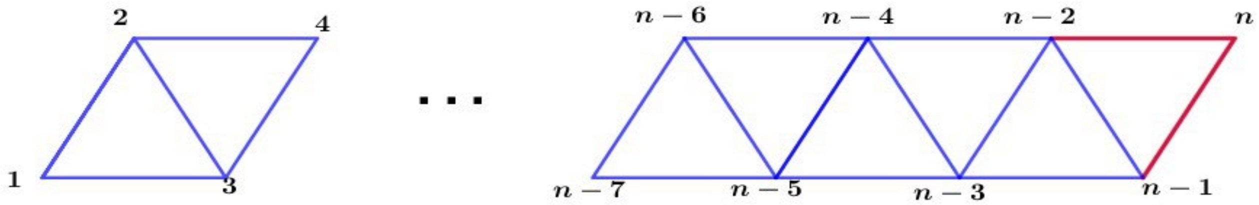
圖(十一)



圖(十二)

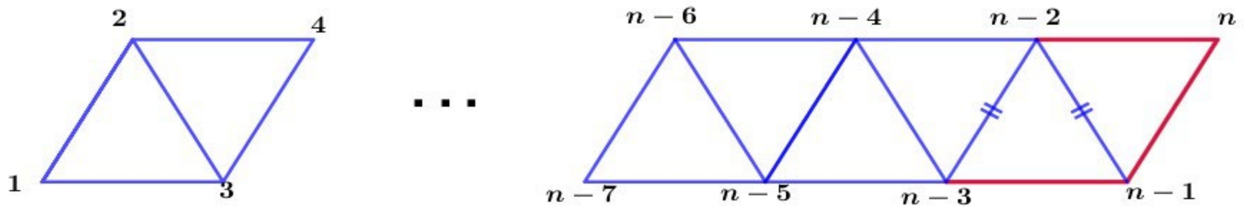
共有$2 * \mathcal{L}(2, \mathrm{n}-1)$種

b. 當 deg(n)=2，因為可將分支同時連到 V(n-1)和 V(n-2)，考慮 E(n-1,n-2)不相連，考慮以 V(n-2)當作新點向下連完，共有$\mathcal{L}(2, \mathrm{n}-2)$種，如圖:



圖(十三)

在考慮以 V(n-3)當作新點向下連完，共有$\mathcal{L}(2, \mathrm{n}-3)$種，如圖:



圖(十四)

……以此類推⟹所以當 deg(n)=2 時，共有$\sum_{i=1}^{n-2} \mathcal{L}(2, \mathrm{i})$種。

由上述可得

$\mathcal{L}(2, \mathrm{n}) = 2\mathcal{L}(2, \mathrm{n}-1) + \mathcal{L}(2, \mathrm{n}-2) \ldots\ldots \mathcal{L}(2,1)$……(1)

$-)\mathcal{L}(2, \mathrm{n}-1) = 2\mathcal{L}(2, \mathrm{n}-2) + \mathcal{L}(2, \mathrm{n}-3) \ldots\ldots \mathcal{L}(2,1)$ ……(2)

---

(1)-(2)　$\mathcal{L}(2, \mathrm{n}) - \mathcal{L}(2, \mathrm{n}-1) = 2\mathcal{L}(2, \mathrm{n}-1) - \mathcal{L}(2, \mathrm{n}-2)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(2,6) = 3\,\mathcal{L}(2,5) - \mathcal{L}(2,4)$

故$\mathcal{L}(2, \mathrm{n}) = 3\,\mathcal{L}(2, \mathrm{n}-1) - \mathcal{L}(2, \mathrm{n}-2)$，$n \geq 3$得證。

（二）一般式: $\mathcal{L}(2,\mathrm{n})=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]\quad=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$

$\because\ \mathcal{L}(2,\mathrm{n})=3\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)-\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-2)$

令 $\mathcal{L}(2,\mathrm{n})-\alpha\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)=\beta\big(\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)-\alpha\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-2)\big)$

則 $\mathcal{L}(2,\mathrm{n})=(\alpha+\beta)\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)-\alpha\beta\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)$

$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}\Rightarrow\alpha,\beta$ 即為 $x^2-3x+1=0$ 之兩根

$\therefore$ 令 $\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ ,\beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 令 $\mathcal{L}(2,\mathrm{n})=k\alpha^n+l\beta^n$ 則 $\begin{cases}\mathcal{L}(2,2)=k\alpha^2+l\beta^2=1\\ \mathcal{L}(2,1)=k\alpha^1+l\beta^1=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{7+3\sqrt{5}}{2}k+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}l=1\cdots\cdots①\\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}k+\frac{3-\sqrt{5}}{2}l=0\cdots\cdots②\end{cases}$ ①−②×3 得 $-k-l=1\Rightarrow l=-k-1$

