

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

佳作

050408

複數平面解析應用－西姆松線之交點軌跡性質
探討

學校名稱：臺北市立大同高級中學

作者： 高二 洪嘉佑 高二 彭昇禾 高二 汪俞宏	指導老師： 談得聖 李承修
---	-----------------------------

關鍵詞：西姆松線、軌跡方程式、複數解析幾何

摘要

本文主要探討的問題為：當三角形以其外心旋轉 180° 時（我們稱之為對徑三角形），將此外接圓上一動點 P 對兩對徑三角形分別做西姆松線，當 P 點在外接圓上轉動時，兩西姆松線的交點軌跡為何。我們將西姆松線放在複數平面上來分析，推得這兩條西姆松線會互相垂直，並且它們的交點軌跡為一橢圓，此橢圓會相切於兩對徑三角形的六條邊，因此我們將此橢圓稱作這兩對徑三角形的「六點橢圓」，並探討這個橢圓的性質。

此外，我們也解出了斜西姆松線的方程式，並討論當改變對徑條件和旋轉對象時，兩西姆松線的交點軌跡方程式與圖形。我們發現了這些交點軌跡圖形都能對應到圓次擺線。

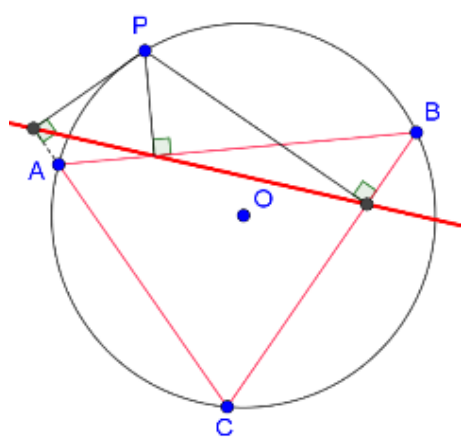
壹、前言

一、研究動機

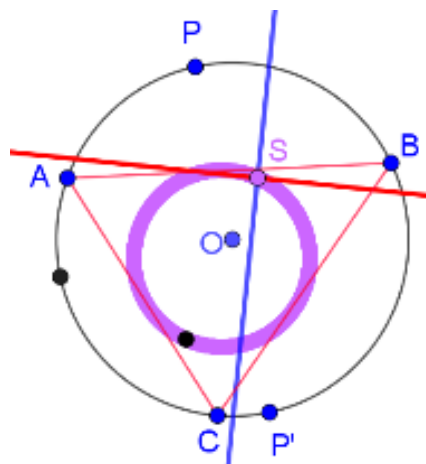
有次老師在課堂中提及了西姆松線定理的內容，該定理的敘述如下：

西姆松定理：

平面上對任意一 $\triangle ABC$ ，有一點 P ，若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，則 P 對此三角形三邊上的垂足（投影點）共線，如圖一。（稱此直線為西姆松線）



圖一



圖二

聽完後我們便產生興趣，開始去了解西姆松定理。而在找到的相關性質中，有一項性質令我們產生好奇，內容是「當給定一三角形和其外接圓上一點 P ， P 和其對徑點 P' 分別對三角形作西姆松線，此時兩西姆松線垂直(如圖二)，而當圓上一點 P 沿著外接圓旋轉一圈，兩西姆松線的交點之軌跡將會是三角形的九點圓。」

看完了這項性質，我們產生疑問，如果改變此性質中的條件，結果會如何呢？我們的研究之旅就此展開。

二、研究目的及問題

本研究有別於常見的幾何方法，運用了複數平面解析的方式來深入了解西姆松線的性質與推廣，我們欲研究的問題如下：

- (1) 探討一點對兩三角形或兩點對一三角形作之兩西姆松線，當旋轉點或三角形時，兩線交點軌跡為何。
- (2) 將(1)中的西姆松線改成斜西姆松線並比較交點軌跡的差異。

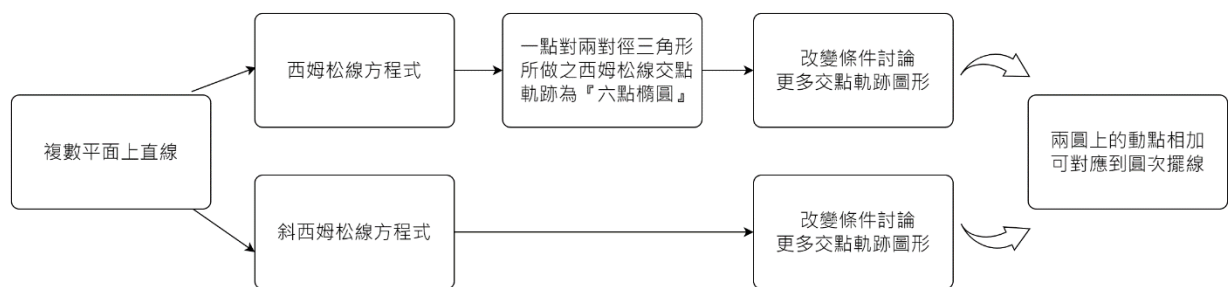
三、研究工具

紙、筆、電腦、幾何軟體 Geogebra。

四、符號解釋

- (1) $Z(z)$ ：本研究是在複數平面的環境下進行討論與分析，我們以 $Z(z)$ 的形式表示所有複數平面上的點，其中 Z 為該點的名稱， z 為該點的複數值， θ_z 為該複數的幅角。
- (2) $X(x)X(x)$ ，係指單位圓上一動點。
- (3) $Z[X_n](zx^n)$ ：以 Z 為起始點、原點為旋轉中心、旋轉角速度為 $X(x)$ 旋轉角速度的 n 倍 ($n \in \mathbb{R}$) 的一動點；特別地，將 $Z[X_1](zx^1)$ 表示為 $Z[X](zx)$ 。
- (4) $\Delta ABC[X_n]$ ：表示將 ΔABC 的三頂點皆旋轉 $n\theta_x$ 所形成之三角形，即三頂點分別為 $A[X_n](ax^n)$ 、 $B[X_n](bx^n)$ 、 $C[X_n](cx^n)$ ；特別地，將 $\Delta ABC[X_1]$ 表示為 $\Delta ABC[X]$ 。

五、研究架構圖



貳、研究方法或過程

一、文獻探討

在 2017 年 Todor Zaharinov 發表了一篇論文[1]，內文討論了西姆松線的一些相關性質，例如：兩西姆松線交點、西姆松三角形、垂極點，而整篇論文的過程都是以複數的形式呈現，而這也是我們研究選擇了複數解析的靈感來源。

二、複數平面上的直線方程式與其性質

為了能得到西姆松線在複數平面上的方程式，我們效法在實數平面上給定兩點求方程式的方法，先從「在複數平面上給定兩點求方程式」開始。

【引理一】

在複數平面上任意直線的方程式，當固定 z 的係數為 1 時，可將其唯一表示為

$$z - n\bar{z} = l$$

其中 $n \in \mathbb{C}$ 且 $|n| = 1$ ，我們稱此表示法為**最簡一般式**。(簡稱一般式)

pf: 已知實數平面上的任意直線方程式可表示為 $AX + BY + C = 0$ ，
其中 $A^2 + B^2 \neq 0$ 。

設 $Z(z)$ 為複數平面中直線上一點，

令 $z = a + bi$ 、 $\bar{z} = a - bi$ ，則 $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$ 、 $b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

將 z 的實部 (a) 視為 X 、虛部 (b) 視為 Y 代入實平面直線方程式中可得，

$$A\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + B\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + C = 0$$

$$(B + Ai)z + (-B + Ai)\bar{z} = -2Ci$$

$$z - \frac{B - Ai}{B + Ai}\bar{z} = \frac{-2Ci}{B + Ai}$$

令 $\frac{B - Ai}{B + Ai} = n$ 、 $\frac{-2Ci}{B + Ai} = l$ ，即複數平面上任意直線方程式可表示

為 $z - n\bar{z} = l$ ，其中 $|n| = \left|\frac{B - Ai}{B + Ai}\right| = \left|\frac{B - Ai}{\overline{B - Ai}}\right| = 1$ 。 ■

在【引理一】中的一般式可以表示所有複數平面上的直線方程式，但我們常常會由兩點去找過此兩點的直線方程式，為了更便於寫出方程式，而有了【引理二】。

【引理二】

給定複數平面上任意兩點 Z_1 、 Z_2 其複數值分別為 z_1 、 z_2 ，過此兩點的直線方程式可表示為 $(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$ ，我們將其稱之為兩點式。

pf: 已知複數平面上的直線方程式可以表示為 $z - n\bar{z} = l$

將兩複數 z_1 、 z_2 帶入直線方程式可得:

$$z_1 - nz_1 = l \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad z_2 - n\bar{z}_2 = l \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ 兩式聯立解得 } n = \frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}, \quad l = z_1 - \frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} z_1$$

帶回直線方程式並化簡後可得兩點式:

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 \quad \blacksquare$$

接下來我們探討: 給定一直線 $z - n\bar{z} = l$ ，該直線的斜率與 n 的關係。

【引理三】

任意直線一般式 $z - n\bar{z} = l$ 的斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$ ，即直線與實軸夾角為 $\frac{\theta_n}{2}$ ，其中 θ_n 為複數 n 和實軸正向之夾角， $0 \leq \theta_n < \pi$ 。

pf: 因為平面上任意直線，皆可將其水平移動使其通過原點，故此證明中我們將先討論通過原點的直線斜率，接著再將其水平移動至任意位置。

由【引理一】可知，當直線通過原點時，其一般式表示為 $z - n\bar{z} = 0$ ，

將一般式中的 z 以複數極式 $|z|(\cos \theta_z + i \sin \theta_z)$ 表示，將直線改寫成

$$\begin{aligned} & |z|(\cos \theta_z + i \sin \theta_z) - n|z|(\cos(-\theta_z) + i \sin(-\theta_z)) = 0 \\ \implies n &= \frac{|z|(\cos \theta_z + i \sin \theta_z)}{|z|(\cos(-\theta_z) + i \sin(-\theta_z))} = \cos 2\theta_z + i \sin 2\theta_z \end{aligned}$$

可知 $\theta_n = 2\theta_z$ ，即過原點直線方程斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$ 。

將直線 $z - n\bar{z} = 0$ 向右平移 m 單位 ($m \in \mathbb{R}$) 後，則方程式表示為

$$(z - m) - n(\overline{z - m}) = 0, \text{ 經整理後得一般式 } z - n\bar{z} = (1 - n)m,$$

意即複數平面上任意直線一般式 $z - n\bar{z} = l$ ，其斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$ ，故得證。 \blacksquare

舉例來說，通過原點的鉛直線之直線方程式為 $z - (-\bar{z}) = 0$ ，通過 i 的水平線方程式為 $z - (\bar{z}) = 2i$ ，通過 1 且斜率為 1 的直線方程式為 $z - (-i\bar{z}) = 1 + i$ ，通過 2 且斜率為 -1 的直線方程式為 $z - (i\bar{z}) = 2 - 2i$ 。

接著我們證明了若給定兩直線方程式 $z - n_1\bar{z} = l_1, z - n_2\bar{z} = l_2$ ，則兩線垂直等價於 $n_1 = -n_2$ 。並利用此關係得到了【定理四】。

【引理四】

給定直線 $L: z - n\bar{z} = l$ 和線上一點 $P(p)$ ，則垂直 L 於 P 點的直線其一般式為

$$z + n\bar{z} = p + n\bar{p}$$

pf: 設直線 $L': z - n'\bar{z} = l'$ 與 L 垂直

由【引理三】知 L 與實軸正向夾角為 $\frac{\theta_n}{2}$ ，及 L' 與實軸正向夾角為 $\frac{\theta_{n'}}{2}$ ，

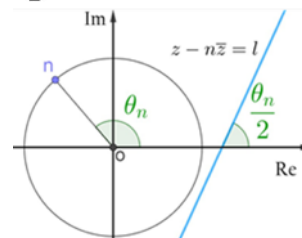
又因 L' 與 L 垂直，則 $\frac{\theta_{n'}}{2} = \frac{\theta_n}{2} \pm \frac{\pi}{2} \implies \theta_{n'} = \theta_n \pm \pi$

也就是 n 與 n' 為複數平面上兩個主幅角相差 180° 之複數，

且 $|n'| = |n| = 1$ ，所以 $n' = -n$ ，將其代入 L' 得 $z + n\bar{z} = l'$ ，

再將 $P(p)$ 代入得 $l' = p + n\bar{p}$ ，即 L' 的一般式為

$$z + n\bar{z} = p + n\bar{p}$$



圖三

三、複數平面上的西姆松線方程式

首先將複數平面上 $\triangle ABC$ 之三頂點的坐標分別以 $A(a), B(b), C(c)$ 表示，不失一般性，我們令 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心 O 為複數平面上的原點，接著控制 $\triangle ABC$ 的大小，使其外接圓的半徑為 1，而 $P(p)$ 為圓上一動點，利用【引理一】~【引理四】的結果，我們可以得到西姆松線在複數平面上的一般式。

【定理五】

給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，則 P 點對 $\triangle ABC$ 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2}$$

pf: 因為 A, B, C, P 皆在單位圓上，所以 $a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = c \cdot \bar{c} = p \cdot \bar{p} = 1$

首先我們先求 \overleftrightarrow{AB} 的一般式，將 $A(a), B(b)$ 代入直線一般式 $z - n\bar{z} = l$

得 $a - n\bar{a} = b - n\bar{b}$

$$\implies n = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{b-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = -ab$$

將 $n = -ab$ 、 $z = a$ 代入 $z - n\bar{z} = l$ ，得 $l = a + b$

因此 $\overleftrightarrow{AB} : z + ab\bar{z} = a + b \dots\dots ①$

由【引理四】可知，過 P 且垂直 \overleftrightarrow{AB} 之直線一般式為

$$z - ab\bar{z} = p - ab\bar{p} \dots\dots ②$$

①、②兩式聯立解得，過 P 且垂直 \overleftrightarrow{AB} 之直線與 \overleftrightarrow{AB} 之垂足 z_1

$$z_1 = \frac{a+b+p-ab\bar{p}}{2} \quad , \quad \bar{z}_1 = \frac{a+b-p+ab\bar{p}}{2ab}$$

