中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050407

圓內接正多邊形的線段定和

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉品蘭	楊玉星
高二 陳嘉翎	
高二 楊舒絢	

關鍵詞：托勒密定理、歐拉公式、不變量

摘要

托勒密定理可以證明在正多邊形的外接圓上任取一點，此點到遠頂點的距離和與到最近兩頂點的距離和之比值為定值。為了方便討論，不妨設此動點固定在正多邊形之外接圓的某一弧上，則不論奇偶性，我們發現**圓內接正多邊形的線段定和**之特性。同時發現：奇數邊數正多邊形，當邊數$2n+3$以上時，會滿足此動點到奇頂點的距離$2n+1$次方和與到偶頂點的距離$2n+1$次方和相等。無獨有偶，偶數邊數正多邊形，當邊數$2n+2$以上時，會滿足此動點到奇頂點的距離$2n$次方和與到偶頂點的距離$2n$次方和相等。

壹、前言

一、研究動機

科學研習月刊森棚教官的數學題（參[1]）中發現：「畫正三角形與外接圓，然後在圓上任取一點，則此點到較遠頂點的距離會等於到較近兩頂點的距離和。」，我們好奇地想探討正多邊形會不會有相同的性質？

二、研究目的

(一)若將「在正三角形的外接圓上任取一點，則此點到較遠頂點的距離會等於到較近兩頂點的距離和」推廣到其它正多邊形，是否有相同的性質，若否，則探討是否有其它類似的關係式，並設法證明。

(二)在正奇數$2n+1(n \geq 1)$邊形的外接圓上任取一點，則此點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和是否有一定的關係，若有，並設法證明。

(三)在正偶數$2n(n \geq 2)$邊形的外接圓上任取一點，則此點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和是否有一定的關係，若有，並設法證明。

(四)在正奇數$2n+1(n \geq 2)$邊形的外接圓上任取一點，則此點到奇頂點的距離$2n-1$次方和與到偶頂點的距離$2n-1$次方和是否有一定的關係，若有，並設法證明。

(五)在正偶數$2n(n \geq 3)$邊形的外接圓上任取一點，則此點到奇頂點的距離$2n-2$次方和與到偶頂點的距離$2n-2$次方和是否有一定的關係，若有，並設法證明。

三、研究流程圖

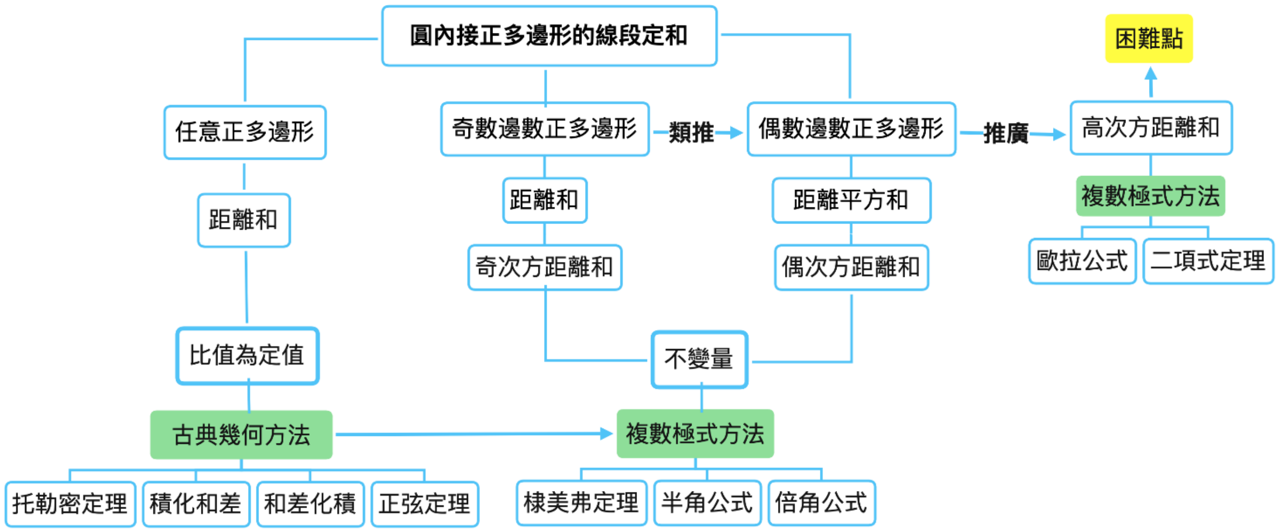


圖 **1.3.1.** 研究流程圖

四、本研究的特色

本研究的特色是將圓上兩點的距離轉換成複數平面上兩個複數的距離，並經由化簡可合成一正弦函數，又利用歐拉公式與二項式定理可將此正弦函數的冪次方，降冪成餘弦或正弦函數的一次式，最後利用複數的 **N** 次方根和為 **0** 的性質，成功地證出正 **N** 邊形外接圓上動點到奇偶頂點的距離冪次和為定值的性質。而本研究的另一個特色，是研究高次方距離和。

貳、文獻探討

文獻 **2.1.** 托勒密 **Ptolemy** 定理(西元 **150** 年)

設$ABCD$為圓內接四邊形，四邊依序為a,b,c,d，對角線為x,y，則 $xy=ac+bd$。

文獻 **2.2.** 複數的運算性質

1. $|Z_1-Z_2|=$點Z_1與點Z_2的距離。
2. $|Z|^2=Z\bar{Z}$。
3. $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}=0(\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$。

4. $|\mathbf{Z_1} \cdot \mathbf{Z_2}| = |\mathbf{Z_1}| \cdot |\mathbf{Z_2}|$。

5. 棣美弗定理：$(\boldsymbol{cos\alpha + isin\alpha})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{cos(n\alpha) + isin(n\alpha)}$。

6. 歐拉公式：$\boldsymbol{e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha}$。

文獻 **2.3.** 王啟光。**(**參**[2])**

該作品從正三角形外接圓上一點的性質說起，分別利用三角幾何及托勒密定理證出正五邊形也有類似的性質，接著利用複數極式來證明此性質可以推廣到任意奇數邊正多邊形。該作品的定理證明引導本研究中外接圓上動點到頂點的距離公式。

文獻 **2.4.** 陳姿妤等。**(**参**[3])**

該作品在探討「正 ***n*** 邊形外接圓弧上一動點，至各頂點距離關係的定值性質」，主要的手法是：三角幾何以及複數極式來證明一些在多邊形動點到頂點的一些長度、面積定值的證明。幾何的證明主要是靠孟氏定理及托勒密定理；複數方法主要是藉助三角函數積化和差和和差化積的公式。本作品的引理 **4.3.**有參考此文的引理二，並將其延伸出兩個重要的性質。

文獻 **2.5.** 姜硯凱等。**(**参**[4])**

該作品由三部分組成。第一部分是探討圓上一點 ***P*** 至圓內接正多邊形各頂點距離的關係。第二部分探討圓上一點 ***P*** 至圓內接多邊形對角線的垂線及與過圓內接多邊形頂點的切線垂線距離的關係。第三部分是探討圓上一點 ***P*** 在圓內接多邊形邊長的投影長度與過圓內接多邊形頂點切線上的投影長度的關係。本作品的定理 **7.2.**參考此文的定理 **2-3**，但證明方法並不相同。

本研究針對正多邊形外接圓上動點到奇偶頂點的距離冪次和為定值做進一步的探討，並將正多邊形分成奇偶兩類各自推廣，最後獲得一致性的結論。

參、距離和之比值問題

為了方便討論，在正 N 邊形$A_1A_2\cdots A_N$中的外接圓上，設 P 點為$\widehat{A_1A_2}$上任一點，並且設此正 N 邊形的邊長為 1。

性質 3. 1. 正三角形的外接圓上動點到較遠頂點的距離與到較近兩頂點的距離和之比值為 1

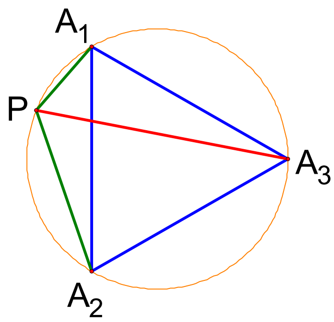


圖 3.2.

[證明] 如圖 3.2.，因為 在四邊形$PA_1A_3A_2$中，

$1\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$，所以 $\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=1$。

我們試著探討正四邊形至正七邊形的情形如下：

性質 3.3. 正 N 邊形的外接圓上動點到遠頂點的距離和與到最近兩頂點的距離和之比值為定值

[證明]

(1)正四邊形

如圖 3.4.，因為 在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{2\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{sin\frac{2\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$，所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{sin\frac{2\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}}+1$。

(2)正五邊形

如圖 3.5.，因為 在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{3\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{sin\frac{3\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{2\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{sin\frac{2\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$，所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2sin\frac{2\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{5}}+1$。

(3)正六邊形

如圖 3.6.，因為 在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{4\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$；

在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_6}$，

所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}+1$。

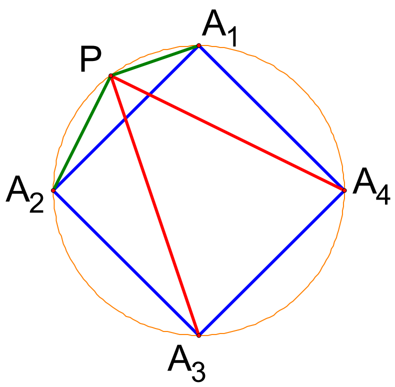


圖 3.4.

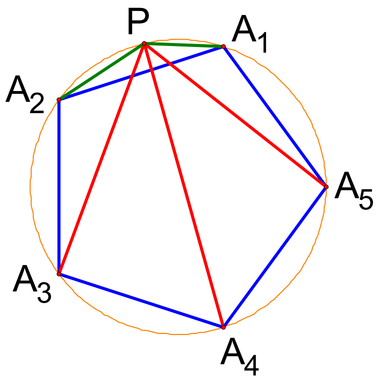


圖 3.5.

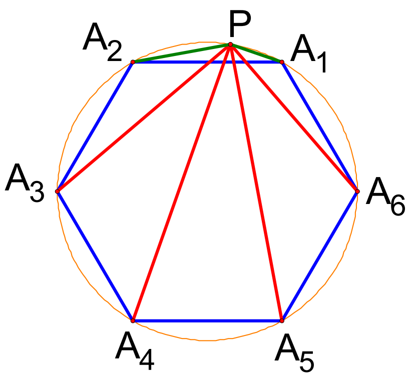


圖 3.6.

(4)正七邊形

如圖 3.7.，因為 在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$；

在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_6}$；

在四邊形$PA_1A_7A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_7}$，

所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}+\overline{PA_7}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7})}{\sin\frac{\pi}{7}}+1$。

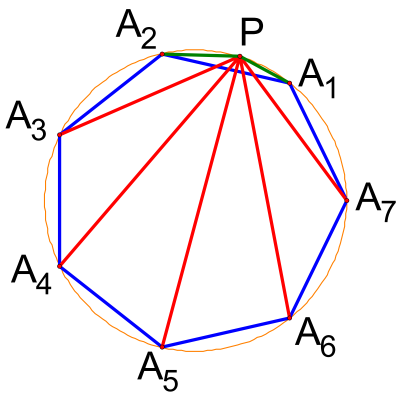


圖 3.7.