代入 ② $\frac{3+\sqrt{5}}{2}k+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(-k-1)=0\Rightarrow k=\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ $\quad l=\frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}-1=\frac{-(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$

$$\therefore\ \mathcal{L}(2,\mathrm{n})=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]\quad=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$$

二、$\mathcal{L}(3,\mathrm{n})$討論

$\mathcal{L}(3,4)$：如圖，4 個城市共有 6 種連通路線，我們只能取 3 條通路，所以，有C_3^6 =20 種建立方法，但是，4 個城市任取 3 個城市連成的三角形連通路線，就會漏掉第四個城市，不合通路規定，因此要扣掉。

$\mathcal{L}(3,5)$如圖，我們將 5 個城市排成上下兩個正四面體，上方的正四面體有$\mathcal{L}(3,4)$種連通路線，與第 5 個城市有 3 條通路，所以，有$3\mathcal{L}(3,4)$種連通路線；反過來，下方的正四面體也有$\mathcal{L}(3,4)$種連通路線，與第 1 個城市也有 3 條通路，所以也有$3\mathcal{L}(3,4)$種連通路線。因此，上下共有$6\mathcal{L}(3,4)$種連通路線。

但是，2~4 號城市與上下方 1、5 兩個城市各 3 條通路，都任取一條時連成的連通 路線，重複在兩個$3\mathcal{L}(3,4)$種連通路線了，因此需扣掉，而中間三角形 2~4 號城市有$\mathcal{L}(3,3)$種連通路線，因此要扣掉$C_1^3C_1^3\mathcal{L}(3,3)$。但是 2~4 號城市與上下方 1、5 兩個城市都各取 2 條時連成的連通路線尚需列入計算，即$C_2^3C_2^3$；同時，如果上下方各 2 條是在同一個『側平面』例如 1-2-5-4，就漏掉城市 3，不合，須扣除，共 3 種。

$\mathcal{L}(3,2)=1$

$\mathcal{L}(3,3)=3$

$\mathcal{L}(3,4) = C_3^6 - 4 = 16$

$\mathcal{L}(3,5) = 6\mathcal{L}(3,4) - C_1^3 C_1^3 \mathcal{L}(3,3) + (C_2^3 C_2^3 - 3) = 96 - 27 + 6 = 75$

$\mathcal{L}(3,6) = 6\mathcal{L}(3,5) - C_1^3 C_1^3 \mathcal{L}(3,4) + (2^2 + 6 + C_1^5 \times 4) = 450 - 144 + 30 = 336$

$\mathcal{L}(3,7) = 6\mathcal{L}(3,6) - C_1^3 C_1^3 \mathcal{L}(3,5) + (1 + 2 \times 5 \times 2 + 46 + 46 + 34) = 1488$

$\mathcal{L}(3,8) = 6\mathcal{L}(3,7) - 9\mathcal{L}(3,6) + 676 = 6580$

三、$\mathcal{L}(4,\mathrm{n})$討論：

$\mathcal{L}(4,2) = 3$

$\mathcal{L}(4,4) = C_3^6 - 4 = 16$

$\mathcal{L}(4,5) = C_4^{10} - 5C_4^6 - C_3^5 = 210 - 75 - 10 = 125$

$\mathcal{L}(4,6) = 2 \times 4\mathcal{L}(4,5) - 4 \times 4\mathcal{L}(4,4) + 120 = 864$

$\mathcal{L}(4,7) = 2 \times 4\mathcal{L}(4,6) - 4 \times 4\mathcal{L}(4,5) + 723 = 5635$

四、【引理二】. $\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n}) = n^{n-2}$

證明：因為在$\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n})$中的最大標號差正是 n−1，所以生成樹圖的不會因標號差而受限制，因此他的生成母圖即是完美圖，而根據定義，恰可套用於凱萊公式上，

故. $\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n}) = n^{n-2}$得證。

五、【定理一】. $\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n}，\mathrm{a}) = C_{a-1}^{n-2}(n-1)^{n-a-1}$其中 deg(n)=a，而 b=(n−1)−a。

證明：我們先包含序列最後固定出現(不會顯示在序列中)的 n(第i_{n-1}序列)

$$\{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}\}_{i_{n-1}}$$

在$i_1 \sim i_{n-2}$中，我們只能再選 a−1 個序列連接 n(∴係數是C_{a-1}^{n-2})，而剩餘的其他序列不能再出現 n，所以只剩$(n-1)^b$種選擇。

