中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050409

兩交圓內接三角形最大面積之探討

學校名稱：臺中市私立弘文高級中學

作者：	指導老師：
高三 楊家婕	廖寶貴 曾智鈿

關鍵詞：內接三角形、最大面積

得獎感言

科展開啟了我翱翔數學的門

受到疫情的影響，這次的比賽是透過視訊的方式進行，不只對我而言是新的考驗，也是師長、工作人員新的考驗，比賽方式和以往都不一樣，所以在知道比賽的方式後，培養自己不管是面對任何場地或設備上都能快速上手的能力。

我不會是最聰明的學生，所以我要謝謝我的指導老師拉了我一把，讓我在數學探究的道路上能有依靠，謝謝他們願意在課餘時間教導我進行研究。比賽前，糾正我無數次說話的方式和速度，也常常透過突如其來的問題，讓我學著從慌亂、不知所措變到能從容的回答問題。我要先給我最愛的老師一個大大的感謝！

比賽當天，待在高手雲集的休息室裡，感受到無比的緊張，到了比賽教室，在工作人員仔細的檢查之後，我獨自一個人在教室，也開始舒緩自己的情緒，期待能表現出和平常一樣的自己。謝謝評審的肯定，讓我有機會得到這份榮譽。

學測前發現有趣的問題並在學測後決然要將問題架構完全並參加今年的科展，想給自己擁有不一樣的改變和挑戰，謝謝一路以來支持我的家人、師長、朋友，讓我把這些鼓勵轉化為動力，才會有今天的結果，也讓我在高中生涯的最後一年，用科展做一個完美的結束。

這次的比賽，我同時看到自己的成長，在沒有夥伴的情況下，沒有人可以幫我回答問題、沒有人可以給我依賴，我只能更積極的去解決問題，這次的經驗讓我學到一個人面對事情的能力。而不變的是我對數學的喜愛，在無數個算數學由夜轉白的日子，是我最自豪的，而這也是我的初衷，我會持續的努力，成為更好的自己。

雖然全國賽是採取視訊方式，但我仍是從展版去發現內容的缺漏。

透過實際繪圖操作、視訊練習，學習如何掌控畫面。

全國賽是一個挑戰，也是一個肯定。

摘　　要

本文旨在探討兩圓重疊區域內之內接三角形的最大面積，我們從等半徑之兩圓到相異半徑之兩圓，從特殊化(兩圓互過另一圓之圓心)到一般化(不限定是否通過圓心)分別進行分析。隨著兩圓半徑、連心線長等變數的不同，我們觀察到內接最大面積三角形的形狀變化，及其面積的計算方式，最後我們推導出一般化的結果。

壹、　研究動機與文獻探討

一、研究動機

在特定區域裡探討其內接多邊形最大面積為數學上常被研究的問題。以這樣的前提為概念，我們嘗試考慮在兩圓重疊的情況中，探討重疊部分的區域之中是否存在最大面積之內接三角形。

二、文獻探討

陳柏翰、洪毅群、蔡柏緯、孫旻瓘(2004)在【兩圓相交部份的內接三角形之最大面積】中將兩圓的交疊狀況限制在「等圓」的特殊條件上，且此文獻的變因在於利用程式尋求兩圓交點與外公切線的距離與最大面積三角形其頂角部分所夾的角度值，在實際代數推理或操作上相當的困難。而我們希望能做到更完整的幾何推論，從「兩等圓」的思維出發，進而探討「兩相異圓」的方向；且將變數更改為連心線線段長，使得整個推理過程合理、直觀且容易操作。除此之外，利用兩圓已知半徑與連心線線段長，我們就能推出其頂角部分所夾的角度值與其最大三角形面積。

錢柏均、黃佑平(2013)【兩交圓內接最大圖形面積探討】的內容與陳柏翰等人的【兩圓相交部份的內接三角形之最大面積】在三角形面積的部分想法相似：一、純粹探討兩等圓的情況，二、變因還是兩交圓交點與外公切線的距離，三、在延伸四邊形最大面積部分，菱形也是純粹猜想，無嚴謹證明；內接矩形的最大面積無法找出規律，因此沒有結論說明最大面積如何尋求。

在這樣的前提下，我們鎖定利用半徑和連心線的關係，且為方便研究之進行，我們將問題從特例到一般化來研究。

貳、　研究目的

一、　探討兩等圓互過圓心之交圓內接三角形最大面積

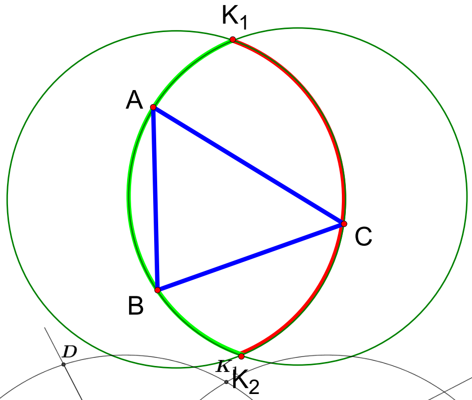
二、　探討兩等圓不過圓心之交圓內接三角形最大面積

三、　探討兩圓(半徑不同)中，其中一圓過另圓圓心之交圓內接三角形最大面積

四、　探討兩圓(半徑不同)中，兩圓互不過圓心之交圓內接三角形最大面積

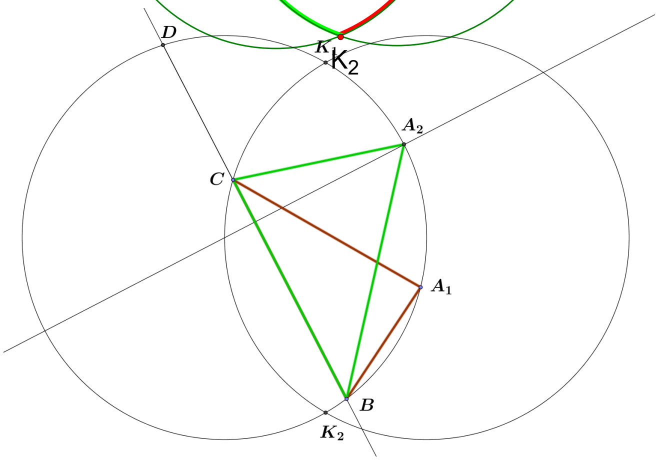
五、　名詞釋義

(一) 交圓內接三角形：



如右圖所示，兩交圓區域中，$\widehat{K_1AK_2}$與$\widehat{K_1CK_2}$上，**任取**相異三點所形成的三角形，如 ΔABC。(三點均在同一弧也可)

(二) 變形：



如右圖，在兩交圓的重疊區域中，任取ΔA_1BC，為了尋求最大面積的三角形，我們會不斷將原本三角形進行所謂的『變形』，即 $\Delta A_1BC \rightarrow \Delta A_2BC$，使得 ΔA_2BC 會是以 $\overline{BC}$ 為底邊時，獲得最大的高來得到最大三角形面積。

說明：

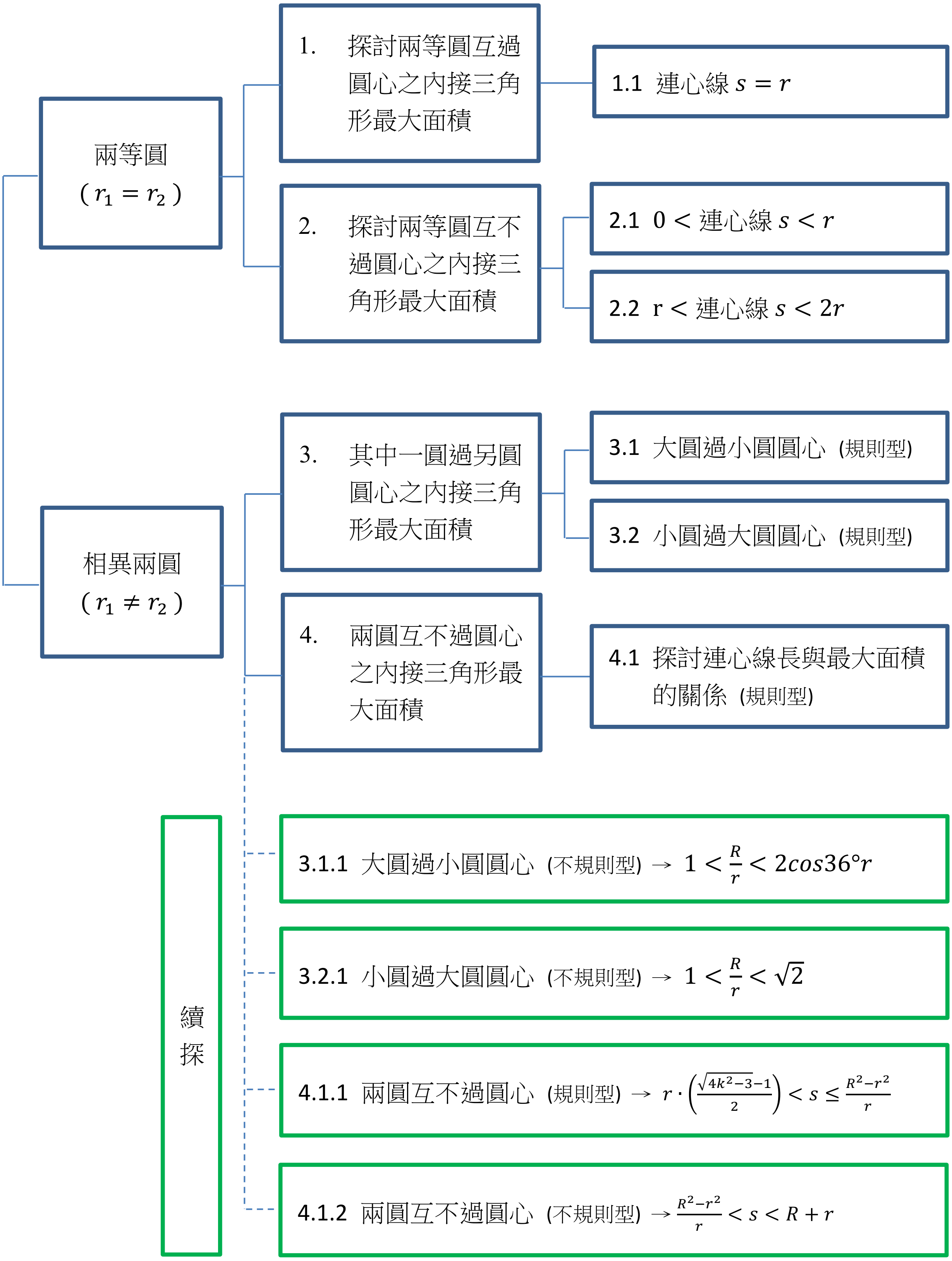
先評估以$\overline{BC}$為底邊頂點會落在左圓上，故先延長 $\overline{BC}$ 交左圓於 D 點，再做 $\overline{BD}$ 的中垂線交右圓於 點A_2，那麼點 A_2會是$\widehat{BA_1D}$上所有點中，與 $\overleftrightarrow{BC}$ 距離最大的一點，故ΔA_2BC是以$\overline{BC}$為底邊時的最大三角形。

參、　研究設備及器材

一、 筆、紙、電腦、excel、GGB、GSP

肆、　研究方法

一、研究流程



二、 探討兩等圓互過圓心之內接三角形最大面積

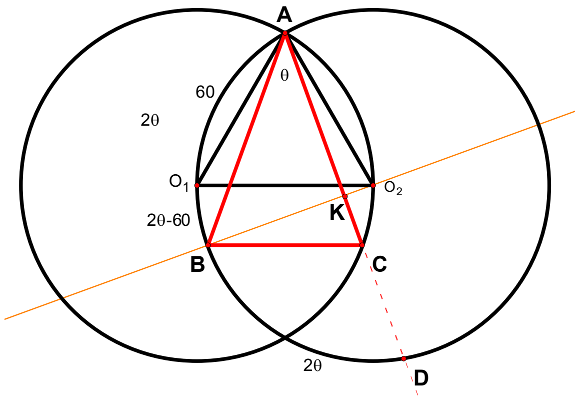
陳柏翰等人在「兩圓相交部份的內接三角形之最大面積」(2004)中提到，最大面積會發生在兩交圓的交點上。在繪圖的過程中，發現到最大的三角形會發生在三邊均不能再變形時，就會成立。那麼，兩等圓互過圓心之內接三角形最大面積會是多少呢？除了透過繁瑣的繪圖來觀察其面積變化之外，可否有更明確的幾何說明?

引理 1.1

已知兩圓 (圓O_1、圓O_2)半徑皆為 r，且兩圓互過圓心，則交圓內最大三角形必為頂角 $\theta = 40°$ 的等腰三角形。

說明：

上述已說明，若ΔABC為交圓內接最大三角形，那麼延長$\overline{AB}$的弦所做的中垂線必過點 C ，延長$\overline{AC}$的弦所做的中垂線必過點 B ，同時以 $\overline{BC}$ 為底時，兩圓交點 A 會是兩弧上距離 $\overline{BC}$ 最遠的一點。因此，在這些條件之下，可以發現ΔABC不可再變形讓面積更大。



證明：

(1) 令$\angle \mathrm{BAC} = \theta$，則$\widehat{BD} = \widehat{AB} = 2\theta$。且因為兩圓等圓互過圓心，故 ΔAO_1O_2 為一正三角形。

(2) 由(1)可推知$\angle \mathrm{B}O_2O_1 = (2\theta - 60°) = \angle O_2(K)BC$，故$\angle KBC + \angle \mathrm{C} = 90°$，即

$(2\theta - 60°) + \frac{(180° - \theta)}{2} = 90°$，得 $\theta = 40°$。

引理 1.2

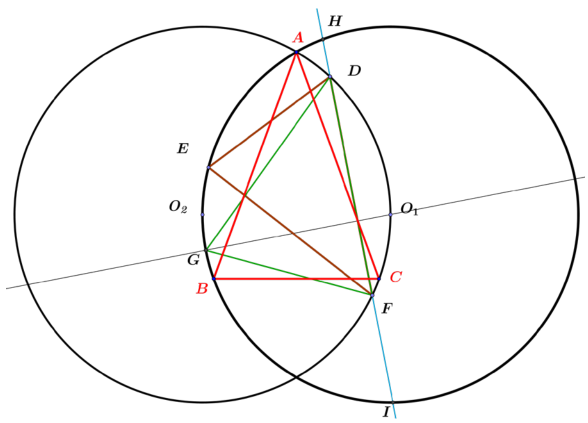
ΔABC 為 $40° - 70° - 70°$ 之三角形，則ΔABC會是兩交圓重疊區域中最大的內接三角形

證明：

我們用反證法來證明。

若ΔDEF為任一異於$40° - 70° - 70°$的最大內接三角形，則以$\overline{DF}$為底邊可以將ΔDEF變形為$\Delta DFG > \Delta DEF$。

故可知若ΔDEF為異於$40° - 70° - 70°$的三角形時，ΔDEF必不為最大內接三角形。



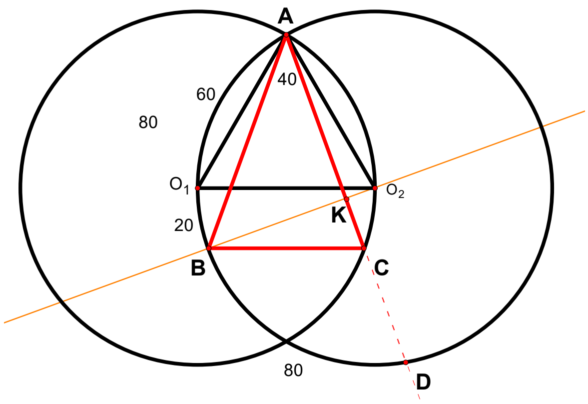
定理 1

已知兩圓半徑為 r ，且兩圓互過圓心，則此

內接三角形最大面積 $= 2r^2 sin^3 40°$

證明：

利用引理 1.1 的結果，θ = 40° 代入可得右圖。從右圖中，可得出下式

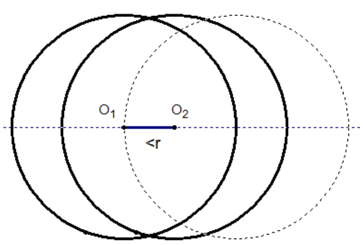


$$\overline{AB}cos40° = \overline{AK} = rsin80°$$

也就是說 $\overline{AB} = \frac{rsin80°}{cos40°}$。因此，$a\Delta ABC = \frac{1}{2}\ \overline{AB} \times \overline{AC} \times sin40° = \frac{1}{2} \times (\frac{rsin80°}{cos40°})^2 \times sin40° = 2r^2 sin^3 40°$，故得證。

