中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050404

頂心三角形誕生的奇蹟

學校名稱：國立羅東高級中學

作者：	指導老師：
高一 陳　平 高一 郭晨馨 高一 簡靖承	鍾明宏

關鍵詞：頂心三角形、三點共線、面積比例

摘要

在第59屆科展作品（中華民國第59屆中小學科學展覽會換心手術）有給定了一個新的名詞(頂心三角形)：平面上給定$\triangle ABC$及一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，三圓交於三點E、F、G，再以三交點E、F、G為頂點作$\triangle EFG$，則新$\triangle EFG$稱為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，本篇作品主要探討原三角形與其頂心三角形邊長與面積比例關係及頂心線相關性質。

壹、 研究動機

我們看完第59屆科展作品後，我們瞭解了如果由原三角形三頂點為圓心，頂點到垂心（內心、外心）之距離為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，原三角形之垂心（內心、外心）會成為新三角形之內心（外心、垂心），因此我們想要探討這個性質的延伸，討論三角形之間的面積比例關係，並進一步探討若是由三角形三頂點為圓心，頂點到三角形內任意一點為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，此新三角形會有什麼性質。

貳、 研究目的

一、 探討$\triangle ABC$與其頂心三角形$\triangle EFG$之相關性質。

二、 研究$\triangle ABC$面積與其頂心三角形$\triangle EFG$邊長關係及面積比例關係。

三、 探討頂心三角形三點共線問題。

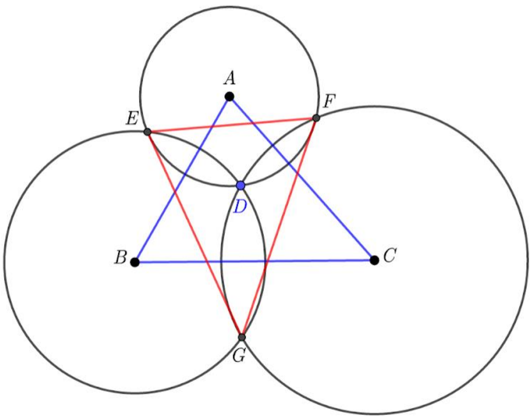
參、 研究設備與器材

紙、筆、電腦、Geogebra

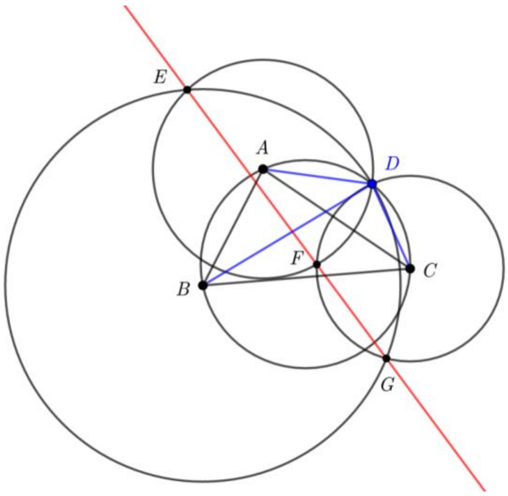
肆、 研究過程及方法

名詞定義：

(一) 頂心三角形：平面上給定$\triangle ABC$及一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，三圓交於三點E、F、G，再以三交點E、F、G為頂點作$\triangle EFG$，則新$\triangle EFG$稱為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形。(圖一)



(圖一)



(圖二)

(二) 頂心線：若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點在其外接圓上，則$\triangle ABC$在D點的頂心三角形會退化成一直線(證明於研究 3)，我們稱該直線為$\triangle ABC$在D點的頂心線。(圖二)

預備定理：

三角形內角的嵌入不等式

若$A+B+C=k\pi, k\in\mathbb{N}$，則對任意實數$x$、$y$、$z$都有

$$x^2+y^2+z^2+2(-1)^k\left(xy\cos C+yz\cos A+zx\cos B\right)\geq 0$$

等號成立條件為$x=y=z=0$或$x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$

Erdos-Mordell Inequality

平面上有一$\triangle ABC$，O為$\triangle ABC$內一點，D、E、F分別為O到$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$之垂線交點，$\overline{OA}=x$，$\overline{OB}=y$，$\overline{OC}=z$，$\overline{OD}=p$，$\overline{OE}=q$，$\overline{OF}=r$，則有不等式

$$x+y+z\geq 2\left(p+q+r\right)$$

滿足$\sin A=\sin B=\sin C$等號成立，也就是$\triangle ABC$為正三角形

引理 1 若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點為其外接圓上一動點，L_{EFG}為$\triangle ABC$在D點的頂心線，則E、F、G的軌跡圓三圓交於$\triangle ABC$垂心。

證明：

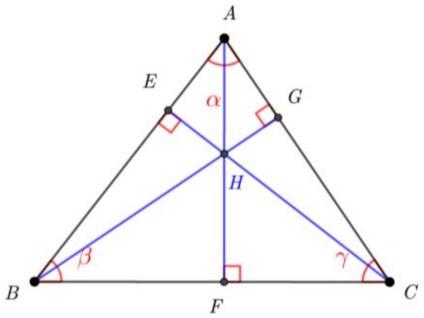
在第 59 屆科展作品有提到頂心三角形還有另一種作圖方式：

以三邊長之延伸線為對稱軸作D點的對稱點E、F、G，則E、F、G為$\triangle ABC$在D點之頂心三角形三頂點。

因為$\triangle ABC$之垂心以三邊長之延伸線為對稱軸作的三對稱點H、I、J在$\triangle ABC$之外接圓上，所以當動點D經過H、I、J時，三頂點E、F、G其中一頂點在$\triangle ABC$之垂心上，也就是說$\triangle ABC$的垂心在三頂點的軌跡圓上，故三頂點的軌跡圓交於一點垂心。

引理 2-1 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，H點為$\triangle ABC$之垂心，$\angle A=\alpha,\angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$，

則 $\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta},\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha},\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$



證明：

設垂心H到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$垂足為E、F、G

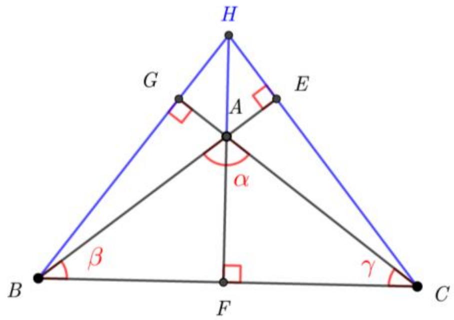
$$\cos\angle CAH=\cos\left(90^\circ-\gamma\right)=\sin\gamma=\frac{\overline{AG}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AB}\cdot\cos\alpha}{\overline{AH}}\Rightarrow\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\cos\angle BAH=\cos\left(90^\circ-\beta\right)=\sin\beta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AC}\cdot\cos\alpha}{\overline{AH}}\Rightarrow\overline{AH}=\overline{AC}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

同理可證$\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}$，$\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$

引理 2-2 若$\triangle ABC$為一鈍角三角形，H點為$\triangle ABC$之垂心，$\angle A=\alpha>90^\circ$, $\angle B=\beta, \angle C=\gamma$，

則 $\overline{AH}=-\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}=-\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$, $\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}$, $\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}$



證明：

設垂心H到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$之延伸線垂足為E、F、G

$$\cos\angle HBF=\cos\left(90^\circ-\gamma\right)=\sin\gamma=\frac{\overline{BF}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{AB}\cdot\cos\beta}{\overline{BH}}\Rightarrow\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

$$\cos\angle HCF=\cos\left(90^\circ-\beta\right)=\sin\beta=\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}=\frac{\overline{AC}\cdot\cos\gamma}{\overline{CH}}\Rightarrow\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}$$

$$\cos\angle AHE=\cos\beta=\frac{\overline{EH}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{BH}\cdot\cos\angle BHE}{\overline{AH}}=\frac{\overline{BH}\cdot\cos\left(\angle AHC+\angle AHB\right)}{\overline{AH}}$$

$$=\frac{\overline{BH}\cdot\cos\left(\beta+\gamma\right)}{\overline{AH}}=-\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}\cdot\cos\alpha$$