(5)一般化

(i)正$2n+1$邊形：

如圖 3.8.，因為 在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

以此類推…，在四邊形$PA_1A_nA_2$中，$\frac{sin\frac{(n+3)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{(n+2)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_n}$；…

在四邊形$PA_1A_{2n}A_2$中，$\frac{sin\frac{3\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_{2n}}$；

在四邊形$PA_1A_{2n+1}A_2$中，$\frac{sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_{2n+1}}$，

所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n+1}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}$

$=\frac{2[sin\frac{2\pi}{2n+1}+sin\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots\cdots+sin\frac{n\pi}{2n+1}]}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+1$

$=\frac{2\sum_{k=2}^{n}sin\frac{k\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+1$。

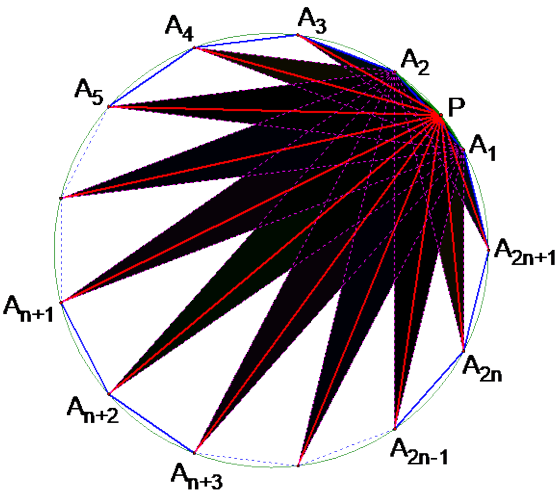


圖 3.8.

(ii)正$2n$邊形：

如圖 3.9.，因為 在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{(2n-2)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{sin\frac{(2n-2)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{(2n-3)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

以此類推…，在四邊形$PA_1A_nA_2$中，$\frac{sin\frac{(n+2)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_n}$；…

在四邊形$PA_1A_{2n-2}A_2$中，$\frac{sin\frac{4\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{3\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_{2n-2}}$；

在四邊形$PA_1A_{2n-1}A_2$中，$\frac{sin\frac{3\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_1}+\frac{sin\frac{2\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_{2n-1}}$；

在四邊形$PA_1A_{2n}A_2$中，$\frac{sin\frac{2\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_{2n}}$，

所以 $\dfrac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}$

$$=\frac{2[sin\frac{2\pi}{2n}+sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots+sin\frac{(n-1)\pi}{2n}]+sin\frac{n\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n}}+1$$

$$=\frac{2\sum_{k=2}^{n}sin\frac{k\pi}{2n}-1}{sin\frac{\pi}{2n}}+1$$，Q.E.D。

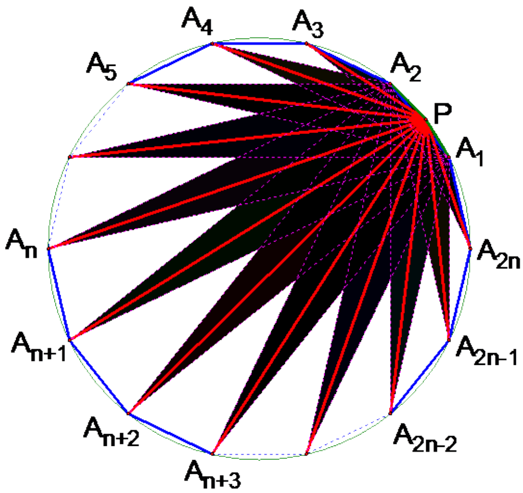


圖 3.9.

讓我們討論一些三角恆等式

性質 3.10. $\sum_{k=1}^{n}sink\theta=\dfrac{sin\frac{n}{2}\theta sin\frac{n+1}{2}\theta}{sin\frac{\theta}{2}}$ **(參[7])**

[證明] 設$S_n=\sum_{k=1}^{n}sink\theta$，等號兩側同乘以$2sin\frac{\theta}{2}$，

可得 $2sin\frac{\theta}{2}S_n=2sin\frac{\theta}{2}sin\theta+2sin\frac{\theta}{2}sin2\theta+2sin\frac{\theta}{2}sin3\theta+\cdots+2sin\frac{\theta}{2}sinn\theta$

又 $2sinxsiny=cos(x-y)-cos\,(x+y)$

所以 $2sin\frac{\theta}{2}S_n=(\cos\frac{\theta}{2}-cos\frac{3}{2}\theta)+(\cos\frac{3}{2}\theta-cos\frac{5}{2}\theta)+(\cos\frac{5}{2}\theta-cos\frac{7}{2}\theta)+\cdots$

$$+[\cos\,(n-\tfrac{1}{2})\theta-cos(n+\tfrac{1}{2})\theta]$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}-cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=2sin\frac{n+1}{2}\theta sin\frac{n}{2}\theta$$

故 $S_n=\dfrac{sin\frac{n}{2}\theta sin\frac{n+1}{2}\theta}{sin\frac{\theta}{2}}$，Q.E.D。

性質 3.11. (1) $\dfrac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n+1}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\dfrac{2sin\frac{n\pi}{2(2n+1)}sin\frac{(n+1)\pi}{2(2n+1)}}{sin\frac{\pi}{2(2n+1)}sin\frac{\pi}{2n+1}}-1$

(2) $\dfrac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\dfrac{\sqrt{2}sin\frac{(n+1)\pi}{4n}-sin\frac{\pi}{4n}}{sin\frac{\pi}{4n}sin\frac{\pi}{2n}}-1$

[證明] (1) $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n+1}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2\sum_{k=2}^{n}sin\frac{k\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+1$

$$=\frac{2\sum_{k=1}^{n}sin\frac{k\pi}{2n+1}-2sin\frac{\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+1$$

$$=\frac{2\times\frac{sin\frac{n\pi}{2(2n+1)}sin\frac{(n+1)\pi}{2(2n+1)}}{sin\frac{\pi}{2(2n+1)}}-2sin\frac{\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+1$$

$$=\frac{2sin\frac{n\pi}{2(2n+1)}sin\frac{(n+1)\pi}{2(2n+1)}}{sin\frac{\pi}{2(2n+1)}sin\frac{\pi}{2n+1}}-1$$ 。

(2) $\frac{\overline{\mathrm{PA}_3}+\overline{\mathrm{PA}_4}+\overline{\mathrm{PA}_5}+\cdots+\overline{\mathrm{PA}_{2n}}}{\overline{\mathrm{PA}_1}+\overline{\mathrm{PA}_2}}=\frac{2\sum_{k=2}^{n}sin\frac{k\pi}{2n}-1}{sin\frac{\pi}{2n}}+1$

$$=\frac{2\sum_{k=1}^{n}sin\frac{\mathrm{k}\pi}{2n}-2\,sin\frac{\pi}{2n}-1}{sin\frac{\pi}{2n}}+1$$

$$=\frac{2\times\frac{sin\frac{n\pi}{4n}sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{sin\frac{\pi}{4n}}-2sin\frac{\pi}{2n}-1}{sin\frac{\pi}{2n}}+1$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{sin\frac{\pi}{4n}}-1}{sin\frac{\pi}{2n}}-2+1$$

$$=\frac{\sqrt{2}sin\frac{(n+1)\pi}{4n}-sin\frac{\pi}{4n}}{sin\frac{\pi}{4n}sin\frac{\pi}{2n}}-1$$ ，Q.E.D 。

肆、不變量

讓我們考慮不變量的現象，也就是「**奇數邊正多邊形外接圓上動點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等**」的性質，為了方便後面的證明，我們先證明以下的引理：

引理 4.1. (參[2])

正N邊形$\boldsymbol{A_0A_1A_2\cdots A_{N-1}}$的外接圓，建構於複數平面圓心為$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$的單位圓上，不失一般性，考慮$\boldsymbol{P}$點落在$\widehat{\boldsymbol{A_0A_{N-1}}}$上，如圖 4.2.所示，$\boldsymbol{A_k}$所代表的複數為$\boldsymbol{Z_k}$，

$\boldsymbol{Z_k=cos\left(\frac{2k}{N}\pi\right)+isin\left(\frac{2k}{N}\pi\right)}$，則 $\boldsymbol{\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\right)}$，

其中 $\boldsymbol{k=0,1,2,\cdots,N-1}$。

[證明] 設 $P=cos(-\theta)+isin(-\theta)$，$0\le\theta\le\frac{2\pi}{N}$，

則 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|(k=0,1,2,\cdots,N-1)$

$$=\left|\left[cos(-\theta)-cos\left(\frac{2k}{N}\pi\right)\right]+i\left[sin(-\theta)-sin\left(\frac{2k}{N}\pi\right)\right]\right|$$

$$=\sqrt{\left[cos(-\theta)-cos\left(\frac{2k}{N}\pi\right)\right]^2+\left[sin(-\theta)-sin\left(\frac{2k}{N}\pi\right)\right]^2}$$

$$=\sqrt{2-2\left[cos(-\theta)cos\left(\frac{2k}{N}\pi\right)+sin(-\theta)sin\left(\frac{2k}{N}\pi\right)\right]}$$

$$=\sqrt{2-2cos\left[(-\theta)-\frac{2k}{N}\pi\right]}=\sqrt{2\left[1-cos\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)\right]}$$

$$=\sqrt{4sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\right)}=\left|2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\right)\right|$$

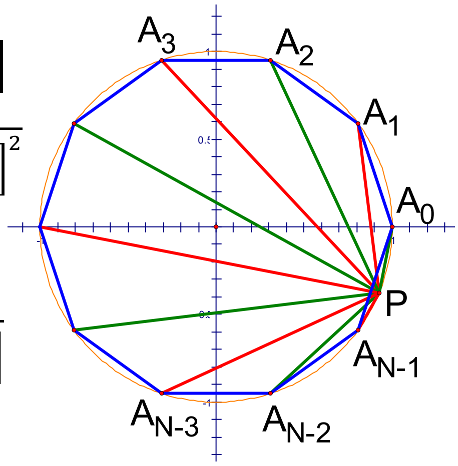


圖 4.2.

又 $0\le\theta\le\frac{2\pi}{N}$，$\therefore 0\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{N}\Rightarrow 0\le\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\le\pi$，且 $k=0,1,2,\cdots,N-1$，

$\therefore sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\right)\ge 0$，故$\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\right)$，Q.E.D。

為了一般化的證明，我們還須證明以下的引理：

引理 4.3. (參[3])

(1) $\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{cos}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$ ，$\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{sin}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$ $(\boldsymbol{N}\geq\mathbf{2},\boldsymbol{N}\in\mathbb{N})$

(2) $\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{cos}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$ ，$\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{sin}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$ $(\boldsymbol{N}\geq\mathbf{2},\boldsymbol{N}\in\mathbb{N})$

(3) $\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$，$\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$ $(\mathbf{1}\leq\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{N}-\mathbf{1},\boldsymbol{p}\in\mathbb{N})$

(4) $\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$，$\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\pi}\right)=\mathbf{0}$ $(\mathbf{1}\leq\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{N}-\mathbf{1},\boldsymbol{p}\in\mathbb{N})$

[證明]

(1)設複數方程式 $z^N=cos(N\theta)+isin(N\theta)$ $(\boldsymbol{N}\geq\mathbf{2},\boldsymbol{N}\in\mathbb{N})$

令複數 $z=cos\varphi+isin\varphi$，則$(cos\varphi+isin\varphi)^N=cos(N\theta)+isin(N\theta)$

由**棣美弗定理**可知：$cos(N\varphi)+isin(N\varphi)=cos(N\theta)+isin(N\theta)$

推得 $N\varphi=N\theta+2k\pi\Rightarrow\varphi=\theta+\frac{2k}{N}\pi$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

故可得 $z_k=cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)+isin\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

為其複數方程式 $z^N=cos(N\theta)+isin(N\theta)$ 的N個複數根。

由於複數的N次方根和為 0，即$\sum_{k=0}^{N-1} z_k=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{N-1}\left[cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)+isin\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)\right]=0$