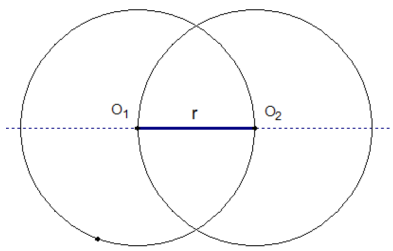
三、 探討兩等圓不過圓心之內接三角形最大面積

若兩等圓互不過圓心如下圖所示，那麼必須增加一個變數方可繼續討論。最終我們選擇沿用已知半徑的條件，增加連心線長 s 的變數繼續進行研究。



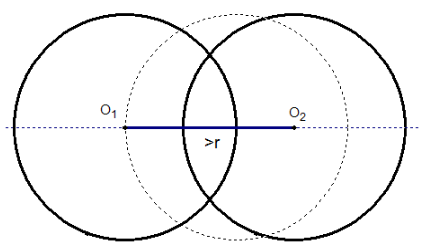
兩等圓不過圓心

$0 < \overline{O_1O_2} < r$



兩等圓過圓心

$\overline{O_1O_2} = r$

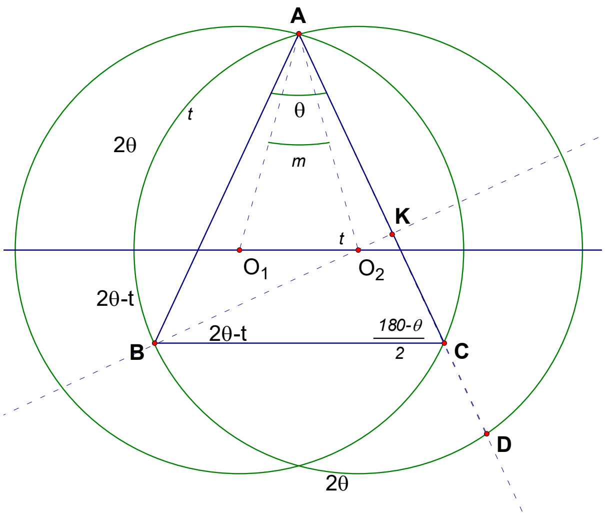


兩等圓不過圓心

$r < \overline{O_1O_2} < 2r$

(一) 當 $0 < \overline{O_1O_2} < r$ 的情況：（$0 < s < r$）

令 ΔABC 為內接最大三角形，且 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$，則$\widehat{BD} = \widehat{AB} = 2\theta$；再令 $\angle AO_2O_1 = t$。



(1) 由右圖可知，$(2\theta - t) + \frac{180° - \theta}{2} = 90°$，

最後化簡可得 $\theta = \frac{2}{3}t$ 。

(2) 在 ΔAO_1O_2 中，利用餘弦函數與其反函數的關係可得知

$t = cos^{-1}\frac{s}{2r}$，且 $\theta = \frac{2}{3}t = \frac{2}{3}cos^{-1}\frac{s}{2r}$

(3) 從 $\overline{AK}$ 的關係，可知 $\overline{AB} \cdot cos\,\theta = \overline{AK} = r \cdot sin(180° - 2\theta)$，可知

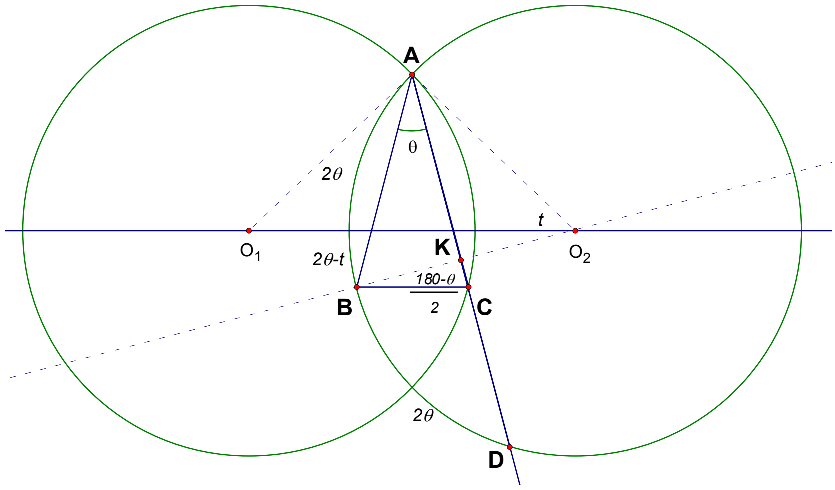
$$\overline{AB} = \frac{r \cdot sin(180° - 2\theta)}{cos\,\theta} = \frac{r \cdot sin(2\theta)}{cos\,\theta} = 2r \cdot sin\,\theta$$

(4) 綜合以上關係，$a\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot sin\,\theta = \frac{1}{2}(2r\,sin\,\theta)^2\cdot sin\,\theta$ ，化簡可得

$$a\Delta ABC = 2r^2 sin^3\theta$$

(二) 當 $r < \overline{O_1O_2} < 2r$ 的情況：($r < s < 2r$)

令 ΔABC 為內接最大三角形，且∠BAC = θ，則$\widehat{BD} = \widehat{AB} = 2\theta$；再令$\angle AO_2O_1 = t$。



(1) 由圖中可知，$(2\theta - t) + \frac{180° - \theta}{2} = 90°$，最後化簡可得 $\theta = \frac{2}{3}t$ 。

(2) 在 ΔAO_1O_2 中，利用餘弦與反餘弦的關係可得知

$t = \cos^{-1}\frac{s}{2r}$，且 $\theta = \frac{2}{3}t = \frac{2}{3}cos^{-1}\frac{s}{2r}$

(3) 從 $\overline{AK}$ 的關係，可知 $\overline{AB}\cdot cos\,\theta = \overline{AK} = r\cdot sin\,2\theta$，可知 $\overline{AB} = 2r\cdot sin\,\theta$

(4) 綜合以上關係，$a\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot sin\,\theta = \frac{1}{2}(2r\,sin\,\theta)^2\cdot sin\,\theta$ ，化簡可得

$$a\Delta ABC = 2r^2 sin^3\theta$$

因此我們得到以下的定理 2：

定理 2

若兩圓半徑為 r ，連心線長為 s ，且 $0 < s < 2r$ ，則此兩交圓之內接三角形最大面積 ＝ $2r^2 sin^3\theta$ ，其中 $\theta = \frac{2}{3}cos^{-1}\frac{s}{2r}$ 。

(備註：當 $s = r$，即互過圓心。此時 $\theta = \frac{2}{3}cos^{-1}\frac{s}{2r} = \frac{2}{3}cos^{-1}\frac{r}{2r} = 40°$，即定理 1)

四、 探討兩相異圓，其中一圓過另圓圓心之內接三角形最大面積

(一) 當大圓過小圓圓心：

我們透過 GGB 的操作發現當兩相異圓，大圓過小圓圓心時的最大內接三角形，會從原

本等圓情況的最大內接三角形(等腰三角形)開始「變形」，且隨著大小圓半徑比值的增加，會逐漸變成另一個以兩圓交點為底的等腰三角形 (圖 8)。下列圖示是當大圓半徑逐漸變大的情況：

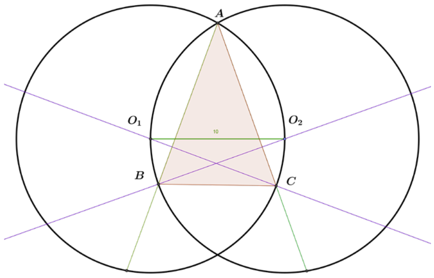


圖 1. $R = r$

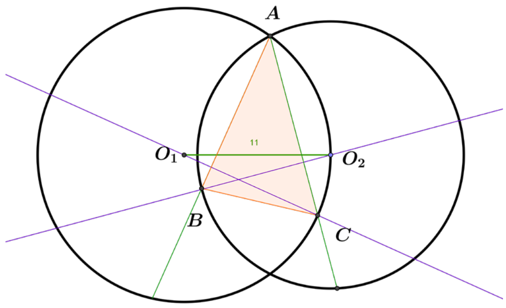


圖 2. $R = 1.1r$

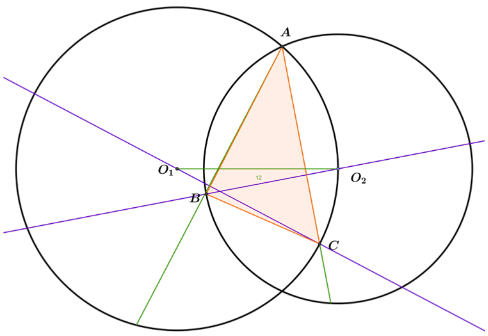


圖 3. $R = 1.2r$

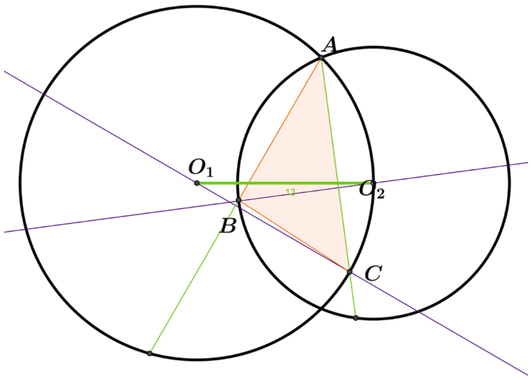


圖 4. $R = 1.3r$

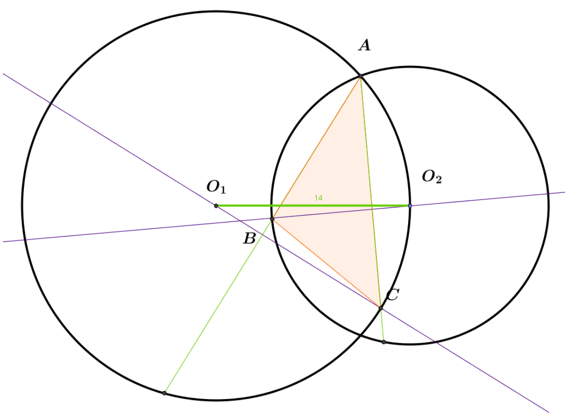


圖 5. $R = 1.4r$

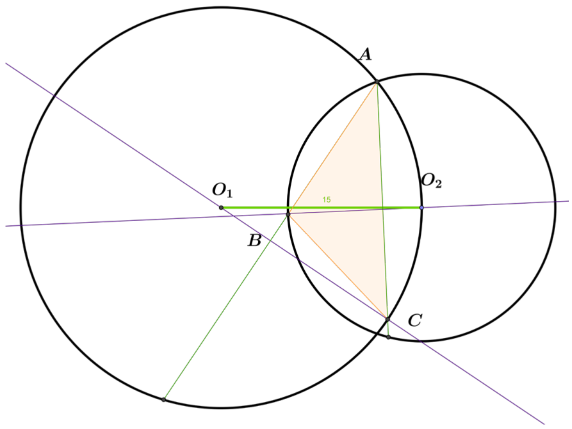


圖 6. $R = 1.5r$

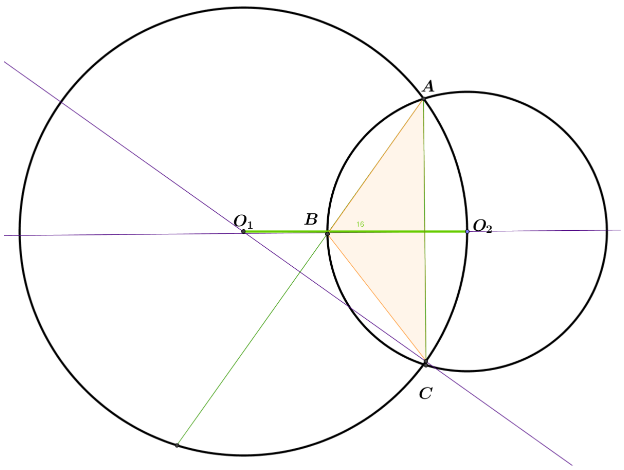


圖 7.　$R = 1.6r$

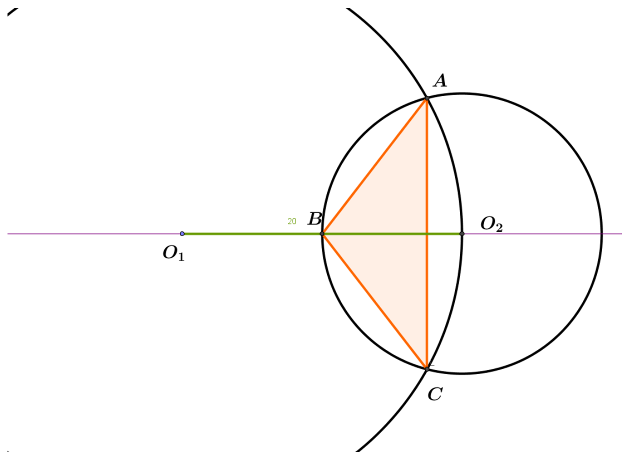
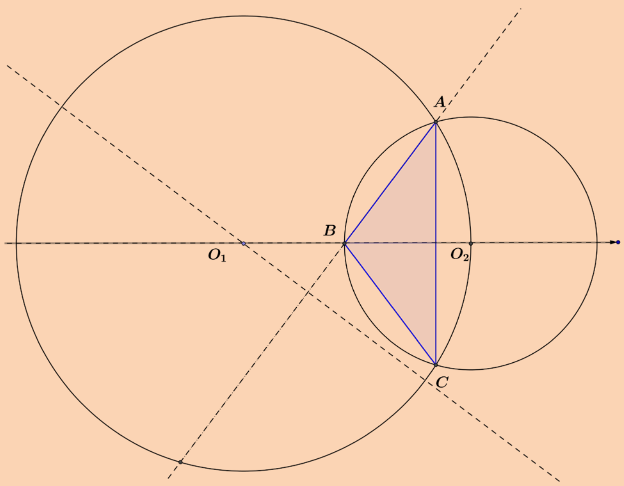


圖 8.　$R = 2r$

在操弄大小圓半徑比例的過程中，我們發現當 $R = 1.6r$ 時，出現的最大內接三角形形狀，從不規則逐漸接近等腰三角形的狀態，因此我們猜想，當大圓過小圓圓心且 $\frac{R}{r}$ 比值大於某個數時，其最大內接三角形就會固定是兩圓交點 A、C 跟連心線與小圓交點 B 所形成的等腰三角形！在以上的猜想下，我們進一步的探討在 $\frac{R}{r}$ 的比值之最小值為何時，最大內接三角形即是如上圖 8 的等腰三角形呢？

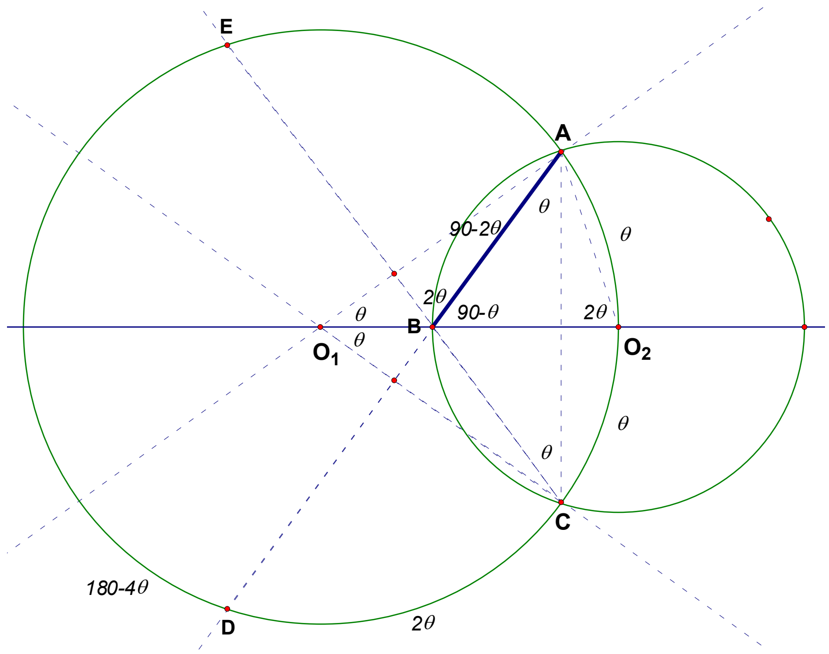
定理 3

如右圖，已知兩圓半徑分別為 R 、r 且 $R > r$ ，若大圓過小圓圓心且 $\frac{R}{r} \geq 2\cos 36° \;(\fallingdotseq 1.618\ldots)$ ，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是由兩圓交點 A、C 跟連心線與小圓交點 B 所形成的等腰三角形。



證明：

如下圖，欲求內接三角形最大面積是由兩圓交點 A、C 跟連心線與小圓交點 B 所形成的等腰三角形的情況之 $\frac{R}{r}$ 的最小值；即延長$\overline{AB}$，做弦$\overline{AD}$的中垂線恰過 C 點；延長$\overline{CB}$，做弦$\overline{CE}$的中垂線恰過 A 點。



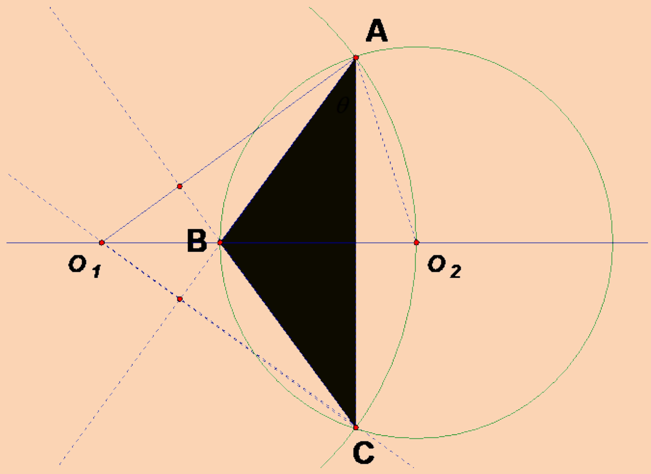
令 $\angle BAC=\theta$，得 $\widehat{CD}=\widehat{AC}=\widehat{AE}=2\theta \rightarrow \angle AO_1O_2=\theta$。又 $\angle AO_2B=\widehat{AB}=2\angle ACB=2\angle BAC=2\theta$，得 ΔAO_1O_2 為一 $\theta-2\theta-2\theta$ 的等腰三角形，即 $\theta=36°$。