同理得過 P 且垂直 \overleftrightarrow{AC} 之直線與 \overleftrightarrow{AC} 之垂足 z_2

$$z_2 = \frac{c+a+p-ca\bar{p}}{2} \quad , \quad \bar{z}_2 = \frac{c+a-p+ca\bar{p}}{2ca}$$

所求之西姆松線為通過 z_1 、 z_2 的直線

$$\begin{aligned} n &= \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \\ &= \frac{\left(\frac{c+a+p-ca\bar{p}}{2}\right) - \left(\frac{a+b+p-ab\bar{p}}{2}\right)}{\left(\frac{c+a-p+ca\bar{p}}{2ca}\right) - \left(\frac{a+b-p+ab\bar{p}}{2ab}\right)} \\ &= \frac{abc(c-b-ca\bar{p}+ab\bar{p})}{ab-ca-bp+cp} = \frac{abc(c-b)(1-a\bar{p})}{(c-b)(p-a)} \\ &= \frac{abc\left(1-\frac{a}{p}\right)}{p\left(1-\frac{a}{p}\right)} = \frac{abc}{p} \end{aligned}$$

將 $n = \frac{abc}{p}$ 以及 z_1 代入一般式 $z - n\bar{z} = l$ ，得

$$\begin{aligned} l &= z_1 - \frac{abc}{p}\bar{z}_1 \\ &= \left(\frac{a+b+p-ab\bar{p}}{2}\right) - \left(\frac{abc}{p}\right)\left(\frac{a+b-p+ab\bar{p}}{2ab}\right) \\ &= \left(\frac{a+b+p-\frac{ab}{p}}{2}\right) - \left(\frac{ca+bc-cp+\frac{abc}{p}}{2p}\right) \\ &= \frac{ap^2+bp^2+p^3-abp-cap-bcp+cp^2-abc}{2p^2} \\ &= \frac{p^3+(a+b+c)p^2-(ab+bc+ca)p-abc}{2p^2} \end{aligned}$$

故 P 點對 ΔABC 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2}$$



四、旋轉三角形，其對應之西姆松線變化

在文獻探討中，有許多關於兩西姆松線交點軌跡的性質，於是我們靈機一動，既然給定圓周上兩對徑點對同一個三角形可以作出兩條西姆松線求軌跡，那我們也可以嘗試給定圓周上兩個三角形，來觀察圓周一動點對這兩個三角形所作出的兩西姆松線之交點軌跡為何。

首先我們先研究當外接圓上一點和三角形的三頂點各自旋轉後，旋轉後作的西姆松線和原西姆松線的夾角會為何。

【定理六】

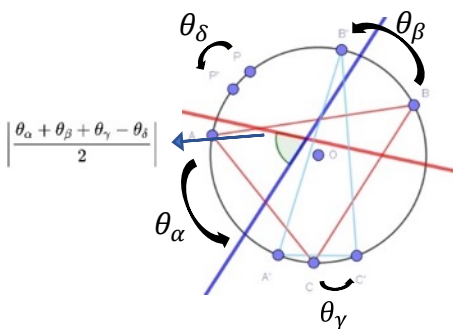
給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，以單位圓之圓心為旋轉中心，將 $A、B、C、P$ 四點分別旋轉角度 $\theta_\alpha、\theta_\beta、\theta_\gamma、\theta_\delta$ ，得到 $A'、B'、C'、P'$ 四點，則點 P 對 ΔABC 之西姆松線與點 P' 對 $\Delta A'B'C'$ 之西姆松線，兩西姆松線所夾之角度為

pf : 由【引理三】可知， P 對 ΔABC 之西姆松線和實軸正向夾角為 $\frac{\theta_{\frac{abc}{p}}}{2} = \frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_p}{2}$

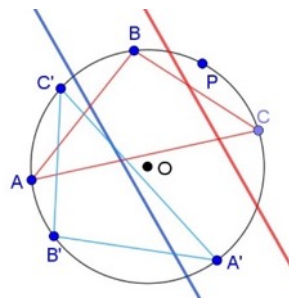
將 $A、B、C、P$ 四點分別旋轉角度 $\theta_\alpha、\theta_\beta、\theta_\gamma、\theta_\delta$ 後得到 $A'、B'、C'、P'$ 四點，則 P' 對 $\Delta A'B'C'$ 之西姆松線和實軸正向夾角為

$$\frac{(\theta_a + \theta_\alpha) + (\theta_b + \theta_\beta) + (\theta_c + \theta_\gamma) - (\theta_p + \theta_\delta)}{2} = \frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_p}{2} + \frac{\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma - \theta_\delta}{2}$$

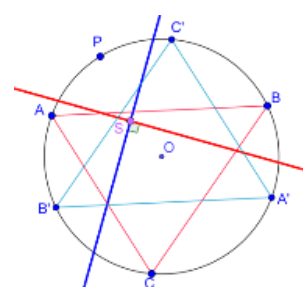
因此兩西姆松線夾角為 $\left| \frac{\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma - \theta_\delta}{2} \right|$ 。



圖四



圖五



圖六

根據上述定理，我們可以將在研究動機所提及的「西姆松線性質中，兩對徑點分別對三角形作出的西姆松線相互垂直」視為 $\theta_\alpha = \theta_\beta = \theta_\gamma = 0^\circ、\theta_\delta = 180^\circ$ 的情況，而兩西姆松線的夾角即為 $\left| \frac{-180^\circ}{2} \right| = 90^\circ$ (如圖二)。

根據定理六，我們也可以知道，當三角形的三頂點旋轉 120 度時，P 對兩三角形各自作西姆松線，這兩條西姆松線會平行 (如圖五)。

接著我們考慮將三角形作旋轉，定義對任意 $\triangle ABC$ ，將此三角形三頂點 A 、 B 、 C 分別對其外接圓圓心旋轉 180 度，可得對徑點 A' 、 B' 、 C' ，稱 $\triangle A'B'C'$ 為 $\triangle ABC$ 之對徑三角形。

根據【定理六】的結果，我們可以得知，外接圓上一點分別對 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 作西姆松線時，兩西姆松線的夾角為 270 度，因此兩西姆松線會互相垂直，(如圖六)。我們進一步將兩條西姆松線的方程式求出並解聯立，可以求得兩西姆松線的交點軌跡方程式。

【定理七】

單位圓上定三定點 $A(a), B(b), C(c)$ 與一動點 $P(p)$ ，將 P 對 $\triangle ABC$ 及其對徑三角形 $\triangle A'B'C'$ 分別作西姆松線，則當 P 在圓上旋轉時，兩西姆松線的交點 $S(x)$ 的軌跡方程式為

$$x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab + bc + ca)}{2p}$$

pf : 因為 $\triangle A'B'C'$ 為 $\triangle ABC$ 之對徑三角形，可知 $A'(-a), B'(-b), C'(-c)$

由【定理五】可得點 P 對 $\triangle ABC$ 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a + b + c)p^2 - (ab + bc + ca)p - abc}{2p^2}$$

同理，點 P 對 $\triangle A'B'C'$ 之西姆松線一般式為

$$z + \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 - (a + b + c)p^2 - (ab + bc + ca)p + abc}{2p^2}$$

①、② 聯立解得交點 S 的軌跡方程式為

$$x = \frac{p^3 - (ab + bc + ca)p}{2p^2} = \frac{p}{2} + \frac{-(ab + bc + ca)}{2p}$$

■

在【定理七】中，我們看到軌跡方程式的前項為 $\frac{p}{2}$ ，是一個和 $\triangle ABC$ 的外接圓同圓心且半徑為一半的圓；而後項 $\frac{-(ab + bc + ca)}{2p}$ 也是一個同圓心，但是以 $\frac{|ab + bc + ca|}{2}$ 為半徑的圓。此外，我們注意到當 P 點在外接圓上以逆時針的方向旋轉時， $\frac{1}{p}$ 是以相同的速率作順時針旋轉，所以當 P 點作順向轉動時， $\frac{-(ab + bc + ca)}{2p}$ 也以相同的速率作逆時針旋轉。

接著我們想要證明，兩個在同心圓上的動點，當一個作逆向轉動，而另一個作順向轉動時，兩者的軌跡相加為哪一種幾何圖形？

【定理八】

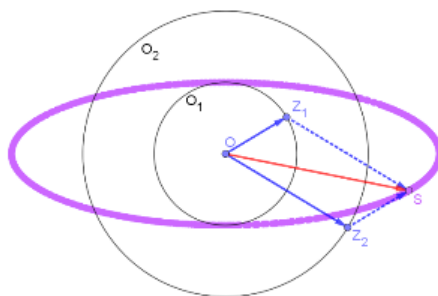
當複數平面上兩點 $Z_1(z_1)$ 和 $Z_2(z_2)$ 在兩個同心圓上，以相同的速率反向轉動時， $z_1 + z_2$ 的軌跡為一橢圓。

pf: 不失一般性，設 $z_1 = r_1(\cos \theta + i \sin \theta)$ 、 $z_2 = r_2(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= r_1(\cos \theta + i \sin \theta) + r_2(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= r_1(\cos \theta + i \sin \theta) + r_2(\cos(\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= (r_1 + r_2) \cos \theta + (r_1 - r_2)i \sin \theta \end{aligned}$$

因在複數平面上的橢圓參數式為 $z = a \cos \theta + ib \sin \theta$

即 $z_1 + z_2$ 是以 $r_1 + r_2$ 為半長軸， $r_1 - r_2$ 為半短軸的橢圓(如圖七)。



圖七

特別地，當兩同心圓半徑相同時，橢圓會退化為一線段。

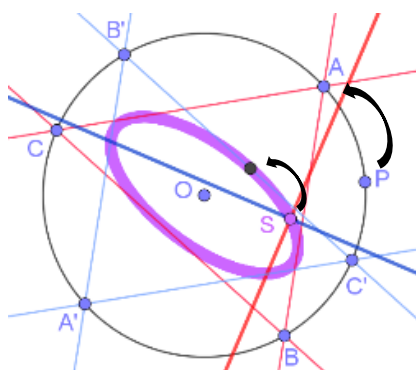
【定理九】

給定 $\triangle ABC$ 和其外接圓上一動點 P ，將 $\triangle ABC$ 對圓心旋轉 180° ，此時 P 點對此兩對徑三角形分別所作出的西姆松線之交點軌跡為一個橢圓。其橢圓方程式在複數平面中可表示為

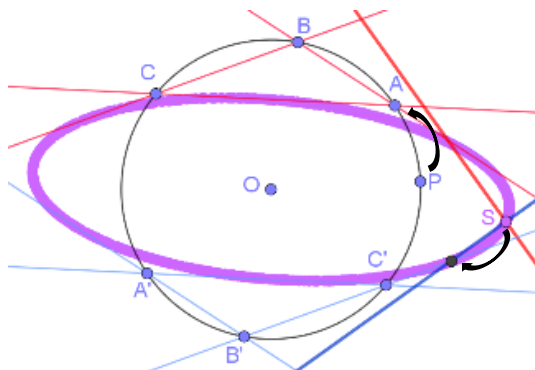
$$x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab + bc + ca)}{2p}$$

其中 a 、 b 、 c 分別為 $\triangle ABC$ 之三頂點的複數， p 為動點 P 之複數。

pf: 根據【定理七】，可知其方程式為 $x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab + bc + ac)}{2p}$ ，相當於兩圓相加，又根據【定理八】，可知交點軌跡為一橢圓。



圖八



圖九

由上面的作圖，我們猜測橢圓與兩三角形所形成之六邊形相切於六點。(當 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，橢圓軌跡與兩對徑三角形各自延長的三個邊相切)(如圖九)。

【定理十】

橢圓 $x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab+bc+ac)}{2p}$ 會和 $\triangle ABC$ 及其對徑三角形 $\triangle A'B'C'$ 的六個邊均相切，且切點為兩對徑三角形之頂點對彼此邊上的垂足，則該橢圓內切於此六邊(包含延長邊)所圍成的平行六邊形。

pf: 同定理七，兩西姆松線方程式如下：

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{(a+b+c)p^2 + p^3 + (ab+bc+ac)p - abc}{2p^2} \dots\dots ①$$

$$z + \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{-(a+b+c+p)p^2 + p^3 - (ab+bc+ac)p + abc}{2p^2} \dots\dots ②$$

$$①+② \text{ 可得 } z = \frac{p^2 - (ab+bc+ac)}{2p}$$

$$①-② \text{ 可得 } \bar{z} = \frac{-(a+b+c)p^2 + abc}{2abc p}$$

代入直線 $\overline{B'C'}$ ：

$$\begin{aligned} z + bc\bar{z} &= -b - c \\ \implies \frac{p^2 - (ab+bc+ac)}{2p} + bc \frac{-(a+b+c)p + abc\bar{p}}{2abc} &= -b - c \\ \implies \frac{p^2 - (ab+bc+ac)}{2p} + \frac{-(a+b+c)p + abc\bar{p}}{2a} &= -b - c \\ \implies a(p^2 - (ab+bc+ac) + p(-(a+b+c)p + abc\bar{p})) &= 2ap(-b-c) \\ \implies ap^2 - a^2b - a^2c - abc - ap^2 - bp^2 + abc &= -2abp - 2acp \\ \implies -a^2b - a^2c - bp^2 - cp^2 &= -2abp - 2acp \\ \implies a^2b + a^2c + bp^2 + cp^2 &= 2abp + 2acp \\ \implies (b+c)p^2 + (b+c)a^2 &= 2ap(b+c) \\ \implies p^2 - 2ap + a^2 &= 0 \\ \implies p &= a \end{aligned}$$

可得知當 $P = A$ 時橢圓會相切於直線 $B'C'$

同理，當 P 分別移動到 B, C, A', B', C' 時，橢圓會和直線 $\overline{A'C'}, \overline{A'B'}, \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$ 相切。