故 $\sum_{k=0}^{N-1} cos\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)=0$ 且$\sum_{k=0}^{N-1} sin\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)=0$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$。

(2)設複數方程式 $z^N=cos(N\theta+\pi)+isin(N\theta+\pi)$ $(\boldsymbol{N}\geq\mathbf{2},\boldsymbol{N}\in\mathbb{N})$

令複數 $z=cos\varphi+isin\varphi$，則$(cos\varphi+isin\varphi)^N=cos(N\theta+\pi)+isin(N\theta+\pi)$

由**棣美弗定理**可知：$cos(N\varphi)+isin(N\varphi)=cos(N\theta+\pi)+isin(N\theta+\pi)$

推得 $N\varphi=N\theta+\pi+2k\pi\Rightarrow\varphi=\theta+\frac{2k+1}{N}\pi$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

故可得 $z_k=cos\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)+isin\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

為其複數方程式 $z^N=cos(N\theta+\pi)+isin(N\theta+\pi)$ 的N個複數根。

由於複數的N次方根和為 0，

即 $\sum_{k=0}^{N-1} z_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}\left[cos\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)+isin\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)\right]=0$

故 $\sum_{k=0}^{N-1} cos\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$ 且 $\sum_{k=0}^{N-1} sin\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$。

(3)設複數方程式 $z^N = cos\,(pN\theta)+isin\,(pN\theta)$ $\quad(\mathbf{1 \le p \le N-1, N \ge 2, p, N} \in \mathbb{N})$

令複數 $z = cos\varphi + isin\varphi$，則$(cos\varphi + isin\varphi)^N = cos\,(pN\theta)+isin\,(pN\theta)$

由**棣美弗定理**可知：$cos(N\varphi)+isin(N\varphi)=cos\,(pN\theta)+isin\,(pN\theta)$

推得 $N\varphi = pN\theta + 2kp\pi \Rightarrow \varphi = p\theta + \frac{2k}{N}p\pi$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

故可得 $z_k = cos\,p\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)+isin\,p\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

為其複數方程式 $z^N = cos(pN\theta)+isin(pN\theta)$ 的N個複數根。

由於複數的N次方根和為 0，

即 $\sum_{k=0}^{N-1} z_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}\left[cos\,p\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)+isin\,p\left(\theta+\frac{2k\pi}{N}\right)\right]=0$

故 $\sum_{k=0}^{N-1} cos\,p\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)=0$ 且 $\sum_{k=0}^{N-1} sin\,p\left(\theta+\frac{2k}{N}\pi\right)=0$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$。

(4)設複數方程式 $z^N = cos\,p(N\theta+\pi)+isin\,p(N\theta+\pi)$ $(\mathbf{1 \le p \le N-1, N \ge 2, p, N} \in \mathbb{N})$

令複數 $z = cos\varphi + isin\varphi$，則$(cos\varphi + isin\varphi)^N = cos\,p(N\theta+\pi)+isin\,p(N\theta+\pi)$

由**棣美弗定理**可知：$cos(N\varphi)+isin(N\varphi)=cos\,p(N\theta+\pi)+isin\,p(N\theta+\pi)$

推得 $N\varphi = pN\theta + p\pi + 2kp\pi \Rightarrow \varphi = p\theta + \frac{2k+1}{N}p\pi$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

故可得 $z_k = cos\,p\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)+isin\,p\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

為其複數方程式 $z^N = cos\,p(N\theta+\pi)+isin\,p(N\theta+\pi)$ 的N個複數根。

由於複數的N次方根和為 0，

即 $\sum_{k=0}^{N-1} z_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}\left[cos\,p\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)+isin\,p\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)\right]=0$

故 $\sum_{k=0}^{N-1} cos\,p\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$ 且 $\sum_{k=0}^{N-1} sin\,p\left(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\right)=0$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$，

Q.E.D。

性質 4.4. 正$\boldsymbol{2n+1}(\boldsymbol{n \geq 1})$**邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等**

即 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}=\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}}$ **(參[2])**

[證明]

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n+1}\pi\right)$，$k=0,1,2,\cdots,2n$

所以 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}$

$$=2\left[sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}}$

$$=2\left[2sin\frac{\theta}{2}+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\right]$$

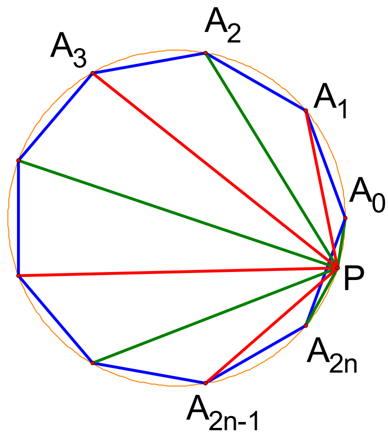


圖 4.5.

於是

$$(\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}})-(\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}})$$

$$=2\left[\begin{array}{c}2sin\frac{\theta}{2}+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+2}{2n+1}\pi\right)\\ +sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+4}{2n+1}\pi\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4n}{2n+1}\pi\right)\end{array}\right]$$

$$=2\sum_{k=0}^{2n}sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)=0$$ **(由引理 4.3.(1)可知)**

因此$(\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}})-(\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}})=0$

故 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}=\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}}$，Q.E.D。

接著，讓我們探討另一不變量的現象，也就「**偶數邊正多邊形外接圓上動點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等**」的性質

性質 **4.6.** 正四邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等

如圖 **4.7.**，求證：$\overline{\boldsymbol{PA_1}}^2+\overline{\boldsymbol{PA_3}}^2=\overline{\boldsymbol{PA_0}}^2+\overline{\boldsymbol{PA_2}}^2$

[證明]

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{4}\pi\right)$，$k=0,1,2,3$

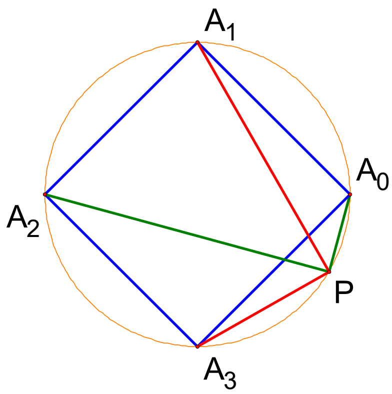


圖 **4.7.**

所以 $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2$

$$=4sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+4sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\left[2-2cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\left[2-2cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right]=4$$

$$\overline{PA_0}^2+\overline{PA_2}^2=4sin^2\frac{\theta}{2}+4sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$=[2-2cos\theta]+[2-2cos(\theta+\pi)]=4$$

故 $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2=\overline{PA_0}^2+\overline{PA_2}^2$，Q.E.D。

性質 **4.8.** 正$\boldsymbol{2n}(\boldsymbol{n}\geq\boldsymbol{2})$邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等

如圖 **4.9.**，求證：$\overline{\boldsymbol{PA_1}}^2+\overline{\boldsymbol{PA_3}}^2+\cdots+\overline{\boldsymbol{PA_{2n-1}}}^2=\overline{\boldsymbol{PA_0}}^2+\overline{\boldsymbol{PA_2}}^2+\cdots+\overline{\boldsymbol{PA_{2n-2}}}^2$

[證明]

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n}\pi\right)$，

$k=0,1,2,\cdots,(2n-1)$

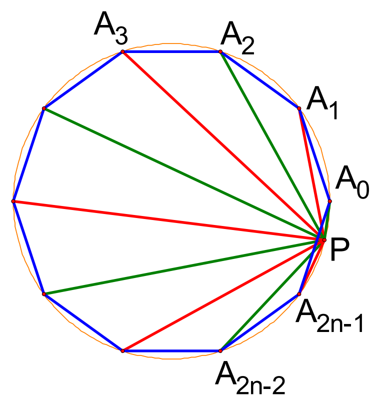


圖 **4.9.**

所以

$\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^2$

$$=4sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)+4sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+4sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

$$=\left[2-2cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\right]+\left[2-2cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\right]+\cdots+\left[2-2cos\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 2n - 2\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\theta + \frac{2n-1}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 2n - 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta + \frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$= 2n - 0 = 2n$$ 。 (由引理 **4.3.(2)**可知)

$$\overline{PA_0}^2 + \overline{PA_2}^2 + \cdots + \overline{PA_{2n-2}}^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2} + 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots + 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2n-2}{2n}\pi\right)$$

$$= [2 - 2\cos\theta] + \left[2 - 2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + \cdots + \left[2 - 2\cos\left(\theta + \frac{2n-2}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 2n - 2\left[\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\theta + \frac{2n-2}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 2n - 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta + \frac{2k}{n}\pi\right) = 2n - 0 = 2n$$ (由引理 **4.3.(1)**可知)

故 $\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_3}^2 + \cdots + \overline{PA_{2n-1}}^2 = \overline{PA_0}^2 + \overline{PA_2}^2 + \cdots + \overline{PA_{2n-2}}^2$，Q.E.D。

伍、奇數邊數正多邊形

接著，讓我們探討其它奇數邊數正多邊形，看看是否會有「**奇數邊數正多邊形外接圓上動點到奇頂點的距離立方和與到偶頂點的距離立方和相等**」的性質？

性質 5.1. 正五邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離立方和與到偶頂點的距離立方和相等

如圖 **5.2.**，求證：$\overline{\boldsymbol{PA_1}}^3 + \overline{\boldsymbol{PA_3}}^3 = \overline{\boldsymbol{PA_0}}^3 + \overline{\boldsymbol{PA_2}}^3 + \overline{\boldsymbol{PA_4}}^3$

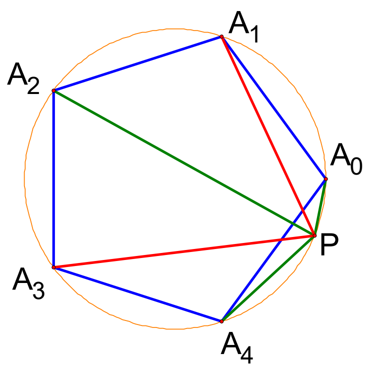


圖 **5.2.**

[證明]

已知 $\overline{PA_k} = |P - Z_k| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k}{5}\pi\right)$，$k = 0,1,2,3,4$

所以

$$\overline{PA_1}^3 + \overline{PA_3}^3 = 8\sin^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{5}\right) + 8\sin^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{5}\right)$$

$$= \left[6\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{3\pi}{5}\right)\right] + \left[6\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{9\pi}{5}\right)\right]$$

$$= 6\left[\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{5}\right)\right] - 2\left[\sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{9\pi}{5}\right)\right]$$

$\overline{PA_0}^3 + \overline{PA_2}^3 + \overline{PA_4}^3$

$= 8sin^3\frac{\theta}{2} + 8sin^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) + 8sin^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{5}\right)$

$= \left[6sin\frac{\theta}{2} - 2sin\frac{3\theta}{2}\right] + \left[6sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) - 2sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{6\pi}{5}\right)\right] + \left[6sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{5}\right) - 2sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{12\pi}{5}\right)\right]$

$= 6\left[sin\frac{\theta}{2} + sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{4}{5}\pi\right)\right] - 2\left[sin\frac{3\theta}{2} + sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{6}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{12}{5}\pi\right)\right]$

於是

$\left(\overline{PA_0}^3 + \overline{PA_2}^3 + \overline{PA_4}^3\right) - \left(\overline{PA_1}^3 + \overline{PA_3}^3\right)$

$= 6\left[sin\frac{\theta}{2} + sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{4}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{6}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{8}{5}\pi\right)\right]$

$-2\left[sin\frac{3\theta}{2} + sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{6}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{12}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{18}{5}\pi\right) + sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{24}{5}\pi\right)\right]$

$= 6\sum_{k=0}^{4} sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k}{5}\pi\right) - 2\sum_{k=0}^{4} sin3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k}{5}\pi\right)$

由引理 **4.3.(1)(3)**可知：$\sum_{k=0}^{4} sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k}{5}\pi\right) = 0$ 和 $\sum_{k=0}^{4} sin3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k}{5}\pi\right) = 0$。

因此 $\left(\overline{PA_0}^3 + \overline{PA_2}^3 + \overline{PA_4}^3\right) - \left(\overline{PA_1}^3 + \overline{PA_3}^3\right) = 0$，

故 $\overline{PA_1}^3 + \overline{PA_3}^3 = \overline{PA_0}^3 + \overline{PA_2}^3 + \overline{PA_4}^3$，Q.E.D。

性質 5.3. 正$\boldsymbol{2n+1}$($\boldsymbol{n \geq 2}$)邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離立方和與到偶頂點的距離立方和相等

如圖 5.4.，求證：$\overline{PA_1}^3 + \overline{PA_3}^3 + \cdots + \overline{PA_{2n-1}}^3$

$$= \overline{PA_0}^3 + \overline{PA_2}^3 + \cdots + \overline{PA_{2n}}^3$$

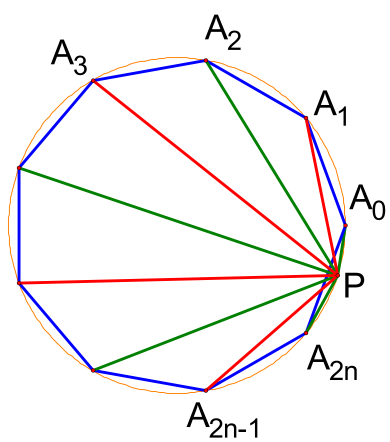


圖 5.4.