綜合上述，可得$\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n}，\mathrm{a}) = C_{a-1}^{n-2}(n-1)^{n-a-1}$。

六、【定理二】. $\mathcal{L}(\mathrm{n}-2,\mathrm{n}) = (n-2)n^{n-3} = n^{n-2} - 2 \cdot n^{n-3}$

證明：

$$\mathcal{L}(\mathrm{n}-2,\mathrm{n})=\begin{vmatrix} n-2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n-1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n-1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & n & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & n & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & n & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & n & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=n^{n-2}-1\times n^{n-3}\times 1-1\times n^{n-3}\times(-1)^2=n^{n-2}-2\times n^{n-3}$$

陸、 研究結果

一、標號差 k 為 1 的建立方法：

$\mathcal{L}(1,2)=1$，$\mathcal{L}(1,3)=1$，$\mathcal{L}(1,4)=1$,…… ，$\mathcal{L}(1,\mathrm{n})=1$

二、標號差 k 為 2 的建立方法：

$\mathcal{L}(2,2)=1$，$\mathcal{L}(2,3)=3$，$\mathcal{L}(2,4)=8$，$\mathcal{L}(2,5)=21$，……

(1) $\mathcal{L}(2,\mathrm{n})=3\,\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-1)-\mathcal{L}(2,\mathrm{n}-2)$

(2) $\mathcal{L}(2,\mathrm{n})=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$

三、標號差 k 為 3 的建立方法：

$\mathcal{L}(3,2)=1,\qquad \mathcal{L}(3,3)=3,\qquad \mathcal{L}(3,4)=C_3^6-4=16,$

$\mathcal{L}(3,5)=6\,\mathcal{L}(3,4)-9\,\mathcal{L}(3,3)+(C_2^3C_2^3-3)=75,$

$\mathcal{L}(3,6)=6\,\mathcal{L}(3,5)-9\,\mathcal{L}(3,4)+30=336$

$\mathcal{L}(3,7)=6\,\mathcal{L}(3,6)-9\,\mathcal{L}(3,5)+147=1488$

$\mathcal{L}(3,8)=6\,\mathcal{L}(3,7)-9\,\mathcal{L}(3,6)+676\ =6580\cdots\cdots$

四、標號差 k 為 4 的建立方法：

$\mathcal{L}(4,2)=1$，$\mathcal{L}(4,3)=3$，$\mathcal{L}(4,4)=16$，

$\mathcal{L}(4,5)=C_4^{10}-5C_4^6-C_3^5=125$

$\mathcal{L}(4,6)=8\,\mathcal{L}(4,5)-16\,\mathcal{L}(4,4)+120=864$

$\mathcal{L}(4,7)=8\,\mathcal{L}(4,6)-16\,\mathcal{L}(4,5)+723=5635$

$\mathcal{L}(4,8)=8\,\mathcal{L}(4,6)-16\,\mathcal{L}(4,5)+4584=35840\quad\cdots\cdots$

五、我們以固定的標號差 k，觀察相鄰兩項的比值，發現有趣的關聯性：

$\frac{\mathcal{L}(3,5)}{\mathcal{L}(3,4)}=\frac{75}{16}=4.6875$ ， $\frac{\mathcal{L}(3,6)}{\mathcal{L}(3,5)}=\frac{336}{75}=4.48$ ， $\frac{\mathcal{L}(3,7)}{\mathcal{L}(3,6)}=\frac{1488}{336}=4.428571\cdots$ ，

$\frac{\mathcal{L}(3,8)}{\mathcal{L}(3,7)}=\frac{6580}{1488}=4.422043\cdots$ ，$\frac{\mathcal{L}(3,9)}{\mathcal{L}(3,8)}=\frac{19085}{6580}=4.420212\cdots$ ， $\frac{\mathcal{L}(3,10)}{\mathcal{L}(3,9)}=4.419597\cdots$ ，$\cdots$

似乎趨近於$3+\sqrt{2}=4.41421\cdots\cdots$，尚待驗證。

$\frac{\mathcal{L}(4,6)}{\mathcal{L}(4,5)}=\frac{864}{125}=6.912$ ， $\frac{\mathcal{L}(4,7)}{\mathcal{L}(4,6)}=\frac{5635}{864}=6.52199\cdots$ ，$\frac{\mathcal{L}(4,8)}{\mathcal{L}(4,7)}=\frac{35840}{5635}=6.360248\cdots$ ，