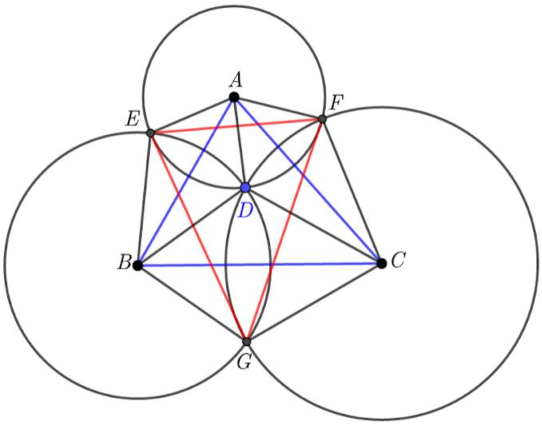
$$\Rightarrow\cos\beta=-\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\overline{AH}=-\overline{BH}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-\overline{AB}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-\overline{AB}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

同理可得$\overline{AH}=-\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$

研究 1-1 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，D點為$\triangle ABC$內任意一點，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$。

證明：

設$\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ，$\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$



$\because \overline{AE}=\overline{AD}=a, \overline{BE}=\overline{BD}=b$ $\therefore$ 四邊形 $ADBE$ 為箏形 $\angle EBA=\angle DBA, \angle EAB=\angle DAB$

同理可證 $\angle DBC=\angle GBC, \angle DCB=\angle GCB, \angle DCA=\angle FCA, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD=2\angle ABC=2\beta$

$\because \overline{BE}=\overline{BG}=b$ $\therefore \triangle BEG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^{\circ}-2\beta\right)}{2}=90^{\circ}-\beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^{\circ}-\beta\right)}$

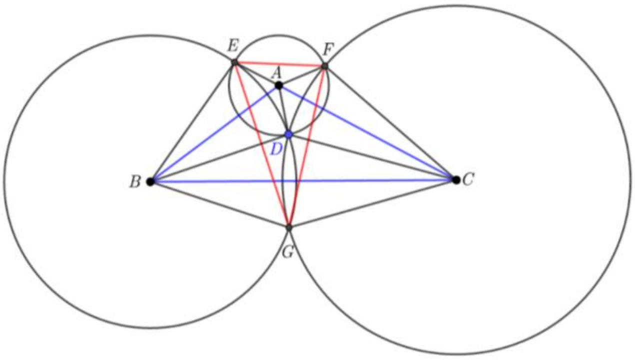
$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得 $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA, \overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$

研究 1-2 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形， D 點為 $\triangle ABC$ 內任意一點， $\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。

證明：

設 $\overline{AD}=a, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$ ， $\angle CAB=\alpha, \angle ABC=\beta, \angle BCA=\gamma$ ，不失一般性，設 α 為鈍角



$\because \overline{AE}=\overline{AD}=a, \overline{BE}=\overline{BD}=b$ $\therefore$ 四邊形 $ADBE$ 為箏形 $\angle EBA=\angle DBA, \angle EAB=\angle DAB$

同理可證 $\angle DBC=\angle GBC, \angle DCB=\angle GCB, \angle DCA=\angle FCA, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD=2\angle ABC=2\beta$

$\because \overline{BE}=\overline{BG}=b$ $\therefore$ $\triangle BEG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得 $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$EDF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\alpha$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a$ $\therefore$ $\triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

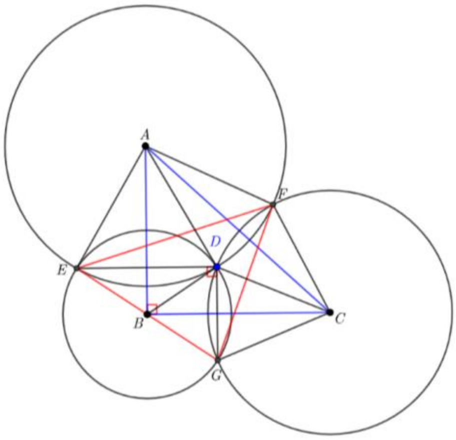
$\angle EAF=360^\circ-EDF=360^\circ-2\alpha$ ，$\angle AEF=\angle AFE=\dfrac{\left(180^\circ-\angle EAF\right)}{2}=\dfrac{\left(2\alpha-180^\circ\right)}{2}=\alpha-90^\circ$

在 $\triangle EAF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin\left(360^\circ-2\alpha\right)}=\dfrac{a}{\sin\left(\alpha-90^\circ\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{a\sin\left(-2\alpha\right)}{-\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-3 若$\triangle ABC$為一直角三角形，D點為$\triangle ABC$內任意一點，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$，$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$，$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$。



證明：

設$\overline{AD}=a$，$\overline{BD}=b$，$\overline{CD}=c$，$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，不失一般性，設β為直角

$\because \overline{AE}=\overline{AD}=a,\overline{BE}=\overline{BD}=b$ $\therefore$四邊形$ADBE$為箏形$\angle EBA=\angle DBA,\angle EAB=\angle DAB$

同理可證$\angle DBC=\angle GBC,\angle DCB=\angle GCB,\angle DCA=\angle FCA,\angle DAC=\angle FAC$

$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle BAC=2\alpha$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a$ $\therefore \triangle AEF$為等腰三角形$\angle AEF=\angle AFE$

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^\circ-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\alpha\right)}{2}=90^\circ-\alpha$$

在$\triangle AEF$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

同理可得$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

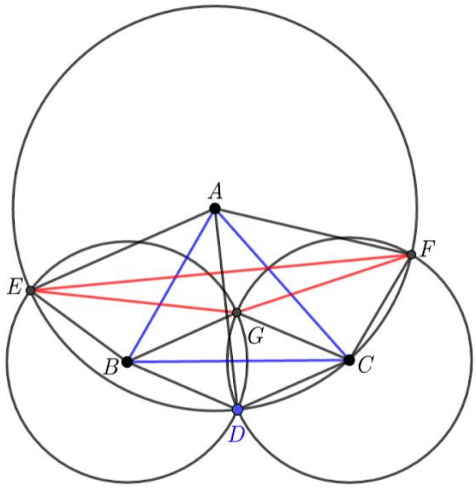
$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD=2\angle ABC=2\beta=180^\circ$

$\because \overline{BE}=\overline{BG}=b,\angle EBG=180^\circ$ $\therefore \overline{EG}$為圓B直徑,$\angle EDG=90^\circ=\angle ABC$

在$\triangle EDG$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EDG}=2b\Rightarrow\overline{EG}=2b\sin\angle ABC=2\overline{BD}\sin\angle ABC$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-4 若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，D 點為 $\triangle ABC$ 外任意一點，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。



證明：

設 $\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ， $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b, \overline{CD}=\overline{CG}=c$ $\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形 $\angle GBC=\angle DBC, \angle GCB=\angle DCB$

同理可證 $\angle EAB=\angle DAB, \angle EBA=\angle DBA, \angle ACD=\angle ACF, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle EBA=\angle DBA=\angle ABG+\angle GBC+\angle DBC=\angle ABG+2\angle GBC$

$\angle EBG=\angle EBA+\angle ABG=2\angle ABG+2\angle GBC=2\beta$

$\because \overline{EB}=\overline{BG}=b$ $\therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得 $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$\angle EAF = \angle EAD + \angle FAD = 2\angle BAD + 2\angle CAD = 2\angle CAB = 2\alpha$

$\because \overline{EA} = \overline{FA} = a \therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF = \angle AFE$