故得證 ■

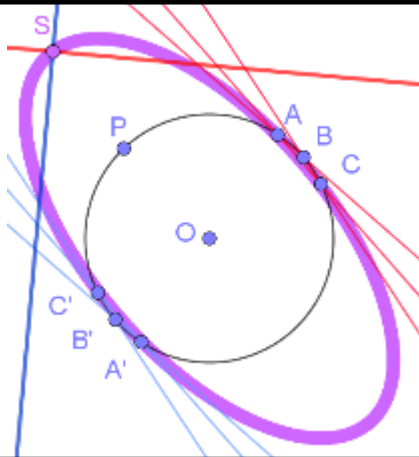
此橢圓的存在正如九點圓一樣的特別，於是我們將其命名為「六點橢圓」。

五、「六點橢圓」之性質探討

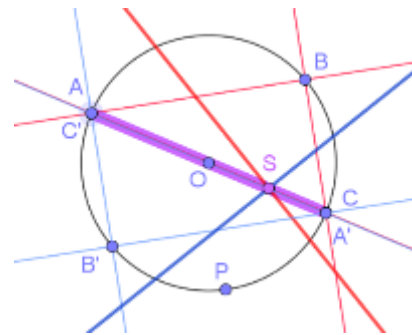
【性質十一】六點橢圓的大小

當 $\triangle ABC$ 為直角三角形時橢圓會退化成單位圓之直徑，此時的橢圓最小；而當 $\triangle ABC$ 趨近於一點時，軌跡橢圓會最大(此橢圓的半長軸為 2、半短軸為 1)。

由此可知在單位圓上橢圓的面積大小最大為 2π 最小為 0(如圖十、十一)。



圖十

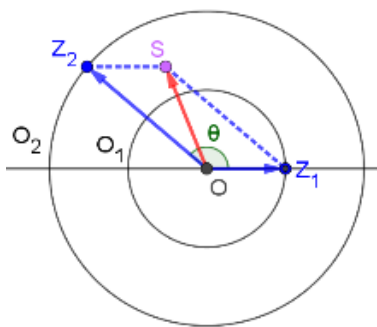


圖十一

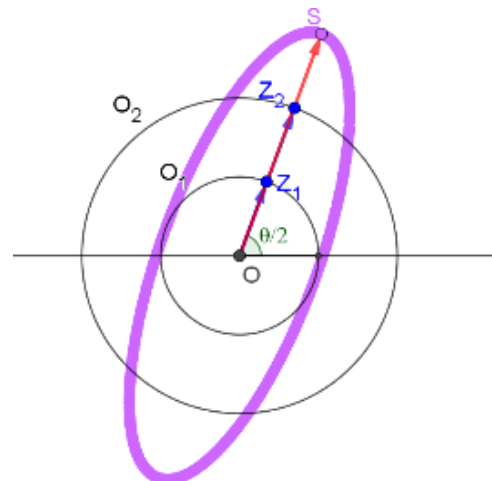
【性質十二】橢圓長軸和實軸的正向夾角

橢圓軌跡方程式 $x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$ 令 $z_1 = \frac{p}{2}$, $z_2 = \frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$ 。

設 $\frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$ 的主幅角為 θ ，當 $\theta_p = \frac{\theta}{2}$ 時， $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 方向相同，所以 Z_1, Z_2 落在長軸上，此時 S 為長軸一端點，由此可知長軸與實軸的正向夾角為 $\frac{\theta}{2}$ (如圖十二、十三)。



圖十二

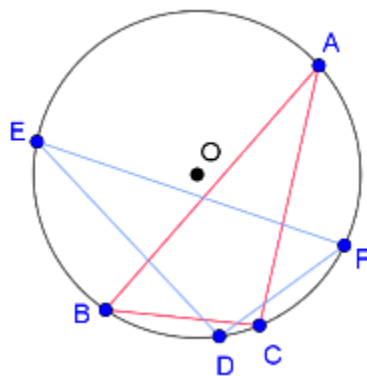


圖十三

【引理十三】

考慮單位圓上四點， $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 、 $E(bc)$ 、 $F(ca)$ 、 $D(ab)$ ，則 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 全等。

pf: 單位圓上 D 為 A 轉了 θ_b , E 為 C 轉了 θ_b , D 與 E 在單位圓上的弧度差等於 C 與 A 的弧度差, 同理可知 D 與 F 在圓上的弧度差等於 C 與 B 的弧度差, E 與 F 在圓上的弧度差等於 A 與 B 的弧度差, 由此可知 D 、 E 、 F 間的弧度差與 A 、 B 、 C 相同, 得證 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 全等(如圖十四)。



圖十四

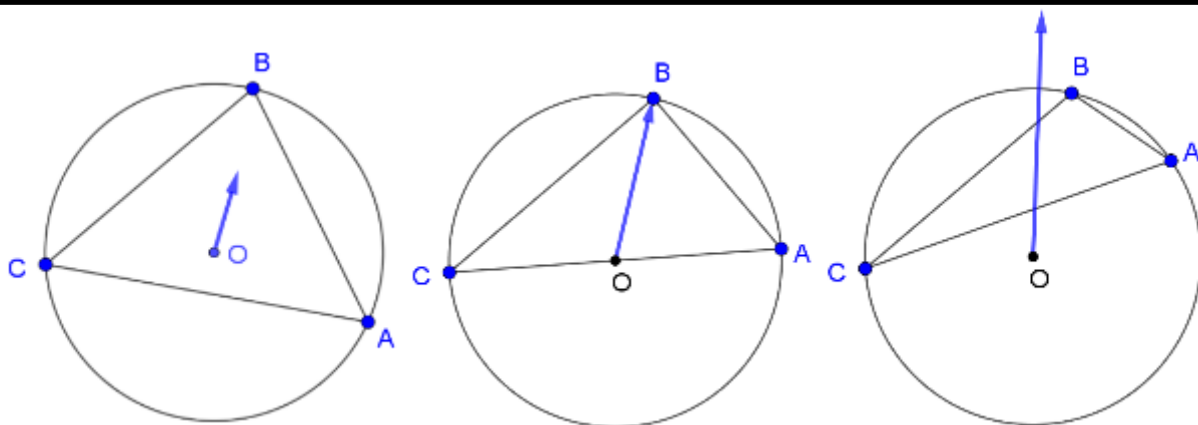
【引理十四】

考慮 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 在單位圓上,

(1)若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形, 則 $|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| < 1$;

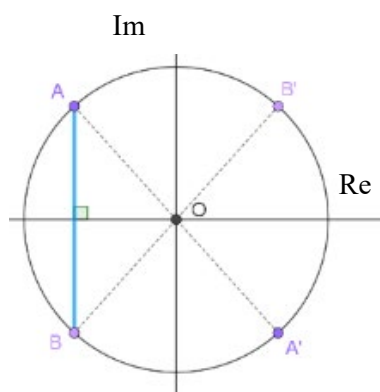
(2)若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形, 則 $|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| > 1$;

(3)若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形, 則 $|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| = 1$ 。



圖十五

pf: 若 \overline{AB} 為直徑, 顯而易見地, $|a + b + c| = 1$ 。若 \overline{AB} 不為直徑, 不失一般性, 我們將以單位圓圓心為旋轉中心, 旋轉 $\triangle ABC$ 使 \overline{AB} 垂直實軸且位於虛軸左側(如圖十六), 此時 $\theta_b = -\theta_a$ 且 $\cos \theta_a < 0$ 。



圖十六

$$\begin{aligned}
 |a + b + c| &= \sqrt{(\cos \theta_a + \cos \theta_b + \cos \theta_c)^2 + (\sin \theta_a + \sin \theta_b + \sin \theta_c)^2} \\
 &= \sqrt{(\cos \theta_a + \cos \theta_a + \cos \theta_c)^2 + (\sin \theta_a + (-\sin \theta_a) + \sin \theta_c)^2} \\
 &= \sqrt{(2 \cos \theta_a + \cos \theta_c)^2 + (\sin \theta_c)^2} \\
 &= \sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1}
 \end{aligned}$$

令 A' 、 B' 為 A 、 B 分別對原點的對稱點

當 C 位於劣弧 $\widehat{A'B'}$ 之間， $\triangle ABC$ 為銳角三角形，可知 $|\cos \theta_a| < |\cos \theta_c|$ ，

則 $\sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1} < 1$ ， $|a + b + c| < 1$

當 C 位於優弧 $\widehat{A'B'}$ 之間， $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，可知 $|\cos \theta_a| > |\cos \theta_c|$ ，

則 $\sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1} > 1$ ， $|a + b + c| > 1$

當 C 位於 A' 或 B' 上，或 \overline{AB} 為單位圓直徑時， $\triangle ABC$ 為直角三角形，

可知 $|\cos \theta_a| = |\cos \theta_c|$

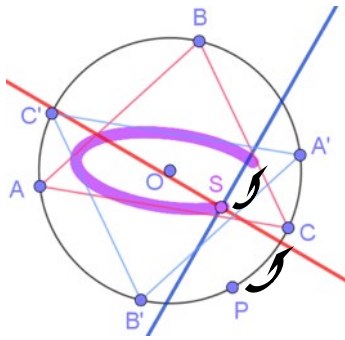
則 $\sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1} = 1$ ， $|a + b + c| = 1$ ，故得證。



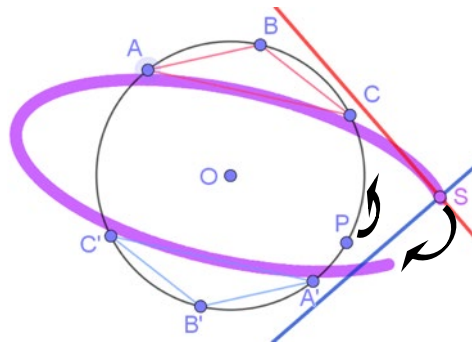
【性質十五】

當 P 沿著單位圓逆時針旋轉時，

- (1) 若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，則西姆松線交點沿著橢圓逆時針旋轉，
- (2) 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，則西姆松線交點沿著橢圓順時針旋轉，
- (3) 若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，則西姆松線交點軌跡為一線段。



圖十七



圖十八

pf: 設 Z_1 為圓 $O_1(Z = \frac{p}{2})$ 上一動點, Z_2 為圓 $O_2(Z = \frac{-(ab+bc+ac)}{2p})$ 上一動點且 Z_1 沿著順時針旋轉, Z_2 沿著 $Z = \frac{-(ab+bc+ac)}{2p}$ 逆時針旋轉時, 將兩向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 分解為垂直長軸以及平行長軸的兩分量, 平行長軸的向量兩者方向相同, 因此 $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$ 軌跡生成方向會跟隨垂直長軸的向量較大者。

根據【引理十三】 $|a+b+c| = |ab+bc+ac|$, 又根據【引理十四】, 我們得到以下結果:

若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形, $|a+b+c| < 1$, 則 $\left| \frac{ab+bc+ac}{2} \right| < \left| \frac{1}{2} \right|$,

可知 O_1 半徑較大, 則西姆松線交點沿著橢圓逆時針旋轉(如圖十八)。

若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形, $|a+b+c| > |1|$, 則 $\left| \frac{ab+bc+ac}{2} \right| > \left| \frac{1}{2} \right|$,

可知 O_2 半徑較小, 則西姆松線交點沿著橢圓順時針旋轉(如圖十九)。

若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形, $|a+b+c| = |1|$, 則 $\left| \frac{ab+bc+ac}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} \right|$,

可知兩半徑等長, 垂直長軸的向量會相互抵消, 因此西姆松線的交點軌跡為一線段。

以「圓上兩對徑動點對一三角形所作之西姆松線」和「圓上一動點對兩對徑三角形所作之西姆松線」兩種交點軌跡作發想, 改變對徑的條件和旋轉的對象, 得到了八種情況, 而有了以下定理:

【定理十六】

給定單位圓上四點 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 、 $P(p)$, y 為一複數且 $|y| = 1$ 。

(1) $P[X]$ 和其對徑點 $P'[X]$ 對 $\triangle ABC$ 所作之西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{a+b+c}{2} - \frac{abc}{2p^2x^2}$$

(2) P 和其對徑點 P' 對 $\triangle ABC[X]$ 所作之西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{(a+b+c)x}{2} - \frac{abcx^3}{2p^2}$$

(3) 將 P 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 P'' , $P[X]$ 和 $P''[X]$ 對 $\triangle ABC$ 所作之西姆松線交點軌跡

方程式為

$$z = \frac{p(y+1)x}{2} + \frac{abc}{2p^2yx^2} + \frac{(a+b+c)}{2}$$

- (4) 將 P 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 P'' ， P 和 P'' 對 $\Delta ABC[X]$ 所作之西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p(y+1)}{2} + \frac{abcx^3}{2p^2y} + \frac{(a+b+c)x}{2}$$

- (5) $P[X]$ 對 ΔABC 和其對徑三角形 $\Delta A'B'C'$ 所作之西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{px}{2} - \frac{ab+bc+ca}{2px}$$

- (6) P 對 $\Delta ABC[X]$ 和其對徑三角形 $\Delta A'B'C'[X]$ 所作之西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p}{2} - \frac{(ab+bc+ca)x^2}{2p}$$

- (7) 將 ΔABC 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 $\Delta A''B''C''$ ， $P[X]$ 對 ΔABC 和 $\Delta A''B''C''$ 所作之西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{px}{2} - \frac{(ab+bc+ca)y^2}{2px(y^2+y+1)} + \frac{(a+b+c)(y^2+y)}{2(y^2+y+1)}$$

- (8) 將 ΔABC 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 $\Delta A''B''C''$ ， P 對 $\Delta ABC[X]$ 和 $\Delta A''B''C''[X]$ 所作之西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p}{2} - \frac{(ab+bc+ca)x^2y^2}{2p(y^2+y+1)} + \frac{(a+b+c)x(y^2+y)}{2(y^2+y+1)}$$

pf : 以(3)為例，因為 P'' 為 P 對圓心旋轉 θ_y 所得，可知 $P''(yp)$ ，

由【定理五】可得點 P 對 ΔABC 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2} \dots\dots ①$$

同理，點 P'' 對 ΔABC 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{yp}\bar{z} = \frac{y^3p^3 + (a+b+c)y^2p^2 - (ab+bc+ca)yp - abc}{2y^2p^2} \dots\dots ②$$