$\frac{\mathcal{L}(4,9)}{\mathcal{L}(4,8)}=\frac{226080}{35840}=6.30803\cdots$ ，$\frac{\mathcal{L}(4,10)}{\mathcal{L}(4,9)}=\frac{1424736}{226080}=6.30191\cdots$ ， $\frac{\mathcal{L}(4,11)}{\mathcal{L}(4,10)}=6.29957\cdots$ ，$\cdots$

$\frac{\mathcal{L}(5,8)}{\mathcal{L}(5,7)}=\frac{104448}{12005}=8.700374\cdots$ ，$\frac{\mathcal{L}(5,9)}{\mathcal{L}(5,8)}=\frac{878688}{104448}=8.412683\cdots$ ，$\frac{\mathcal{L}(5,10)}{\mathcal{L}(5,9)}=8.276794\cdots$ ，

$\frac{\mathcal{L}(5,11)}{\mathcal{L}(5,10)}=\frac{59829840}{7272720}=8.226611\cdots$ ，$\frac{\mathcal{L}(5,12)}{\mathcal{L}(5,11)}=\frac{491863680}{59829840}=8.2210428\cdots$ ， $\cdots\cdots$

六、【定理一】$\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n},\mathrm{a})=C_{a-1}^{n-2}(n-1)^{n-a-1}$

七、【性質一】$\mathcal{L}(1,n-2)>\mathcal{L}(2,n-3)>\mathcal{L}(3,n-4)>\cdots\cdots>\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,0)$

證明:

1. 標號差限制越大，圖形越像 n 節點的完美圖(能使用的邊也越多)，方法數越趨近 n 節點的完美圖。

2. 節點數越多，方法數越多。

綜合以上兩點，得證。

八、【引理二】$\mathcal{L}(\mathrm{n}-1,\mathrm{n})=n^{n-2}$[表九]

$\mathcal{L}(2,2)=1$	$\mathcal{L}(3,2)=1$	$\mathcal{L}(4,2)=1$	$\mathcal{L}(5,2)=1$	$\mathcal{L}(6,2)=1$
$\mathcal{L}(2,3)=3$	$\mathcal{L}(3,3)=3$	$\mathcal{L}(4,3)=3$	$\mathcal{L}(5,3)=3$	$\mathcal{L}(6,3)=3$
$\mathcal{L}(2,4)=8$ $=2\times4$	$\mathcal{L}(3,4)=4^2$	$\mathcal{L}(4,4)=4^2$	$\mathcal{L}(5,4)=4^2$	$\mathcal{L}(6,4)=4^2$
$\mathcal{L}(2,5)=21$	$\mathcal{L}(3,5)$ $=3\times5^2$	$\mathcal{L}(4,5)=5^3$	$\mathcal{L}(5,5)=5^3$	$\mathcal{L}(6,5)=5^3$
$\mathcal{L}(2,6)=55$	$\mathcal{L}(3,6)=336$	$\mathcal{L}(4,6)=4\times6^3$	$\mathcal{L}(5,6)=6^4$	$\mathcal{L}(6,6)=6^4$
$\mathcal{L}(2,7)=144$	$\mathcal{L}(3,7)=1488$	$\mathcal{L}(4,7)=5635$	$\mathcal{L}(5,7)=5\times7^4$	$\mathcal{L}(6,7)=7^5$
		$\mathcal{L}(4,8)=35840$	$\mathcal{L}(5,8)$ $=104448$	$\mathcal{L}(6,8)=6\times8^5$

九、【定理二】$\mathcal{L}(\mathrm{n}-2,\mathrm{n})=(n-2)n^{n-3}=n^{n-2}-2\cdot n^{n-3}$

十、【猜想三】$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})=n^{n-2}-6n^{n-3}+10n^{n-4}-4n^{n-5}$，$\mathrm{n}\geq5$

十一、【猜想四】

$$\mathcal{L}(\mathrm{n}-4,\mathrm{n})=n^{n-2}-12n^{n-3}+52n^{n-4}-100n^{n-5}+83n^{n-6}-24n^{n-7}\text{，}n\geq 7$$

十二、【猜想五】

$$\mathcal{L}(\mathrm{n}-5,\mathrm{n})=n^{n-2}-20n^{n-3}+160n^{n-4}-660n^{n-5}+1503n^{n-6}-1872n^{n-7}$$
$$+1176n^{n-8}-288n^{n-9}\text{，}n\geq 9$$

十三、【猜想六】$\mathcal{L}(\mathrm{n}-6,\mathrm{n})=n^{n-2}-30n^{n-3}+380n^{n-4}-2660n^{n-5}+11293n^{n-6}$

$$-30002n^{n-7}+49614n^{n-8}-49028n^{n-9}+26192n^{n-10}-5760n^{n-11}\text{，}\ n\geq 11$$