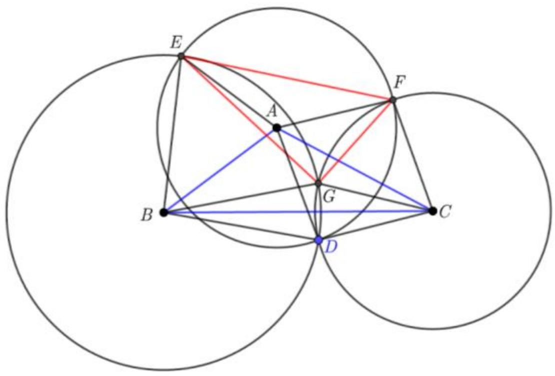
$\angle AEF = \angle AFE = \dfrac{(180^\circ - \angle EAF)}{2} = \dfrac{(180^\circ - 2\alpha)}{2} = 90^\circ - \alpha$

在 $\triangle EAF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin \angle EAF} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin \angle AFE} \Rightarrow \dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha} = \dfrac{a}{\sin(90^\circ - \alpha)}$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{a \sin 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2a \sin\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha} = 2a\sin\alpha = 2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故 $\overline{EF} = 2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG} = 2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF} = 2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-5 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，D 點為 $\triangle ABC$ 外任意一點，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形，則 $\overline{EF} = 2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG} = 2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF} = 2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。



證明：

設 $\overline{AD} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{CD} = c$ ， $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$

$\because \overline{BG} = \overline{BD} = b, \overline{CD} = \overline{CG} = c$ $\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形 $\angle GBC = \angle DBC, \angle GCB = \angle DCB$

同理可證 $\angle EAB = \angle DAB, \angle EBA = \angle DBA, \angle ACD = \angle ACF, \angle DAC = \angle FAC$

$\angle EBA = \angle DBA = \angle ABG + \angle GBC + \angle DBC = \angle ABG + 2\angle GBC$

$\angle EBG = \angle EBA + \angle ABG = 2\angle ABG + 2\angle GBC = 2\beta$

$\because \overline{EB} = \overline{BG} = b \therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG = \angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^{\circ}-2\beta\right)}{2}=90^{\circ}-\beta$$

在$\triangle EBG$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^{\circ}-\beta\right)}$

$$\Rightarrow\overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$EDF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\alpha$

$\because\overline{AE}=\overline{AF}=a\quad\therefore\triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

$\angle EAF=360^{\circ}-EDF=360^{\circ}-2\alpha$

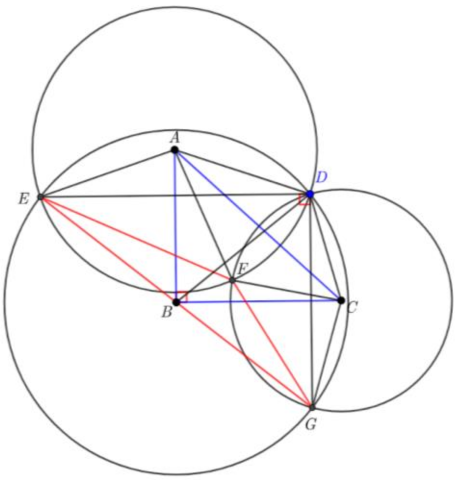
$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(2\alpha-180^{\circ}\right)}{2}=\alpha-90^{\circ}$$

在$\triangle EAF$ 中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin\left(360^{\circ}-2\alpha\right)}=\dfrac{a}{\sin\left(\alpha-90^{\circ}\right)}$

$$\Rightarrow\overline{EF}=\frac{a\sin\left(-2\alpha\right)}{-\sin\left(90^{\circ}-\alpha\right)}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-6 若$\triangle ABC$為一直角三角形，D點為$\triangle ABC$外任意一點，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。



證明：

設 $\overline{AD}=a,\overline{BD}=b,\ \overline{CD}=c$ ， $\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\angle BCA=\gamma$ ，不失一般性，設 β 為直角

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b,\overline{CD}=\overline{CG}=c\ \therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形 $\angle GBC=\angle DBC,\angle GCB=\angle DCB$

同理可得 $\angle EAB=\angle DAB,\angle EBA=\angle DBA,\angle DCA=\angle FCA,\angle DAC=\angle FAC$

$\angle EAB=\angle DAB=\angle BAF+\angle FAC+\angle DAC=\angle BAF+2\angle FAC$

$\angle EAF=\angle EAB+\angle BAF=2\angle BAF+2\angle FAC=2\alpha$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a\quad \therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^\circ-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\alpha\right)}{2}=90^\circ-\alpha$$

在 $\triangle EAF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

同理可得 $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

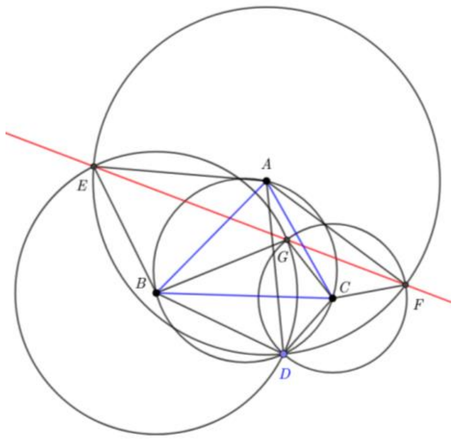
$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD=2\angle ABC=2\beta=180^\circ$

$\because \overline{BE}=\overline{BG}=b,\angle EBG=180^\circ\quad \therefore \overline{EG}$ 為圓 B 的直徑 , $\angle EDG=90^\circ=\angle ABC$

在 $\triangle EDG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EDG}=2b\Rightarrow\overline{EG}=2b\sin\angle ABC=2\overline{BD}\sin\angle ABC$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB,\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC,\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-7 若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形， D 點為其外接圓上一動點， L_{EFG} 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心線，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB,\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC,\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。



證明：

設 $\overline{AD}=a$，$\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ， $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b, \overline{CD}=\overline{CG}=c$ $\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形 $\angle GBC=\angle DBC, \angle GCB=\angle DCB$

同理可證 $\angle EAB=\angle DAB, \angle EBA=\angle DBA$

$\angle EBA=\angle DBA=\angle ABG+\angle GBC+\angle DBC=\angle ABG+2\angle GBC$

$\angle EBG=\angle EBA+\angle ABG=2\angle ABG+2\angle GBC=2\beta$

$\because \overline{EB}=\overline{BG}=b$ $\therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

$\because \overline{AD}=\overline{AF}, \overline{CD}=\overline{CF}, \overline{AC}=\overline{AC}$ $\therefore \triangle ACD\cong\triangle ACF\left(SSS\text{全等}\right)$, $\angle ACD=\angle ACF, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle DCB=\angle GCB=\gamma-\angle ACG$

$\angle GCF=\angle ACF+\angle ACG=\angle ACD+\angle ACG=\left(\gamma+\angle DCB\right)+\angle ACG=2\gamma$

$\because \overline{CG}=\overline{CF}=c$ $\therefore \triangle GCF$ 為等腰三角形 $\angle CGF=\angle CFG$

$$\angle CGF=\angle CFG=\frac{\left(180^\circ-\angle GCF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\gamma\right)}{2}=90^\circ-\gamma$$

在 $\triangle GCF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{GF}}{\sin\angle GCF}=\dfrac{\overline{CF}}{\sin\angle CGF}\Rightarrow\dfrac{\overline{GF}}{\sin 2\gamma}=\dfrac{c}{\sin\left(90^\circ-\gamma\right)}$

$$\Rightarrow \overline{GF}=\frac{c\sin 2\gamma}{\cos\gamma}=\frac{2c\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma}=2c\sin\gamma=2\overline{CD}\sin\angle BCA$$

$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle CAB=2\alpha$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a$ $\therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