[證明]

已知 $\overline{PA_k} = |P - Z_k| = 2sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k}{2n+1}\pi\right)$，

$k = 0,1,2,\cdots,2n$

所以 $\overline{PA_1}^3 + \overline{PA_3}^3 + \cdots + \overline{PA_{2n-1}}^3$

$$= 8sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+8sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\cdots+8sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)$$

$$= \left[6sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)-2sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)\right]+\left[6sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)-2sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{9\pi}{2n+1}\right)\right]+\cdots$$

$$+\left[6sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)-2sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n-3}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$$= 6\left[sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\cdots+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$$-2\left[sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{9\pi}{2n+1}\right)+\cdots+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n-3}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$$\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3$$

$$= 8sin^3\frac{\theta}{2}+8sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+8sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)$$

$$= \left[6sin\frac{\theta}{2}-2sin\frac{3\theta}{2}\right]+\left[6sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-2sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6\pi}{2n+1}\right)\right]+$$

$$\cdots+\left[6sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)-2sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$$= 6\left[sin\frac{\theta}{2}+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$$-2\left[sin\frac{3\theta}{2}+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6\pi}{2n+1}\right)+\cdots+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n}{2n+1}\pi\right)\right]$$

於是

$$\left(\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3\right)-\left(\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3\right)$$

$$=$$

$$6\begin{bmatrix} sin\frac{\theta}{2}+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+2}{2n+1}\pi\right)+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+4}{2n+1}\pi\right)+\cdots \\ +sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4n}{2n+1}\pi\right) \end{bmatrix}$$

$$-2\begin{bmatrix} sin\frac{3\theta}{2}+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n}{2n+1}\pi\right)+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n+6}{2n+1}\pi\right) \\ +sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n+12}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{12n}{2n+1}\pi\right) \end{bmatrix}$$

$$= 6\sum_{k=0}^{2n}sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)-2\sum_{k=0}^{2n}sin\,3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

由引理 **4.3.(1)(3)**可知：$\sum_{k=0}^{2n} sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)=0$ 和 $\sum_{k=0}^{2n} sin\,3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)=0$。

因此$\left(\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3\right)-\left(\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3\right)=0$

故 $\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3=\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3$，Q.E.D。

陸、偶數邊數正多邊形

接著，讓我們探討其它偶數邊數正多邊形，看看是否會有「**偶數邊數正多邊形外接圓上動點到奇頂點的距離四次方和與到偶頂點的距離四次方和相等**」的性質？

性質 6.1. 正六邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離四次方和與到偶頂點的距離四次方和相等

如圖 6.2.，求證：$\boldsymbol{\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4}$

$$\boldsymbol{=\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4}$$

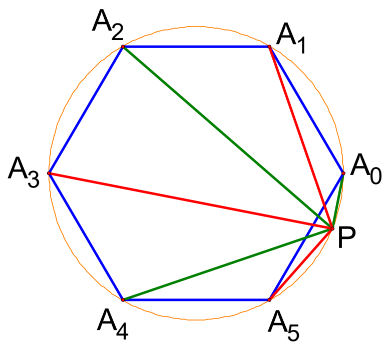


圖 6.2.

[證明]

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{6}\pi\right)$，

$k=0,1,2,\cdots,5$

所以 $\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4=16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{6}\right)+16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)$

$$=2\left[3-4cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]+2[3-4cos(\theta+\pi)+cos(2\theta+2\pi)]$$

$$+2\left[3-4cos\left(\theta+\frac{5\pi}{3}\right)+cos\left(2\theta+\frac{10\pi}{3}\right)\right]$$

$$=18-8\left[cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+cos(\theta+\pi)+cos\left(\theta+\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$+2\left[cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+cos(2\theta+2\pi)+cos\left(2\theta+\frac{10\pi}{3}\right)\right]$$

$$=18-8\sum_{k=0}^{2} cos\left(\theta+\frac{2k+1}{3}\pi\right)+2\sum_{k=0}^{2} cos\,2\left(\theta+\frac{2k+1}{3}\pi\right)$$

$$=18$$

由引理 **4.3.(2)(4)**可知：$\sum_{k=0}^{2} cos\left(\theta+\frac{2k+1}{3}\pi\right)=0$ 和 $\sum_{k=0}^{2} cos\,2\left(\theta+\frac{2k+1}{3}\pi\right)=0$。

$$\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4=16sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)+16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)+16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{6}\right)$$

$$=2[3-4cos\theta+cos2\theta]+2\left[3-4cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$+2\left[3-4cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+cos\left(2\theta+\frac{8\pi}{3}\right)\right]$$

$$=18-8\left[cos\theta+cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$+2\left[cos2\theta+cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+cos\left(2\theta+\frac{8\pi}{3}\right)\right]$$

$$=18-8\sum_{k=0}^{2} cos\left(\theta+\frac{2k}{3}\pi\right)+2\sum_{k=0}^{2} cos\,2\left(\theta+\frac{2k}{3}\pi\right)$$

$$=18$$

由引理 **4.3.(1)(3)**可知：$\sum_{k=0}^{2} cos\left(\theta+\frac{2k}{3}\pi\right)=0$ 和 $\sum_{k=0}^{2} cos\,2\left(\theta+\frac{2k}{3}\pi\right)=0$。

故$\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4=\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4$，Q.E.D。

性質 6.3. 正 2n(n≥3)邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離四次方和與到偶頂點的距離四次方和相等

如圖 6.4.，求證： $\boldsymbol{\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^4}$

$$\boldsymbol{=\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^4}$$

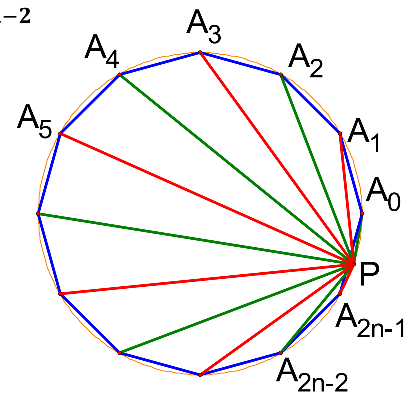


圖 6.4.

[證明]

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n}\pi\right)$，

$k=0,1,2,\cdots,2n-1$

所以

$$\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^4$$

$$=16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)+16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\right)+16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n}\right)+\cdots+16sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

$$= 2\left[3 - 4cos\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + 2\left[3 - 4cos\left(\theta + \frac{3\pi}{n}\right) + cos\left(2\theta + \frac{6\pi}{n}\right)\right]$$

$$+2\left[3 - 4cos\left(\theta + \frac{5\pi}{n}\right) + cos\left(2\theta + \frac{10\pi}{n}\right)\right] + \cdots$$

$$+2\left[3 - 4cos\left(\theta + \frac{2n-1}{n}\pi\right) + cos\left(2\theta + \frac{4n-2}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 6n - 8\left[cos\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + cos\left(\theta + \frac{3\pi}{n}\right) + cos\left(\theta + \frac{5\pi}{n}\right) + \cdots + cos\left(\theta + \frac{2n-1}{n}\pi\right)\right]$$

$$+2\left[cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + cos\left(2\theta + \frac{6\pi}{n}\right) + cos\left(2\theta + \frac{10\pi}{n}\right) + \cdots + cos\left(2\theta + \frac{4n-2}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 6n - 8\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta + \frac{2k+1}{n}\pi\right) + 2\sum_{k=0}^{n-1} cos\,2\left(\theta + \frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$= 6n$$

由引理 **4.3.(2)(4)**可知：$\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta + \frac{2k+1}{n}\pi\right) = 0$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1} cos\,2\left(\theta + \frac{2k+1}{n}\pi\right) = 0$。

$\overline{PA_0}^4 + \overline{PA_2}^4 + \overline{PA_4}^4 + \cdots + \overline{PA_{2n-2}}^4$

$$= 16sin^4\frac{\theta}{2} + 16sin^4\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{n}\pi\right) + 16sin^4\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2}{n}\pi\right) + \cdots + 16sin^4\left(\frac{\theta}{2} + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$= 2[3 - 4cos\theta + cos2\theta] + 2\left[3 - 4cos\left(\theta + \frac{2}{n}\pi\right) + cos\left(2\theta + \frac{4}{n}\pi\right)\right]$$

$$+2\left[3 - 4cos\left(\theta + \frac{4}{n}\pi\right) + cos\left(2\theta + \frac{8}{n}\pi\right)\right] +$$

$$\cdots + 2\left[3 - 4cos\left(\theta + \frac{2n-2}{n}\pi\right) + cos\left(2\theta + \frac{4n-4}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 6n - 8\left[cos\theta + cos\left(\theta + \frac{2}{n}\pi\right) + cos\left(\theta + \frac{4}{n}\pi\right) + \cdots + cos\left(\theta + \frac{2n-2}{n}\pi\right)\right]$$

$$+2\left[cos2\theta + cos\left(2\theta + \frac{4}{n}\pi\right) + cos\left(2\theta + \frac{8}{n}\pi\right) + \cdots + cos\left(2\theta + \frac{4n-4}{n}\pi\right)\right]$$

$$= 6n - 8\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta + \frac{2k}{n}\pi\right) + 2\sum_{k=0}^{n-1} cos\,2\left(\theta + \frac{2k}{n}\pi\right) = 6n$$

由引理 **4.3.(1)(3)**可知：$\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta + \frac{2k}{n}\pi\right) = 0$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1} cos\,2\left(\theta + \frac{2k}{n}\pi\right) = 0$。

故 $\overline{PA_1}^4 + \overline{PA_3}^4 + \overline{PA_5}^4 + \cdots + \overline{PA_{2n-1}}^4 = \overline{PA_0}^4 + \overline{PA_2}^4 + \overline{PA_4}^4 + \cdots + \overline{PA_{2n-2}}^4$，

Q.E.D。

柒、高次方和

讓我們研究高次方和，為了方便後續的推廣證明，先證明以下的引理：

引理 7.1. $(1)\boldsymbol{sin^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_k^{2n}cos(2n-2k)\alpha+\frac{1}{2}C_n^{2n}\right]}$