柒、 結論與展望

我們以生成樹、尤拉-柯西-漢米爾頓漫遊大量畫圖、逐步推展建立光纖網路的建立方法，並輔以 Python 程式、基爾霍夫定理來計算，成功地確認建立光纖通路方法數的正確。另外，我們也以『橫向』來探討，發現除了凱萊公式以外，我們也得到$\mathcal{L}(\mathrm{n}-2,\mathrm{n})$，$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n}),\cdots\cdots$一些關係式，並且有部分的證明。未來我們希望繼續研究，不論是『縱向』的關係，或者是『橫向』的關係，我們希望獲得更強的關係式。

捌、 參考資料(References)

[1] 龍騰版高級中學數學 A 第三冊第九單元行列式，許志農主編。

[2] 李明叡：中華民國第 51 屆中小學科學展覽 030401 光纖網路連連看。

[3] The Magic of Euler’s Equation: V-E+F=2. An Eye Opener. ……Peter Sels Jul 13, 2020。

[4] Discrete Mathematcs：Graph Theory-2 proof of V-E+R＝2.
……Prof.S.R.S.Ivengar ,Department of Computer Science IITRopar。

[5] 楊凱帆。Labeled rooted trees in Fibonacci’s fashion 標記有根樹的計數問題探討，交通大學應用數學系碩士論文，104 年 6 月。