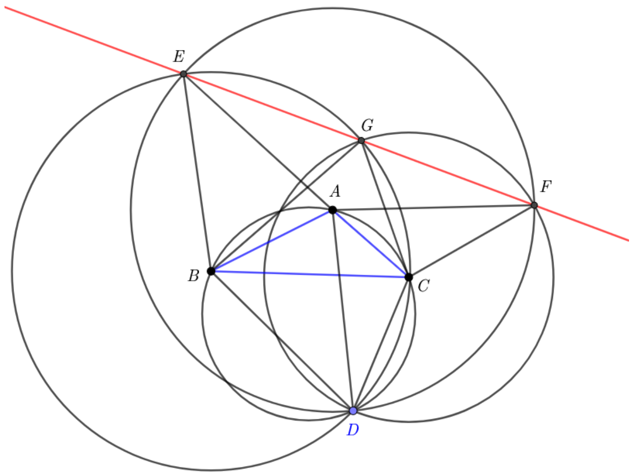
$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(180^{\circ}-2\alpha\right)}{2}=90^{\circ}-\alpha$$

在 $\triangle EAF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(90^{\circ}-\alpha\right)}$

$$\Rightarrow\overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-8 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形， D 點為其外接圓上一動點， L_{EFG} 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心線，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。



證明：

設 $\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ， $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ ，不失一般性，設 α 為鈍角

$\because\overline{BG}=\overline{BD}=b,\overline{CD}=\overline{CG}=c$ $\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形 $\angle GBC=\angle DBC,\angle GCB=\angle DCB$

同理可證 $\angle EAB=\angle DAB,\angle EBA=\angle DBA$

$\angle EBA=\angle DBA=\beta+\angle DBC=\beta+\angle GBC=2\beta+\angle ABG$

$\angle EBG=\angle EBA-\angle ABG=2\beta$

$\because\overline{EB}=\overline{BG}=b$ $\therefore\triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$$

在$\triangle EBG$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

$$\Rightarrow\overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

$\because\overline{AD}=\overline{AF},\overline{CD}=\overline{CF},\overline{AC}=\overline{AC}\therefore\triangle ACD\cong\triangle ACF\left(SSS\text{全等}\right)$，$\angle ACD=\angle ACF,\angle DAC=\angle FAC$

$$\angle DCB=\angle GCB=\gamma+\angle ACG$$

$$\angle GCF=\angle ACF-\angle ACG=\angle ACD-\angle ACG=\left(\gamma+\angle DCB\right)-\angle ACG=2\gamma$$

$\because\overline{CG}=\overline{CF}=c\therefore\triangle GCF$ 為等腰三角形 $\angle CGF=\angle CFG$

$$\angle CGF=\angle CFG=\frac{\left(180^\circ-\angle GCF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\gamma\right)}{2}=90^\circ-\gamma$$

在$\triangle GCF$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{GF}}{\sin\angle GCF}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle CFG}\Rightarrow\dfrac{\overline{GF}}{\sin 2\gamma}=\dfrac{c}{\sin\left(90^\circ-\gamma\right)}$

$$\Rightarrow\overline{GF}=\frac{c\sin 2\gamma}{\cos\gamma}=\frac{2c\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma}=2c\sin\gamma=2\overline{CD}\sin\angle BCA$$

$$EDF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle CAB=2\alpha$$

$\because\overline{AE}=\overline{AF}=a\therefore\triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

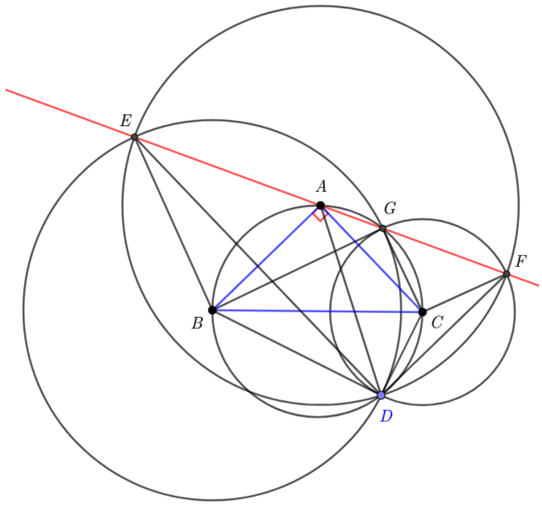
$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{180^\circ-\left(360^\circ-EDF\right)}{2}=\frac{\left(2\alpha-180^\circ\right)}{2}=\alpha-90^\circ$$

在$\triangle EAF$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin\left(360^\circ-2\alpha\right)}=\dfrac{a}{\sin\left(\alpha-90^\circ\right)}$

$$\Rightarrow\overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$，$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$，$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-9 若$\triangle ABC$為一直角三角形，D點為其外接圓上一動點，L_{EFG}為$\triangle ABC$在D點的頂心線，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$，$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$，$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$。



證明：

設 $\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ， $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ ，不失一般性，設 α 為直角

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b, \overline{CD}=\overline{CG}=c$ $\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形 $\angle GBC=\angle DBC, \angle GCB=\angle DCB$

同理可證 $\angle EAB=\angle DAB, \angle EBA=\angle DBA$

$\angle EBA=\angle DBA=\angle ABG+\angle GBC+\angle DBC=\angle ABG+2\angle GBC$

$\angle EBG=\angle EBA+\angle ABG=2\angle ABG+2\angle GBC=2\beta$

$\because \overline{EB}=\overline{BG}=b$ $\therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^{\circ}-2\beta\right)}{2}=90^{\circ}-\beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^{\circ}-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

$\because \overline{AD}=\overline{AF}, \overline{CD}=\overline{CF}, \overline{AC}=\overline{AC}$ $\therefore \triangle ACD\cong\triangle ACF\left(SSS全等\right)$, $\angle ACD=\angle ACF, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle DCB=\angle GCB=\gamma+\angle ACG$

$\angle GCF=\angle ACF-\angle ACG=\angle ACD-\angle ACG=\left(\gamma+\angle DCB\right)-\angle ACG=2\gamma$

$\because \overline{CG}=\overline{CF}=c\ \therefore \triangle GCF$ 為等腰三角形 $\angle CGF=\angle CFG$

$$\angle CGF=\angle CFG=\frac{\left(180^{\circ}-\angle GCF\right)}{2}=\frac{\left(180^{\circ}-2\gamma\right)}{2}=90^{\circ}-\gamma$$

在 $\triangle GCF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{GF}}{\sin\angle GCF}=\dfrac{\overline{CG}}{\sin\angle CFG}\Rightarrow\dfrac{\overline{GF}}{\sin 2\gamma}=\dfrac{c}{\sin\left(90^{\circ}-\gamma\right)}$

$$\Rightarrow \overline{GF}=\frac{c\sin 2\gamma}{\cos\gamma}=\frac{2c\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma}=2c\sin\gamma=2\overline{CD}\sin\angle BCA$$

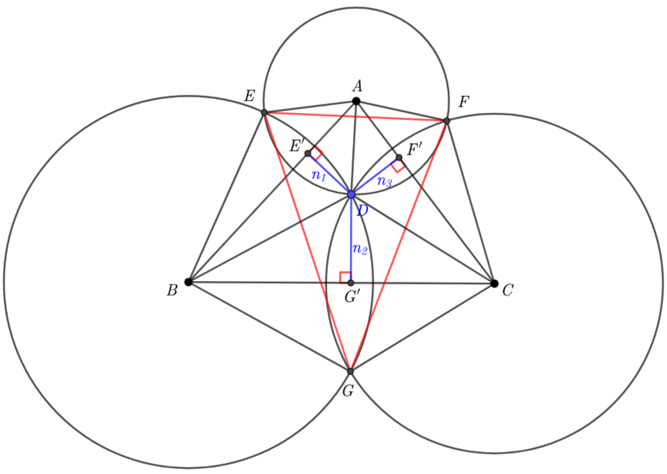
$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle CAB=2\alpha=180^{\circ}$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a,\angle EAF=180^{\circ}\ \therefore \overline{EF}$ 為圓 A 的直徑，$\angle EDF=90^{\circ}=\angle CAB$