①、②聯立解得交點的方程式為

$$z = \frac{p(y+1)}{2} + \frac{abc}{2p^2y} + \frac{(a+b+c)}{2}$$

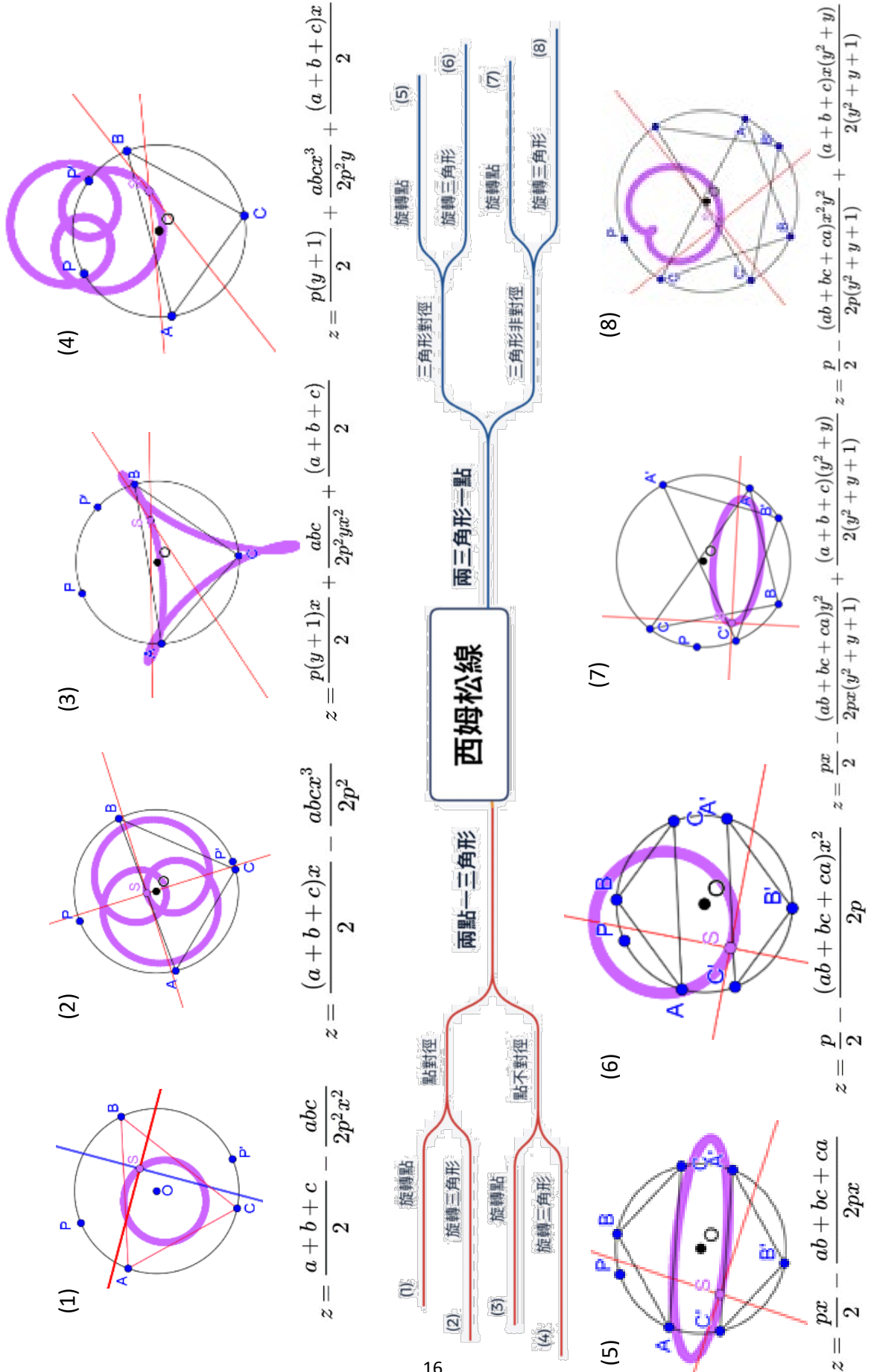
而當旋轉 P 時，乘上一複數 x ，

交點的軌跡方程式為

$$z = \frac{p(y+1)x}{2} + \frac{abc}{2p^2yx^2} + \frac{(a+b+c)}{2}$$

而其餘七種情況同理可證。

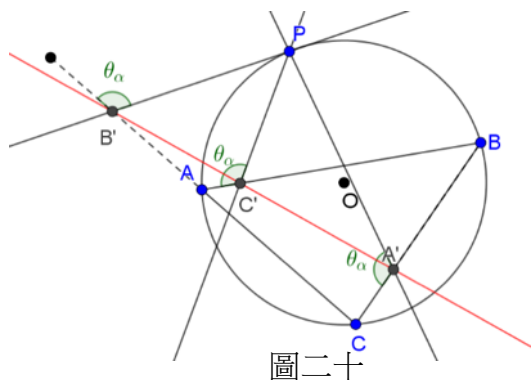
運用複平面解析的方式求出這八種交點軌跡方程式，並將其彙整成下圖十九：



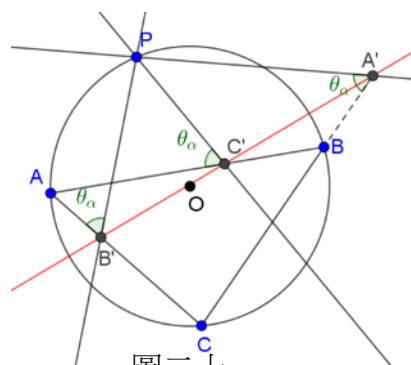
圖十九

【斜西姆松線定理】

以 $P(p)$ 向 $\triangle ABC$ 三邊 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 分別引線段 $\overline{PA'}$ 、 $\overline{PB'}$ 、 $\overline{PC'}$ 成同向等角，設此角為 θ_α ，則三交點 A' 、 B' 、 C' 共線，為了定義角度，作 $P(p)$ 對三邊的垂線，將三條垂線以 $P(p)$ 為中心逆時針旋轉 $(90^\circ - \theta_\alpha)$ ，其中 $|\alpha| = 1$ 、 $0 < \theta_\alpha < \pi$ ，得 $\overline{PA'}$ 、 $\overline{PB'}$ 、 $\overline{PC'}$ ，三直線與三邊夾角皆為 θ_α ，我們稱此線為夾角為 θ_α 的斜西姆松線。



圖二十



圖二十一

【定理十七】

給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ 和一複數 α ，且 $|\alpha| = 1$ 、 $0 < \theta_\alpha < \pi$ ， P 對 $\triangle ABC$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線方程式為

$$z + \frac{abc}{\alpha^2 p} \bar{z} = \frac{p^3 \alpha^4 - p^2 \alpha^2 (a + b + c) + p \alpha^2 (ab + bc + ca) - abc}{p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)}$$

pf: 將 $A(a)$ 、 $B(b)$ 代入直線一般式 $z - n\bar{z} = l$ 得 $a - n\bar{a} = b - n\bar{b}$

$$\implies n = \frac{b - a}{\bar{b} - \bar{a}} = \frac{b - a}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = -ab$$

將 $n = -ab$ 、 $z = a$ 代入 $z - n\bar{z} = l$ ，得 $l = a + b$

可知 $\overleftrightarrow{AB}: z + ab\bar{z} = a + b \dots\dots ①$

因 $\overleftrightarrow{PC'}$ 由平移 \overleftrightarrow{AB} 過 P 再以 P 為旋轉中心順時針旋轉 θ_α 而得，又根據【定理三】可知， $\overleftrightarrow{PC'}$ 之斜率為 $\tan\left(\frac{\theta_n}{2} - \theta_\alpha\right) = \tan\left(\frac{\theta_{-ab} - 2\theta_\alpha}{2}\right) = \tan \frac{\theta_{\frac{-ab}{\alpha^2}}}{2}$

設 $\overleftrightarrow{PC'}$ 的一般式為 $z - n'\bar{z} = l'$ ，則其中 $n' = \frac{ab}{\alpha^2}$ ，將 $z = p$ 代入直線，

$$\text{可得 } l' = p + \frac{ab\bar{p}}{\alpha^2}$$

$$\text{則 } \overleftrightarrow{PC'}: z + \frac{ab\bar{z}}{\alpha^2} = p + \frac{ab\bar{p}}{\alpha^2} \dots\dots ②$$

①、②兩式聯立解得 \overleftrightarrow{AB} 和 \overleftrightarrow{PC} 之交點 其複數 與其共軛複數 \bar{c}' :

$$c' = \frac{p\alpha^2 + \frac{ab}{p} - a - b}{\alpha^2 - 1}, \quad \bar{c}' = \frac{\alpha^2 a + \alpha^2 b - \alpha^2 p - \frac{ab}{p}}{ab(\alpha^2 - 1)}$$

同理可得 \overleftrightarrow{AC} 和 $\overleftrightarrow{PB'}$ 之交點 B' 其複數 b' 與其共軛複數 \bar{b}' :

$$b' = \frac{p\alpha^2 + \frac{ac}{p} - a - c}{\alpha^2 - 1}, \quad \bar{b}' = \frac{\alpha^2 a + \alpha^2 c - \alpha^2 p - \frac{ac}{p}}{ac(\alpha^2 - 1)}$$

設 P 對 $\triangle ABC$ 作夾角為 θ_α 的斜西姆松線之一般式為 $z - n'' \bar{z} = l''$

根據【定理二】， $n'' = \frac{B' - C''}{B' - C'} = -\frac{abc}{\alpha^2 p}$ ，

將 $n'' = -\frac{abc}{\alpha^2 p}$ 、 $z = b'$ 代入 $z - n'' \bar{z} = l''$ ，可得

$$z + \frac{abc}{\alpha^2 p} \bar{z} = \frac{p^3 \alpha^4 - p^2 \alpha^2 (a + b + c) + p \alpha^2 (ab + bc + ca) - abc}{p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)}$$

將【定理十七】中的西姆松線交點軌跡改變成夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡，

可同樣得到八種情況，並整理出以下定理：

【定理十八】

給定單位圓上四點 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 、 $P(p)$ ，兩複數 y 、 α ，其中 $|y| = |\alpha| = 1$ ， $0 < \theta_y < \pi$ ， $0 < \theta_\alpha < \pi$ ：

(1) $P[X]$ 和其對徑點 $P'[X]$ 對 $\triangle ABC$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = -\frac{a + b + c}{\alpha^2 - 1} - \frac{abc}{p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1) x^2}$$

(2) P 和其對徑點 P' 對 $\triangle ABC[X]$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = -\frac{(a + b + c)x}{\alpha^2 - 1} - \frac{abcx^3}{p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)}$$

(3) 將 P 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 P'' ， $P[X]$ 和 $P''[X]$ 對 $\triangle ABC$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p(y + 1)\alpha^2 x}{\alpha^2 - 1} - \frac{a + b + c}{\alpha^2 - 1} - \frac{abc}{p^2 y \alpha^2 (\alpha^2 - 1) x^2}$$

(4) 將 P 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 P'' ， P 和 P'' 對 $\triangle ABC[X]$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p(y + 1)\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - \frac{(a + b + c)x}{\alpha^2 - 1} - \frac{abcx^3}{p^2 y \alpha^2 (\alpha^2 - 1)}$$

(5) $P[X]$ 對 $\triangle ABC$ 和其對徑三角形 $\triangle A'B'C'$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p\alpha^2 x}{\alpha^2 - 1} + \frac{ab + bc + ca}{p(\alpha^2 - 1)x}$$

(6) P 對 $\triangle ABC[X]$ 和其對徑三角形 $\triangle A'B'C'[X]$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{(ab + bc + ca)x^2}{p(\alpha^2 - 1)}$$

(7) 將 ΔABC 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 $\Delta A''B''C''$ ， $P[X]$ 對 ΔABC 和 $\Delta A''B''C''$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p\alpha^2 x}{\alpha^2 - 1} - \frac{(a+b+c)(y^2+y)}{(\alpha^2-1)(y^2+y+1)} + \frac{(ab+bc+ca)y^2}{p(\alpha^2-1)(y^2+y+1)x}$$

(8) 將 ΔABC 以原點為旋轉中心旋轉 θ_y 得 $\Delta A''B''C''$ ， P 對 $\Delta ABC[X]$ 和 $\Delta A''B''C''[X]$ 所作之夾角為 θ_α 的斜西姆松線交點軌跡方程式為

$$z = \frac{p\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - \frac{(a+b+c)(y^2+y)x}{(\alpha^2-1)(y^2+y+1)} + \frac{(ab+bc+ca)y^2 x^2}{p(\alpha^2-1)(y^2+y+1)}$$

pf：以(3)為例，因為 P'' 為 P 對圓心旋轉 θ_y 所得，可知 $P''(yp)$ ，

由【定理十七】可得點 P 對 ΔABC 之夾角為 θ_α 的斜西姆松線一般式為

$$z + \frac{abc}{\alpha^2 p} \bar{z} = \frac{p^3 \alpha^4 - p^2 \alpha^2 (a+b+c) + p \alpha^2 (ab+bc+ca) - abc}{p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)} \dots\dots\dots ①$$

同理，點 P'' 對 ΔABC 之夾角為 θ_α 的斜西姆松線一般式為

$$z + \frac{abc}{\alpha^2 yp} \bar{z} = \frac{y^3 p^3 \alpha^4 - y^2 p^2 \alpha^2 (a+b+c) + yp \alpha^2 (ab+bc+ca) - abc}{y^2 p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)} \dots ②$$

①、②聯立解得交點的方程式為

$$z = \frac{p(y+1)\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - \frac{a+b+c}{\alpha^2 - 1} - \frac{abc}{p^2 y \alpha^2 (\alpha^2 - 1)}$$