[6] THE MATRIX-TREE THEOREM - MIT OpenCourseWare

[7] 柳柏濂。樹的計數-從數到超樹，中國華南師範大學。

玖、附錄

以下是我們透過矩陣樹定理算出的數據：

$\mathcal{L}(4,7) = 5635$

$\mathcal{L}(4,8) = 35840$

$\mathcal{L}(4,9) = 226080$

$\mathcal{L}(4,10) = 1424736$

$\mathcal{L}(4,11) = 8975232$

$\mathcal{L}(4,12) = 56531412$

$\mathcal{L}(4,13) = 356045600$

$\mathcal{L}(4,14) = 2242419040$

$\mathcal{L}(4,15) = 14122994787$

$\mathcal{L}(4,16) = 88948032416$

$\mathcal{L}(4,17) = 560203336285$

$\mathcal{L}(4,18) = 3528214538112$

$\mathcal{L}(4,19) = 22221043368624$

$\mathcal{L}(4,20) = 139950209558628$

$\mathcal{L}(5,8) = 104448$

$\mathcal{L}(5,9) = 878688$

$\mathcal{L}(5,10) = 7272720$

$\mathcal{L}(5,11) = 59829840$

$\mathcal{L}(5,12) = 491863680$

$\mathcal{L}(5,13) = 4042376800$

$\mathcal{L}(5,14) = 33217265664$

$\mathcal{L}(5,15) = 272934155637$

$\mathcal{L}(5,16) = 2242522832400$

$\mathcal{L}(5,17) = 18425237837125$

$\mathcal{L}(5,18) = 151386977585232$

$\mathcal{L}(5,19) = 1243837315587760$

$\mathcal{L}(5,20) = 10219707278640384$

$\mathcal{L}(6,9) = 2158569$

$\mathcal{L}(6,10) = 22806000$

$\mathcal{L}(6,11) = 235669280$

$\mathcal{L}(6,12) = 2407426560$

$\mathcal{L}(6,13) = 24478578432$

$\mathcal{L}(6,14) = 248773434624$

$\mathcal{L}(6,15) = 2527609743360$

$\mathcal{L}(6,16) = 25677708264000$

$\mathcal{L}(6,17) = 260836913033840$

$\mathcal{L}(6,18) = 2649495039624576$

$\mathcal{L}(6,19) = 26912151112299600$

$\mathcal{L}(6,20) = 273358076605088256$

$\mathcal{L}(7,9) = 3720087$

$\mathcal{L}(7,10) = 49600000$

$\mathcal{L}(7,11) = 634833760$

$\mathcal{L}(7,12) = 7915843584$

$\mathcal{L}(7,13) = 97154373888$

$\mathcal{L}(7,14) = 1182177884160$

$\mathcal{L}(7,15) = 14332337510400$

$\mathcal{L}(7,16) = 173694961440000$

$\mathcal{L}(7,17) = 2104574533261200$

$\mathcal{L}(7,18) = 25496907372921600$

$\mathcal{L}(7,19) = 308871946067232240$

$\mathcal{L}(7,20) = 3741533984223360000$

$\mathcal{L}(8,10) = 4782969$

$\mathcal{L}(8,10) = 80000000$

$\mathcal{L}(8,11) = 1259579871$

$\mathcal{L}(8,12) = 19017732096$

$\mathcal{L}(8,13) = 279031830480$

$\mathcal{L}(8,14) = 4017003943680$

$\mathcal{L}(8,15) = 57145077990000$

$\mathcal{L}(8,16) = 807495149260800$

$\mathcal{L}(8,17) = 11376864717926400$

$\mathcal{L}(8,18) = 160242017886720000$

$\mathcal{L}(8,19) = 2256586253475840000$

$\mathcal{L}(8,20) = 31774539610806220800$

$\mathcal{L}(9,10) = 100000000$

$\mathcal{L}(9,11) = 1929229929$

$\mathcal{L}(9,12) = 35115171840$

$\mathcal{L}(9,13) = 612811670640$

$\mathcal{L}(9,14) = 10376539613440$

$\mathcal{L}(9,15) = 172009287450000$

$\mathcal{L}(9,16) = 2810387968819200$

$\mathcal{L}(9,17) = 45492167508480000$

$\mathcal{L}(9,18) = 732434818452480000$

$\mathcal{L}(9,19) = 11763862633036800000$

$\mathcal{L}(9,20) = 1888978814195945472000$

$\mathcal{L}(10,10) = 100000000$

$\mathcal{L}(10,11) = 2357947691$

$\mathcal{L}(10,12) = 51597803520$

$\mathcal{L}(10,13) = 1067791513789$

$\mathcal{L}(10,14) = 21194228287232$

$\mathcal{L}(10,15) = 407820278250000$

$\mathcal{L}(10,16) = 7670307603087360$

$\mathcal{L}(10,17) = 141914132044439040$

$\mathcal{L}(10,18) = 2595848298718371840$

$\mathcal{L}(10,19) = 47127928555290046464$

$\mathcal{L}(10,20) = 851841505770961305600$

$\mathcal{L}(11,11) = 2357947691$

$\mathcal{L}(11,12) = 61917364224$

$\mathcal{L}(11,13) = 1516443410339$

$\mathcal{L}(11,14) = 35206423719936$

$\mathcal{L}(11,15) = 784490568750000$

$\mathcal{L}(11,16) = 16939651663134720$

$\mathcal{L}(11,17) = 357153652228538880$

$\mathcal{L}(11,18) = 7396769103887794176$

$\mathcal{L}(11,19) = 151197024523801890816$

$\mathcal{L}(11,20) = 3062143325006438400000$

$\mathcal{L}(12,12) = 61917364224$

$\mathcal{L}(12,13) = 1792160394037$

$\mathcal{L}(12,14) = 48594782035968$

$\mathcal{L}(12,15) = 1251907998046875$

$\mathcal{L}(12,16) = 30981488891658240$

$\mathcal{L}(12,17) = 742942498908454208$

$\mathcal{L}(12,18) = 17383926802138251264$

$\mathcal{L}(12,19) = 399127617175714605360$

$\mathcal{L}(12,20) = 9032759011261440000000$

$\mathcal{L}(13,19) = 884602713762910633680$

$\mathcal{L}(13,20) = 22331979694080000000000$

$\mathcal{L}(13,21) = 555148800833660799897600$

$\mathcal{L}(13,22) = 13637641624267435071897600$

$\mathcal{L}(14,20) = 47040050626560000000000$

$\mathcal{L}(14,21) = 1296583620929901876902400$

$\mathcal{L}(14,22) = 35163997636932147658752000$

$\mathcal{L}(14,23) = 941533351419052184550912000$

$\mathcal{L}(15,21) = 2611991987888785399457280$

$\mathcal{L}(15,22) = 78126706877997177702973440$

$\mathcal{L}(15,23) = 2297931081983489834476277760$

$\mathcal{L}(15,24) = 66678958608808764379880226816$

$\mathcal{L}(16,22) = 151300700676027966502010880$

$\mathcal{L}(16,23) = 4884649536418878138460854768$

$\mathcal{L}(16,24) = 155005606801819237195966316544$

$\mathcal{L}(16,25) = 4849740229774429687500000000000$

$$\mathcal{L}(17,23) = 46754033890869858405361481 28$$

$$\mathcal{L}(17,24) = 123188508986275764258528559104$$

$$\mathcal{L}(17,25) = 2865471085366699218750000000000$$

$$\mathcal{L}(17,26) = 51300903547988060193765457920000$$

$$\mathcal{L}(18,24) = 573836525892209354599468892160$$

$$\mathcal{L}(18,25) = 21289443444442749023437500000000$$

$$\mathcal{L}(18,26) = 775955259919231416080868704256000$$

$$\mathcal{L}(18,27) = 27861892404326085220864522405632000$$

【評語】050410

題目頗為有趣，目標是計算 L(k,n)，本文用自己的方法重現了四個邊界值 k=1, 2, (n-1), (n-2)，並能透過已知的理論加以檢驗. 對於其他 k 值有一些觀察與猜想，但可惜沒能有嚴格證明，如果原本問題太難，應該要試圖挖掘已得到部份的新性質，看是否能有機會突破。整體來說是一個有意思的作品，但實質的數學進展不大，是可惜的地方。