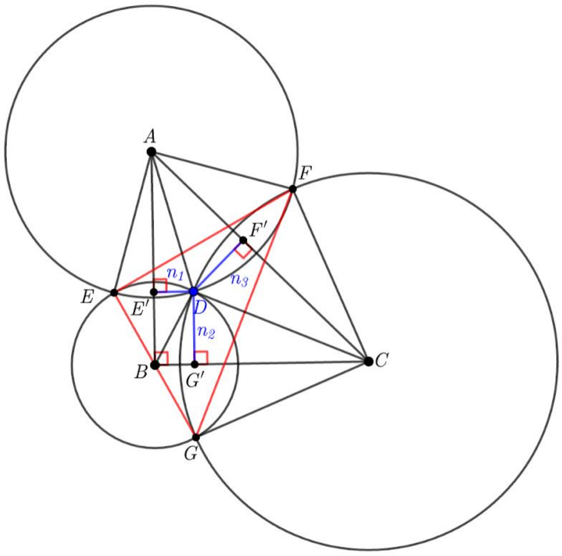
在 $\triangle EDF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EDF}=2a\Rightarrow\overline{EF}=2a\sin\angle CAB=2\overline{AD}\sin\angle CAB$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

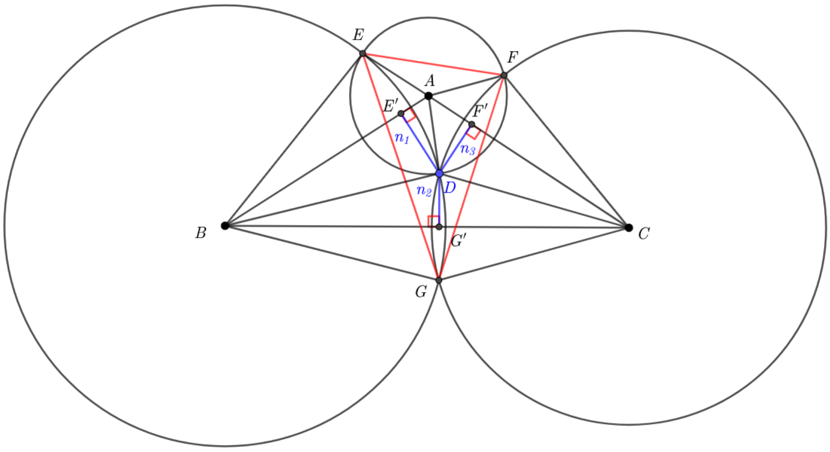
研究 2-1 若 $\triangle ABC$ 為任意三角形，D 點為 $\triangle ABC$ 內任意一點，D 點到 $\triangle ABC$ 三邊長的垂線分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 於 E' 、 G' 、 F' 三點，$\overline{E'D}=n_1,\overline{G'D}=n_2,\overline{F'D}=n_3$ ，$\angle BAC=\alpha,\angle ABC=\beta,\angle BCA=\gamma$ ，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形，則 $\triangle EFG$ 之面積為 $2n_1n_3\sin\alpha+2n_1n_2\sin\beta+2n_2n_3\sin\gamma$



銳角三角形(圖一)



直角三角形(圖二)



鈍角三角形(圖三)

證明：

$\because \overline{BE}=\overline{BD}, \overline{AE}=\overline{AD}$ $\therefore$ 四邊形 $BEAD$ 為箏形，$\overline{AB}$ 垂直平分 $\overline{ED}$

$\overline{EE'}=\overline{DE'} \Rightarrow n_1=\dfrac{1}{2}\overline{ED}$ 同理可得 $n_2=\dfrac{1}{2}\overline{GD}, n_3=\dfrac{1}{2}\overline{FD}$

$\because \angle BE'D=\angle BG'D=\angle CG'D=\angle CF'D=\angle AF'D=\angle AE'D=90^\circ$

$\therefore$ 四邊形 $BE'DG'$、四邊形 $CG'DF'$、四邊形 $AF'DE'$ 為圓內接四邊形

$\angle FDE=180^\circ-\alpha, \angle EDG=180^\circ-\beta, \angle GDF=180^\circ-\gamma$ (圓內接四邊形對角互補)

$$
\begin{aligned}
\triangle EFG &= \triangle FDE+\triangle EDG+\triangle GDF \\
&= \frac{1}{2}\overline{ED}\cdot\overline{FD}\sin\angle FDE+\frac{1}{2}\overline{ED}\cdot\overline{GD}\sin\angle EDG+\frac{1}{2}\overline{GD}\cdot\overline{FD}\sin\angle GDF \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2n_1\cdot 2n_3\sin\angle FDE+\frac{1}{2}\cdot 2n_1\cdot 2n_2\sin\angle EDG+\frac{1}{2}\cdot 2n_2\cdot 2n_3\sin\angle GDF \\
&= 2n_1n_3\sin\left(180^\circ-\alpha\right)+2n_1n_2\sin\left(180^\circ-\beta\right)+2n_2n_3\sin\left(180^\circ-\gamma\right) \\
&= 2n_1n_3\sin\alpha+2n_1n_2\sin\beta+2n_2n_3\sin\gamma
\end{aligned}
$$

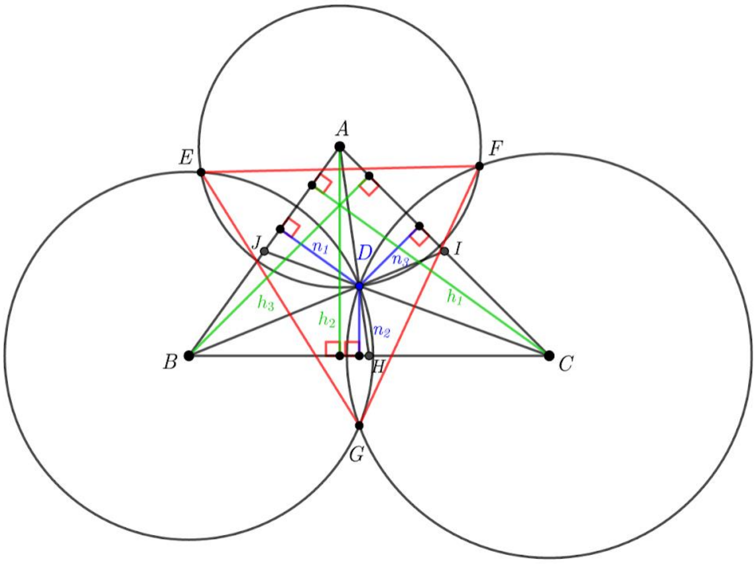
研究 2-2 D 點為 $\triangle ABC$ 的重心，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在重心 D 的頂心三角形，

$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$，則 $\triangle EFG$ 面積

$=\dfrac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)$，且 $\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\le 1$，$\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立。

證明：

設$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$邊上的高分別為h_1、h_2、h_3，重心到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$之垂直距離分別為n_1、n_2、n_3，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中線分別為$\overline{CJ}$、$\overline{AH}$、$\overline{BI}$



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AC}\sin\gamma=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_1\Rightarrow h_1=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}}\sin\gamma$$

同理可得$h_2=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\overline{BC}}\sin\alpha$, $h_3=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{\overline{AC}}\sin\beta$

$\because n_1:h_1=\overline{JD}:\overline{JC}=1:3$ $\therefore n_1=\dfrac{1}{3}h_1$ 同理可得$n_2=\dfrac{1}{3}h_2$, $n_3=\dfrac{1}{3}h_3$