而當旋轉 P 時，乘上一複數 x ，

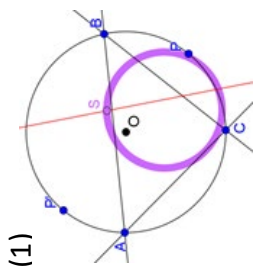
交點的軌跡方程式為

$$z = \frac{p(y+1)\alpha^2 x}{\alpha^2 - 1} - \frac{a+b+c}{\alpha^2 - 1} - \frac{abc}{p^2 y \alpha^2 (\alpha^2 - 1)x^2}$$

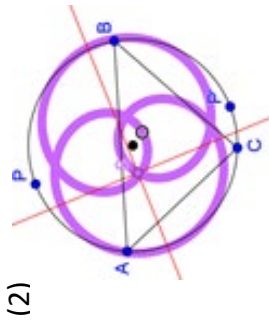
而其餘七種情況同理可證。



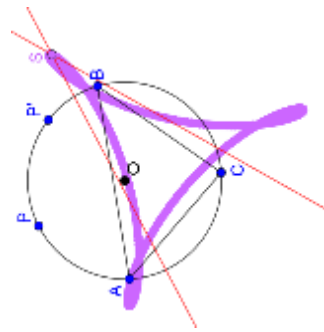
將這八種交點軌跡方程式彙整成下圖二十二：



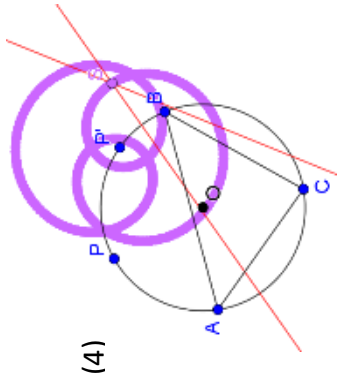
(1)



(2)

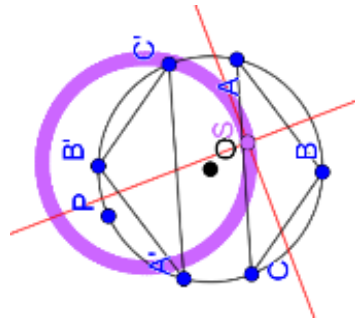


(3)

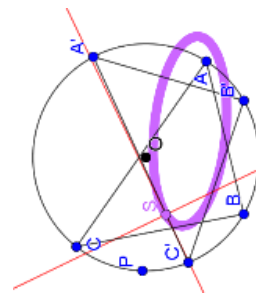


(4)

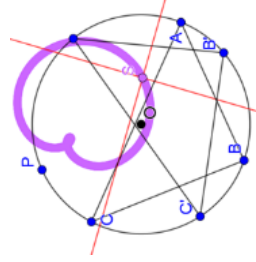
$$z = \frac{a+b+c}{\alpha^2(\alpha^2-1)} - \frac{abc}{\alpha^2(\alpha^2-1)p^2x^2} \quad z = \frac{(a+b+c)x}{\alpha^2(\alpha^2-1)} - \frac{abcx^3}{\alpha^2(\alpha^2-1)p^2}$$



$$z = \frac{p}{\alpha^2(\alpha^2-1)} - \frac{(ab+bc+ca)x^2}{\alpha^2(\alpha^2-1)p}$$



$$z = \frac{p}{\alpha^2(\alpha^2-1)} - \frac{(ab+bc+ca)x^2y^2}{\alpha^2(\alpha^2-1)p(y^2+y+1)} + \frac{(a+b+c)x(y^2+y)}{\alpha^2(\alpha^2-1)(y^2+y+1)}$$



$$z = \frac{px}{\alpha^2(\alpha^2-1)} - \frac{(ab+bc+ca)y^2}{\alpha^2(\alpha^2-1)px(y^2+y+1)} + \frac{(a+b+c)(y^2+y)}{\alpha^2(\alpha^2-1)(y^2+y+1)}$$

參、研究結果與討論

一、研究結果

1. 運用複數平面解析推出西姆松線方程式，如【定理五】，給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，則 P 點對 $\triangle ABC$ 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p} \bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2}$$

2. 如【定理十】，給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，則 P 點對 $\triangle ABC$ 和其對徑三角形分別作西姆松線，兩線交點方程式為 $z = \frac{1}{2} \left[p + \frac{-(ab+bc+ca)}{p} \right]$ ，當旋轉 P 點時，此點的軌跡為橢圓，且此橢圓和兩三角形的延長邊所圍成的六邊形相切，稱為六點橢圓。

3. 提出八種特殊條件下的西姆松線交點軌跡，如【定理十六】，也發現以上八種的西姆松線交點軌跡方程式皆為兩圓上的動點相加，並整理出圖十九。

4. 如【定理十七】，給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ 和一複數 α ，其中 $|\alpha| = 1$ 、 $0 < \theta_\alpha < \pi$ ， P 對 $\triangle ABC$ 所做之夾角為 θ_α 的斜西姆松線方程式為

$$z + \frac{abc}{\alpha^2 p} \bar{z} = \frac{p^3 \alpha^4 - p^2 \alpha^2 (a+b+c) + p \alpha^2 (ab+bc+ca) - abc}{p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)}$$

5. 提出八種條件下斜西姆松線之交點軌跡，如【定理十八】，也發現以上八種的斜西姆松線交點軌跡方程式亦為兩圓上的動點相加，並整理出圖二十二。

二、討論

在上述的研究成果中我們求得在各種情形下西姆松線之交點軌跡方程式，這些交點軌跡皆為一圓加一點或兩同心圓的相加，我們觀察圖形後發現這些圖形似乎都可以對應到某一種特定的擺線，我們想要論證此事，而有了以下的討論：

1. 內擺線、內次擺線與兩同心圓相加的對應

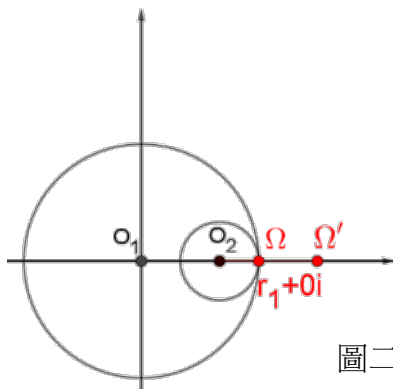
給定一半徑為 r_1 的大圓，以及一半徑為 r_2 且沿著的大圓內滾動的小圓，小圓上一點 Ω 的軌跡為內擺線。不失一般性，假設大圓圓心 O_1 為原點，小圓的圓心為 O_2 ，如圖二十三， Ω 從 $r_1 + 0i$ 開始轉動。

由圖二十四可知，當 O_2 相對原點轉了 θ 、 Ω 相對 O_2 轉了 $-\phi$ 時，因為路徑長相等，我們可以知道圖二十四中的藍色弧長 ($r_1 \theta$) 等同綠色弧長 ($r_2(\theta + \phi)$)，可得等式

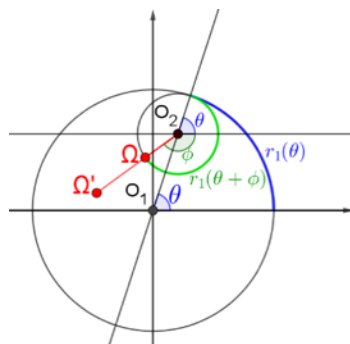
$$r_1 \theta = r_2(\theta + \phi) \implies \phi = \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right) \theta。$$

$$\text{並且由 } \overline{O_1 \Omega} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 \Omega} = (r_1 - r_2)(\cos \theta, \sin \theta) + r_2 \left(\cos \left(-\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) \theta, \sin \left(-\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) \theta \right)，$$

可得知 Ω 可以極式表示為 $\Omega = (r_1 - r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) + r_2 \left(\cos \left(-\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) \theta + i \sin \left(-\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) \theta \right)。$



圖二十三



圖二十四

由極式可知， Ω 可視為兩同心圓上的動點相加，其中一點繞半徑為 $(r_1 - r_2)$ 的圓旋轉，另一點繞半徑為 r_2 的圓旋轉，兩點的角速度比為 $1 : -\frac{r_1}{r_2} + 1$ ，將 Ω 以 O_2 為縮放中心縮放 k 倍 ($k > 0$) 得 Ω' ， Ω' 的軌跡為內次擺線。

將 Ω' 以極式表示 $\Omega' = (r_1 - r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) + kr_2(\cos(-\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta + i \sin(-\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta)$ ，

可知道 Ω' 可以視為兩同心圓上的動點相加而成，其中一點繞半徑為 $(r_1 - r_2)$ 的圓旋轉，另一點繞半徑為 kr_2 的圓旋轉，兩點的角速度比為 $1 : -\frac{r_1}{r_2} + 1$ 。

2. 外擺線、外次擺線與兩同心圓相加的對應

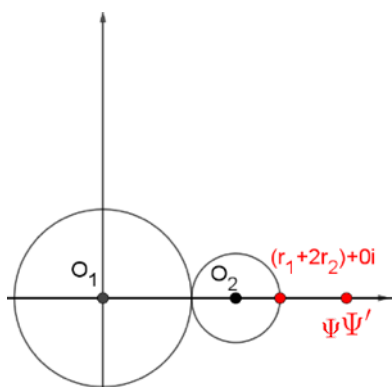
給定一半徑為 r_1 的定圓，以及一半徑為 r_2 且沿著的定圓外滾動的動圓，動圓上一點 Ψ 的軌跡為外擺線。不失一般性，假設定圓圓心 O_1 為原點，動圓的圓心為 O_2 ，看到圖二十五， Ψ 從 $(r_1 + 2r_2) + 0i$ 開始轉動。

由圖二十六可知，當 O_2 相對原點轉了 θ 、 Ψ 相對 O_2 轉了 $-\phi$ 時，因為路徑長相等，我們可以知道圖二十六中的藍色弧長()等同綠色弧長()，可得等式

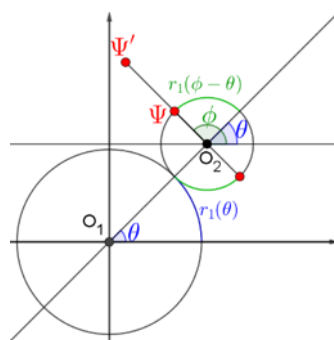
$$r_1\theta = r_2(\phi - \theta) \implies \phi = (\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta。$$

並且由 $\overline{O_1\Psi} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2\Psi} = (r_1 + r_2)(\cos \theta, \sin \theta) + r_2(\cos(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta, \sin(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta)$ ，

可得知 Ψ 可以極式表示為 $\Psi = (r_1 + r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) + r_2(\cos(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta + i \sin(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta)$ 。



圖二十五



圖二十六

由極式可知， Ψ 可以視為兩同心圓上的動點相加，其中一點繞半徑為 $(r_1 + r_2)$ 的圓旋轉，另一點繞半徑為 r_2 的圓旋轉，兩點的角速度比為 $1 : \frac{r_1}{r_2} + 1$ 。將 Ψ 以 O_2 為縮放中心縮放 k 倍 ($k > 0$) 得 Ψ' ， Ψ' 的軌跡為外次擺線。

將 Ψ' 以極式表示 $\Psi' = (r_1 + r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) + kr_2(\cos(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta + i \sin(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta)$ ，

可知道 Ψ' 可以視為兩同心圓上的動點相加而成，其中一點繞半徑為 $(r_1 + r_2)$ 的圓旋轉，另一點繞半徑為 kr_2 的圓旋轉，兩點的角速度比為 $1 : \frac{r_1}{r_2} + 1$ 。

3. 兩同心圓上反向旋轉的動點相加與內次擺線的對應

不失一般性給定一半徑為 R_1 的圓，以及一半徑為 R_2 的圓，兩圓上各有一動點，設兩動點的角速度比為 $1 : V$ ($V \leq -1$) 將兩同心圓上的動點相加得點 Υ ，可將 Υ 以極式表示為

$$\Upsilon = R_1(\cos \theta + i \sin \theta) + R_2(\cos V\theta + i \sin V\theta)$$

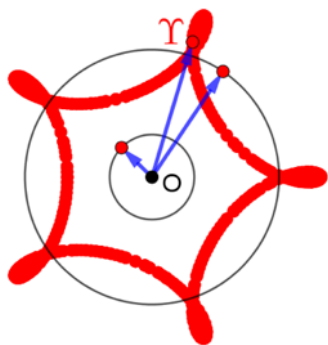
已知內次擺線上的點可以極式表示為 $\Omega' = (r_1 - r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) + kr_2(\cos(-\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta + i \sin(-\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta)$

將其視為兩同心圓的相加，由此可得以下三式：

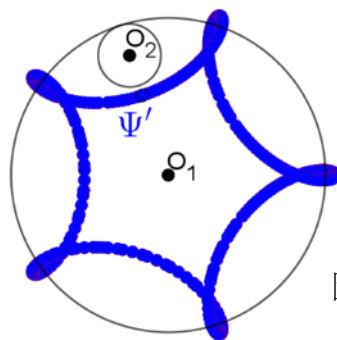
$$R_1 = r_1 - r_2, \quad R_2 = kr_2, \quad V = -\frac{r_1}{r_2} + 1$$

由三式聯立可得， $r_1 = \frac{R_1(V-1)}{V}$ ， $r_2 = -\frac{R_1}{V}$ ， $k = -\frac{R_2}{R_1}V$ ，可以推算所對應的內次擺線，也就是會和一半徑為 $\frac{R_1(V-1)}{V}$ 的大圓，以及一半徑為 $-\frac{R_1}{V}$ 且沿著的大圓內滾動的小圓，小圓上一點縮放 $-\frac{R_2}{R_1}V$ 倍所得的內次擺線圖形相同。

舉例來說，給定半徑分別為 $R_1 = 3, R_2 = 1$ 的兩同心圓，兩同心圓上各有一動點且兩動點繞圓心旋轉的角速度比為 $1 : (-4)$ ，將兩同心圓上動點相加得一軌跡(如圖二十七)，根據上述之算式可得知兩同心圓的相加所對應到的內次擺線，也就是會和一半徑為 **3.75** 的大圓，以及一半徑為 **0.75** 且沿著的大圓內滾動的小圓，小圓上的一點 Ω 以小圓圓心 O_2 為縮放中心縮放 $\frac{4}{3}$ 倍所得的內次擺線圖形相同(如圖二十八)。