因此，從 ΔAO_1O_2 中可得關係式 $R\times \sin 36°=r\times \sin 72°$，故

$$\frac{R}{r}=\frac{\sin 72°}{\sin 36°}=\frac{2\sin 36°\cos 36°}{\sin 36°}=2\cos 36°\ (\fallingdotseq 1.618\ldots)$$

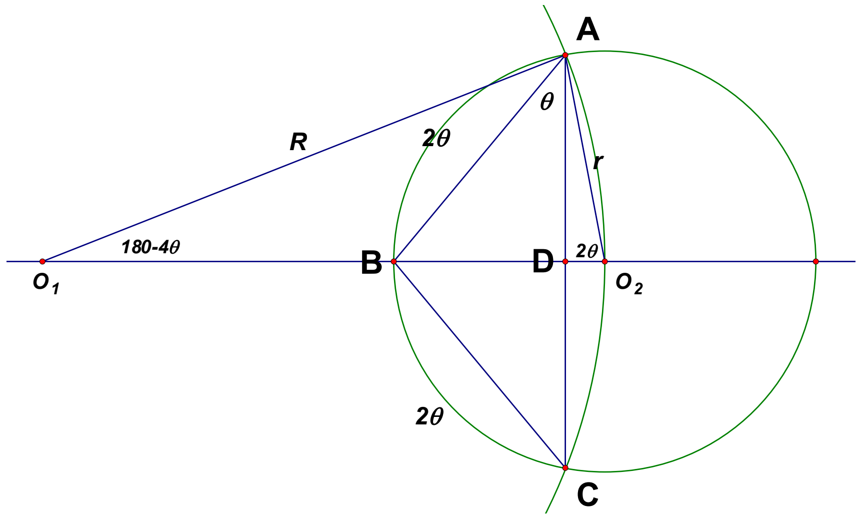
定理 3-1

如右圖，已知兩圓半徑 R、r 且 $R>r$，若大圓過小圓圓心且 $\frac{R}{r}\geq 2\cos 36°\ (\fallingdotseq 1.618\ldots)$，則此時內接最大三角形面積 $a\Delta ABC=4\cos\theta\cdot r^2\sin^3\theta$，其中 $\theta=\frac{1}{4}\cos^{-1}\frac{r^2-2R^2}{2R^2}$。



證明：

就面積部分討論，如下圖，令 $\angle BAC=\theta$，得 $\widehat{BC}=\widehat{AB}=2\theta \rightarrow \angle AO_2O_1=2\theta$，$\angle AO_1O_2=180°-4\theta$。所以 $\overline{BD}=r-r\cdot\cos 2\theta$，且 $\overline{AD}=r\cdot\sin 2\theta$。



因此 $a\Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot r\cdot sin2\theta)(r-r\cdot cos2\theta)=(r\cdot sin2\theta)(r-r\cdot cos2\theta)$，化簡可得知

$$a\Delta ABC=4cos\theta\cdot r^2sin^3\theta$$

其中的 θ 值我們能從ΔAO_1O_2中找到，因為 $\overline{AO_1}=\overline{O_1O_2}=R$、$\overline{AO_2}=r$，所以$\cos(180°-4\theta)=\frac{2R^2-r^2}{2R^2}$，即

$$\theta=\frac{1}{4}\cos^{-1}\frac{r^2-2R^2}{2R^2}$$

故得證。

(二) 當小圓過大圓圓心：

當兩相異圓，小圓過大圓圓心時的最大內接三角形，會從原本等圓情況的最大內接三角形(等腰三角形)開始「變形」，且隨著大小圓半徑比值 $\frac{R}{r}$ 的增加，會逐漸變成另一個以兩圓交點為底的等腰三角形 (圖 6)；但比值 $\frac{R}{r}$ 繼續增加到某個數值之後便會變成正三角形就不再變化，直到小圓過大圓圓心且兩圓內切為止。下列圖示是當大圓半徑逐漸變大的情況：

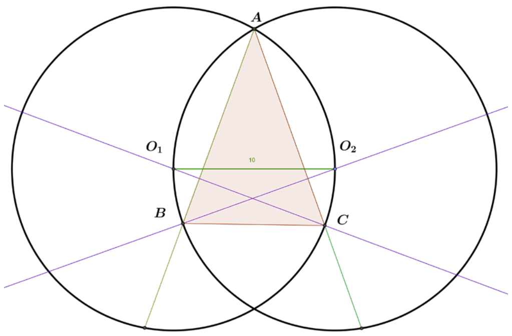


圖 1.　$R = r$

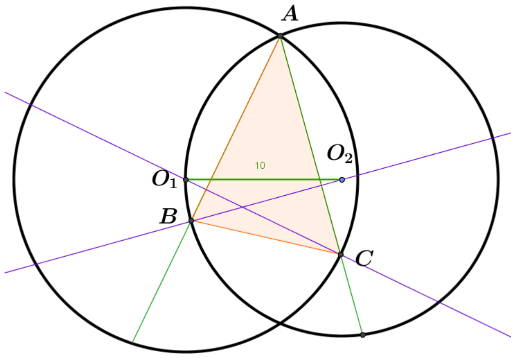


圖 2.　$R = 1.1r$

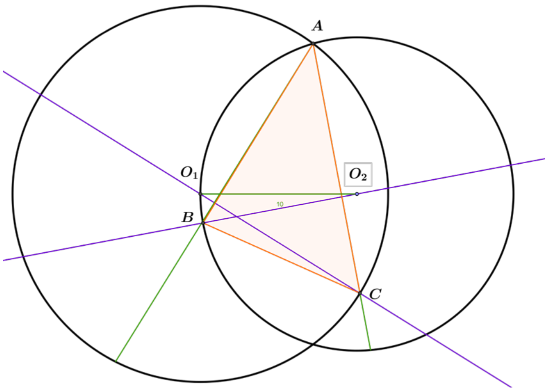


圖 3.　$R = 1.2r$

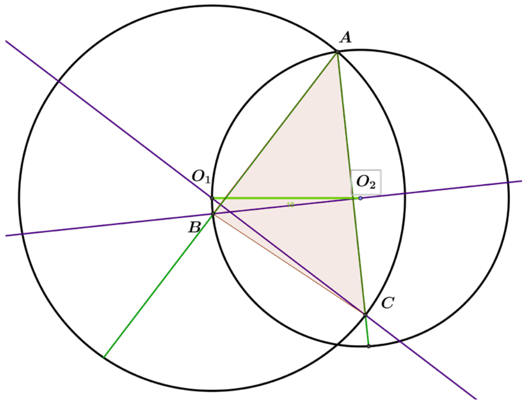


圖 4.　$R = 1.3r$

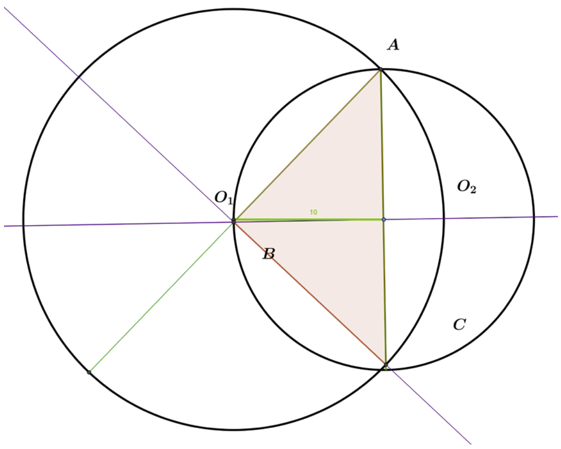


圖 5.　$R = 1.4r$

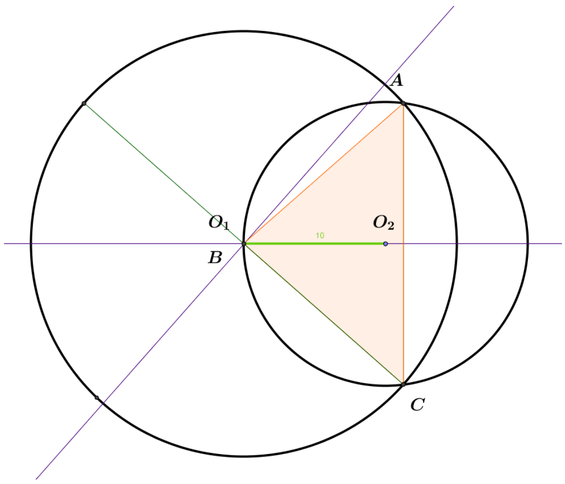


圖 6.　$R = 1.5r$

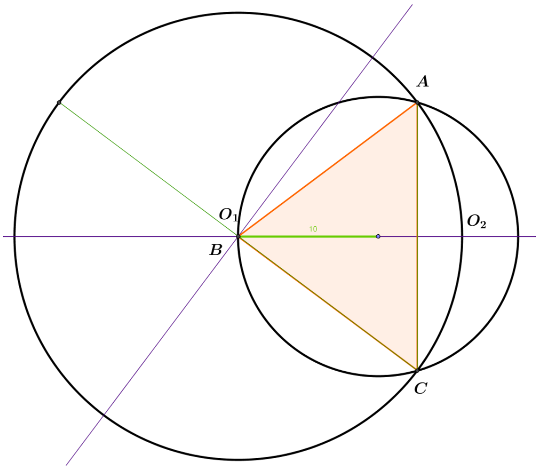


圖 7.　$R=1.6r$

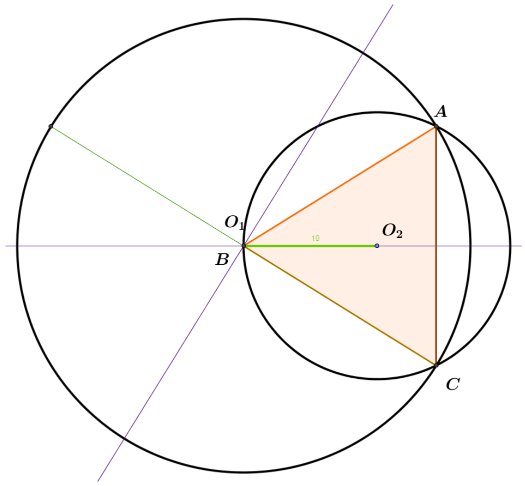


圖 8.　$R=1.7r$

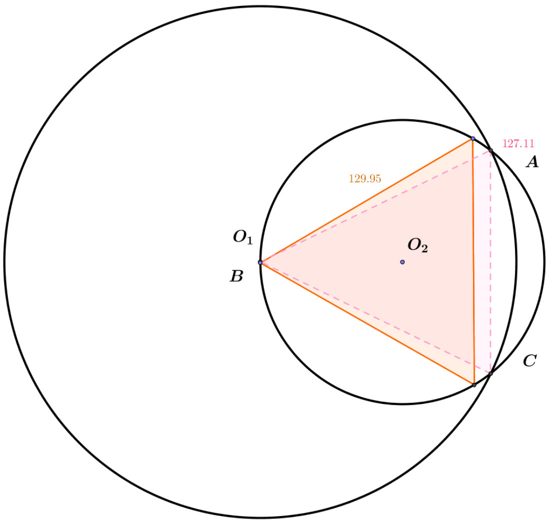


圖 9.　$R=1.8r$

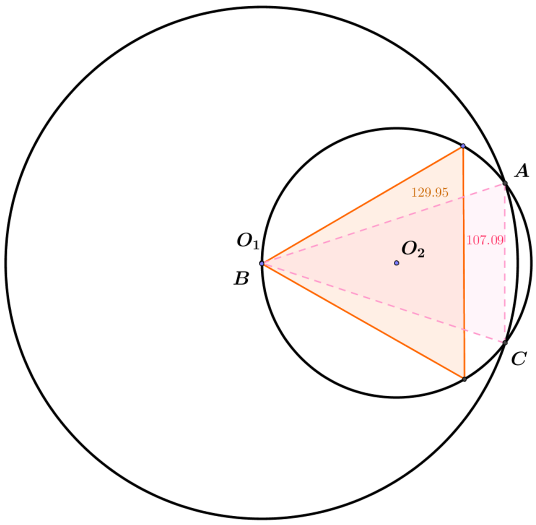


圖 10.　$R=1.9r$

根據上面的觀察：

定理 4

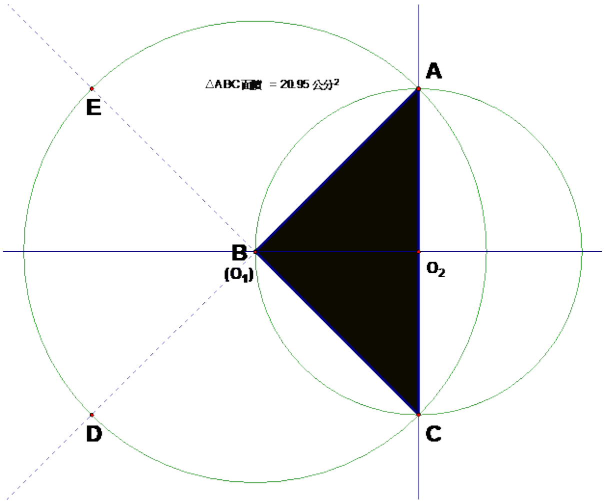
已知兩圓半徑 R 、 r 且 $R>r$ ，

1. 若小圓過大圓圓心且 $\sqrt{2}\le\frac{R}{r}<\sqrt{3}$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是由兩圓交點 A、C 跟連心線與小圓交點 B 所形成的等腰三角形；其內接最大三角形面積為 $R^2 sin\theta cos\theta$，其中 $\theta=\sin^{-1}\frac{R}{2r}$。

2. 若小圓過大圓圓心且 $\sqrt{3}\le\frac{R}{r}\le 2$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是小圓弧上的內接正三角形，即 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ 。

證明(1)：

如右圖，若小圓過大圓圓心且 $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2}$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是由兩圓交點 A、C 跟連心線與小圓交點 B(O_1)所形成的等腰三角形；即延長$\overline{AB}$，做弦$\overline{AD}$的中垂線恰過 C 點；延長$\overline{CB}$，做弦$\overline{CE}$的中垂線恰過 A 點，且小圓弦 $\overline{AC}$ 的中垂線恰過 B 點。

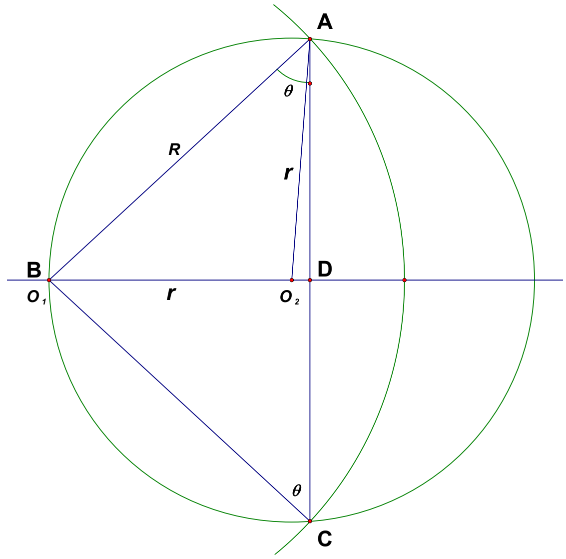


令$\angle BAC = \theta$，得$\widehat{CD} = \widehat{AC} = \widehat{AE} = 2\theta \rightarrow \angle ACB = \theta$。又$\widehat{AC} + \widehat{CD} = 4\theta = 180°$，得 $\theta = 45°$，即 ΔABC 為一等腰直角三角形。

因此，從 ΔAO_1O_2 邊角關係中可得關係式

$\frac{R}{r} = \sqrt{2}(\fallingdotseq 1.414 \ldots)$

就面積部分討論，如右圖，令$\angle BAC = \theta$ ，可知 $\overline{AD} = R \cdot cos\theta$、$\overline{BD} = R \cdot sin\theta$，因此 $a\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot R \cdot cos\theta)(R \cdot sin\theta) = R^2 sin\theta cos\theta$，其中的 θ 值我們能從ΔAO_1O_2中找到，因為 $\overline{AO_2} = \overline{O_1O_2} = r$ 、$\overline{AO_1} = R$，所以



$$\theta = sin^{-1}\frac{R}{2r}$$

故得證。

定理 4-2-1

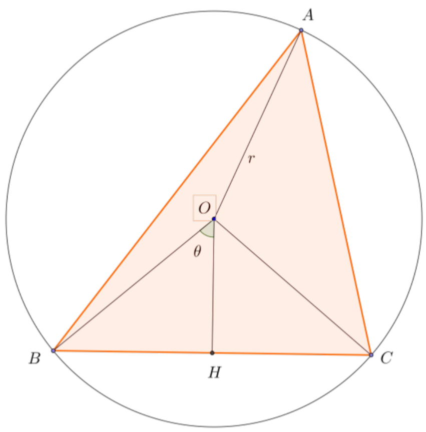
ΔABC為圓 O 的其中一個內接三角形，當ΔABC為正三角形時，此時ΔABC為最大的內接三角形。