作品簡報

光纖通路

組別：高中數學

編號：050410

名詞解釋

$\mathcal{L}(k,n)$：符合標號差$\leq k$，n個節點所形成的生成樹(經標號)的集合個數。

$\mathcal{L}(2,2)=1$		**1-2**	
$\mathcal{L}(2,3)=3$	1-2-3	3-1-2	1-3-2
$\mathcal{L}(2,4)=8$	1-2-3 | 4	1-2-4-3	1-2-3-4
	4-3-1-2	3-1-2-4	
	1-3-2 | 4	1-3-4-2	1-3-2-4

研究動機

我們由歷屆科展的作品中，發現一個建立網路的有趣問題，在原作者努力下僅推導 $\mathcal{L}(3,7) = 1485$ ，我們嘗試各種方式來探討，發現原作數據有誤，應該是1488種。這個看似單純的題目卻充滿挑戰，因此我們開始進行研究。

研究目的與問題

1.「標號差」為3時有幾種建立方法：

$\mathcal{L}(3,8)=$？，$\mathcal{L}(3,9)=$？，$\mathcal{L}(3,10)=$？ …。

2.「標號差」為4時有幾種建立方法：

$\mathcal{L}(4,5)=$？，$\mathcal{L}(4,6)=$？，$\mathcal{L}(4,7)=$？ …。

3.「標號差」為5、6、7、8、9…的建立方法，並尋找它們前後項之間的關連性。

4. 除了以上『縱』的推導計算，我們也研究『橫』的關係，除了凱萊公式以外，我們也希望獲得其他關係式。

流程圖

- 縱的關係 — $\mathcal{L}(1,n)$，$\mathcal{L}(2,n)\cdots$ — 以基爾沃夫矩陣驗證數量
  - 找出縱的相鄰兩項關聯性
- 橫的關係 — $\mathcal{L}(n-1,n)$，$\mathcal{L}(n-2,n)\cdots$ — 以n進位探討
- 研究方向
  - $\mathcal{L}(n-5,n)$，$\mathcal{L}(n-6,n)\cdots$
  - 探討是否有規律性及關係式

研究結果 (縱的關係)

$$\mathcal{L}(2，n)=3\mathcal{L}(2，n-1)-\mathcal{L}(2，n-2)$$

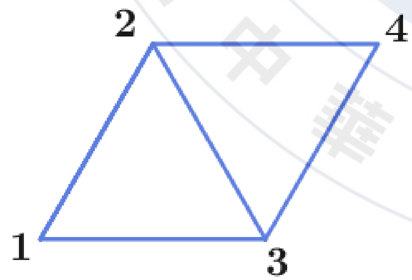
$$\mathcal{L}(2,n)=2\mathcal{L}(2,n-1)+\mathcal{L}(2,n-2)+\cdots+\mathcal{L}(2,1)\cdots\cdots(1)$$

$$-)\mathcal{L}(2,n-1)=2\mathcal{L}(2,n-2)+\mathcal{L}(2,n-3)+\cdots+\mathcal{L}(2,1)\cdots\cdots(2)$$

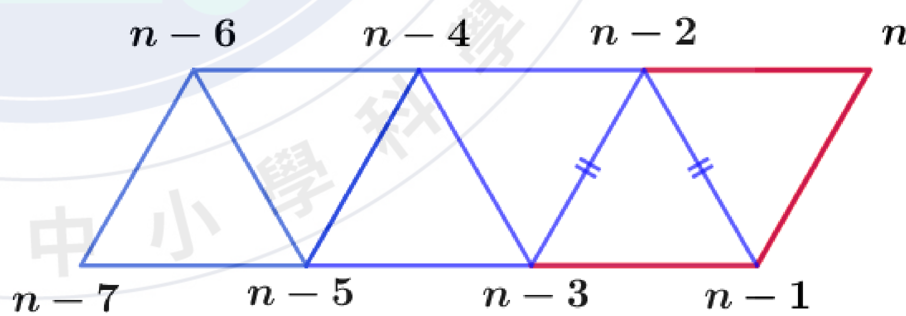
(1)-(2) $\mathcal{L}(2,n)-\mathcal{L}(2,n-1)=2\mathcal{L}(2,n-1)-\mathcal{L}(2,n-2)$