$(2)\boldsymbol{sin^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_k^{2n+1}sin(2n+1-2k)\alpha\right]}$ **(參[8])**

[證明] 根據**歐拉公式**，可設 $e^{i\alpha}=cos\alpha+isin\alpha$，則 $e^{-i\alpha}=cos\alpha-isin\alpha$

推得 $cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$，$sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

所以 $sin^N\alpha=\frac{1}{2^Ni^N}\left[e^{i\alpha}+(-1)e^{-i\alpha}\right]^N$

$$=\frac{1}{2^Ni^N}\begin{bmatrix}C_0^Ne^{iN\alpha}+C_1^Ne^{i(N-1)\alpha}\cdot(-1)e^{-i\alpha}+C_2^Ne^{i(N-2)\alpha}\cdot(-1)^2e^{-i2\alpha}\\+\cdots+C_{N-1}^Ne^{i\alpha}\cdot(-1)^{N-1}e^{-i(N-1)\alpha}+C_N^N(-1)^Ne^{-iN\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^Ni^N}\begin{bmatrix}e^{iN\alpha}+(-1)C_1^Ne^{i(N-2)\alpha}+(-1)^2C_2^Ne^{i(N-4)\alpha}\\+\cdots+(-1)^{N-1}C_{N-1}^Ne^{-i(N-2)\alpha}+(-1)^Ne^{-iN\alpha}\end{bmatrix}$$

(1)$N=2n$ 時，

$$sin^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n}i^{2n}}\begin{bmatrix}e^{i2n\alpha}+(-1)C_1^{2n}e^{i(2n-2)\alpha}+(-1)^2C_2^{2n}e^{i(2n-4)\alpha}\\+\cdots+(-1)^{2n-1}C_{2n-1}^{2n}e^{-i(2n-2)\alpha}+(-1)^{2n}e^{-i2n\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(-1)^n}\begin{Bmatrix}\left[e^{i2n\alpha}+e^{-i2n\alpha}\right]+(-1)C_1^{2n}\left[e^{i(2n-2)\alpha}+e^{-i(2n-2)\alpha}\right]\\+(-1)^2C_2^{2n}\left[e^{i(2n-4)\alpha}+e^{-i(2n-4)\alpha}\right]\\+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{2n}\left[e^{i2\alpha}+e^{-i2\alpha}\right]+C_n^{2n}e^{in\alpha}\cdot(-1)^ne^{-in\alpha}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\begin{bmatrix}2cos2n\alpha+(-1)C_1^{2n}\cdot2\,cos(2n-2)\,\alpha+(-1)^2C_2^{2n}\cdot2\,cos(2n-4)\,\alpha\\+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{2n}\cdot2\,cos\,2\,\alpha+(-1)^nC_n^{2n}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^{2n-1}}\begin{bmatrix}(-1)^ncos2n\alpha+(-1)^{n+1}C_1^{2n}\,cos(2n-2)\,\alpha+(-1)^{n+2}C_2^{2n}\,cos(2n-4)\,\alpha\\+\cdots+(-1)^{2n-1}C_{n-1}^{2n}\,cos\,2\,\alpha+\frac{1}{2}(-1)^{2n}C_n^{2n}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_k^{2n}\cdot cos(2n-2k)\,\alpha+\frac{1}{2}C_n^{2n}\right]。$$

(2)$N=2n+1$ 時，

$$sin^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n+1}i^{2n+1}}\begin{bmatrix}e^{i(2n+1)\alpha}+(-1)C_1^{2n+1}e^{i(2n-1)\alpha}+(-1)^2C_2^{2n+1}e^{i(2n-3)\alpha}\\+\cdots+(-1)^{2n}C_{2n}^{2n+1}e^{-i(2n-1)\alpha}+(-1)^{2n+1}e^{-i(2n+1)\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^{2n+1}(-1)^ni}\begin{Bmatrix}\left[e^{i(2n+1)\alpha}-e^{-i(2n+1)\alpha}\right]+(-1)C_1^{2n+1}\left[e^{i(2n-1)\alpha}-e^{-i(2n-1)\alpha}\right]\\+(-1)^2C_2^{2n+1}\left[e^{i(2n-3)\alpha}-e^{-i(2n-3)\alpha}\right]+\cdots+(-1)^nC_n^{2n+1}\left[e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\begin{array}{c}\sin(2n+1)\alpha+(-1)C_1^{2n+1}\sin(2n-1)\alpha+(-1)^2C_2^{2n+1}\sin(2n-3)\alpha\\+\cdots+(-1)^nC_n^{2n+1}\sin\alpha\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left[\begin{array}{c}(-1)^n\sin(2n+1)\alpha+(-1)^{n+1}C_1^{2n+1}\sin(2n-1)\alpha\\+(-1)^{n+2}C_2^{2n+1}\sin(2n-3)\alpha+\cdots+(-1)^{2n}C_n^{2n+1}\sin\alpha\end{array}\right]$$

$=\frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_k^{2n+1}\sin(2n+1-2k)\alpha\right]$，Q.E.D。

定理 7.2. (參[4])

設正$2n$($n\ge m$，$m\ge 2$)邊形$A_0A_1A_2\cdots A_{2n-1}$的外接圓，設P點為$A_0\widehat{A_{2n-1}}$上任一點，

則 $\overline{PA_1}^{2m-2}+\overline{PA_3}^{2m-2}+\overline{PA_5}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-2}$

$=\overline{PA_0}^{2m-2}+\overline{PA_2}^{2m-2}+\overline{PA_4}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-2}$

[證明]

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n}\pi\right)$，其中 $k=0,1,2,\cdots,2n-1$

且 $\sin^{2m-2}\alpha=\frac{1}{2^{2m-3}}\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\alpha+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]$

所以 $\overline{PA_1}^{2m-2}+\overline{PA_3}^{2m-2}+\overline{PA_5}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-2}$

$$=2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\right)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n}\right)$$

$$+\cdots+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

$$=2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]+\cdots$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]$$

$$=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\left[\begin{array}{c}\cos(m-1)\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cos(m-1)\left(\theta+\frac{3}{n}\pi\right)\\+\cos(m-1)\left(\theta+\frac{5}{n}\pi\right)+\cdots+\cos(m-1)\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\end{array}\right]$$

$$+2(-1)^m C_1^{2m-2}\begin{bmatrix} \cos(m-2)\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cos(m-2)\left(\theta+\frac{3}{n}\pi\right) \\ +\cos(m-2)\left(\theta+\frac{5}{n}\pi\right)+\cdots+\cos(m-2)\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+2(-1)^{m+1} C_2^{2m-2}\begin{bmatrix} \cos(m-3)\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cos(m-3)\left(\theta+\frac{3}{n}\pi\right) \\ +\cos(m-3)\left(\theta+\frac{5}{n}\pi\right)+\cdots+\cos(m-3)\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-3} C_{m-2}^{2m-2}\begin{bmatrix} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3}{n}\pi\right) \\ +\cos\left(\theta+\frac{5}{n}\pi\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$= n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-1)\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$+2(-1)^m C_1^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\,(m-2)\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m+1} C_2^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\,(m-3)\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-3} C_{m-2}^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\,\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}$$

由引理 **4.3.(4)**可知：$\sum_{k=0}^{n-1}\cos p\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)=0\ \ (\mathbf{1}\le \boldsymbol{p}\le \boldsymbol{n}-\mathbf{1},\boldsymbol{p}\in\mathbb{N})$。

$$\overline{PA_0}^{2m-2}+\overline{PA_2}^{2m-2}+\overline{PA_4}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-2}$$

$$=2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}\right)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n}\right)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n}\right)$$

$$+\cdots+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-2}{2n}\pi\right)$$

$$=2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]+\cdots$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-2}{2n}\pi\right)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\right]$$

$$=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\begin{bmatrix} \cos(m-1)\theta+\cos(m-1)\left(\theta+\frac{2}{n}\pi\right) \\ +\cos(m-1)\left(\theta+\frac{4}{n}\pi\right)+\cdots+\cos(m-1)\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+2(-1)^m C_1^{2m-2}\begin{bmatrix} \cos(m-2)(\theta)+\cos(m-2)\left(\theta+\frac{2}{n}\pi\right) \\ +\cos(m-2)\left(\theta+\frac{4}{n}\pi\right)+\cdots+\cos(m-2)\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-2}\begin{bmatrix} cos(m-3)(\theta)+cos(m-3)\left(\theta+\frac{2}{n}\pi\right) \\ +cos(m-3)\left(\theta+\frac{4}{n}\pi\right)+\cdots+cos(m-3)\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-3}C_{m-2}^{2m-2}\begin{bmatrix} cos(\theta)+cos\left(\theta+\frac{2}{n}\pi\right) \\ +cos\left(\theta+\frac{4}{n}\pi\right)+\cdots+cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-1)\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m}C_1^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\,(m-2)\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\,(m-3)\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-3}C_{m-2}^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\,\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}$$

由引理 **4.3.(3)**可知：$\sum_{k=0}^{n-1}\cos p\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)=0\ \ (\mathbf{1\leq p\leq n-1, p}\in\mathbb{N})$。

故 $\overline{PA_1}^{2m-2}+\overline{PA_3}^{2m-2}+\overline{PA_5}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-2}$

$=\overline{PA_0}^{2m-2}+\overline{PA_2}^{2m-2}+\overline{PA_4}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-2}(m\geq 2)$，Q.E.D。

定理 7.3.

設正$\mathbf{2n+1}$($\mathbf{n\geq m}$，$\mathbf{m\geq 1}$)邊形$\mathbf{A_0A_1A_2\cdots A_{2n}}$的外接圓，設$\mathbf{P}$點為$\widehat{\mathbf{A_0A_{2n}}}$上任一點，

則 $\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}$

$=\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n}}^{2m-1}$

[證明]

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n+1}\pi\right)$，其中 $k=0,1,2,\cdots,2n$

且 $sin^{2m-1}\alpha=\frac{1}{2^{2m-2}}\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}cos(2m-1-2k)\alpha\right]$

所以 $\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}$

$=2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n+1}\right)$

$$+\cdots+2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)$$

$$=2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n+1}\right)\right]+\cdots$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$$=2(-1)^{m-1}\left[\begin{array}{c} sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\right) \\ +sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\end{array}\right]$$

$$+2(-1)^{m}C_1^{2m-1}\left[\begin{array}{c} sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\right) \\ +sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\end{array}\right]$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\left[\begin{array}{c} sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\right) \\ +sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\end{array}\right]$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\left[\begin{array}{c} sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\right) \\ +sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\end{array}\right]$$

$$=2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m-1}C_1^{2m-1}\sum_{k=0}^{n-1}sin\ (2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\sum_{k=0}^{n-1}sin\ (2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\sum_{k=0}^{n-1}sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$$

$$\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n}}^{2m-1}$$

$$=2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)+2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n+1}\right)$$

$$+\cdots+2^{2m-1}sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)$$

$$=2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n+1}\right)\right]+\cdots$$

$$+2\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}sin(2m-1-2k)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\right]$$

$$=2(-1)^{m-1}\begin{bmatrix} sin(2m-1)\frac{\theta}{2}+sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\right) \\ +sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+2(-1)^{m}C_1^{2m-1}\begin{bmatrix} sin(2m-3)\frac{\theta}{2}+sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\right) \\ +sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\begin{bmatrix} sin(2m-5)\frac{\theta}{2}+sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\right) \\ +sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\begin{bmatrix} sin\frac{\theta}{2}+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\right) \\ +sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\right)+\cdots+sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$=2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n}sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m}C_1^{2m-1}\sum_{k=0}^{n}sin\,(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\sum_{k=0}^{n}sin\,(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\sum_{k=0}^{n}sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

於是

$$\left(\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1}\right)$$

$$-\left(\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}\right)$$

$$=2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{2n}sin(2m-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m}C_1^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n}sin(2m-3)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n}sin(2m-5)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n}sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$$

由引理 **4.3.(3)**可知：$\sum_{k=0}^{2n} \sin p\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)=0$ $(\boldsymbol{1 \le p \le 2n, p} \in \mathbb{N})$，

因此 $\left(\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1}\right)$

$$-\left(\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}\right)=0$$

故 $\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}$

$=\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1}(m \ge 1)$，Q.E.D。

捌、研究討論

針對正四邊形、正六邊形、正八邊形至正十邊形，我們利用 Ggb 作圖後發現：如果定點P不在圓上，不論圓內或圓外，上述偶數邊正多邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和也會相等，甚至定點不在此圓所在的平面上也成立，為了方便證明，以下我們還是用**複數極式**的方法。

引理 8. 1.