首先，在ΔABC中，$\theta = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \angle BAC$

$$a\Delta ABC = \frac{abc}{4r}$$

$$= \frac{2rsinA \times 2rsinB \times 2rsinC}{4r}$$

$$= 2r^2 sinA \times sinB \times sinC$$



$$\leq\ 2r^2\left(\frac{sinA+sinB+sinC}{3}\right)^3$$ (根據算幾不等式)

$$\leq\ 2r^2\sin^3\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$ (根據 sin 函數的凹凸性)

$$=\ 2r^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^3$$

“= "成立於 sinA = sinB = sinC 時，即最大面積出現在正三角形的時候。

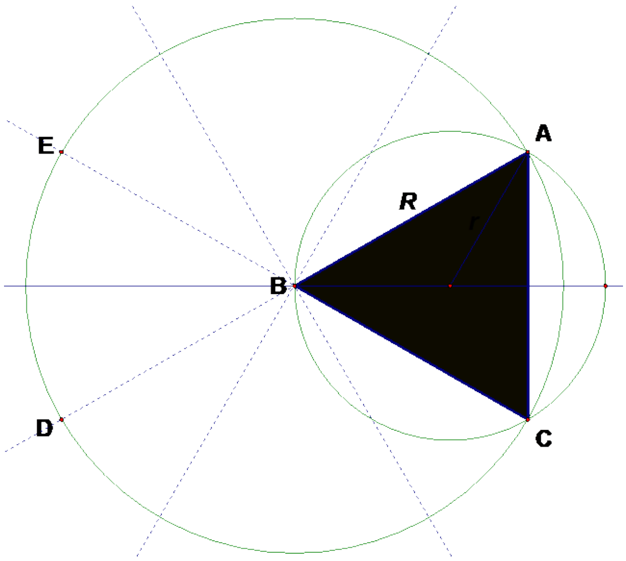
證明(2)：

在尋找最大三角形的過程中發現到若 $\sqrt{3}\leq\frac{R}{r}\leq 2$ 時，最大三角形就會是交圓中，小圓部分內的內接正三角形，如右圖。因此利用這樣的想法得到下列關係式

$R\times sin\,30°=r\times sin60°$，故

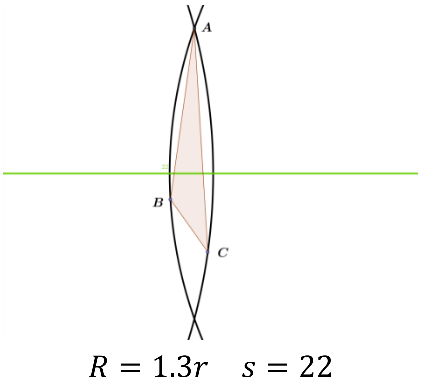
$$\frac{R}{r}=\frac{sin60°}{sin30°}=2cos30°=\sqrt{3}\ (\fallingdotseq 1.732\ldots)$$

因此，當$R\geq\sqrt{3}r$ 時，其最大內接三角形就可直接看成是小圓內接正三角形即可。

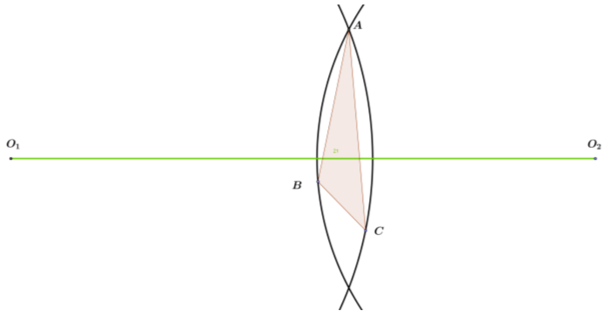


五、 探討兩相異圓，兩圓互不過圓心之內接三角形最大面積

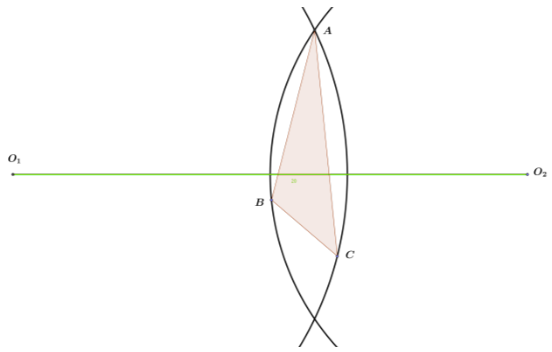
討論兩相異圓之內接三角形最大面積的過程中，我們嘗試利用 $R=kr\ (\,k>1\,)$、 r ，以及變因連心線 s 從兩圓關係外切到內切，去找尋是否有特別關聯？舉 $R=1.3r$ 且$r=10$為例，如下圖：



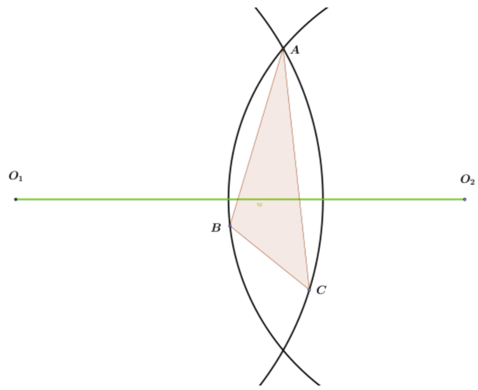
$R=1.3r\quad s=22$



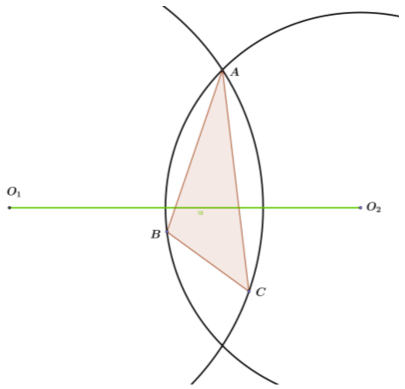
$R=1.3r\quad s=21$



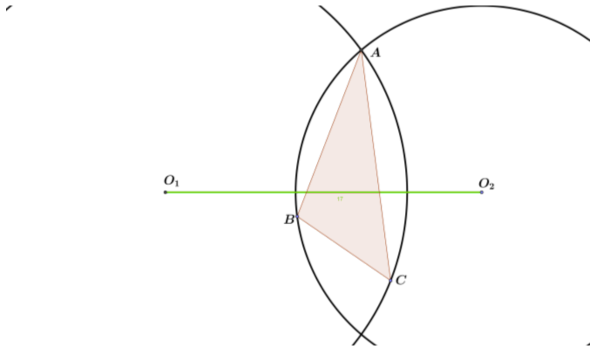
$R = 1.3r \quad s = 20$



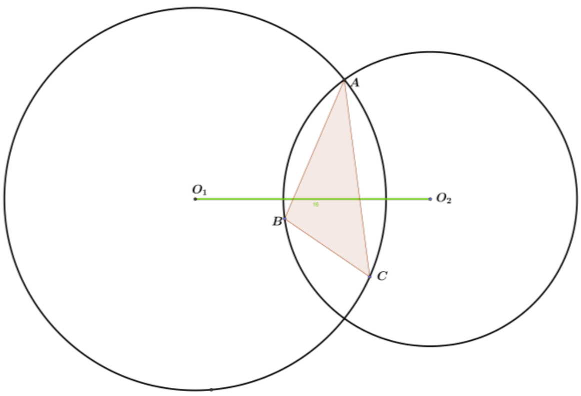
$R = 1.3r \quad s = 19$



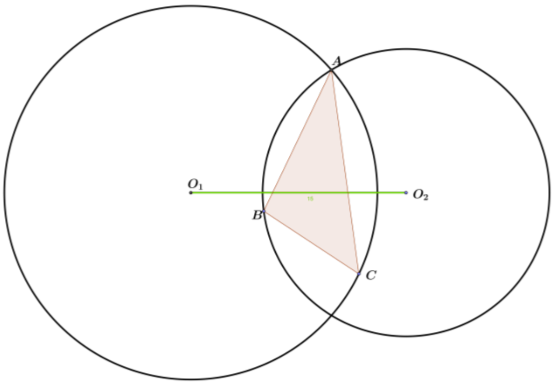
$R = 1.3r \quad s = 18$



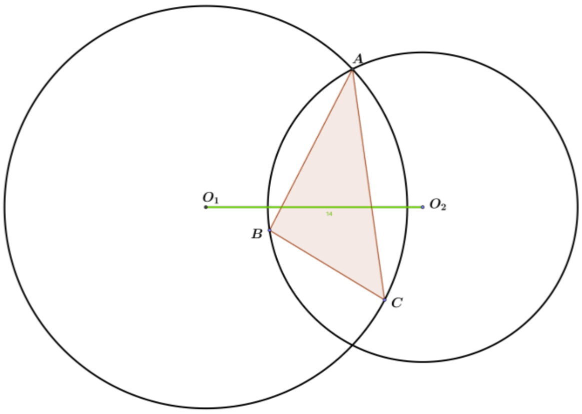
$R = 1.3r \quad s = 17$



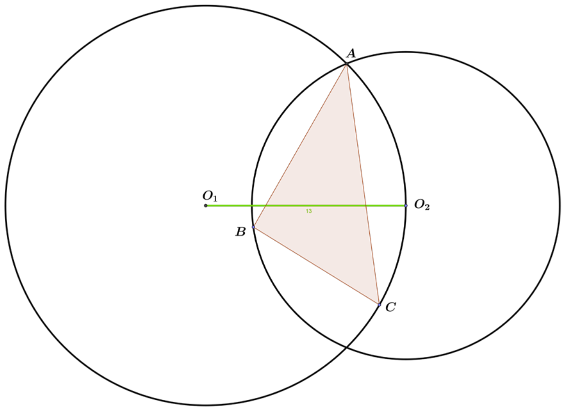
$R = 1.3r \quad s = 16$



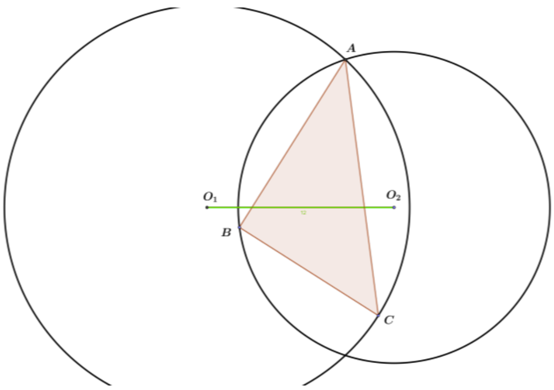
$R = 1.3r \quad s = 15$



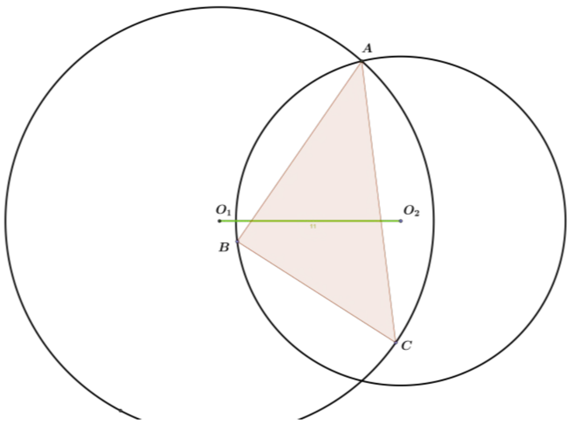
$R = 1.3r \quad s = 14$



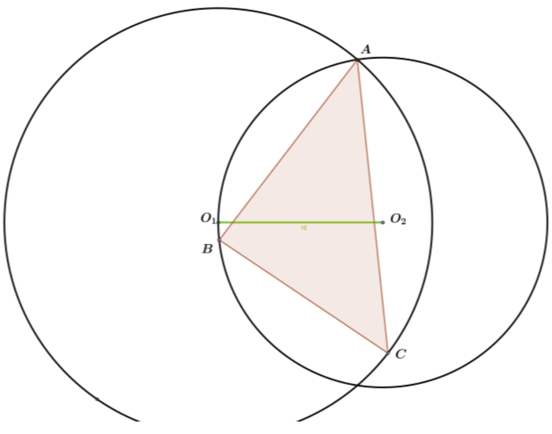
$R = 1.3r \quad s = 13$



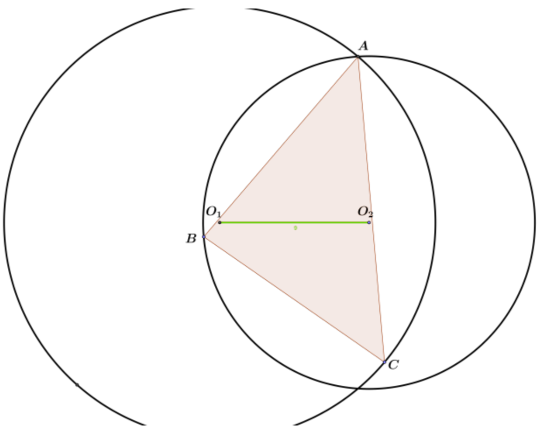
$R = 1.3r \quad s = 12$



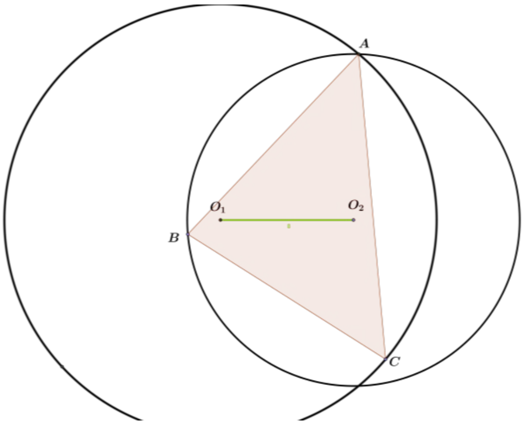
$R = 1.3r \quad s = 11$



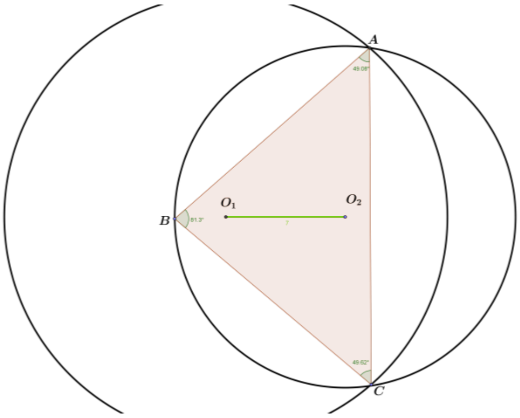
$R = 1.3r \quad s = 10$



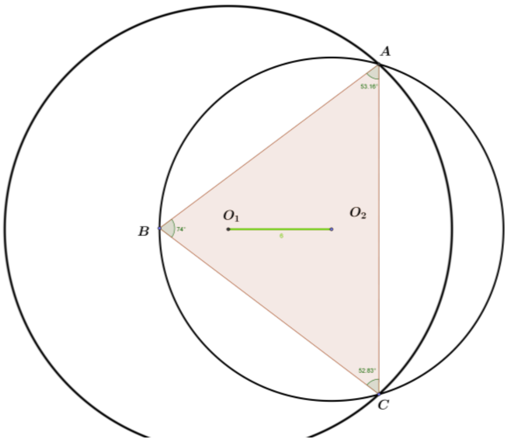
$R = 1.3r \quad s = 9$



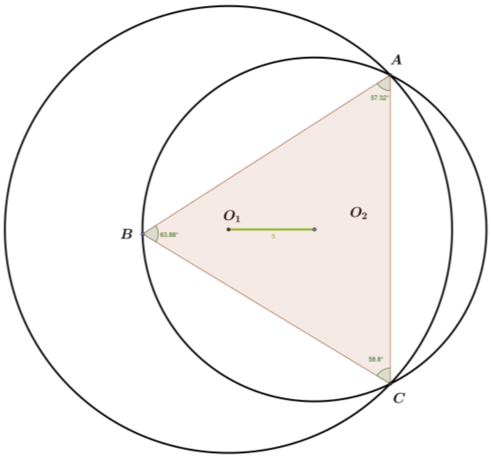
$R = 1.3r \quad s = 8$



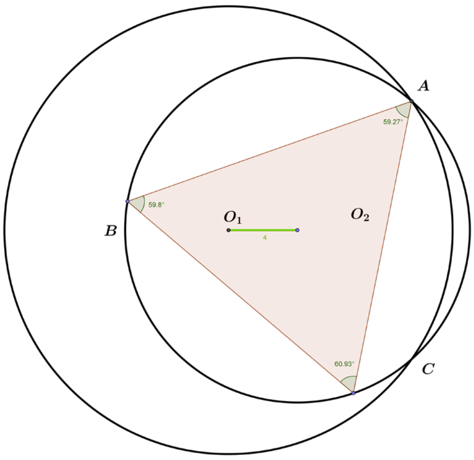
$R = 1.3r \quad s = 7$



$R = 1.3r \quad s = 6$



$R = 1.3r \quad s = 5$



$R = 1.3r \quad s = 4$

雖然從上面的圖中尚未發現特別令人有趣的現象！然而，卻也能發現其最大三角形會由

原本的「不規則」圖形逐漸變成「正三角形」！因此，退而求其次去討論若已知 R、r，則當 s 究竟為何會讓兩交圓部分的內接三角形會是小圓的內接正三角形。

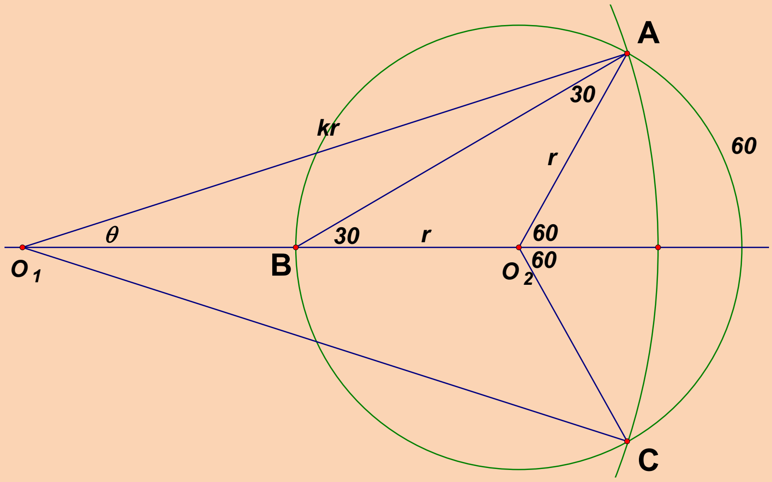
定理 5

如右圖，已知兩圓半徑 R、r 且 $R = kr\ (k > 1)$，連心線線段長 s，若

$$s \le r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$$

則兩交圓部分之內接最大面積為小圓之內接正三角形，即

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$



想法：

從兩相異圓與連心線的關係中可知，當連心線線段長縮到某個程度，其內接最大面積三角形會維持成小圓圓內接正三角形；之後連心線長改變也不會影響其最大面積。因此，我們想找出當 s 最大是多少時，其交圓部份內接最大面積三角形就是小圓內接正三角形。想法很簡單，當大圓與小圓交點 A、C，此時若小圓$\widehat{AC}$為$120°$，那麼即可找出小圓之內接正三角形。