圖二十七



圖二十八

4. 兩同心圓上同向旋轉的動點相加與外次擺線的對應

不失一般性給定一半徑為 R_1 的圓，以及一半徑為 R_2 的圓，兩圓上各有一動點，設兩動點的角速度比為 $1 : V$ ($V \geq 1$)，將兩同心圓上的動點相加得點 Υ ，可將 Υ 以極式表示為

$$\Upsilon = R_1(\cos \theta + i \sin \theta) + R_2(\cos V\theta + i \sin V\theta)$$

已知外次擺線上的點可以以極式表示為：

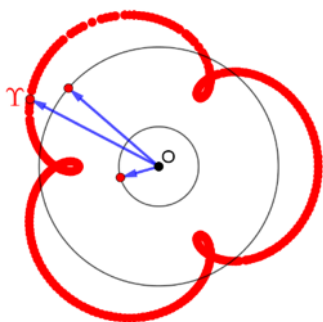
$$\Psi' = (r_1 + r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) + kr_2(\cos(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta + i \sin(\frac{r_1}{r_2} + 1)\theta)$$

將其視為兩同心圓的相加，由此可得以下三式

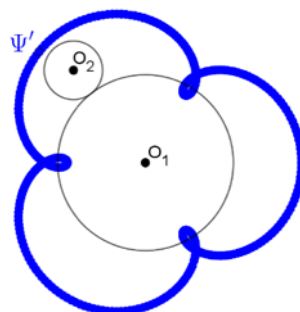
$$R_1 = r_1 + r_2, \quad R_2 = kr_2, \quad V = \frac{r_1}{r_2} + 1$$

由三式聯立可得， $r_1 = \frac{R_1(V-1)}{V}$, $r_2 = \frac{R_1}{V}$, $k = \frac{R_2}{R_1}V$ ，可以推算所對應的外次擺線，也就是會和一半徑為 $\frac{R_1(V-1)}{V}$ 的定圓，以及一半徑為 $\frac{R_1}{V}$ 且沿著的定圓外滾動的動圓，動圓上的一點 Ψ 以動圓圓心 O_2 為縮放中心縮放 $\frac{R_2}{R_1}V$ 倍所得的外次擺線圖形相同。

舉例來說，給定半徑分別為 $R_1 = 3, R_2 = 1$ 的兩同心圓，兩同心圓上各有一動點且兩動點繞圓心旋轉的角速度比為 $1 : 4$ ，將兩同心圓上動點相加得一軌跡(如圖二十九)，根據上述之算式可得知兩同心圓的相加所對應到的外次擺線，也就是會和一半徑為 **2.25** 的定圓，以及一半徑為 **0.75** 且沿著的定圓外滾動的動圓，動圓上的一點 Ψ 以動圓圓心 O_2 為縮放中心縮放 $\frac{4}{3}$ 倍所得的外次擺線圖形相同(如圖三十)。



圖二十九



圖三十

5. 西姆松、斜西姆松線之交點軌跡為線性變換關係

根據【定理十六】和【定理十八】，可由交點軌跡方程式看出，在相同條件下一般西姆松線和斜西姆松線之交點軌跡為縮放、旋轉、平移的關係，我們以【定理十六】(3) 和【定理十八】(3) 為例，將兩軌跡方程式視作兩同心圓相加並比較，如下表：

	定理十六 (3)	定理十八 (3)
方程式	$\frac{p(y+1)x}{2} + \frac{abc}{2p^2yx^2} + \frac{a+b+c}{2}$	$\frac{2}{(\alpha^2-1)} \left[\frac{p(y+1)\alpha^2x}{2} + \frac{-abc}{2\alpha^2p^2yx^2} - \frac{a+b+c}{2} \right]$
R_1	$\frac{ y+1 }{2}$	$\frac{2}{ \alpha^2-1 } \cdot \frac{ y+1 }{2}$
R_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{ \alpha^2-1 } \cdot \frac{1}{2}$
V	-2	-2
軌跡圖		

表一

方程式中，紅色部分可視為兩紅圓上的點角度相差 $2\theta_\alpha$ ，綠色部分可視為兩綠圓上的點角度相差 $\pi - 2\theta_\alpha$ ，因為圓上的點轉的角速度比均相同，所以相加後的圖形可看作是旋轉，而黃色部分為平移，最後乘上 $\frac{2}{\alpha^2-1}$ 可看作伸縮加旋轉。因此，斜西姆松線之交點軌跡為西姆松線交點軌跡作線性變換後的結果。

肆、結論與未來展望

在眾多有關西姆松線的研究當中，大部分都是使用幾何方法來做證明，因為在實數平面上的西姆松線方程式相當地複雜。在某些有關旋轉的問題時，複平面解析會比實平面來的簡潔，展現數學上化繁為簡的美。在過去複數解析的應用較不常見，我們希望能藉著這次科展的機會讓大家更了解複數解析的美。

我們利用所得到的西姆松線方程式來探討，外接圓上一點對兩對徑三角形分別作西姆松線，當旋轉點時，兩條西姆松線的交點軌跡竟會是一橢圓，此外，我們發現此橢圓必定會和兩對徑三角形的六邊相切，我們稱之為「六點橢圓」。接著我們改變其對徑條件和旋轉條件，提出 8 種西姆松線交點軌跡和 8 種斜西姆松線交點軌跡，從交點軌跡方程式可看出，同樣條件下的西姆松線和斜西姆松線交點軌跡為相似圖形，並發現若交點軌跡方程式為兩圓上的動

點相加，其軌跡皆為圓次擺線。

我們後來也在文獻中發現 DAO 在 2014 發表了廣義西姆松定理[2]，在未來我們也將以複數解析的方式繼續來探究廣義西姆松線的各项性質。

伍、參考文獻資料

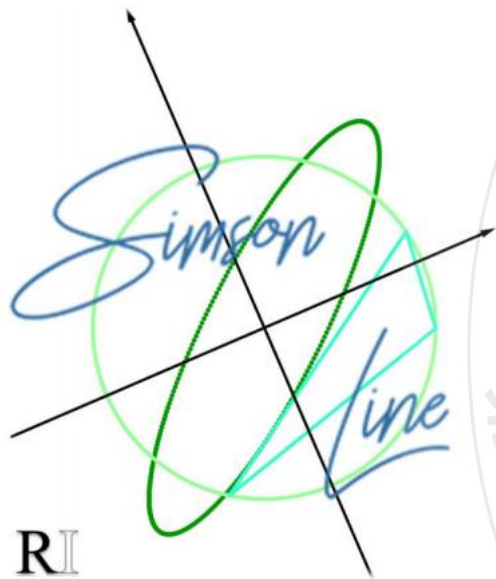
[1] Todor Zaharinov, Forum Geometricorum, Volume 17 (2017), p373 – p381

[2] DAO THANH OAI, IJCDM, Volume 4, 2019, pp.13-17

【評語】 050408

作者利用複數平面進行幾何的研究，探討西姆松線之交點軌跡的性質，整體探究的出發點和手法雖然都是熟知的，過去也有一些參展作品研究相關的題材，但在本次作品中有引進一些新的想法，透過動點移動速度的不同產生擺線，並且進而得到一些分類的結果，數學方面具有相當深度，是一個堅實的作品。

作品簡報



複數平面解析應用 西姆松線之交點軌跡性質探討



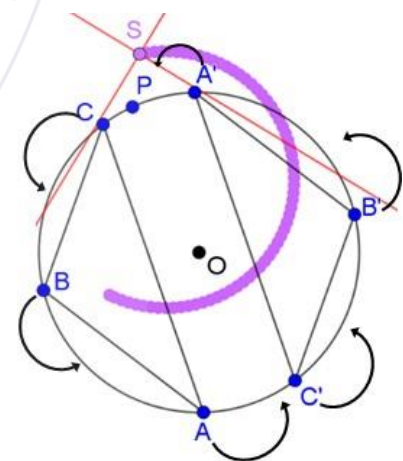
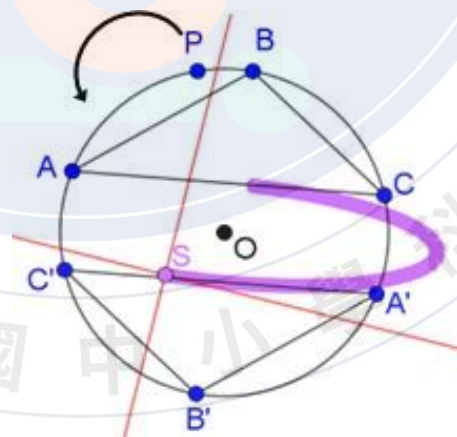
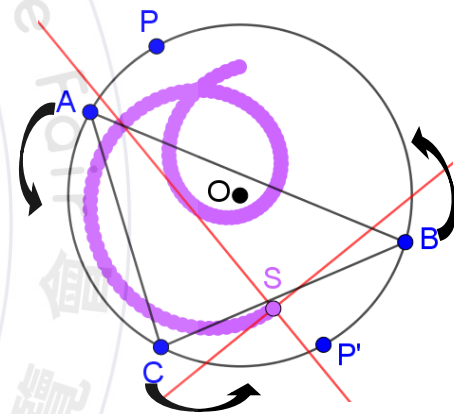
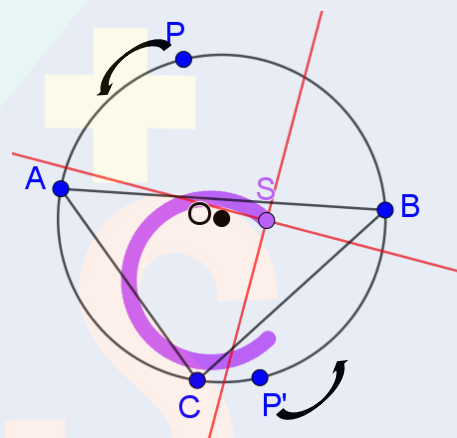
前言

西姆松定理

平面上對任意一三角形，取其外接圓上一點，該點對三角形三邊所作之垂足會共線。

研究問題

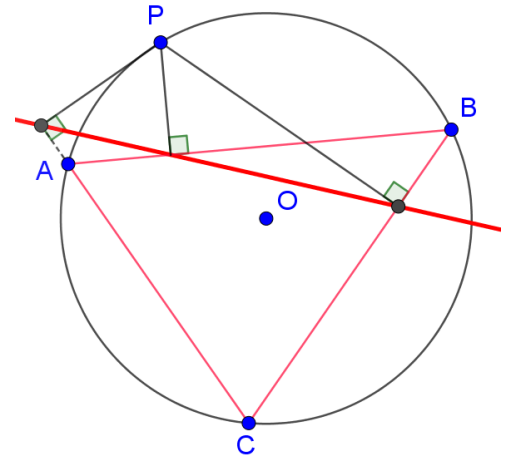
- 探討 **兩點與一三角形**，旋轉點或三角形的兩西姆松線交點軌跡為何？
- 探討 **一點與兩三角形**，旋轉點或三角形的兩西姆松線交點軌跡為何？



複數平面上的直線

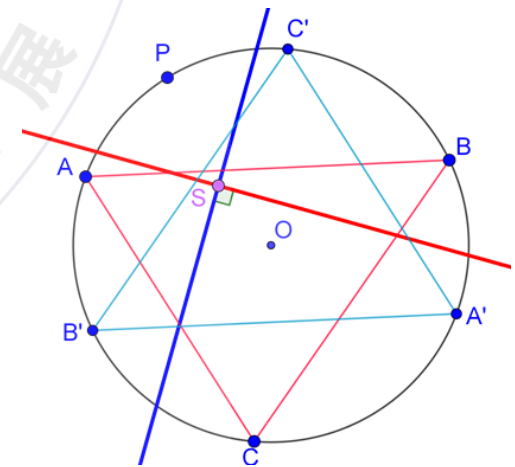
- 最簡一般式 $z - n\bar{z} = l$, $n \in \mathbb{C}$ 、 $|n| = 1$ 直線方程式的斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$
- 互相垂直的兩直線方程式, n 相差一個負號
- 單位圓上 $ABCP$, 以 P 對 $\triangle ABC$ 之西姆松線方程式

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2}$$



一動點對兩對徑三角形作西姆松線交點軌跡

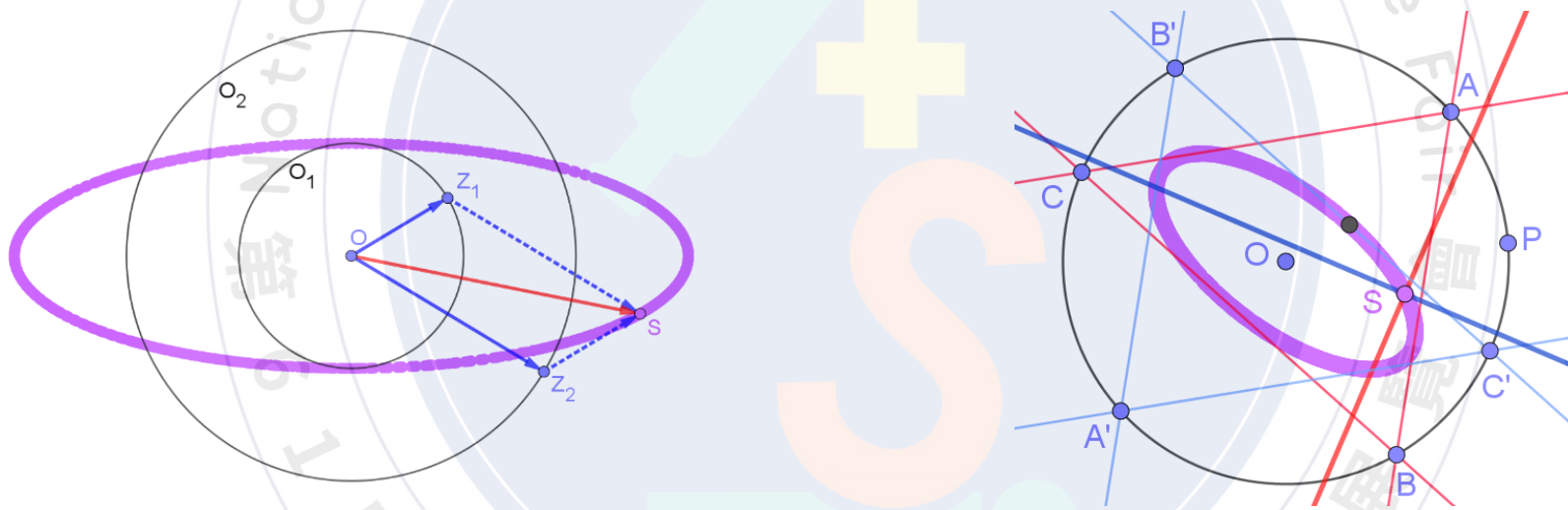
$$\begin{cases} z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2} \\ z + \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 - (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p + abc}{2p^2} \end{cases} \quad z = \frac{p}{2} + \frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$$