設單位圓之內接正n邊形為$A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$，P是同平面上任一點且令P與單位圓圓心的距離為 t，則 $\sum_{k=0}^{n-1}\overline{PA_k}^2=n(t^2+1)$。(參[5])

[證明] 在該平面上以圓心 O 為原點建立一個複數平面，令頂點A_k對應之複數為

$\omega^k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，ω $=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，P 對應之複數為 Z，

則 $\sum_{k=0}^{n-1}\overline{PA_k}^2$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}|Z-\omega^k|^2$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(Z-\omega^k)(\bar{Z}-\bar{\omega}^k)$$

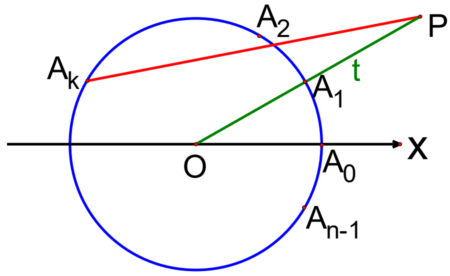


圖 8.2.

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (|Z|^2 - \omega^k \bar{Z} - \bar{\omega}^k Z + 1)$$

$\left(\text{因為 } \boldsymbol{Z\bar{Z} = |Z|^2}\text{，} \boldsymbol{\omega^k \bar{\omega}^k = (\omega \cdot \bar{\omega})^k = (|\omega|^2)^k = 1^k = 1}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (|Z|^2 + 1) - \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \bar{Z} - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\omega}^k Z$$

$$= n(|Z|^2 + 1) - \bar{Z} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k - Z \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\omega}^k$$

$$= n(t^2 + 1) - \bar{Z} \times 0 - Z \times \bar{0}$$

$= n(t^2 + 1)$，Q.E.D。

推論 8. 3. 在引理中，當 **P** 不在正n邊形所在之平面上，而為空間中任一點時，則結論亦成立。**(參[5])**

[證明] 令 P 在正n邊形所在之平面上的正射影為 Q，

則由畢氏定理知

$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{PA_k}^2$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{PQ}^2 + \overline{QA_k}^2)$

$= n\overline{PQ}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{QA_k}^2$

$= n\overline{PQ}^2 + n(\overline{OQ}^2 + 1)$(由引理 **8. 1.**知)

$= n(\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 + 1)$

$= n(\overline{OP}^2 + 1)$(畢氏定理)

$= n(t^2 + 1)$，Q.E.D。

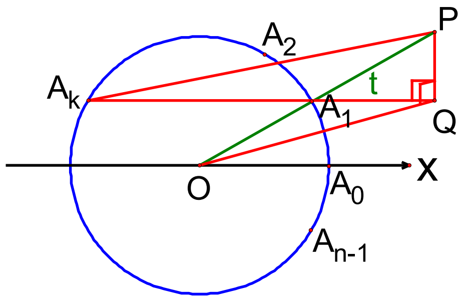


圖 8.4.

定理 8. 5.

當 **P** 為正n(偶數)邊形的外接圓上或同一平面上、甚至空間中任一點，則其到內接正n邊形奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等。**(參[5])**

[證明] 因為n為偶數，所以正n邊形之奇頂點及偶頂點均構成一個正 $\frac{n}{2}$ 邊形，利用上面**引理 8. 1.**和**推論 8. 3.**可得正n邊形的外接圓上或同一平面上、甚至空間中任一點，到此正n邊形奇頂點及偶頂點的距離平方和均為 $\frac{n}{2}(t^2+1)$，故兩者相等，Q.E.D。

玖、結論

一、正 N 邊形的外接圓上動點到遠頂點的距離和與最近兩頂點的距離和之比值為定值。

二、奇數邊$\boldsymbol{2n+1}(\boldsymbol{n\geq 1})$正多邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等。

三、偶數邊$\boldsymbol{2n}(\boldsymbol{n\geq 2})$正多邊形的外接圓上或同一平面上、甚至空間中任一點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等。

四、奇數邊$\boldsymbol{2n+1}(\boldsymbol{n\geq 2})$正多邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離立方和與到偶頂點的距離立方和相等。

五、偶數邊$\boldsymbol{2n}(\boldsymbol{n\geq 3})$正多邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離四次方和與到偶頂點的距離四次方和相等。

六、奇數邊數正多邊形，當邊數$\boldsymbol{2n+3}$以上時，會滿足此外接圓上動點到奇頂點的距離$\boldsymbol{2n+1}$次方和與到偶頂點的距離$\boldsymbol{2n+1}$次方和相等；偶數邊數正多邊形，當邊數$\boldsymbol{2n+2}$以上時，會滿足此外接圓上動點到奇頂點的距離$\boldsymbol{2n}$次方和與到偶頂點的距離$\boldsymbol{2n}$次方和相等。

綜合上述性質，我們得到一個結論：不論 N 為奇數或偶數，正 N($\boldsymbol{N\geq m}$)邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離$\boldsymbol{m-2}$次方和與到偶頂點的距離$\boldsymbol{m-2}$次方和必相等。

拾、參考資料

[1]. 游森棚(106 年 9 月)。森棚教官的數學題：正三角形的線段定和。科學研習月刊，第 56 卷第 10 期。

[2]. 王啟光。正 $2n+1$ 邊形外接圓上一點到各頂點的距離關係。取自於師大附中 www.hs.ntnu.edu.tw/~math/files/3.doc。

[3]. 陳姿妤．蕭妤真。方「圓」百里，必「定」無敵。中華民國第 58 屆中小學科展。

[4]. 姜硯凱．李婕安．張瑄倫。「圓」中註「定」- 圓內接多邊形圓上一點到多邊形頂點、過頂點的切線與對角線距離的關係。中華民國第 60 屆中小學科展。

[5]. 洪誌雄著。輕鬆學好高中數學。小五南出版社，P202~227。

[6]. 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，P71~82。

[7]. sin a+sin 2a +sin 3a +...+sin na 怎麼求和？取自 https://www.yulucn.com/question/122880621 上網日期：110 年 4 月 12 日

[8]. 如何給 cos^n(x)降冪？取自 http://www.360doc.com/content/17/1203/15/47852988_709519434.shtml 上網日期：110 年 4 月 23 日

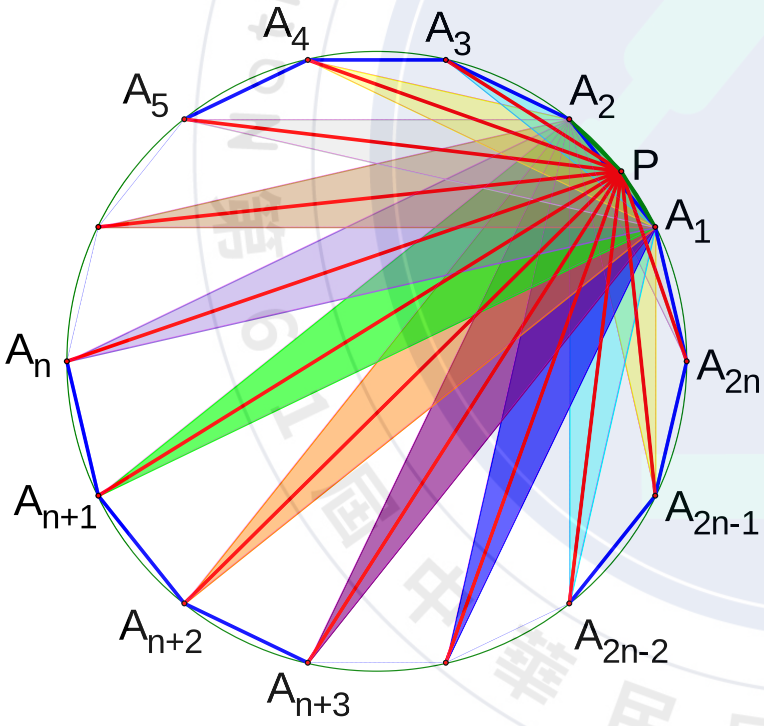
【評語】050407

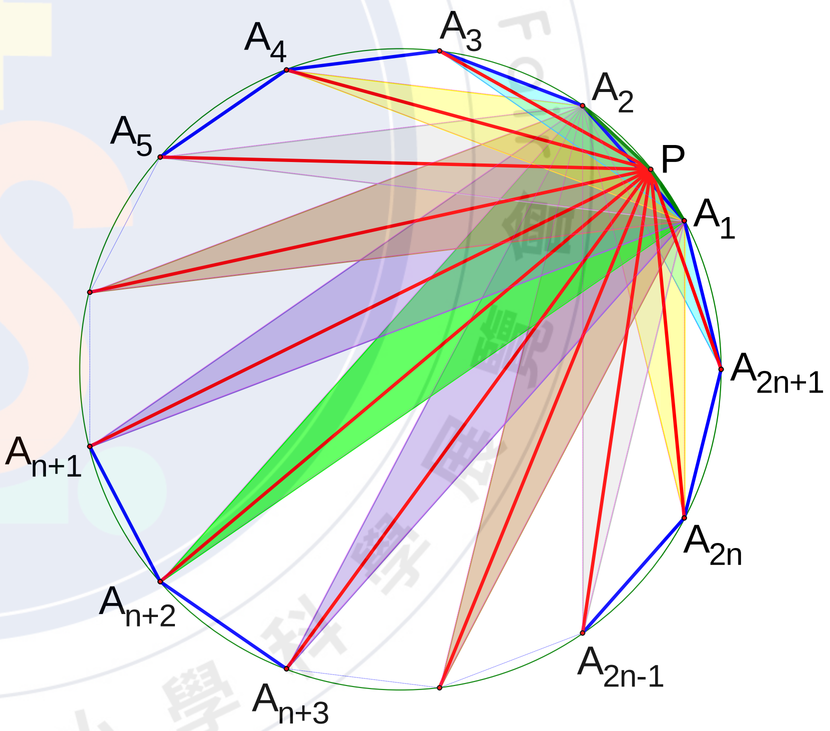
標準的高中科展， 能從一個常見的結果出發， 盡量推廣. 本文的多邊形與一次方和， 二次方和都是常見的結果. 本文後半段能將其推到更高次方， 並有一個一致的結論， 是有點意思的. 但是本問題的推廣在歷屆科展相當常見， 亦有許多的參考資料. 建議作者可以對已知的結果作釐清整理， 使能更清楚也更聚焦在本作品的貢獻與創新之處.