證明：

從上圖可知關係式 $kr \cdot sin\theta = r \cdot sin60°$，可化簡得 $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2k}$(或$cos\theta = \frac{\sqrt{4k^2-3}}{2k}$)。因此，可知連心線線段長 $s = kr \cdot cos\theta - r \cdot cos60°$。最後化簡得

$$s = r \cdot \left(kcos\theta - \frac{1}{2}\right) = r \cdot \left(k \cdot \frac{\sqrt{4k^2-3}}{2k} - \frac{1}{2}\right) = r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$$

所以，當連心線線段長 $s \le r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$，小圓$\widehat{AC}$會小於或等於 $120°$，因此即可在交圓部分找到小圓之內接正三角形。此時，小圓半徑 r 可得知內接最大面積三角形邊長為 $\sqrt{3}r$ ，面積為 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$，故得證。

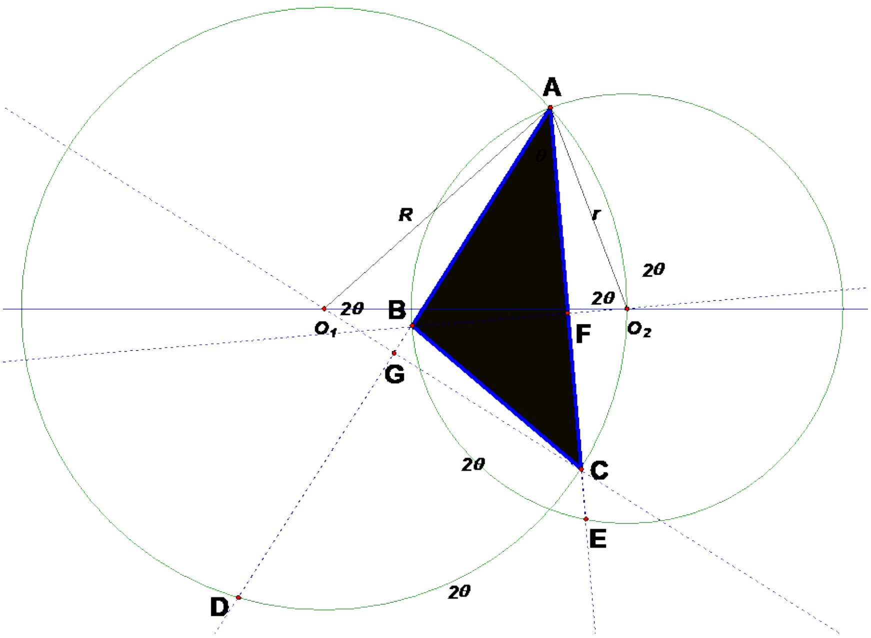
備註：當 $s = r$ ，即定理 4 之小圓過大圓圓心的情況；代入關係式 $s \le r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$ ，可得到定理 4 的結果，其中 $k \ge \sqrt{3}$ 。

六、 續探一般性情況下圓內接重疊區域最大面積三角形

(一) 在定理 3 中可得知，當大圓過小圓圓心且 $\frac{R}{r} \geq 2\cos 36°$，兩交圓區域之內接最大面積三角形會是由兩圓交點跟連心線與小圓交點所形成的等腰三角形。那麼當 $1 < \frac{R}{r} < 2\cos 36°$，其內接最大面積三角形又是如何？

定理 6

已知兩圓半徑分別為 R 、 r 且 $R > r$ ，若大圓過小圓圓心且 $1 < \frac{R}{r} < 2cos36°$ ，則兩交圓內接最大三角形面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(\frac{-r}{2R})$ 。



證明：

令 $\angle BAC = \theta \rightarrow \widehat{CD} = \widehat{AC} = 2\theta \rightarrow \angle AO_1C = 2\theta \rightarrow \angle O_1AG = 90° - 2\theta$

$\rightarrow \widehat{BE} = \widehat{AB} = 2\theta \rightarrow \angle AO_2B = 2\theta \rightarrow \angle O_2AF = 90° - 2\theta$

又 $\overline{AB} = \frac{\overline{AF}}{cos\theta}$，$\overline{AC} = \frac{\overline{AG}}{cos\theta}$，且 $\overline{AF} = r \cdot sin2\theta$，$\overline{AG} = R \cdot sin2\theta$，故

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AF}}{cos\theta} \cdot \frac{\overline{AG}}{cos\theta} \cdot sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot sin2\theta}{cos\theta} \cdot \frac{R \cdot sin2\theta}{cos\theta} \cdot sin\theta$$

最後化簡可得

$$\Delta ABC = 2Rr \cdot sin^3\theta$$

至於 θ 的部分我們可從ΔAO_1O_2可推知，已知 $\overline{AO_1} = \overline{O_1O_2} = R$，$\overline{AO_2} = r$，且$\angle O_1AO_2 = \angle O_1AG + \angle BAC + \angle O_2AF = 180° - 3\theta$。利用餘弦定理可知

$$\angle O_1AO_2 = 180° - 3\theta = cos^{-1}\frac{r}{2R}$$

最後化簡可得

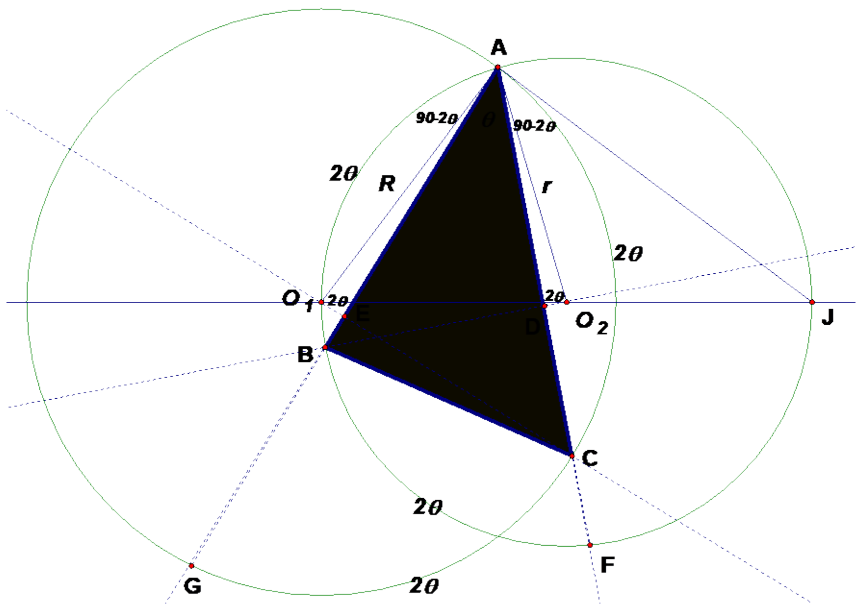
$$\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(\frac{-r}{2R})$$

即兩相異圓(半徑 $R > r$)大圓過小圓的情況之下，若 $1 < \frac{R}{r} < 2cos36°$，則兩交圓內接最大三角形面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(\frac{-r}{2R})$，證明結束。

(二) 在定理 4 中，可得知當 $\sqrt{2} \leq \frac{R}{r} < \sqrt{3}$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是由兩圓交點跟連心線與小圓交點所形成的等腰三角形；若$\sqrt{3} \leq \frac{R}{r} < 2$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是小圓弧上的內接正三角形。那麼當 $1 < \frac{R}{r} < \sqrt{2}$，其內接最大面積三角形又是如何？

定理 7

若小圓過大圓圓心且$1 < \frac{R}{r} < \sqrt{2}$，則兩交圓內接最大三角形面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(\frac{-R}{2r})$。



證明：

令 $\angle \mathrm{BAC} = \theta \ \rightarrow \ \widehat{CG} = \widehat{AC} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle \mathrm{AO_1C} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle O_1\mathrm{AE} = 90° - 2\theta$

$\rightarrow \ \widehat{BF} = \widehat{AB} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle \mathrm{AO_2B} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle O_2\mathrm{AD} = 90° - 2\theta$

因為$\Delta \mathrm{J}AO_1$為直角三角形，且$\overline{AO_1} = \mathrm{R}$，$\overline{O_1J} = 2r$，$\overline{AJ} = \sqrt{4r^2 - R^2}$，又$\overline{O_2A} = \overline{O_2J}$，得

$$sin\angle O_2AJ = sin\angle O_{2(1)}JA = \sin(90° - (\angle O_1\mathrm{AO_2}))$$

$\frac{R}{2r} = \sin(3\theta - 90°)$，最後可化簡為

$$\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(\frac{-R}{2r})$$

又 $\overline{AC} = \frac{\overline{AE}}{cos\theta}$，$\overline{AB} = \frac{\overline{AD}}{cos\theta}$，且 $\overline{AE} = R \cdot sin2\theta$，$\overline{AD} = r \cdot sin2\theta$，故

$$\Delta \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AD}}{cos\theta} \cdot \frac{\overline{AE}}{cos\theta} \cdot sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot sin2\theta}{cos\theta} \cdot \frac{R \cdot sin2\theta}{cos\theta} \cdot sin\theta$$

最後化簡可得

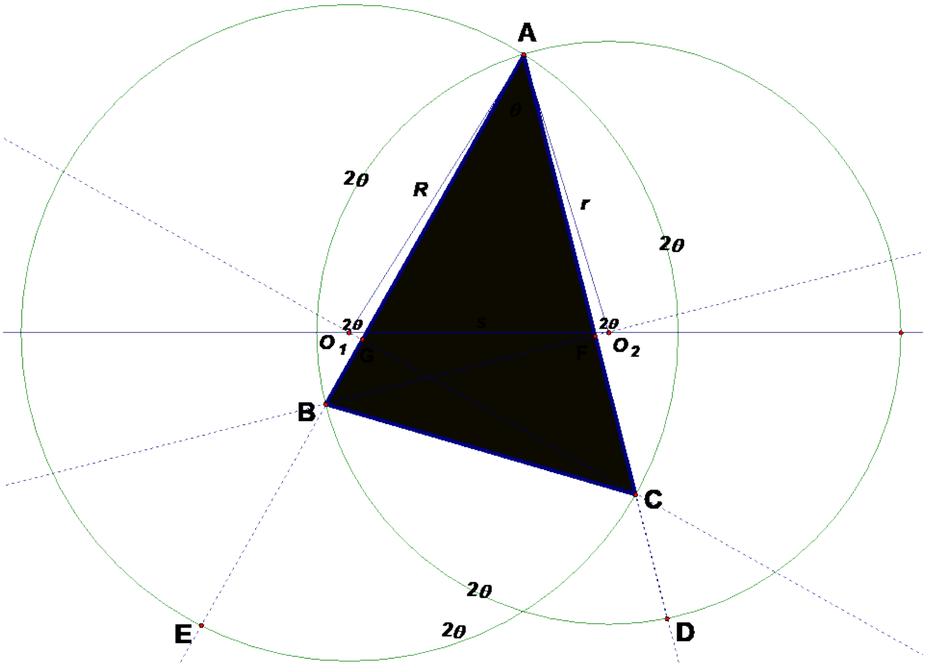
$$\Delta ABC = 2Rr \cdot sin^3\theta$$

即兩相異圓(半徑 $\mathrm{R} > \mathrm{r}$)小圓過大圓的情況之下，若 $1 < \frac{R}{r} < \sqrt{2}$，則兩交圓內接最大三角形面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(\frac{-R}{2r})$，證明結束。

(三) 在定理 5 中，可得知當 $s \le r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$，則兩交圓部分之內接最大面積為小圓之內接正三角形。那麼當 $r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right) < s < R + r$，其內接最大面積三角形又是如何？然而，在市賽後我們又重新檢視一遍，欲尋求「所有情況」。由圖的軌跡可知，當兩相異圓從外切開始逐漸靠近，其最大面積的變化從不規則三角型，會變成以兩交點為主的等腰三角形；隨著兩圓心再靠近，則最大面積等腰三角形依舊會維持著以兩交點為主的等腰情況，逐漸變為正三角形的情況。說明如下：

定理 8

已知兩圓半徑 R 、 r 且 $R = kr\ (k > 1)$，連心線線段長 s ，若 $\frac{R^2-r^2}{r} < s < R + r$ 則兩交圓內接最大三角形面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(-\frac{R^2+r^2-s^2}{2Rr})$ 。



證明：

$$令\ \angle \mathrm{BAC} = \theta \quad \rightarrow \quad \widehat{CE} = \widehat{AC} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle \mathrm{A}O_1\mathrm{C} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle O_1\mathrm{AG} = 90^\circ - 2\theta$$

$$\rightarrow \ \widehat{BD} = \widehat{AB} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle \mathrm{A}O_2\mathrm{B} = 2\theta \ \rightarrow \ \angle O_2\mathrm{AF} = 90^\circ - 2\theta$$

又 $\overline{AF} = \overline{AO_2} \cdot sin2\theta = r \cdot sin2\theta$，$\overline{AG} = \overline{AO_1} \cdot sin2\theta = R \cdot sin2\theta$，且 $\overline{AC} = \frac{\overline{AG}}{cos\theta}$，$\overline{AB} = \frac{\overline{AF}}{cos\theta}$，

故

$$\Delta \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AF}}{cos\theta} \cdot \frac{\overline{AG}}{cos\theta} \cdot sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot sin2\theta}{cos\theta} \cdot \frac{R \cdot sin2\theta}{cos\theta} \cdot sin\theta$$

最後化簡可得

$$\Delta ABC = 2Rr \cdot sin^3\theta$$

至於 θ 的部分我們可從 $\Delta \mathrm{A}O_1O_2$ 可推知，已知 $\overline{AO_1} = R$，$\overline{AO_2} = r$，$\overline{O_1O_2} = s$，且 $\angle O_1\mathrm{A}O_2 = \angle O_1\mathrm{AG} + \angle \mathrm{BAC} + \angle O_2\mathrm{AF} = 180^\circ - 3\theta$。利用餘弦定理可知

$$\angle O_1\mathrm{A}O_2 = 180^\circ - 3\theta = cos^{-1}\frac{R^2 + r^2 - s^2}{2Rr}$$

最後化簡可得

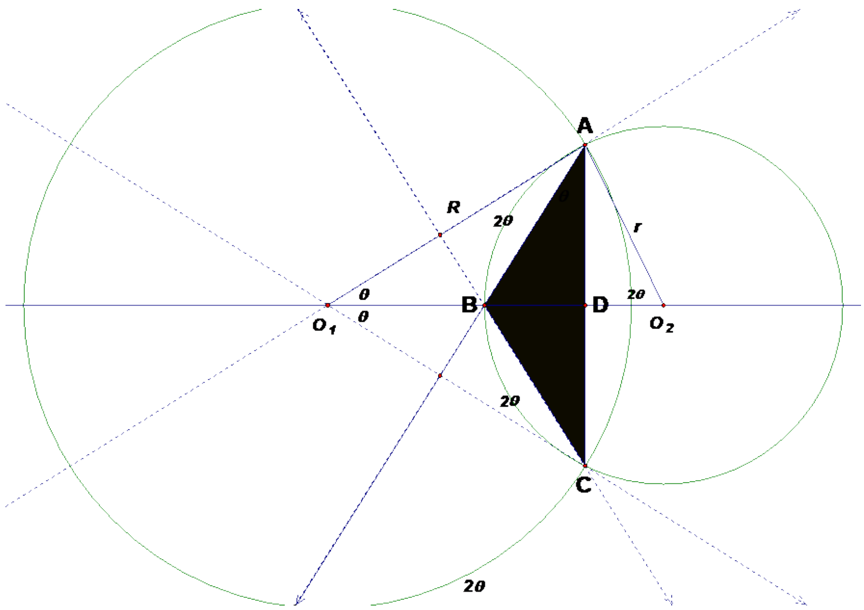
$$\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(-\frac{R^2 + r^2 - s^2}{2Rr})$$

即兩相異圓(半徑 $R > r$)互不過圓心的情況之下，若 $\frac{R^2-r^2}{r} < s < R + r$，則兩交圓內接最大三角形面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}(-\frac{R^2+r^2-s^2}{2Rr})$，證明結束。

定理 9

　　已知兩圓半徑 R 、 r 且 $R = kr\ (k > 1)$，連心線線段長 s ，若 $s = \frac{R^2-r^2}{r}$ ，則兩交圓內接最大三角形會變為等腰三角形，面積為 $2rR \cdot sin^3\theta$， $\theta = cos^{-1}\frac{R}{2r}$ 。