六點橢圓

兩同心圓上的動點 z_1 、 z_2 以相同的速率反向轉動時，相加後可得：

$$z_1 + z_2 = r_1(\cos \theta + i \sin \theta) + r_2(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = (r_1 + r_2) \cos \theta + (r_1 - r_2)i \sin \theta$$

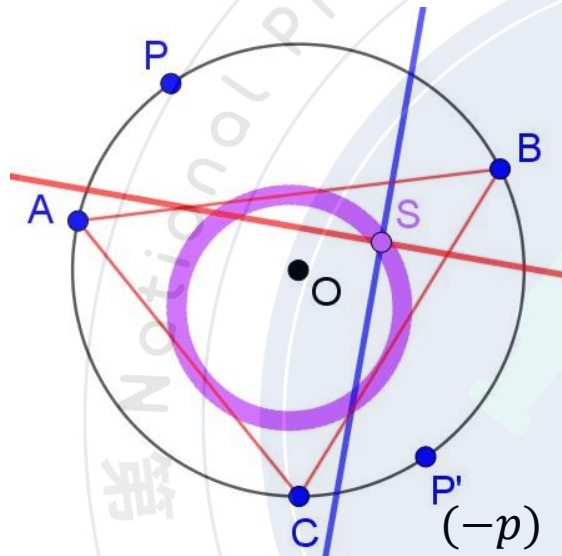


改變條件：

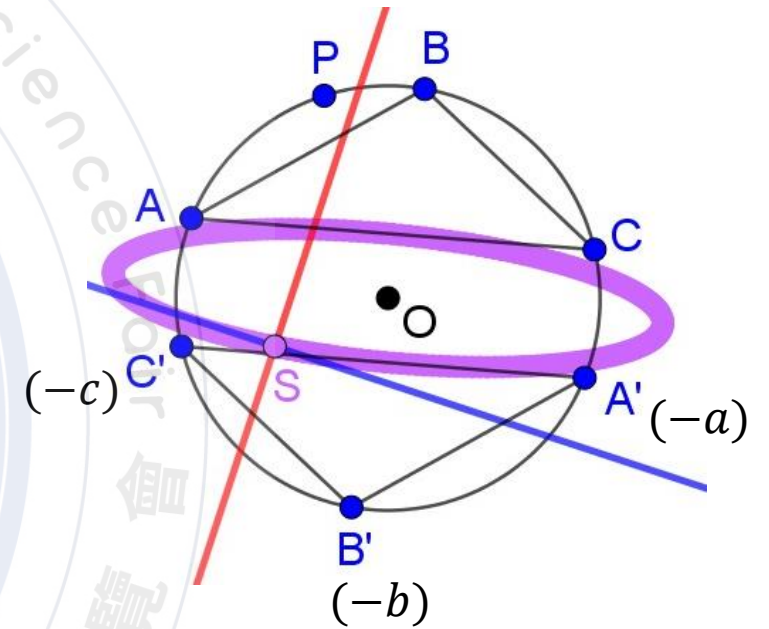
1. 兩點一三角形 \longleftrightarrow 一點兩三角形
2. 對徑 \longleftrightarrow 非對徑
3. 旋轉點 \longleftrightarrow 旋轉三角形

兩點一三角形與一點兩三角形的交點軌跡比較

兩點一三角形
對徑
旋轉點



一點兩三角形
對徑
旋轉點

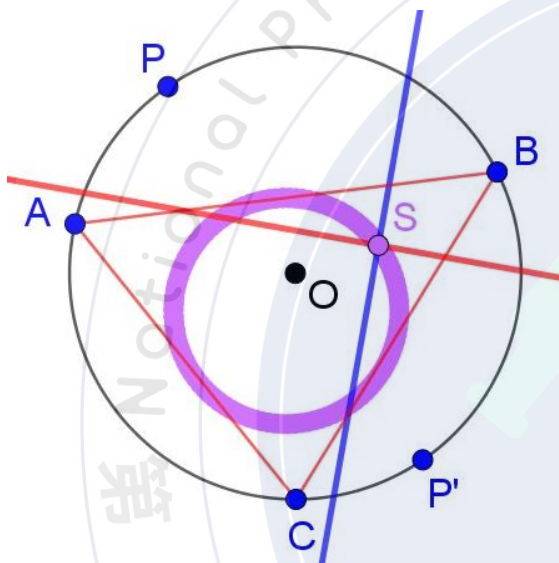


$$z = \frac{a + b + c}{2} + \frac{-abc}{2p^2 x^2}$$

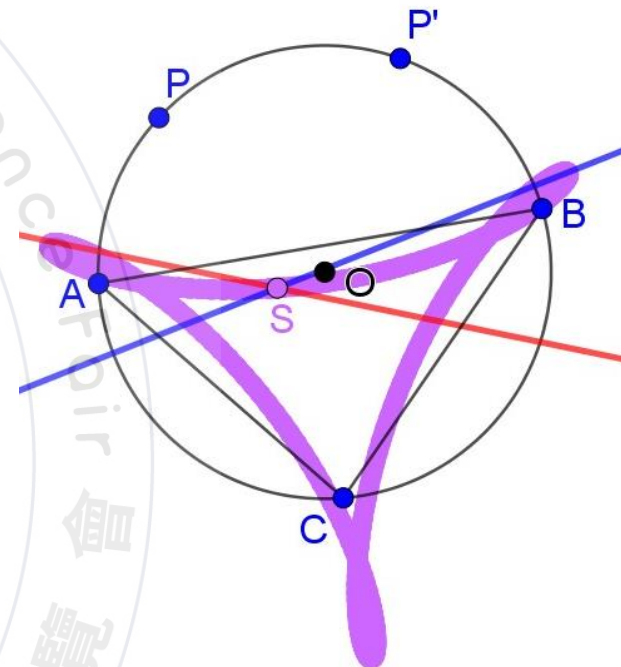
$$z = \frac{px}{2} + \frac{-(ab + bc + ca)}{2px}$$

對徑與非對徑的交點軌跡比較

兩點一三角形
對徑
旋轉點



兩點一三角形
非對徑
旋轉點



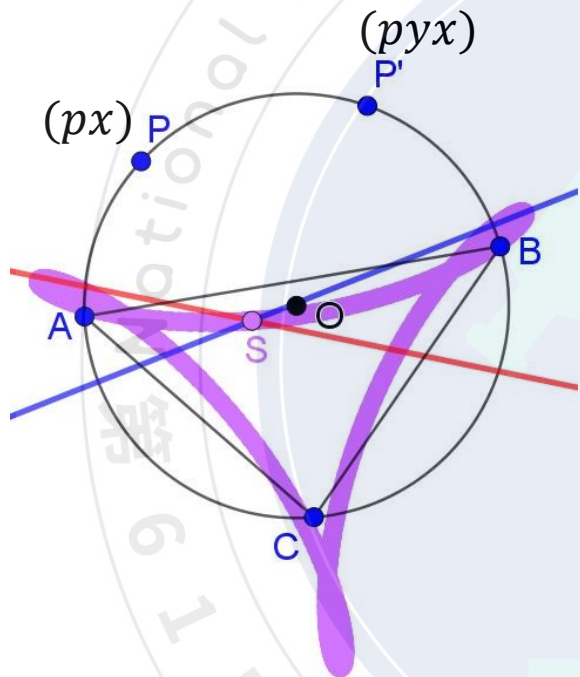
$$z = \frac{a + b + c}{2} + \frac{-abc}{2p^2x^2}$$

$$z = \frac{a + b + c}{2} + \frac{abc}{2p^2x^2} \times \frac{1}{y} + \frac{px}{2} \times (y + 1)$$

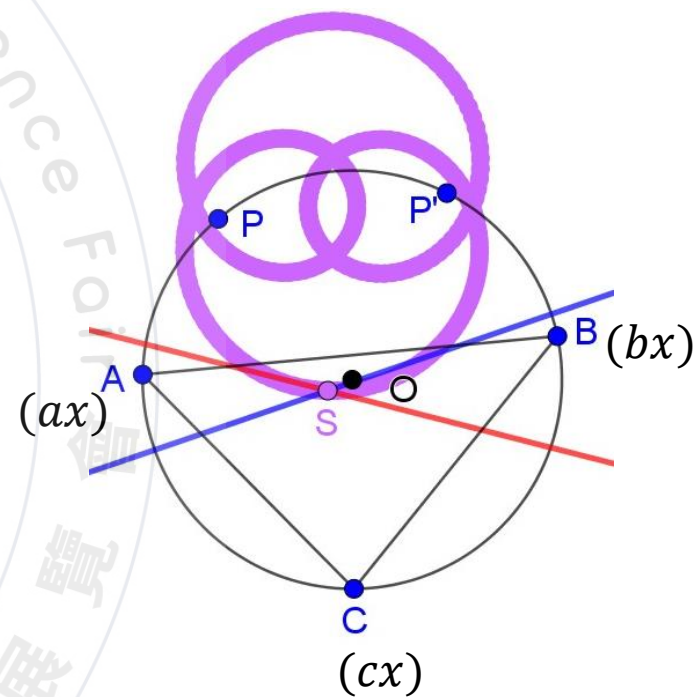
旋轉點與旋轉三角形的交點軌跡比較

交點方程式：
$$z = \frac{p(y+1)}{2} + \frac{abc}{2p^2y} + \frac{a+b+c}{2}$$

兩點一三角形
非對徑
旋轉點



兩點一三角形
非對徑
旋轉三角形



$$z = \frac{a+b+c}{2} + \frac{abc}{2p^2x^2y} + \frac{px(y+1)}{2}$$

$$z = \frac{(a+b+c)x}{2} + \frac{abcx^3}{2p^2y} + \frac{p(y+1)}{2}$$

兩同心圓的相加對應內外擺線

(1) 兩同心圓相加對應內次擺線 ($V \leq -1$)

$$R_1 = r_1 - r_2$$

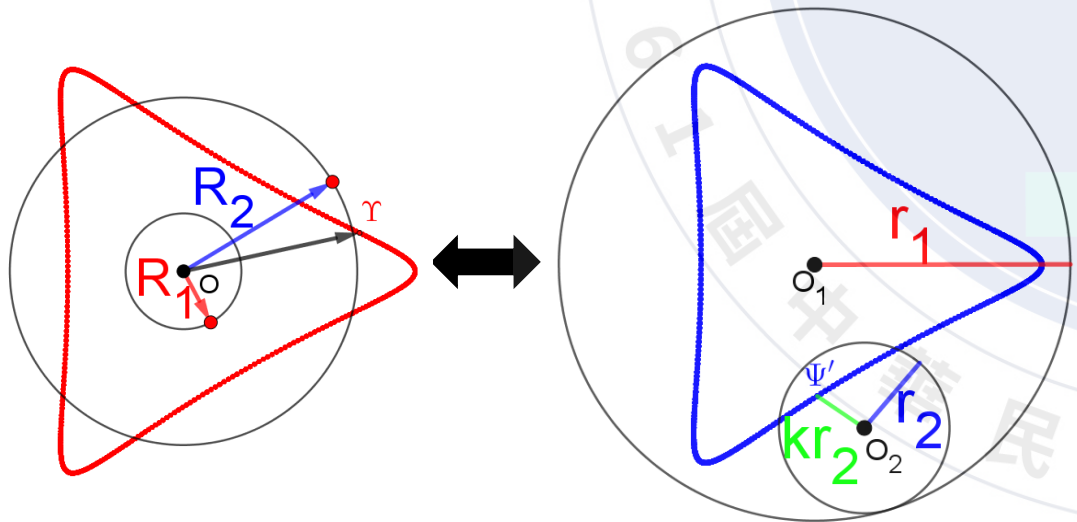
$$R_2 = kr_2$$

$$V = \frac{-r_1}{r_2} + 1$$

$$r_1 = \frac{R_1(V-1)}{V}$$

$$r_2 = -\frac{R_1}{V}$$

$$k = -\frac{R_2}{R_1}V$$



(2) 兩同心圓相加對應外次擺線 ($V \geq 1$)