作品簡報

圓內接正多邊形的線段定和

高中組　數學科





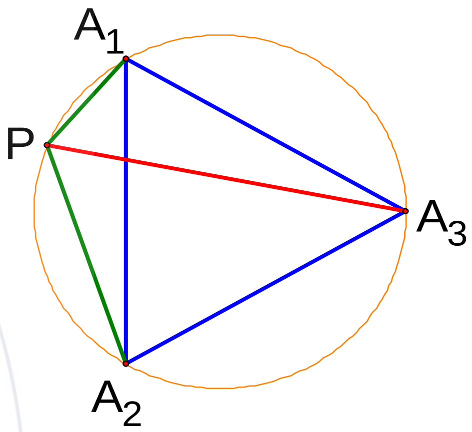
壹、研究動機

科學研習月刊森棚教官的數學題(參[1])中發現：

「**畫正三角形與外接圓，然後在圓上任取一點，**

則此點到較遠頂點的距離會等於到較近兩頂點的距離和。」

我們好奇地想探討正多邊形會不會有相同的性質？



貳、研究目的

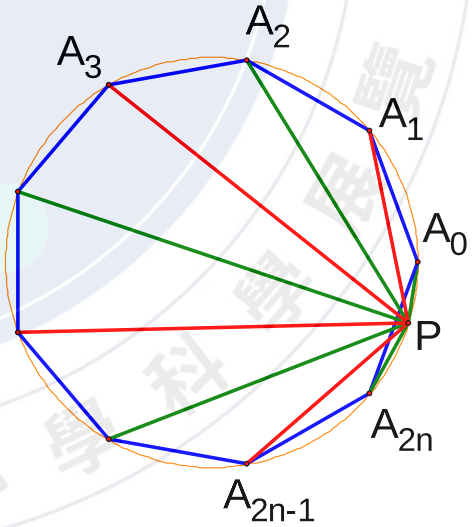
(一)若推廣到其它正多邊形，情況會是如何？

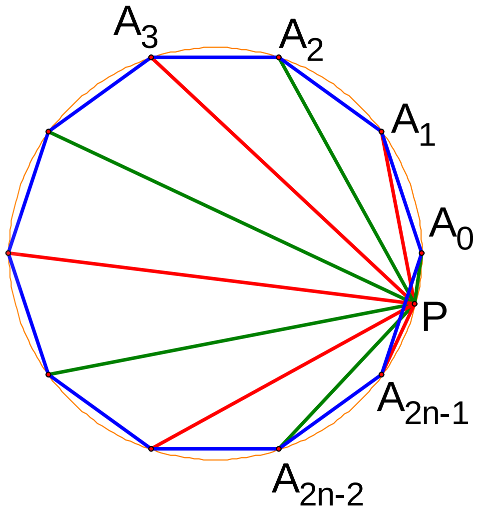
(二)在正奇數$2n+1(n \geq 1)$邊形時，情況會是如何？

(三)在正偶數$2n(n \geq 2)$邊形時，情況會是如何？

(四)在正奇數$2n+1(n \geq 2)$邊形時，情況會是如何？

(五)在正偶數$2n(n \geq 3)$邊形時，情況會是如何？





參、研究架構

圓內接正多邊形的線段定和
任意正多邊形
距離和
比值為定值
古典幾何方法
托勒密定理
積化和差
和差化積
正弦定理
奇數邊數正多邊形
類推
偶數邊數正多邊形
距離和
奇次方距離和
距離平方和
偶次方距離和
不變量
複數極式方法
棣美弗定理
半角公式
倍角公式
推廣
高次方距離和
困難點
複數極式方法
歐拉公式
二項式定理

肆、距離和之比值問題

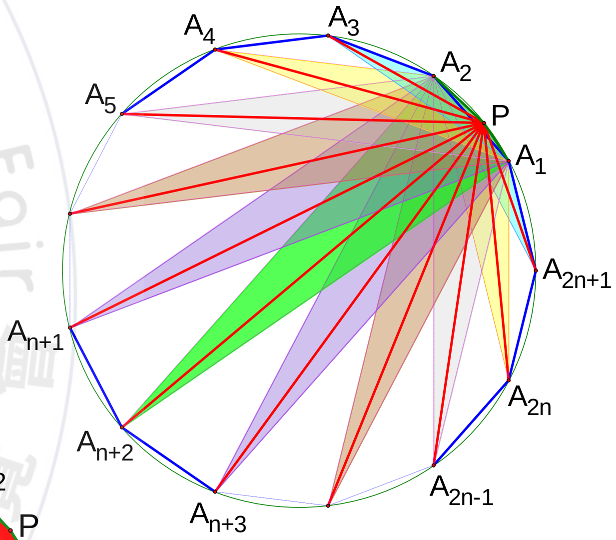
為了方便討論，設P點為$\overset{\frown}{A_1A_2}$上任一點，並且設此正N邊形的邊長為1。

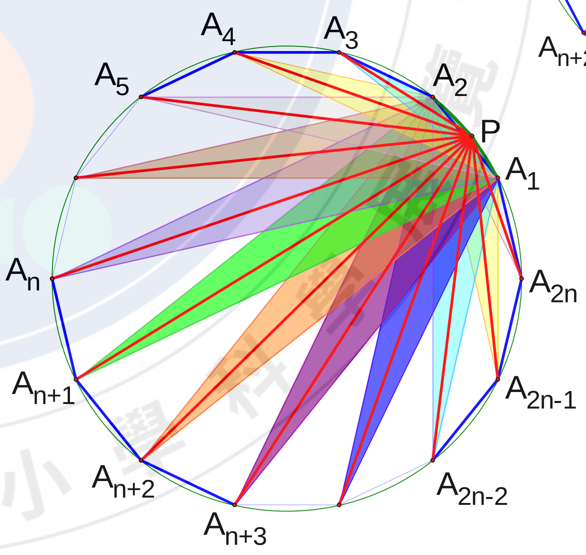
正$2n+1$邊形：

$$\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n+1}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2\sin\frac{n\pi}{2(2n+1)}\sin\frac{(n+1)\pi}{2(2n+1)}}{\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}\sin\frac{\pi}{2n+1}}-1$$

正$2n$邊形：

$$\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}-\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{2n}}-1$$





伍、不變量

引理4.1. (參[2]) 考慮P點落在$\widehat{A_0A_{N-1}}$上，A_k所代表的複數為Z_k，

則 $\overline{PA_k} = |P - Z_k| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k}{N}\pi\right)$，$k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$

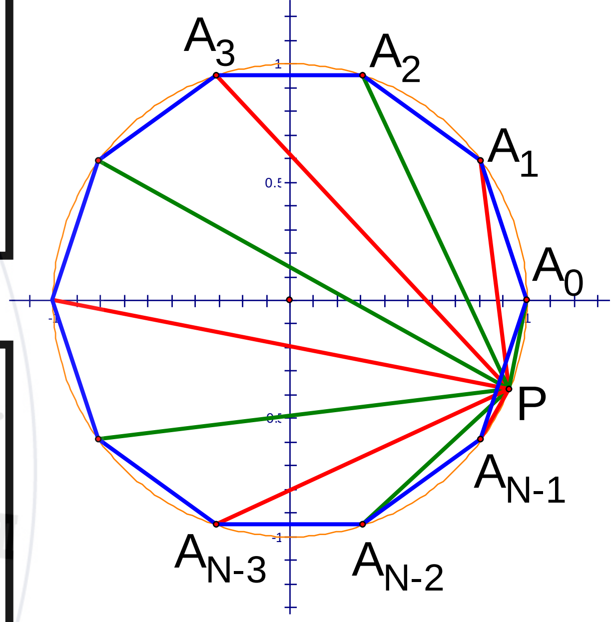
引理4.3. (參[3]) 設$1 \le p \le N-1, N \ge 2, p$，$N \in \mathbb{N}$，則

(1) $\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\theta + \frac{2k}{N}\pi\right) = 0$，$\sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(\theta + \frac{2k}{N}\pi\right) = 0$

(2) $\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\theta + \frac{2k+1}{N}\pi\right) = 0$，$\sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(\theta + \frac{2k+1}{N}\pi\right) = 0$

(3) $\sum_{k=0}^{N-1} \cos p\left(\theta + \frac{2k}{N}\pi\right) = 0$，$\sum_{k=0}^{N-1} \sin p\left(\theta + \frac{2k}{N}\pi\right) = 0$

(4) $\sum_{k=0}^{N-1} \cos p\left(\theta + \frac{2k+1}{N}\pi\right) = 0$，$\sum_{k=0}^{N-1} \sin p\left(\theta + \frac{2k+1}{N}\pi\right) = 0$

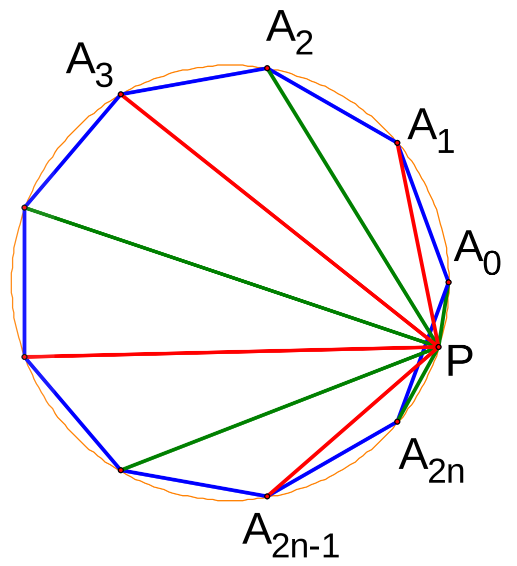


伍、不變量

性質4.4. 正$2n+1(n \geq 1)$邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等。

$$(\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}})-(\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}})$$

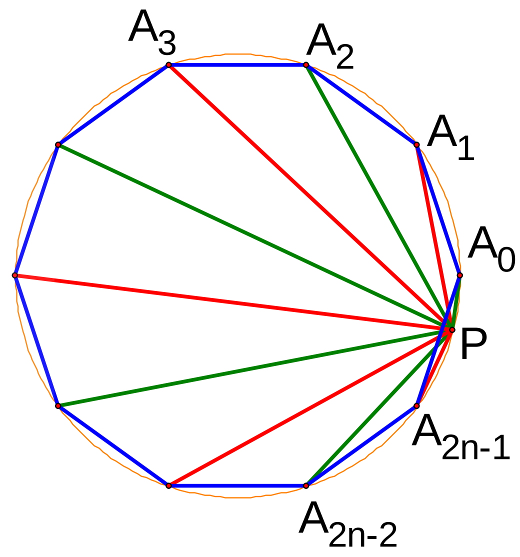
$$=2\sum_{k=0}^{2n} sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)=0$$



性質4.8. 正$2n(n \geq 2)$邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等。

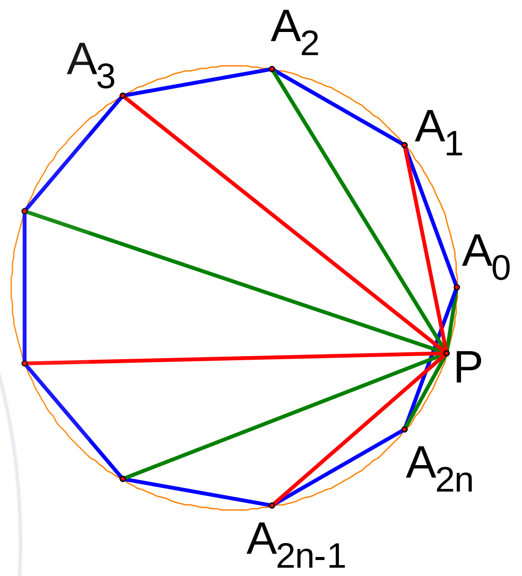
$$\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^2=2n-2\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)=2n$$

$$\overline{PA_0}^2+\overline{PA_2}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^2=2n-2\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)=2n$$