根據研究 2-1，$\triangle EFG=2n_1n_3\sin\alpha+2n_1n_2\sin\beta+2n_2n_3\sin\gamma$

$$\begin{aligned}\triangle EFG&=2n_1n_3\sin\alpha+2n_1n_2\sin\beta+2n_2n_3\sin\gamma\\&=2\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{3\cdot\overline{AB}}\sin\gamma\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{AC}}\sin\beta\cdot\sin\alpha+2\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{3\cdot\overline{AB}}\sin\gamma\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{BC}}\sin\alpha\cdot\sin\beta\\&\quad+2\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{BC}}\sin\alpha\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{AC}}\sin\beta\cdot\sin\gamma\\&=\frac{2}{9}\cdot\overline{BC}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\frac{2}{9}\cdot\overline{AC}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\frac{2}{9}\cdot\overline{AB}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\&=\frac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)\end{aligned}$$

$$\triangle ABC=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{4R}=\frac{2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma}{4R}=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\ (R\text{為外接圓半徑})$$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{\frac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{9R^2}$$

$$=\frac{\left(2R\sin\alpha\right)^2+\left(2R\sin\beta\right)^2+\left(2R\sin\gamma\right)^2}{9R^2}$$

$$=\frac{4R^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)}{9R^2}=\frac{4}{9}\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\frac{1-\cos 2\gamma}{2}\right)$$

$$=\frac{4}{9}\left[\frac{3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)}{2}\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\right]$$

則根據三角形內角的嵌入不等式，對任意實數 x 、 y 、 z 恆有

$$x^2+y^2+z^2+2(-1)^k\left(xy\cos 2\alpha+yz\cos 2\beta+zx\cos 2\gamma\right)\geq 0$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow 2\alpha+2\beta+2\gamma=2\pi\text{ , }k=2\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(xy\cos 2\alpha+yz\cos 2\beta+zx\cos 2\gamma\right)\geq 0$$

取 $x=y=z=1$ 代入不等式得

$$3+2\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\geq 0\Rightarrow \cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\geq -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\leq\frac{3}{2}\Rightarrow 3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\leq\frac{9}{2}$$

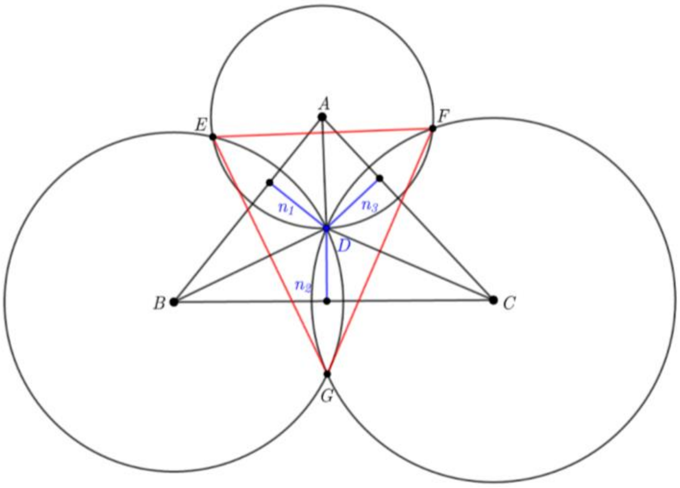
$$\Rightarrow\frac{2}{9}\left[3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\right]\leq 1\Rightarrow\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\leq 1$$

等號在 $x:y:z=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=1:1:1$ 時成立，此時 $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ ， $\triangle ABC$ 為正三角形。

> 研究 2-3 若 D 點為 $\triangle ABC$ 的內心， $\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在內心 D 的頂心三角形，
>
> $\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$ ，則 $\triangle EFG$ 面積 $=2r^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$ ， r 為 $\triangle ABC$ 內接圓半徑，且 $\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\leq 1$, $\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立。

證明：

設 $\overline{AD}=a, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$ ，內心到三邊長 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 之垂直距離分別為 n_1 、 n_2 、 n_3



根據研究 2-1 $\triangle EFG = 2n_1n_3\sin\gamma + 2n_1n_2\sin\alpha + 2n_2n_3\sin\beta$

$\because D$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心 $\therefore n_1 = n_2 = n_3 = r$

$\triangle EFG = 2r^2\sin\alpha + 2r^2\sin\beta + 2r^2\sin\gamma = 2r^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

$\triangle ABC = r\cdot S ,(S = \dfrac{\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB}}{2})$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} = \frac{2r^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{r\cdot S} = \frac{2r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{S} = \frac{4r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{(\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB})}$$

$\because \overline{BC} = 2R\sin\alpha, \overline{AC} = 2R\sin\beta, \overline{AB} = 2\mathrm{R}\sin\gamma$

$\therefore \overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB} = 2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} = \frac{4r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)} = \frac{2r}{R}$$

根據 *Erdos-Mordell Inequality* $a+b+c \ge 2(n_1+n_2+n_3) \Rightarrow a+b+c \ge 6r$

當 $\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立，因此 $a=b=c=R$

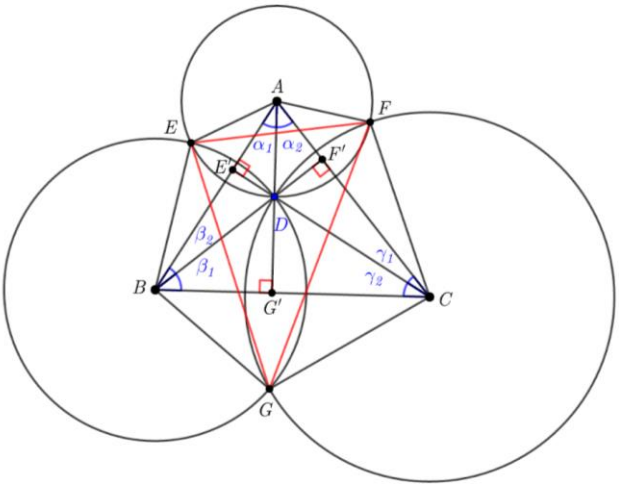
$a+b+c \ge 2(n_1+n_2+n_3) \Rightarrow 3R \ge 6r \Rightarrow \dfrac{2r}{R} \le 1$ ，得 $\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC} = \dfrac{2r}{R} \le 1$

研究 2-4 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，D點為$\triangle ABC$的垂心，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在垂心D的頂心三角形，$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，則$\triangle EFG$面積$=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$（$R$為$\triangle ABC$外接圓半徑)，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\le 1$，當$\triangle ABC$為正三角形時等號成立。

證明：

設,$\overline{AD}=a$,$\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$，$\angle DAB=\alpha_1,\angle DAC=\alpha_2,\angle DBC=\beta_1,\angle DBA=\beta_2,\angle DCA=\gamma_1$

$\angle DCB=\gamma_2$，垂心到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$垂足為E'、G'、F'。



$\because \angle EBA=\angle DBA=\beta_2$ (四邊形$EADB$為箏形)

$\therefore \angle EBD=2\angle EGD=2\beta_2$ (圓周角)$,\angle EGD=\beta_2=\gamma_1$ (D點為垂心)

同理可得$\angle FGD=\gamma_1=\beta_2$

$\angle EGF=\angle EGD+\angle FGD=\angle ABD+\angle ACD=2\beta_2=2\left(90^\circ-\alpha\right)=180^\circ-2\alpha$

根據引理 2-1，$b=\dfrac{\overline{AB}\cdot\cos\beta}{\sin\gamma}$, $c=\dfrac{\overline{AC}\cdot\cos\gamma}{\sin\beta}$

$$\overline{EG}=2b\sin\beta=2\frac{\overline{AB}\cdot\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot\sin\beta=2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}=2R\sin 2\beta\left(\text{正弦定理:}\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}=2R\right)$$

同理可得$\overline{GF}=2R\sin 2\gamma$

$$\triangle EFG=\frac{1}{2}\cdot\overline{EG}\cdot\overline{GF}\sin\angle EGF=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin 2\beta\cdot 2R\sin 2\gamma\sin\left(180^\circ-2\alpha\right)=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin\beta\cos\beta\cdot 2\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

當 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ 且 $0^\circ<\alpha$ 、 β 、 $\gamma<90^\circ$ 時，根據算幾不等式

$\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ， $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ 時