$$R_1 = r_1 + r_2$$

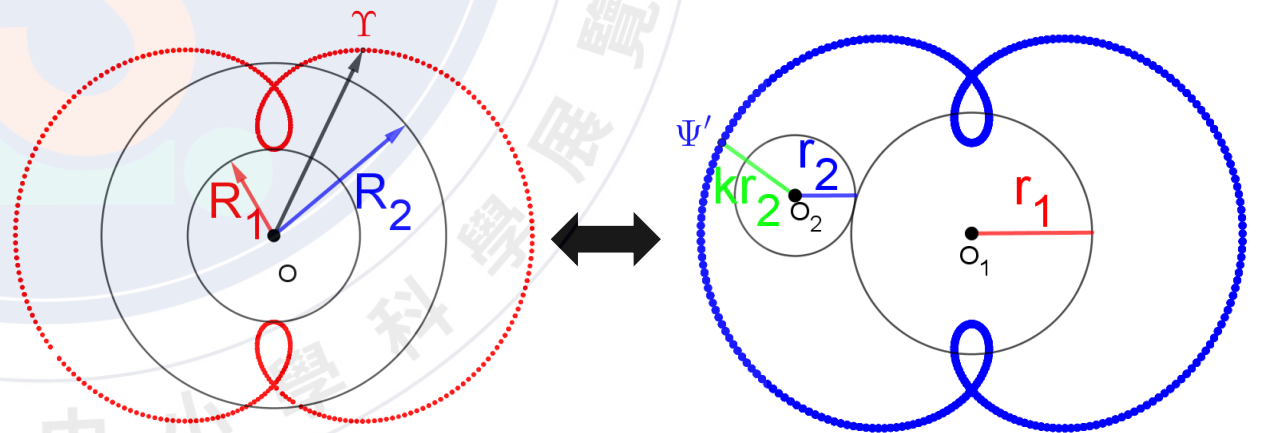
$$R_2 = kr_2$$

$$V = \frac{r_1}{r_2} + 1$$

$$r_1 = \frac{R_1(V-1)}{V}$$

$$r_2 = \frac{R_1}{V}$$

$$k = \frac{R_2}{R_1}V$$



對應的例子

一點兩三角形
非對徑
旋轉三角形

$$\theta_a = 60^\circ$$

$$\theta_b = 270^\circ$$

$$\theta_c = 300^\circ$$

$$\theta_p = 0^\circ$$

$$\theta_y = 90^\circ$$

$$R_1 = 1$$

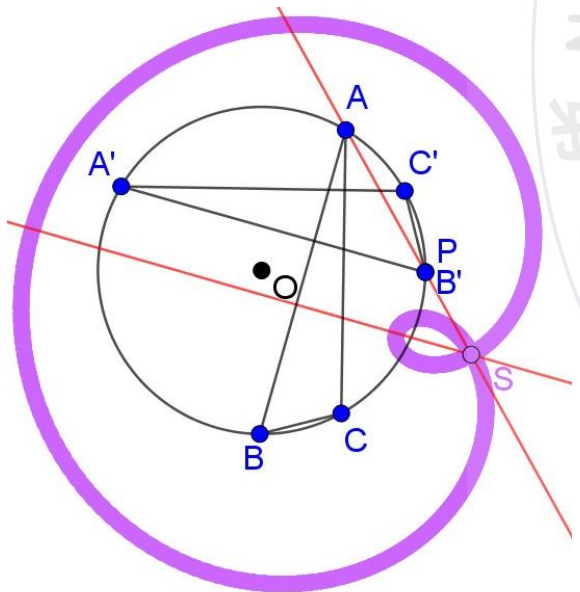
$$R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = 2$$

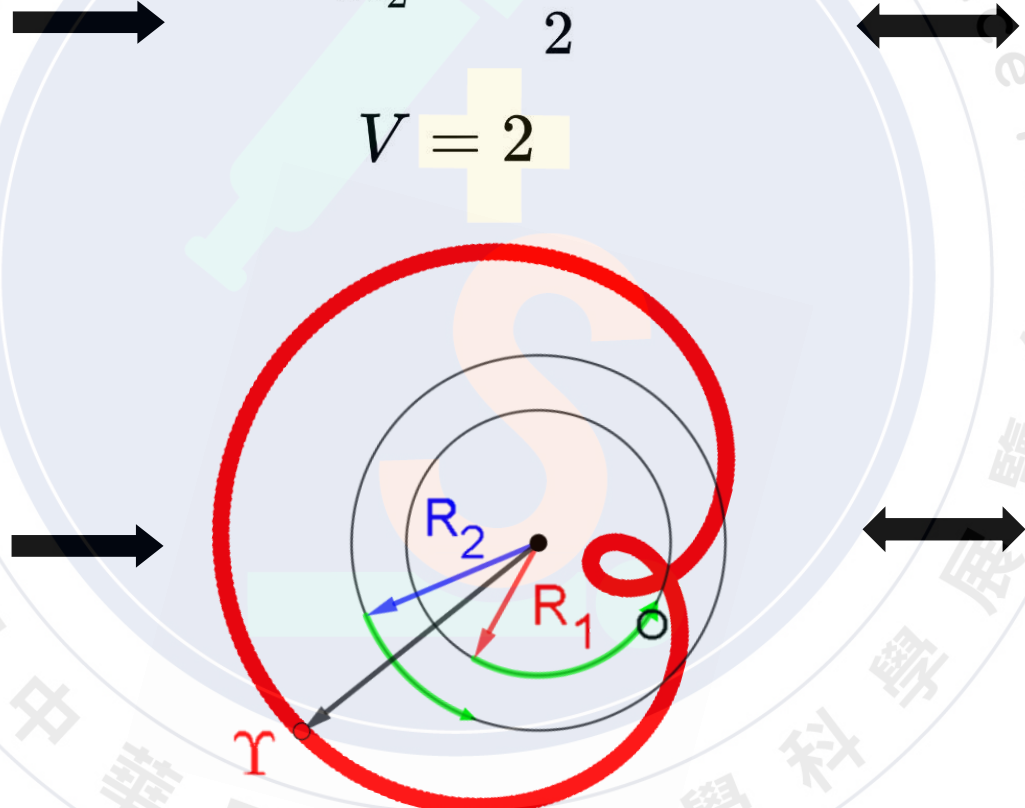
$$r_1 = \frac{1}{2}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}$$

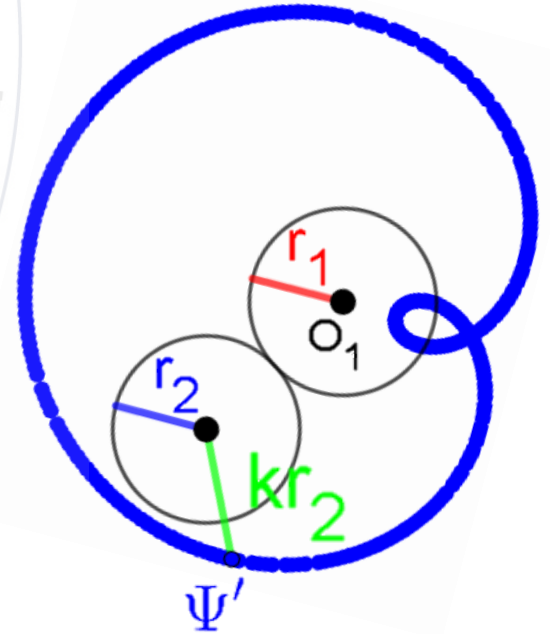
$$k = \sqrt{2}$$



西姆松線交點軌跡



兩同心圓上動點相加



外次擺線

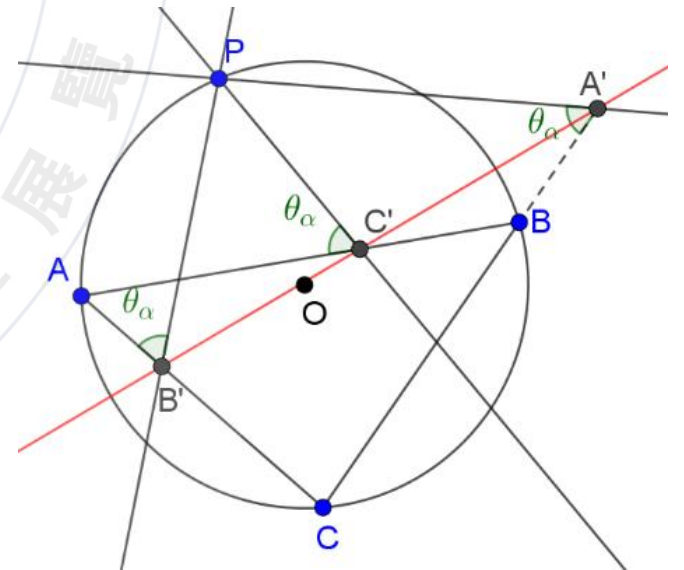
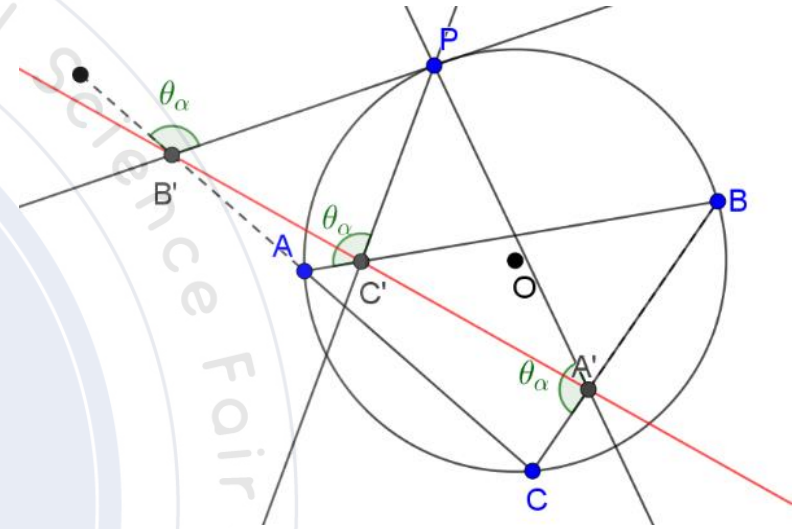
斜西姆松線方程式

斜西姆松定理

以 $P(p)$ 向 $\triangle ABC$ 三邊 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 分別引線段 $\overline{PA'}$ 、 $\overline{PB'}$ 、 $\overline{PC'}$ 成同向等角，設此角為 θ_α ，則三交點 A' 、 B' 、 C' 共線，我們稱此現為夾角為 θ_α 的斜西姆松線。

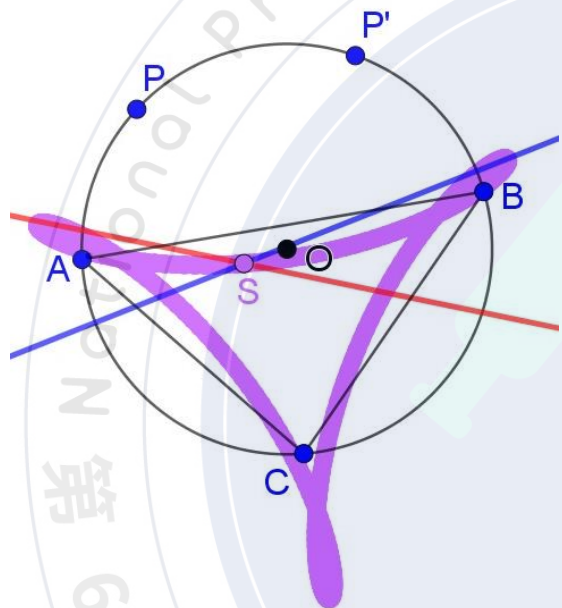
斜西姆松方程式

$$z + \frac{abc}{\alpha^2 p} \bar{z} = \frac{p^3 \alpha^4 - p^2 \alpha^2 (a + b + c) + p \alpha^2 (ab + bc + ca) - abc}{p^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)}$$

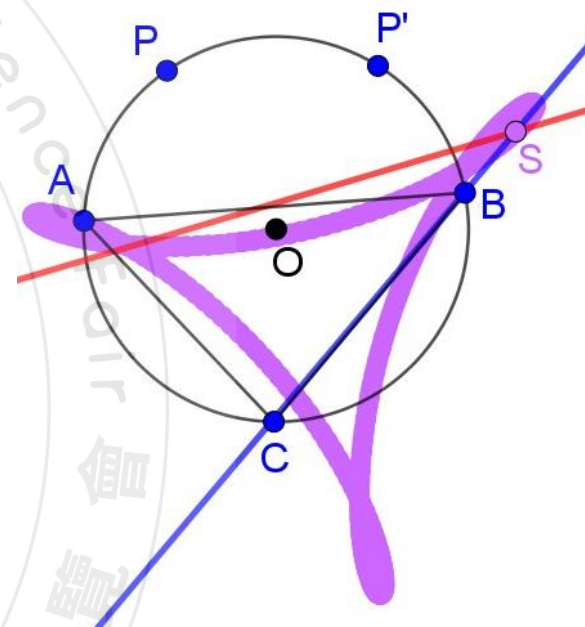


西姆松線與斜西姆松線的比較

兩點一三角形
非對徑
旋轉點
西姆松線



兩點一三角形
非對徑
旋轉點
斜西姆松線

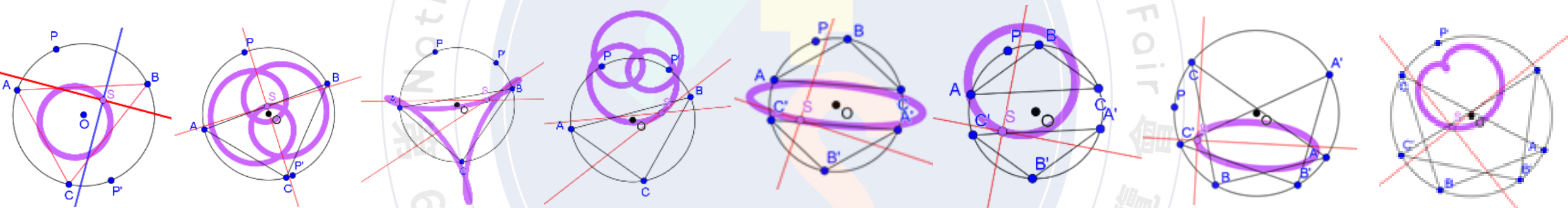


半徑皆放大 $\left| \frac{2}{\alpha^2 - 1} \right|$ 倍

$$z = \frac{a + b + c}{2} + \frac{abc}{2p^2 x^2 y} + \frac{px(y+1)}{2} \quad z = \left(\frac{-(a + b + c)}{2} + \frac{abc}{2p^2 x^2 y \alpha} + \frac{px(y+1)\alpha^2}{2} \right) \times \frac{2}{\alpha^2 - 1}$$

研究結果

本研究利用複平面解析，找出西姆松線與斜西姆松線的複數形式。並提出改變點與三角形的個數、對徑與否以及轉動點或三角形等條件下，所求出的交點軌跡圖形皆為圓次擺線。



參考文獻

Todor Zaharinov. The Simson Triangle and Its Properties. *Forum Geometricorum*. 2017:17, p373–381.