伍、不變量

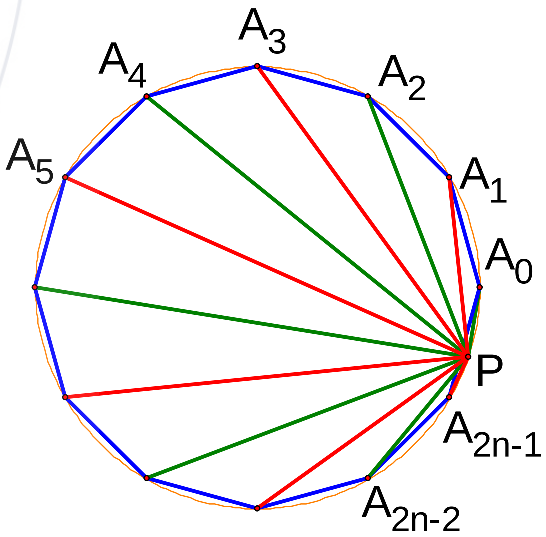
性質5.3. 正$2n+1(n\geq 2)$邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離立方和與到偶頂點的距離立方和相等。



$$\left(\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3\right)-\left(\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3\right)$$

$$=6\sum_{k=0}^{2n} sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)-2\sum_{k=0}^{2n} sin\ 3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)=0$$

性質6.3. 正$2n(n\geq 3)$邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離四次方和與到偶頂點的距離四次方和相等。



$$\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^4$$

$$=6n-8\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)+2\sum_{k=0}^{n-1} cos\ 2\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)=6n$$

$$\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^4$$

$$=6n-8\sum_{k=0}^{n-1} cos\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)+2\sum_{k=0}^{n-1} cos\ 2\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)=6n$$

陸、高次方和

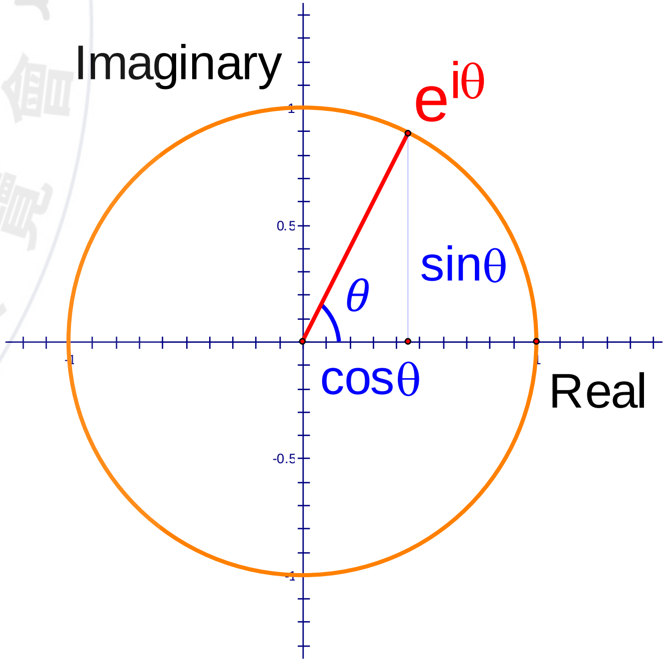
歐拉公式：$e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha \qquad e^{-i\alpha} = cos\alpha - isin\alpha$

$$cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}，sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}，sin^N\alpha = \frac{1}{2^N i^N}\left[e^{i\alpha} + (-1)e^{-i\alpha}\right]^N$$

引理7.1. (參[8])

$$(1)sin^{2n}\alpha = \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_k^{2n}cos(2n-2k)\alpha + \frac{1}{2}C_n^{2n}\right]$$

$$(2)sin^{2n+1}\alpha = \frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_k^{2n+1}sin(2n+1-2k)\alpha\right]$$



陸、高次方和

定理7.2. (參[4]) 設正$2n(n \geq m，m \geq 2)$邊形$A_0A_1A_2\cdots A_{2n-1}$的外接圓，則此點到奇頂點的距離$2m-2$次方和與到偶頂點的距離$2m-2$次方和相等

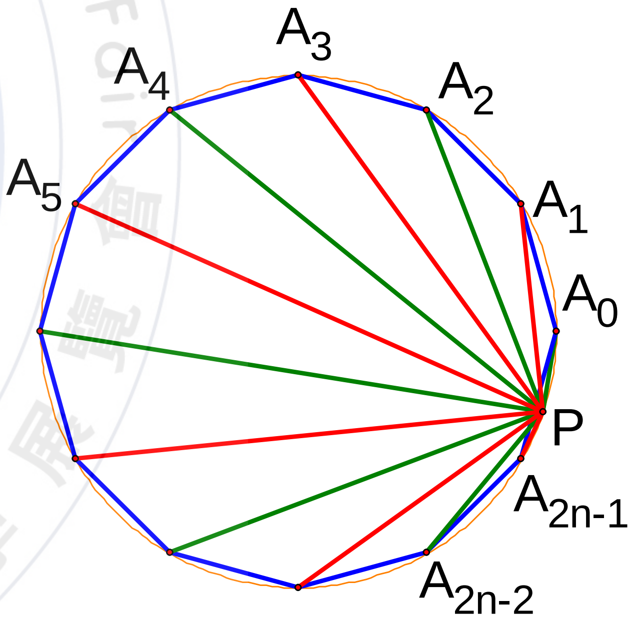
$\overline{PA_k} = |P - Z_k| = 2sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k}{2n}\pi\right)$，其中 $k = 0,1,2,\cdots,2n-1$

$$\overline{PA_1}^{2m-2} + \overline{PA_3}^{2m-2} + \overline{PA_5}^{2m-2} + \cdots + \overline{PA_{2n-1}}^{2m-2} = n \cdot C_{m-1}^{2(m-1)}$$

$$\overline{PA_0}^{2m-2} + \overline{PA_2}^{2m-2} + \overline{PA_4}^{2m-2} + \cdots + \overline{PA_{2n-2}}^{2m-2} = n \cdot C_{m-1}^{2(m-1)}$$

故 $\overline{PA_1}^{2m-2} + \overline{PA_3}^{2m-2} + \overline{PA_5}^{2m-2} + \cdots + \overline{PA_{2n-1}}^{2m-2}$

$= \overline{PA_0}^{2m-2} + \overline{PA_2}^{2m-2} + \overline{PA_4}^{2m-2} + \cdots + \overline{PA_{2n-2}}^{2m-2} (m \geq 2)$



陸、高次方和

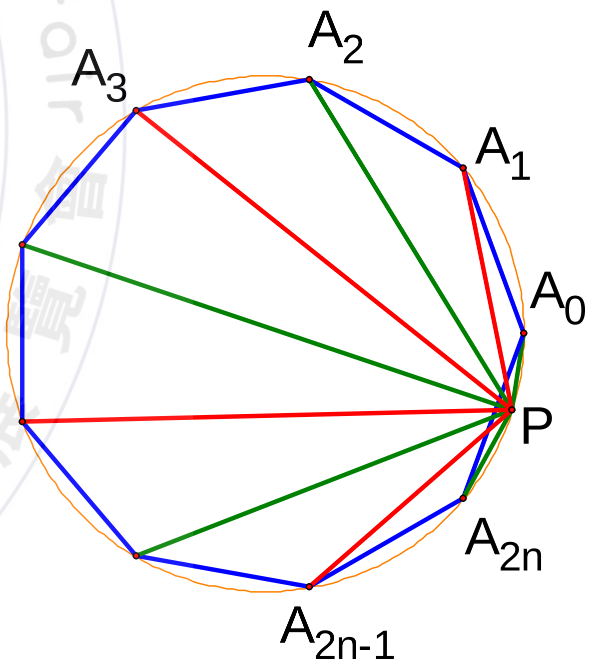
定理7.3. 設正$2n+1(n\geq m，m\geq 1)$邊形$A_0A_1A_2\cdots A_{2n}$的外接圓，則此點到奇頂點的距離$2m-1$次方和與到偶頂點的距離$2m-1$次方和相等

$\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n+1}\pi\right)$，其中$k=0,1,2,\cdots,2n$

$$\left(\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1}\right)-\left(\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}\right)=0$$

故 $\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}$

$=\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1}(m\geq 1)$

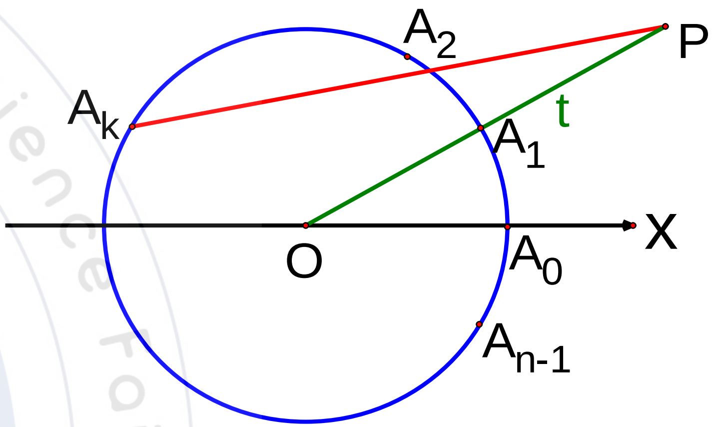


柒、研究討論

引理8. 1. (參[5])

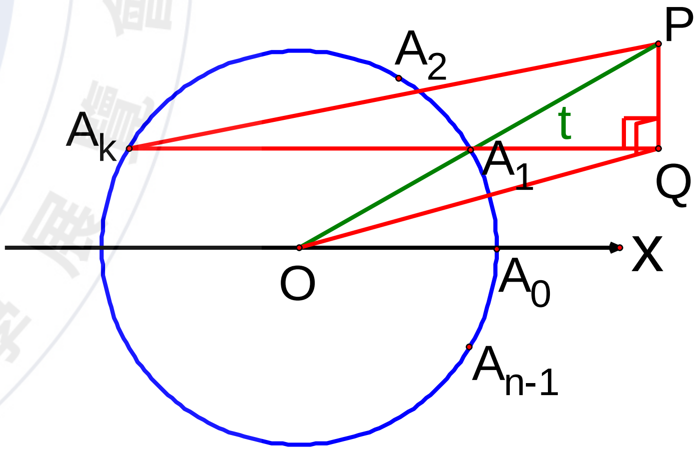
設單位圓之內接正n邊形為$A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$，

P 是同平面上任一點，則 $\sum_{k=0}^{n-1}\overline{PA_k}^2=n(t^2+1)$。



定理8.5. (參[5])

當P為正n(偶數)邊形的外接圓上或同一平面上、甚至空間中任一點，則其到內接正n邊形奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等。



捌、結論

一、正N邊形的外接圓上動點到遠頂點的距離和與最近兩頂點的距離和之比值為定值。

二、奇數邊$2n+1(n\geq 1)$正多邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等。

三、偶數邊$2n(n\geq 2)$正多邊形的外接圓上或同一平面上、甚至空間中任一點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等。

四、奇數邊$2n+1(n\geq 2)$正多邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離立方和與到偶頂點的距離立方和相等。

五、偶數邊$2n(n\geq 3)$正多邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離四次方和與到偶頂點的距離四次方和相等。

六、奇數邊數正多邊形，當邊數$2n+3$以上時，會滿足此外接圓上動點到奇頂點的距離$2n+1$次方和與到偶頂點的距離$2n+1$次方和相等；偶數邊數正多邊形，當邊數$2n+2$以上時，會滿足此外接圓上動點到奇頂點的距離$2n$次方和與到偶頂點的距離$2n$次方和相等。

綜合上述性質，我們得到一個結論：不論N為奇數或偶數，正$N(N\geq m)$邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離 $m-2$次方和與到偶頂點的距離$m-2$次方和必相等。