　　隨著兩圓靠近，其最大面積從「不規則」到臨界時，就會變為等腰三角形。當最大面積變為等腰三角形，其臨界圖形如下圖所示，此時$\overline{AB}$所延長的大圓之弦的中垂線恰好通過 C 點，$\overline{BC}$所延長的大圓之弦的中垂線恰好通過 A 點。那麼連心線 s 使最大面積三角形變為等腰的臨界又是為何？



證明：

令$\angle \mathrm{BAC} = \theta \rightarrow \angle \mathrm{A}O_1O_2 = \theta$ ， $\angle \mathrm{A}O_2O_1 = 2\theta$

又 $\overline{AO_1} \cdot sin\theta = \overline{AO_2} \cdot sin2\theta$ ，得 $R = 2r \cdot cos\theta \rightarrow \theta = cos^{-1}\frac{R}{2r}$

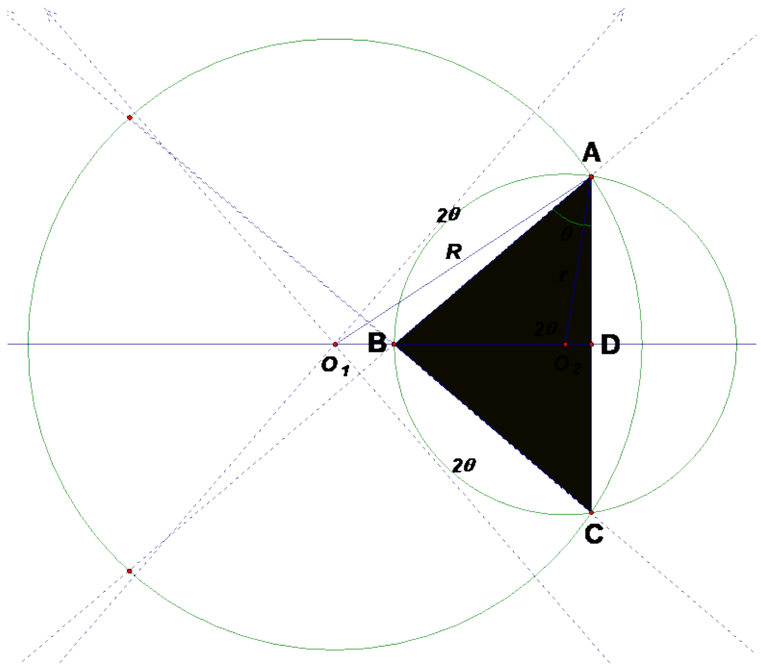
且 $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AD} = 2 \cdot r\, sin2\theta = 4r \cdot sin\theta cos\theta$，$\overline{BD} = \overline{BO_2} - \overline{DO_2} = r - rcos2\theta = 2rsin^2\theta$

$$\Delta\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot sin\theta cos\theta \cdot 2rsin^2\theta = 4r^2 \cdot sin^3\theta cos\theta = 2Rr \cdot sin^3\theta$$

那麼，$s = \overline{O_1D} + \overline{DO_2} = Rcos\theta + rcos2\theta$，又 $cos\ \theta = \frac{R}{2r} \rightarrow s = \frac{R^2-r^2}{r}$，證明結束。

定理 10

　　已知兩圓半徑 R 、 r 且 $R = kr\ (k > 1)$，連心線線段長 s ，若 $r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right) < s \leq \frac{R^2-r^2}{r}$，則兩交圓內接最大三角形是以兩相異圓交點為主的等腰三角形，其面積為 $4r^2 \cdot sin^3\theta cos\theta$，$\theta = \frac{1}{2} \cdot (cos^{-1}\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs})$ 。



證明：

令$\angle BAC=\theta\ \rightarrow\ \widehat{BC}=\widehat{AB}=2\theta$ ，$\angle AO_2B=2\theta$

且$\overline{AC}=2\cdot\overline{AD}=2r\cdot sin\,(180°-2\theta)=4r\cdot sin\theta cos\theta$，$\overline{BD}=\overline{BO_2}+\overline{O_2D}=r+rcos(180°-2\theta)=2rsin^2\theta$

$$\therefore \Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot sin\theta cos\theta\cdot 2rsin^2\theta=4r^2\cdot sin^3\theta cos\theta$$

又從ΔAO_1O_2中，利用$\angle AO_2O_1$的餘弦定理可知 $\theta=\frac{1}{2}\cdot(cos^{-1}\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs})$ 。

故其$\Delta ABC=4r^2\cdot sin^3\theta cos\theta$ ，$\theta=\frac{1}{2}\cdot(cos^{-1}\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs})$ ，證明結束。

可將以上定理整理如下表：

類型	類型一 大圓過小圓圓心 (不規則型)	類型二 小圓過大圓圓心 (不規則型)	類型三 兩圓互不過圓心 (不規則型)
範圍	$1<\frac{R}{r}<2cos36°$	$1<\frac{R}{r}<\sqrt{2}$	$\frac{R^2-r^2}{r}<s<R+r$
交圓內接最大三角形面積	$2Rr\cdot sin^3\theta$	$2Rr\cdot sin^3\theta$	$2Rr\cdot sin^3\theta$
θ	$\theta=\frac{1}{3}\cdot cos^{-1}(\frac{-r}{2R})$	$\theta=\frac{1}{3}\cdot cos^{-1}(\frac{-R}{2r})$	$\theta=\frac{1}{3}\cdot cos^{-1}(-\frac{R^2+r^2-s^2}{2Rr})$

表一

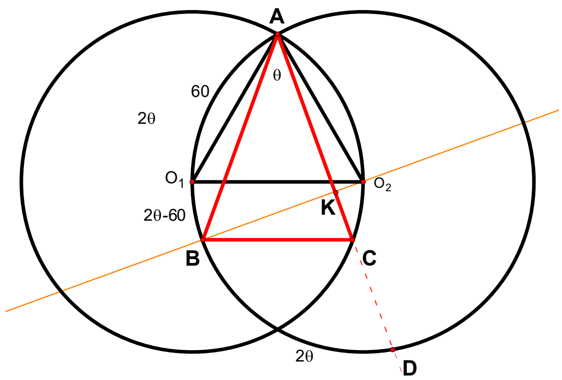
從上表可明顯看出，(類型一)與(類型二)是(類型三)的特例！以(類型三)為主體；若大圓過

小圓圓心，則連心線長 $s = R$ 代入，即可得(類型一)的結果。若小圓過大圓圓心，則連心線長 $s = r$ 代入，即可得(類型二)的結果。

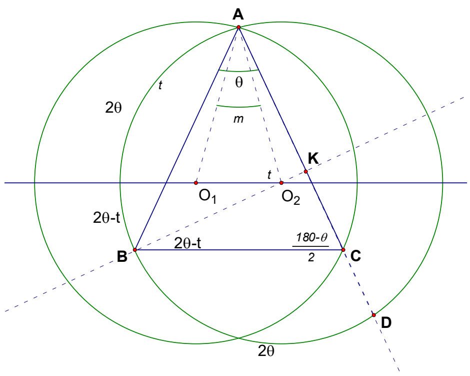
因此，從以上所有情況可得知，我們僅利用兩圓半徑與連心線長即可求出兩交圓內接三角形最大面積，跟以往的文獻差異甚大！不僅擺脫等圓的枷鎖，更沒有利用程式去作運算，而是依靠最直觀的條件達到我們的目的。

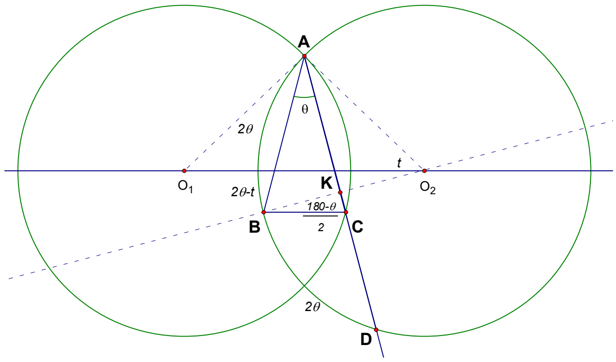
伍、　研究結果

1. 兩等圓(半徑為 r)互過圓心之最大面積內接三角形為一等腰三角形，其頂角 $\theta = 40°$，且面積為 $2r^2sin^3 40°$ 。



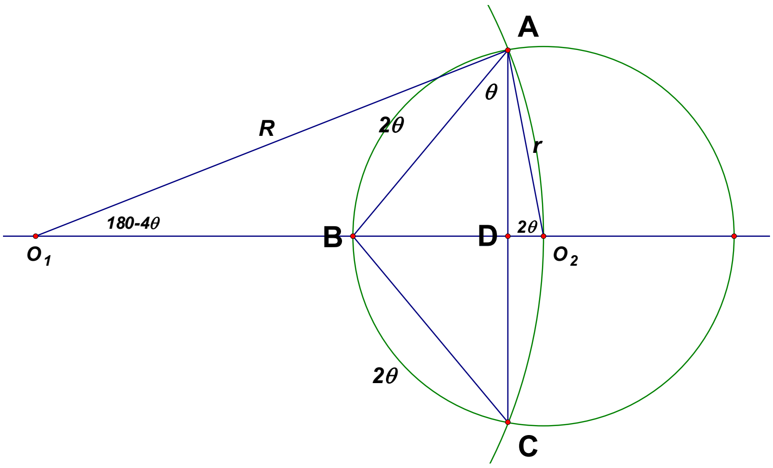
2. 兩等圓半徑為 r ，連心線長為 s ，且 $0 < s < 2r$ ，則此兩交圓區域之內接三角形最大面積 $= 2r^2sin^3\theta$ ，其中 $\theta = \frac{2}{3}\cos^{-1}\frac{s}{2r}$



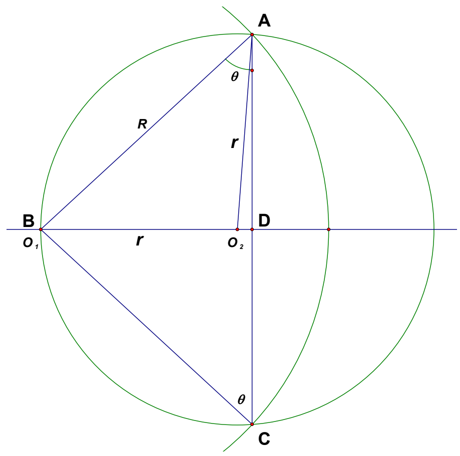


3. 兩相異圓半徑 R 、 r 且 $R > r$ ，

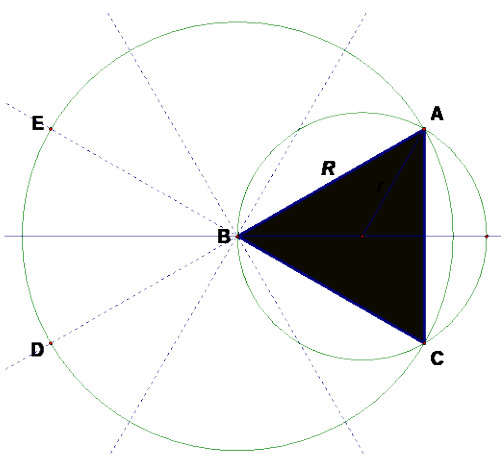
   (1) 若大圓過小圓圓心且 $\frac{R}{r} \geq 2\cos 36° \ (\fallingdotseq 1.618 \ldots)$ ，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是由兩圓交點A、C跟連心線與小圓交點B所形成的等腰三角形。且 $a\Delta ABC = 4cos\theta \cdot r^2 sin^3\theta$ ，其中 $\theta = \frac{1}{4}\cos^{-1}\frac{r^2-2R^2}{2R^2}$ 。



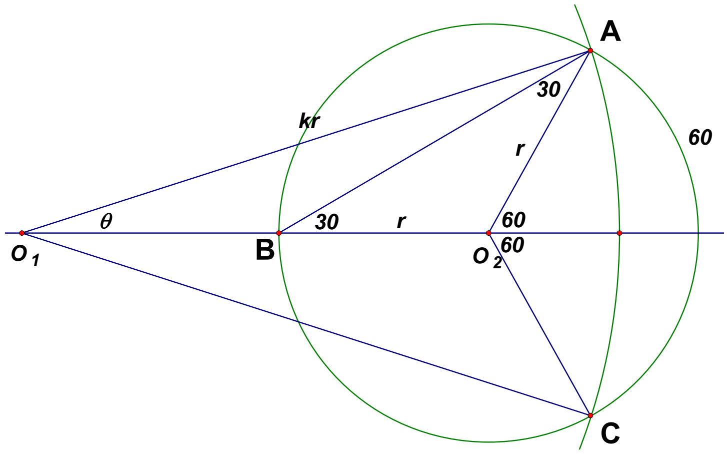
(2) 如下圖，若小圓過大圓圓心且 $\sqrt{2} \leq \frac{R}{r} < \sqrt{3}$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是由兩圓交點跟連心線與小圓交點(即大圓圓心)所形成的等腰三角形，其內接最大三角形面積為 $R^2 sin\theta cos\theta$，其中 $\theta = sin^{-1}\frac{R}{2r}$。



如下圖，若小圓過大圓圓心且 $\sqrt{3} \leq \frac{R}{r} \leq 2$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是小圓弧上的內接正三角形，即 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$。

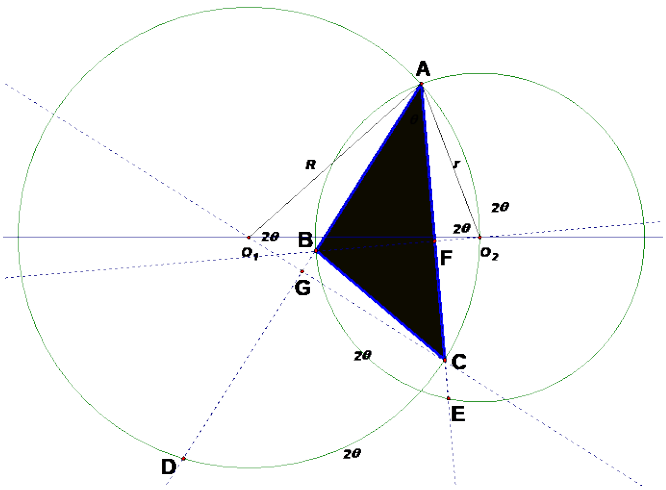


4. 兩相異圓半徑 R 、 r 且 $R = kr$ ($k > 1$)在互不過圓心下，若連心線線段長 s ，且 $s \leq r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$，則兩交圓部分之內接最大面積為小圓之內接正三角形，即 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ 。

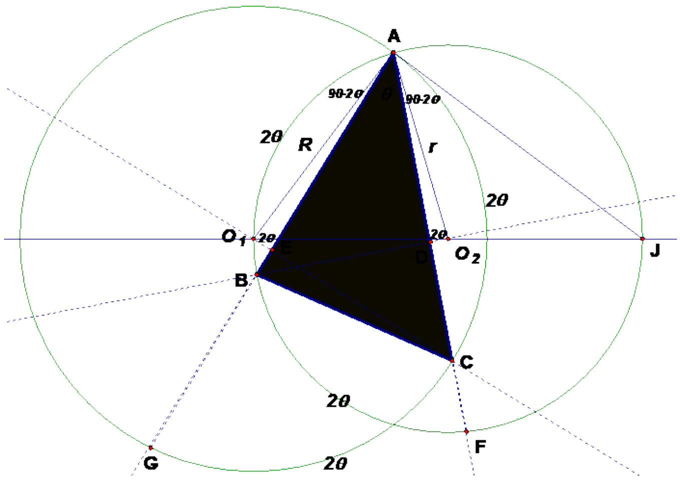


5. 兩相異圓半徑 R 、 r 且 $R > r$ ，

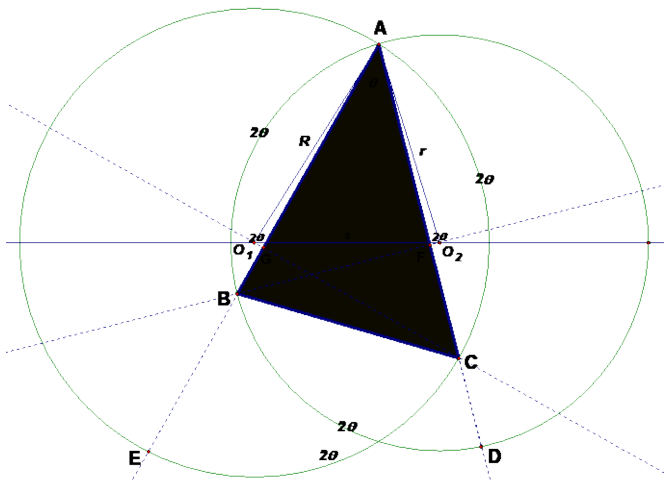
(1) 若大圓過小圓圓心且 $1 < \frac{R}{r} < 2cos36°$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是不規則之三角形，其面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot (cos^{-1}\frac{-r}{2R})$ 。