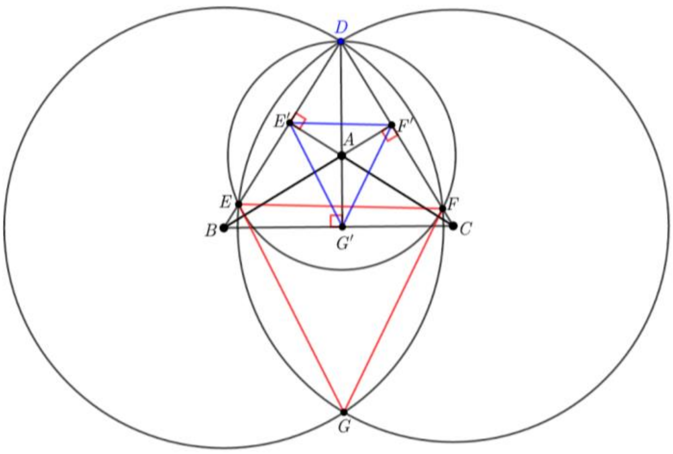
$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 有最大值 $\dfrac{1}{8}$ ，即 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leq\dfrac{1}{8}$

故 $\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leq 1$ ，當 $\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立。

研究 2-5 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形， D 點為 $\triangle ABC$ 的垂心， $\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在垂心 D 的頂心三角形， $\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$ ，則 $\triangle EFG$ 面積 $=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC$ ，且 $\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}<8$ 。

證明：

設垂心到三邊長 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 之延長線的垂足為 F',G',E' ，不失一般性，設 α 為鈍角。



$\because \angle AE'B=\angle AG'B=90^\circ$

$\therefore A, G', B, E'$ 四點共圓, 且此圓直徑為 $\overline{AB}$

同理可得 A, F', C, G' 四點共圓, 且此圓直徑為 $\overline{AC}$

$\because \overline{DE'}:\overline{DE}=1:2$, $\overline{DF'}:\overline{DF}=1:2, \angle E'DF'=\angle EDF$

$\therefore \triangle E'DF'\sim\triangle EDF$ (SAS相似) , 且 $\overline{E'F'}:\overline{EF}=1:2$

同理可證 $\overline{E'G'}:\overline{EG}=1:2$, $\overline{F'G'}:\overline{FG}=1:2$

$\because \overline{E'F'}:\overline{EF}=1:2$, $\overline{E'G'}:\overline{EG}=1:2$, $\overline{F'G'}:\overline{FG}=1:2$,

$\therefore \triangle E'F'G' \sim \triangle EFG\left(SSS\text{相似}\right)$, 且$\triangle E'F'G' : \triangle EFG=1:4$

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \Rightarrow \beta+\gamma=180^\circ-\alpha$

在$\triangle BCE'$中，$\angle E'=90^\circ \Rightarrow \angle ABE'=90^\circ-\left(\beta+\gamma\right)=90^\circ-\left(180^\circ-\alpha\right)=\alpha-90^\circ$

同理可得 $\angle ACF'=\alpha-90^\circ$

$\because \angle ABE'=\angle AG'E'$ ($AG'BE'$ 四點共圓,所對的弧相同)

$\angle ACF'=\angle AG'F'$ ($AF'CG'$ 四點共圓,所對的弧相同)

$\therefore \angle E'G'F'=\angle E'G'A+\angle F'G'A=\angle ABE'+\angle ACF'=\left(\alpha-90^\circ\right)+\left(\alpha-90^\circ\right)=2\alpha-180^\circ$

$$\frac{\overline{G'E'}}{\sin\angle E'BC}=\overline{AB} \Rightarrow \overline{G'E'}=\overline{AB}\cdot\sin\angle E'BC=\overline{AB}\cdot\sin\left(90^\circ-\gamma\right)=\overline{AB}\cdot\cos\gamma$$

$$\frac{\overline{G'F'}}{\sin\angle F'CB}=\overline{AC} \Rightarrow \overline{G'F'}=\overline{AC}\cdot\sin\angle F'CB=\overline{AC}\cdot\sin\left(90^\circ-\beta\right)=\overline{AC}\cdot\cos\beta$$

$$\triangle E'F'G'=\frac{1}{2}\overline{G'E'}\cdot\overline{G'F'}\sin\angle E'G'F'=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin\left(2\alpha-180^\circ\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin\left(180^\circ-2\alpha\right)=-\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin2\alpha$$

$$=-\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha=-\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha$$

$$=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\alpha\right)=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\triangle ABC$$

$\because \triangle E'F'G' : \triangle EFG=1:4$

$\therefore \triangle EFG=4\triangle E'F'G'=-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\triangle ABC=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC}{\triangle ABC}=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|$$

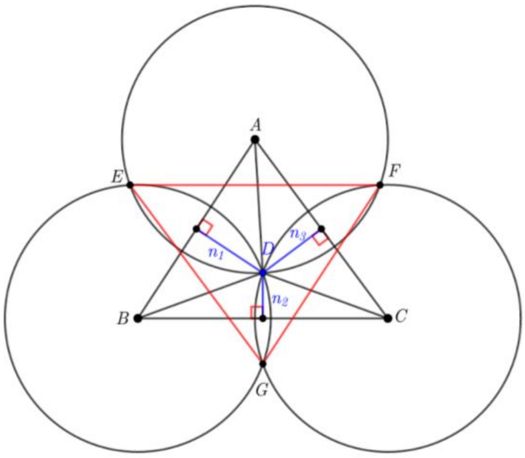
$\because -1<\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<1 \Rightarrow 0<\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|<1 \Rightarrow 0<8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|<8$

$\therefore \dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|<8$

研究 2-6 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，D點為$\triangle ABC$的外心，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在外心D的頂心三角形，$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$，則$\triangle EFG$面積$=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$（$R$為$\triangle ABC$外接圓半徑)，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=1$。

證明：

設$\overline{AD}=a,\overline{BD}=b,\overline{CD}=c$，外心到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$之垂直距離分別為$n_1$、$n_2$、$n_3$



$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot n_1=\frac{1}{2}ab\sin\angle BDA\Rightarrow n_1=\frac{ab}{\overline{AB}}\sin\angle BDA=\frac{R^2}{\overline{AB}}\sin 2\gamma$$

$$=R^2\cdot\frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\overline{AB}}=R^2\cdot\frac{\sin\gamma}{\overline{AB}}\cdot 2\cos\gamma=R^2\cdot\frac{1}{2R}\cdot 2\cos\gamma=R\cos\gamma$$

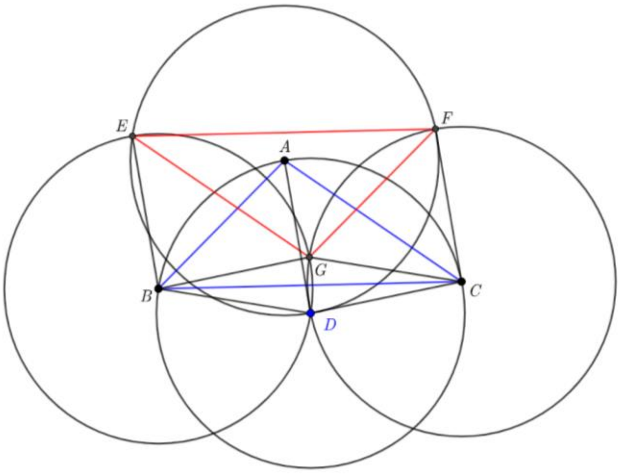
同理可得$n_2=R\cos\alpha,n_3=R\cos\beta$

根據研究 2-1

$$\begin{aligned}\triangle EFG&=2n_1n_3\sin\alpha+2n_1n_2\sin\beta+2n_2n_3\sin\gamma\\&=2R\cos\gamma\cdot R\cos\beta\cdot\sin\alpha+2R\cos\gamma\cdot R\cos\alpha\cdot\sin\beta+2R\cos\alpha\cdot R\cos\beta\cdot\sin\gamma\\&=2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\alpha+2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\beta+2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\gamma\\&=2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)\\&=2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)\\&=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\end{aligned}$$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=1$$