$\Rightarrow\ \mathcal{L}(2,6)=3\,\mathcal{L}(2,5)-\ \mathcal{L}(2,4)$

故$\mathcal{L}(2,n)=3\,\mathcal{L}(2,n-1)-\ \mathcal{L}(2,n-2)$，$n\geq 3$得證。



…



研究結果 (橫的關係)

【引理二】$\mathcal{L}(n-1,n)=n^{n-2}$

【定理二】$\mathcal{L}(n-2,n)=(n-2)n^{n-3}=n^{n-2}-2\cdot n^{n-3}$

$\mathcal{L}$ (k,n) (表一)

n	$\mathcal{L}$(2,n)	$\mathcal{L}$(3,n)	$\mathcal{L}$(4,n)	$\mathcal{L}$(5,n)	$\mathcal{L}$(6,n)
2	1	1	1	1	1
3	$3=3^1$	3	3	3	3
4	$8=2\times 4^1$	$16=4^2$	16	16	16
5	21	75 $=3\times 5^2$	$125=5^3$	125	125
6	55	336	864 $=4\times 6^3$	1296 $=6^4$	1296
7	144	1488	5635	14455 $=5\times 7^4$	16807

研究結果 (橫的關係)

N進位表示

N	$\mathcal{L}(2,5)$	$\mathcal{L}(3,6)$	$\mathcal{L}(4,7)$	$\mathcal{L}(5,8)$
		$\mathcal{L}(n-3,n)$ (表二)		
5	41	2321	421020	1320243
6	33	1320	42031	123320
7	30	680	22300	613341
8	25	520	13001	314000

研究結果 (橫的關係)

41(+51) (5進位)
1320(+61) (6進位)
22300(+71) (7進位)
314000(+81) (8進位)
4050000(+91) (9進位)
49600000(+101) (10進位)
597000000(+101) (11進位)

研究結果 (橫的關係)

$\mathcal{L}(3，6) = 336 \equiv 1320_{(6)} = (6+3)\cdot 6^2 + 2\cdot 6^1$

$= (1+3+5)\cdot 6^2 + 2\cdot 6^1$

$\mathcal{L}(4，7) = 5635 = 22300_{(7)} = (2\cdot 7+2)\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2$
$= (1+3+5+7)\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2$

$\mathcal{L}(5，8) = 104448 \equiv 314000_{(8)} = (3\cdot 8+1)\cdot 8^4 + 4\cdot 8^3$
$= (1+3+5+7+9)\cdot 8^4 + 4\cdot 8^3$

我們由關聯性得到：

$\mathcal{L}(\mathrm{n}-3,\mathrm{n})$

$= \sum_{k=1}^{n-3}(2\mathrm{k}-1)n^{n-4} + (n-4)n^{n-5}$

$=(n-3)^2 n^{n-4} + (n-4)n^{n-5}$

$= n^{n-2} - 6n^{n-3} + 10n^{n-4} - 4n^{n-5}，\mathrm{n} \geq 5$

研究結論

1.我們以生成樹、尤拉-柯西-漢米爾頓漫遊畫圖、逐步推出光纖網路的建立方法，並以Python程式、基爾霍夫定理來確認方法數的正確，我們都能夠計算出$\mathcal{L}(k，n)$之值。

2.我們發現「標號差」為3、4、5、6……它們前後項之間都有一些關連性。

3.我們發現『橫向』的關係不只是凱萊定理，還有$\mathcal{L}(n-2,n)$，$\mathcal{L}(n-3,n),\cdots\cdots$都是n進位的關係。

未來展望

我們探討『橫向』發現：$\mathcal{L}(n-2,n)=(n-2)n^{n-3}$，
$\mathcal{L}(n-3,n)=n^{n-2}-6n^{n-3}+10n^{n-4}-4n^{n-5}, n\geq 5$,
$\mathcal{L}(n-4,n)=n^{n-2}-12n^{n-3}+52n^{n-4}-100n^{n-5}+83n^{n-6}-24n^{n-7}$，$n\geq 7$

未來希望繼續研究，獲得更強的關係式，並加以證明。

參考資料

1.李明叡：中華民國第51屆中小學科學展覽030401光纖網路連連看。
2.楊凱帆。Labeled rooted trees in Fibonacci's fashion 標記有根樹的計數問題探討，交通大學應數系碩士論文，104年6月。
3.柳柏濂。樹的計數-從數到超樹，中國華南師範大學。
4. THE MATRIX-TREE THEOREM - MIT OpenCourseWare