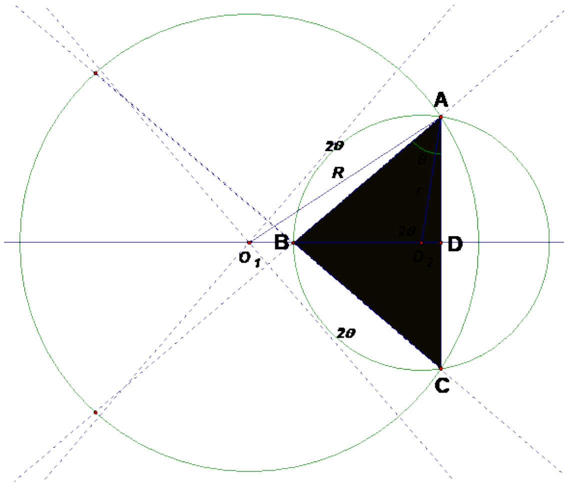
(2) 若小圓過大圓圓心且 $1 < \frac{R}{r} < \sqrt{2}$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是不規則之三角形，其面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}\frac{-R}{2r}$ 。



(3) 若兩相異圓互不過圓心且 $\frac{R^2-r^2}{r} < s < R+r$，則兩交圓區域之內接最大面積三角形會是不規則之三角形，其面積為 $2Rr \cdot sin^3\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{3} \cdot (cos^{-1} - \frac{R^2+r^2-s^2}{2Rr})$。



(4) 若兩相異圓互不過圓心且 $r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right) < s \leq \frac{R^2-r^2}{r}$，則兩交圓內接最大三角形是以兩相異圓交點為主的等腰三角形，其面積為 $4r^2 \cdot sin^3\theta cos\theta$， $\theta = \frac{1}{2} \cdot (cos^{-1}\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs})$。



以上結果統整如下表：

分類	類型	條件	面積	θ
兩等圓	不過圓心	$r<s<2r$	$2r^2sin^3\theta$	$\frac{2}{3}cos^{-1}\frac{s}{2r}$
	互過圓心	$s=r$	$2r^2sin^3\theta$	$40°$
	不過圓心	$0<s<r$	$2r^2sin^3\theta$	$\frac{2}{3}cos^{-1}\frac{s}{2r}$
兩相異圓	大圓過小圓圓心	$1<\frac{R}{r}<2cos36°$	$2\cdot Rrsin^3\theta$	$\frac{1}{3}\cdot(cos^{-1}\frac{-r}{2R})$
		$2\cos 36° \le \frac{R}{r}$	$4cos\theta\cdot r^2sin^3\theta$	$\frac{1}{4}cos^{-1}\frac{r^2-2R^2}{2R^2}$
	小圓過大圓圓心	$1<\frac{R}{r}<\sqrt{2}$	$2\cdot Rr\cdot sin^3\theta$	$\frac{1}{3}\cdot cos^{-1}(\frac{-R}{2r})$
		$\sqrt{2}\le\frac{R}{r}<\sqrt{3}$	$R^2sin\theta cos\theta$	$sin^{-1}\frac{R}{2r}$
		$\sqrt{3}\le\frac{R}{r}\le 2$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$	$60°$
	兩圓互不過圓心	$\frac{R^2-r^2}{r}<s<R+r$	$2\cdot Rrsin^3\theta$	$\frac{1}{3}\cdot cos^{-1}(-\frac{R^2+r^2-s^2}{2Rr})$
		$r\cdot\left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)<s\le\frac{R^2-r^2}{r}$	$4cos\theta\cdot r^2sin^3\theta$	$\frac{1}{2}\cdot(cos^{-1}\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs})$
		$s\le r\cdot\left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$	$60°$

備註：大圓過小圓即 $s=R$，小圓過大圓即 $s=r$。故面積與θ表示中，均以 R 或 r 表示，並無 s 呈現　　表二

陸、　參考資料及其他

1. 兩交圓內接最大圖形面積探討 / 錢柏均、黃佑平(2013) / 中學生網站-數學小論文 1021115 梯次
2. 兩圓相交部份的內接三角形之最大面積 / 陳柏翰、洪毅群、蔡柏緯、孫旻瓘(2004) / 全國中小學科展
3. 反三角函數與複數的極式(高中新數學教室 16) / 陸思明 (2003) / 建宏出版社

【評語】050409

「兩交圓內接三角形最大面積」這個問題雖之前有在科展被考慮過，但之前的作品基本上是針對特殊關係的圓去處理。這個極值問題是一個可以處理，但是複雜度遠比想像要來的難的問題。本件作品考慮一般的情形，得到相當完整的結果。作者對於作品的掌握程度甚佳，無論是文獻探討，已知結果的回顧，內文證明中所使用的方法， 動機與侷限都有清楚的瞭解， 對於作品的表達與呈現也相當出色。未來可以繼續探討與需要嚴格證明是產生極值時三角形的存在性與唯一性，這需要更細緻的分析論證與研究整體來講這是一件優秀的作品。

作品簡報

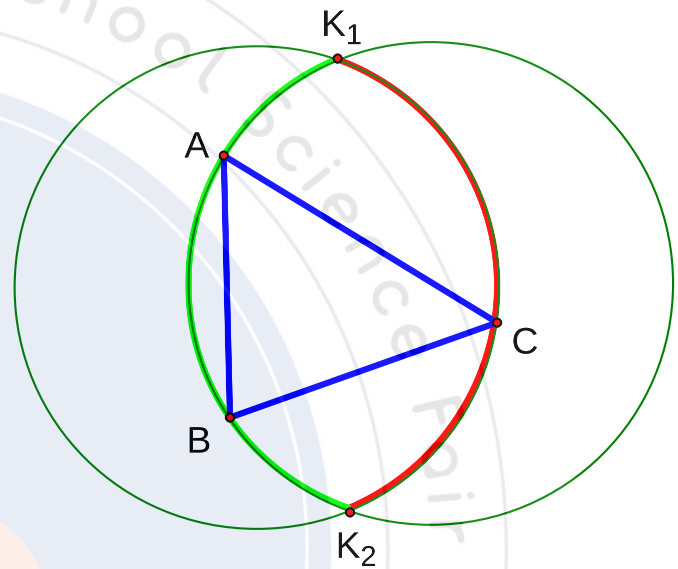
兩交圓內接三角形最大面積之探討

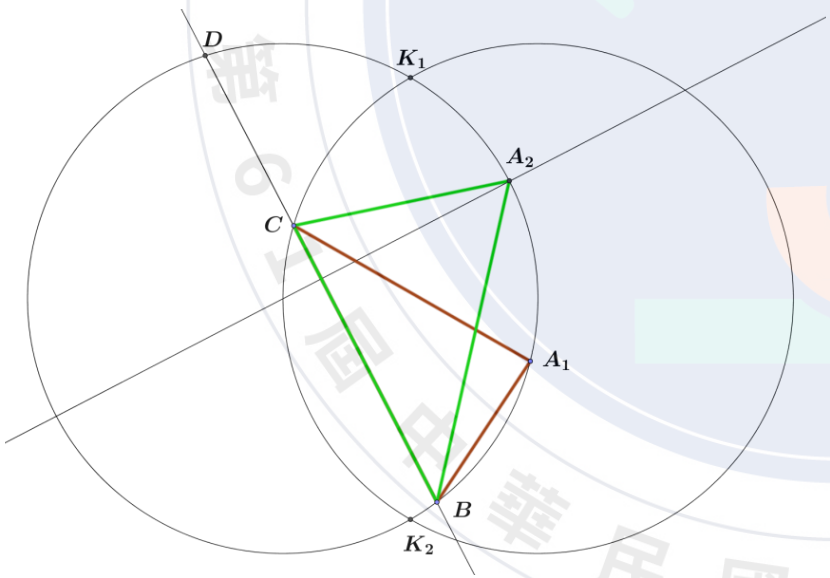
高中組　數學科

名詞定義

交圓內接三角形：

如右圖所示，兩交圓區域中，$\widehat{K_1AK_2}$與$\widehat{K_1CK_2}$上，**任取**相異三點所形成的三角形，如 ΔABC。（三點均在同一弧也可）





變形：

如左圖，在兩交圓的重疊區域中，任取ΔA_1BC，為了尋求最大面積的三角形，我們會不斷將原本三角形進行所謂的『變形』，即$\Delta A_1BC \rightarrow \Delta A_2BC$，使得$\Delta A_2BC$會是以$\overline{BC}$為底邊時，獲得最大的高來得到最大三角形面積。

文獻探討

- 陳柏翰、洪毅群、蔡柏緯、孫旻瓘(2004)【兩圓相交部份的內接三角形之最大面積】將交圓限制在「**等圓**」的特殊條件上，且**利用程式**控制變因在兩圓**交點與外公切線的距離**與最大面積三角形其交點部分所夾的**角度值**。

- 錢柏均、黃佑平(2013)【兩交圓內接最大圖形面積探討】內容與陳柏翰等人的【兩圓相交部份的內接三角形之最大面積】在三角形面積的部分想法**相似**：
一、純粹探討兩等圓的情況，二、變因還是兩交圓交點與外公切線的距離，三、在延伸**四邊形**最大面積部分，菱形也是純粹**猜想**，無嚴謹證明；內接矩形的最大面積無法找出規律，因此沒有結論說明最大面積如何尋求。

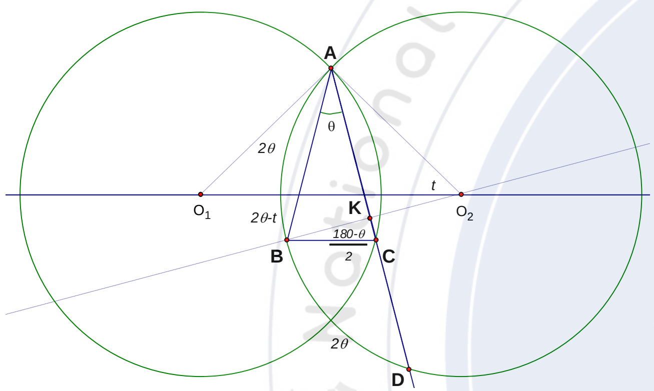
而我們希望能做到更完整的幾何推論，從「兩等圓」的思維出發，進而探討「兩**相異**圓」的方向；且**將變數更改為連心線線段長**，使得整個推理過程合理、**直觀且容易操作**。

研究流程

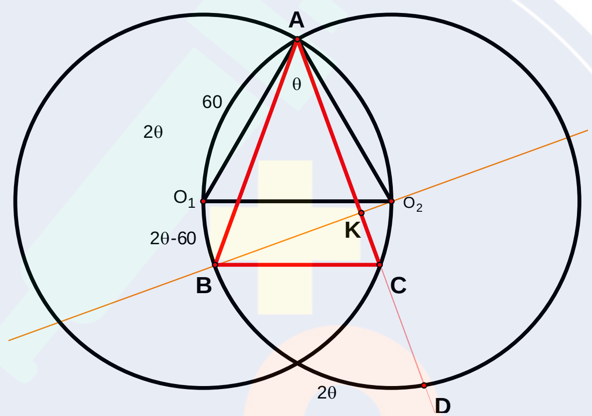
- 兩等圓（$r_1 = r_2$）
  - 1. 探討兩等圓互過圓心之內接三角形最大面積
    - 1.1 連心線 $s = r$
  - 2. 探討兩等圓不過圓心之內接三角形最大面積
    - 2.1 $0 <$ 連心線 $s \le r$
    - 2.2 r $\le$ 連心線 $s < 2r$
- 相異兩圓（$r_1 \ne r_2$）
  - 3. 一圓過另圓圓心之內接三角形最大面積
    - 3.1 大圓過小圓圓心 (規則型)
    - 3.2 小圓過大圓圓心 (規則型)
  - 4. 兩圓互不過圓心之內接三角形最大面積
    - 4.1 探討連心線長與最大面積的關係 (規則型)
- 續探
  - 3.1.1 大圓過小圓圓心 (不規則型) $\rightarrow 1 < \frac{R}{r} < 2cos36°r$
  - 3.2.1 小圓過大圓圓心 (不規則型) $\rightarrow 1 < \frac{R}{r} < \sqrt{2}$
  - 4.1.1 兩圓互不過圓心 (規則型) $\rightarrow r \cdot \left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right) < s \le \frac{R^2-r^2}{r}$
  - 4.1.2 兩圓互不過圓心 (不規則型) $\rightarrow \frac{R^2-r^2}{r} < s < R + r$

兩等圓交圓內接三角形最大面積研究

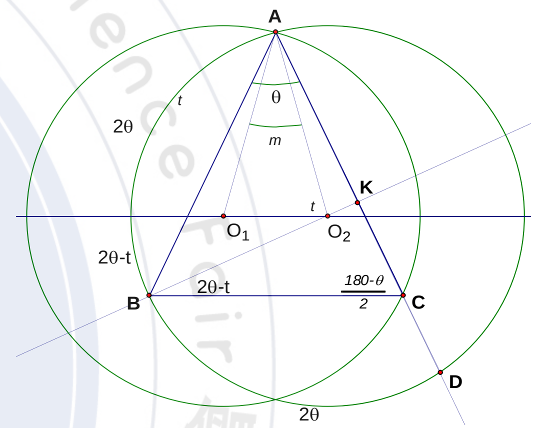
定理2



定理1



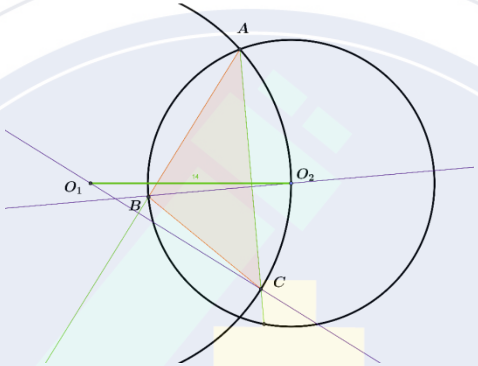
定理2



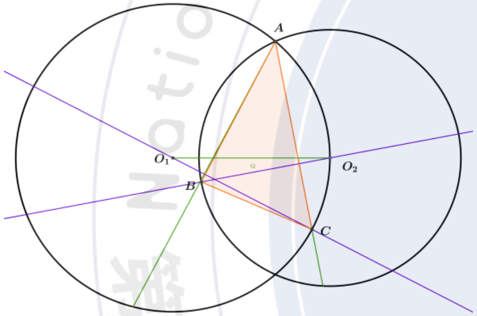
若兩圓半徑為 r ，連心線長為 s ，且 $0 < s < 2r$ ，則此兩交圓重疊區域之內接三角形最大面積 = $\boldsymbol{2r^2 sin^3\theta}$ ，其中 $\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3} cos^{-1} \frac{s}{2r}}$ 。

（ 備註：當 $s = r$，即互過圓心。此時 $\theta = \frac{2}{3} cos^{-1} \frac{s}{2r} = \frac{2}{3} cos^{-1} \frac{r}{2r} = 40°$ ）

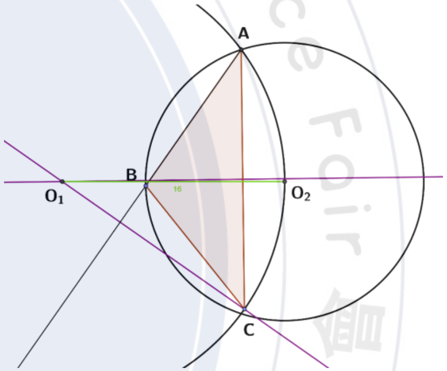
大圓過小圓圓心交圓內接三角形最大面積研究



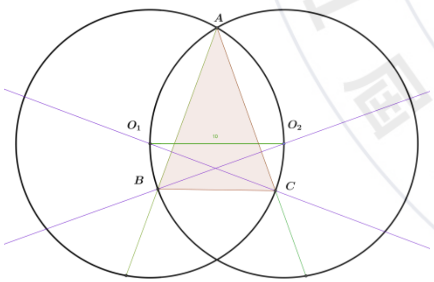
R=1.4 r



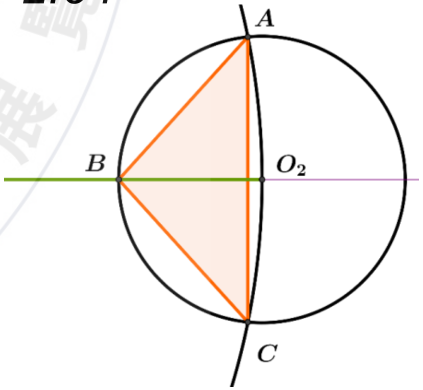
R=1.2 r



R=1.6 r



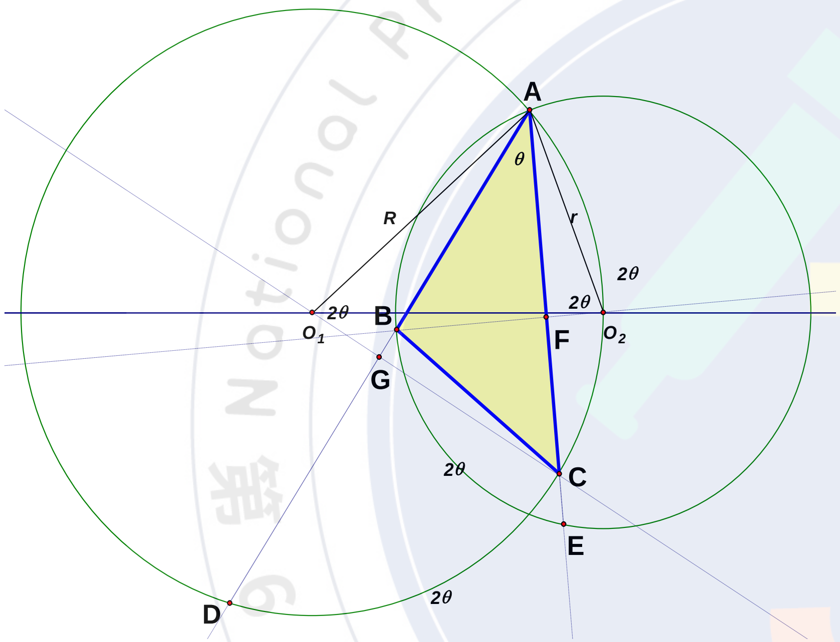
R=1.0 r



R=2.0 r

大圓過小圓圓心交圓內接三角形最大面積研究

定理6



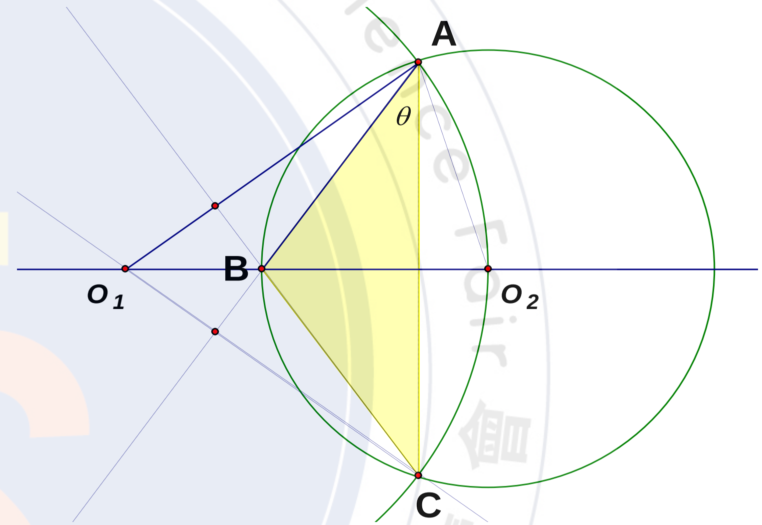
$$1 < \frac{R}{r} < 2cos36°$$

兩交圓內接最大三角形面積為

$$2Rr \cdot sin^3\theta$$

$$\theta = \frac{1}{3} \cdot (cos^{-1}\frac{-r}{2R})$$

定理3



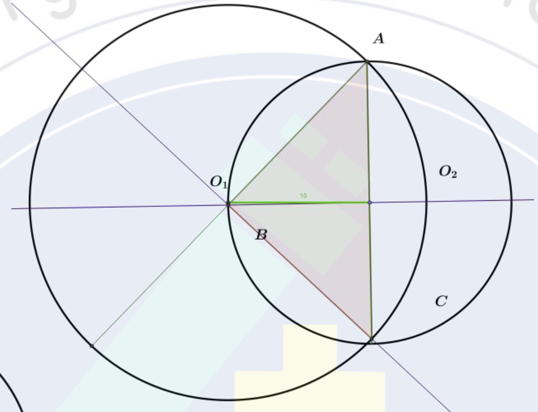
$$\frac{R}{r} \geq 2\cos 36°$$

兩交圓內接最大三角形面積為

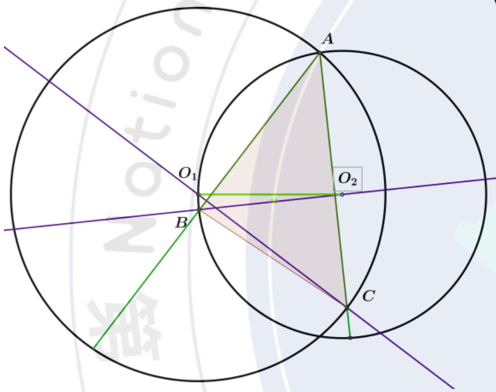
$$4cos\theta \cdot r^2 sin^3\theta$$

$$\theta = \frac{1}{4} cos^{-1}\frac{r^2 - 2R^2}{2R^2}$$

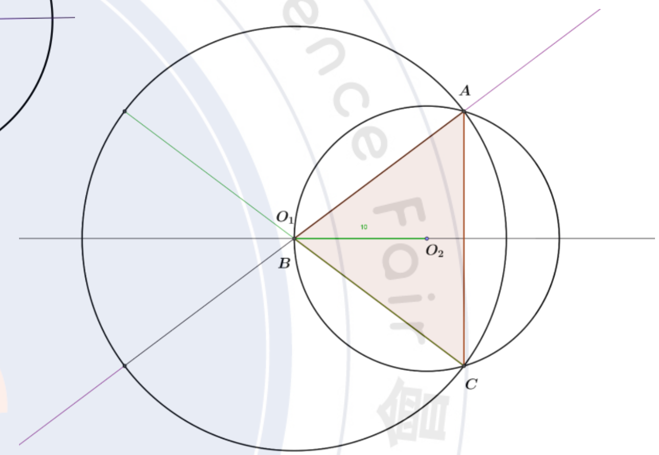
小圓過大圓圓心交圓內接三角形最大面積研究



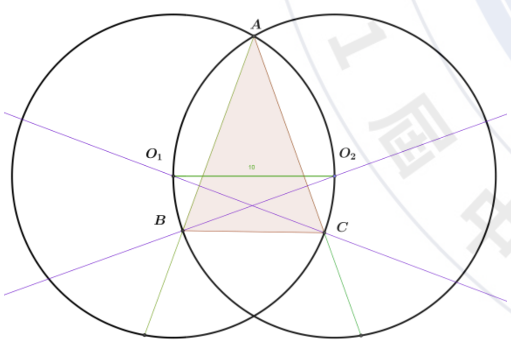
R=1.4 r



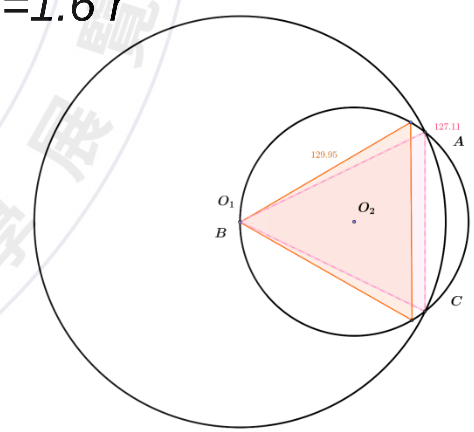
R=1.2 r



R=1.6 r



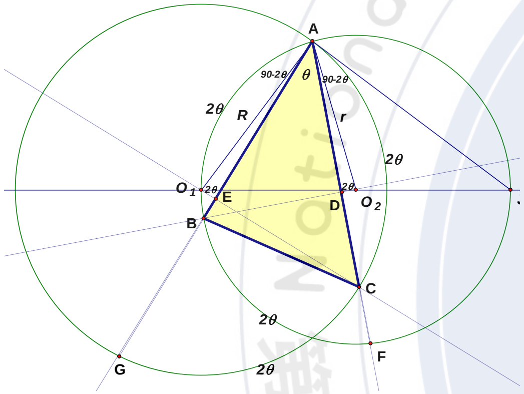
R=1.0 r



R=2.0 r

小圓過大圓圓心交圓內接三角形最大面積研究

定理7



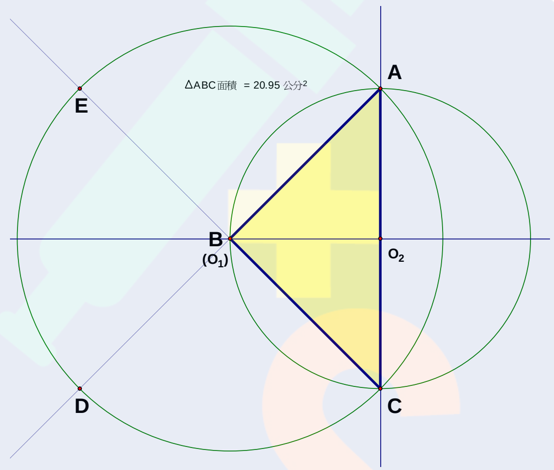
$$1 < \frac{R}{r} < \sqrt{2}$$

交圓內接最大三角形

面積 = $\boldsymbol{2Rr \cdot sin^3\theta}$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{3} \cdot cos^{-1}\frac{-R}{2r}}$$

定理4



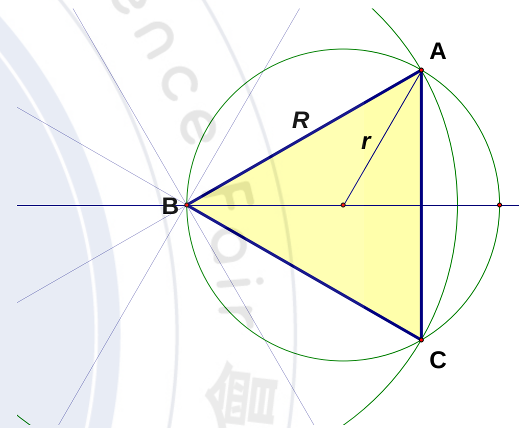
$$\sqrt{2} \le \frac{R}{r} < \sqrt{3}$$

交圓內接最大三角形

面積 = $\boldsymbol{R^2 sin\theta cos\theta}$

$$\boldsymbol{\theta = sin^{-1}\frac{R}{2r}}$$

定理4



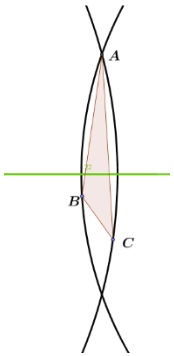
$$\sqrt{3} \le \frac{R}{r} \le 2$$

交圓內接最大三角形

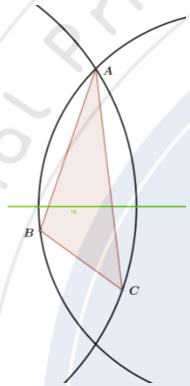
面積 = $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2}$

$$\boldsymbol{\theta = 60°}$$

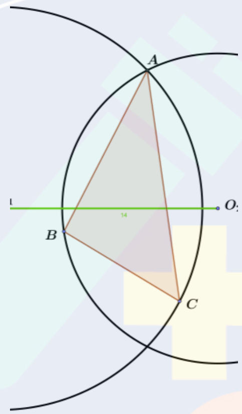
兩圓互不過圓心交圓內接三角形最大面積研究



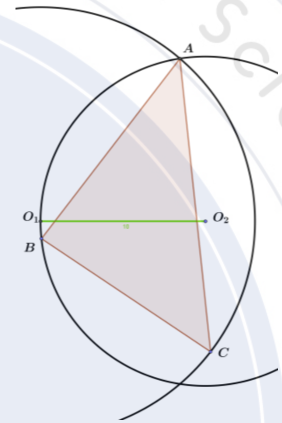
S=22



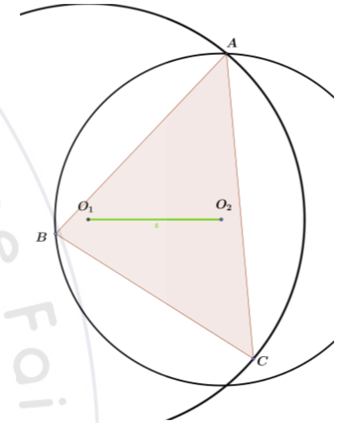
S=18



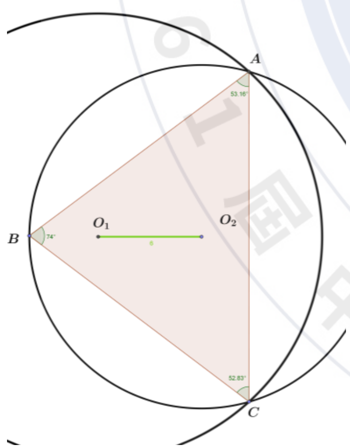
S=14



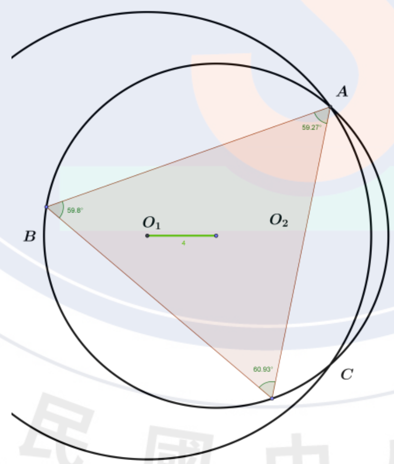
S=10



S=8



S=6

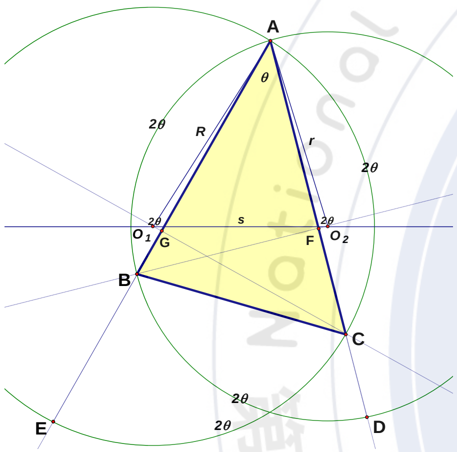


S=4

以上所有圖皆為
R=1.3r的縮放圖，
因有些圖**面積過小**，
有做**局部放大**！故
小圓大小不成比例！

兩圓互不過圓心交圓內接三角形最大面積研究

定理8



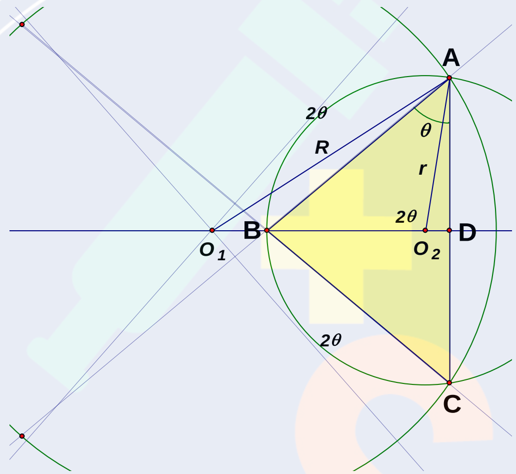
$$\frac{R^2-r^2}{r}<s<R+r$$

交圓內接最大三角形

面積 $= 2Rr\cdot\sin^3\theta$

$$\theta=\frac{1}{3}\cdot\left(\cos^{-1}\frac{R^2+r^2-s^2}{2Rr}\right)$$

定理9



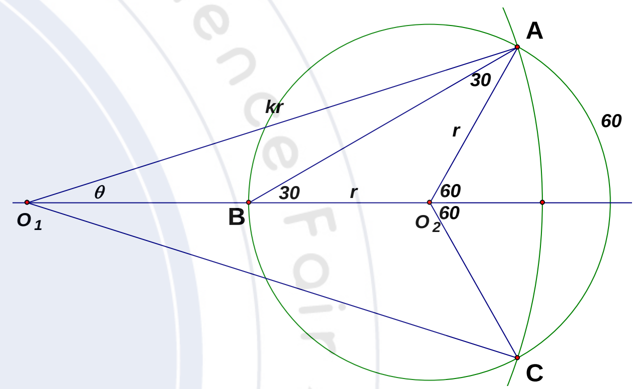
$$r\cdot\left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)<s\le\frac{R^2-r^2}{r}$$

交圓內接最大三角形

面積 $= 4r^2\cdot\sin^3\theta\cos\theta$

$$\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos^{-1}\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs}\right)$$

定理5



$$s\le r\cdot\left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$$

交圓內接最大三角形

面積 $=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

$$\theta=60^\circ$$

研究結果

分類	類型	條件	面積	θ	備註
等圓	一般	不分類	$2r^2\sin^3\theta$	$\frac{2}{3}\cos^{-1}\frac{s}{2r}$	備註：大圓過小圓即 $s=R$，小圓過大圓即 $s=r$。故面積與θ表示中，均以 R 或 r 表
兩相異圓	大圓過小圓圓心	$1<\frac{R}{r}<2\cos36°$	$2Rr\cdot\sin^3\theta$	$\frac{1}{3}\cdot(\cos^{-1}\frac{-r}{2R})$	
		$2\cos 36° \le \frac{R}{r}$	$4\cos\theta\cdot r^2\sin^3\theta$	$\frac{1}{4}\cos^{-1}\frac{r^2-2R^2}{2R^2}$	
	小圓過大圓圓心	$1<\frac{R}{r}<\sqrt{2}$	$2Rr\cdot\sin^3\theta$	$\frac{1}{3}\cdot\cos^{-1}(\frac{-R}{2r})$	
		$\sqrt{2}\le\frac{R}{r}<\sqrt{3}$	$4\cos\theta\cdot r^2\sin^3\theta$	$\sin^{-1}\frac{R}{2r}$	
		$\sqrt{3}\le\frac{R}{r}\le 2$	$2r^2\sin^3\theta$	60°	
	兩圓互不過圓心	$\frac{R^2-r^2}{r}<s<R+r$	$2Rr\cdot\sin^3\theta$	$\frac{1}{3}\cdot\cos^{-1}(-\frac{R^2+r^2-s^2}{2Rr})$	
		$r\cdot\left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)<s\le\frac{R^2-r^2}{r}$	$4\cos\theta\cdot r^2\sin^3\theta$	$\frac{1}{2}\cdot(\cos^{-1}\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs})$	
		$s\le r\cdot\left(\frac{\sqrt{4k^2-3}-1}{2}\right)$	$2r^2\sin^3\theta$	60°	

References

- 兩交圓內接最大圖形面積探討 / 錢柏均、黃佑平(2013) / 中學生網站-數學小論文1021115梯次
- 兩圓相交部份的內接三角形之最大面積 / 陳柏翰、洪毅群、蔡柏緯、孫旻瓘(2004) / 全國中小學科展
- 反三角函數與複數的極式(高中新數學教室16) / 陸思明 (2003) / 建宏出版社