研究 2-7 若$\triangle ABC$為一鈍角三角形，D點為$\triangle ABC$的外心，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在外心D的頂心三角形，$\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=R$（$R$為$\triangle ABC$外接圓半徑），$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$，$\triangle EFG$面積$=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=1$。



證明：

根據研究 1-5，$\angle BEG=\angle BGE=\dfrac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\dfrac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$

$$\angle CFG=\angle CGF=\frac{\left(180^\circ-\angle FCG\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\gamma\right)}{2}=90^\circ-\gamma$$

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=\overline{CD}=\overline{CG}$ $\therefore$ 四邊形 $BDCG$ 為菱形 $\angle BDC=\angle BGC$

$\angle BDC+2\angle BAC=360^\circ\Rightarrow\angle BGC+2\alpha=360^\circ\Rightarrow\angle BGC=360^\circ-2\alpha$

$$\angle EGF=360^\circ-\angle BGE-\angle CGF-\angle BGC\Rightarrow\angle EGF=360^\circ-\left(90^\circ-\beta\right)-\left(90^\circ-\gamma\right)-\left(360^\circ-2\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\angle EGF=\beta+\gamma+2\alpha-180^\circ$$

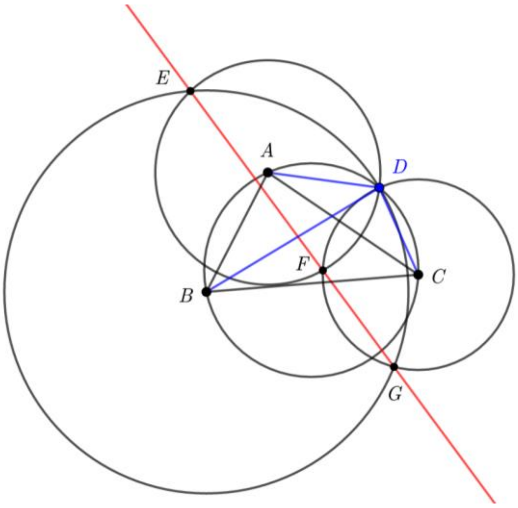
$$\Rightarrow\angle EGF=\alpha$$

$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\beta=2R\sin\beta$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\gamma=2R\sin\gamma$（$R$為外接圓半徑）

$$\triangle EFG=\frac{1}{2}\cdot\overline{EG}\cdot\overline{FG}\sin\angle EGF=\frac{1}{2}\cdot2R\sin\beta\cdot2R\sin\gamma\sin\alpha=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=1$$

研究 3-1 若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點在$\triangle ABC$的外接圓上時，則$\triangle ABC$在D點的頂心三角形會退化為一直線，即三頂點三點共線。



證明：

設$\overline{AD}=a$，$\overline{BD}=b$，$\overline{CD}=c$，$\angle BAC=\alpha, \angle ABC=\beta, \angle ACB=\gamma$

根據研究 1，頂心三角形三邊長$\overline{EF}$、$\overline{EG}$、$\overline{GF}$為$2a\sin\alpha,\ 2b\sin\beta,\ 2c\sin\gamma$，

若$\triangle EFG$兩邊相加等於第三邊，則E、F、G三點共線

$\because \dfrac{\overline{AB}}{\sin\gamma}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2R$(正弦定理)，$R$為$\triangle ABC$外接圓半徑

$\therefore \overline{AB}=2R\sin\gamma, \overline{BC}=2R\sin\alpha, \overline{AC}=2R\sin\beta$

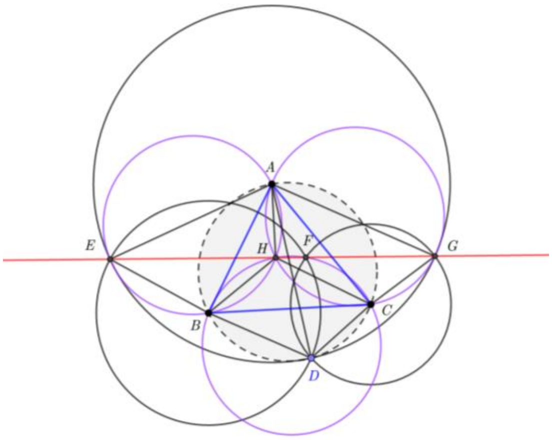
$\because \overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}=\overline{BD}\cdot\overline{AC}$ (托勒密定理)

$\therefore a\cdot 2R\sin\alpha+c\cdot 2R\sin\gamma=b\cdot 2R\sin\beta \Rightarrow 2a\sin\alpha+2c\sin\gamma=2b\sin\beta$

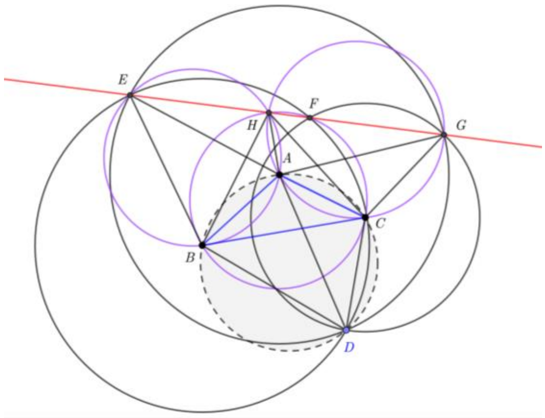
$\because 2a\sin\alpha+2c\sin\gamma=2b\sin\beta \Rightarrow \overline{EF}+\overline{GF}=\overline{EG}$

$\therefore E$、F、G三點共線

研究 3-2 若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點為$\triangle ABC$之外接圓上一動點，則$\triangle ABC$在D點的頂心線必通過$\triangle ABC$之垂心。



圖(一)



圖(二)

證明：

設$\triangle ABC$之垂心為H點，$\overline{AD}=a$，$\overline{BD}=b$，$\overline{CD}=c$，$\angle CAB=\alpha, \angle ABC=\beta, \angle BCA=\gamma$

根據引理 1，三頂點E、F、G之軌跡交於垂心H(如圖一)，所以垂心在三頂點之軌跡（紫色）圓周上，在四邊形$ABDC$中，利用托勒密定理

$$\overline{AB}\cdot c+\overline{AC}\cdot b=\overline{BC}\cdot a\Rightarrow 2R\sin\gamma\cdot c+2R\sin\beta\cdot b=2R\sin\alpha\cdot a\Rightarrow c\sin\gamma+b\sin\beta=a\sin\alpha$$

在四邊形$AEBH$中，$\overline{AH}\cdot\overline{EB}+\overline{BH}\cdot\overline{EA}=\overline{AB}\cdot\overline{EH}\Rightarrow\overline{AH}\cdot b+\overline{BH}\cdot a=\overline{AB}\cdot\overline{EH}$

根據引理 2-1，$\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, $\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}$

$$\overline{AH}\cdot b+\overline{BH}\cdot a=\overline{AB}\cdot\overline{EH}\Rightarrow\overline{AB}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot b+\overline{AB}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot a=\overline{AB}\cdot\overline{EH}$$

$$\Rightarrow\overline{EH}=b\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}+a\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

如圖二，若$\triangle ABC$為鈍角三角形時$\overline{AH}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{BH}\cdot\overline{AE}$

$$\Rightarrow\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{BH}\cdot\overline{AE}-\overline{AH}\cdot\overline{BE}$$

根據引理 2-2 $\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}$, $\overline{AH}=-\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$

$$\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{BH}\cdot\overline{AE}-\overline{AH}\cdot\overline{BE}\Rightarrow\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{AB}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot a+\overline{AB}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot b$$

$$\Rightarrow\overline{EH}=a\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot+b\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

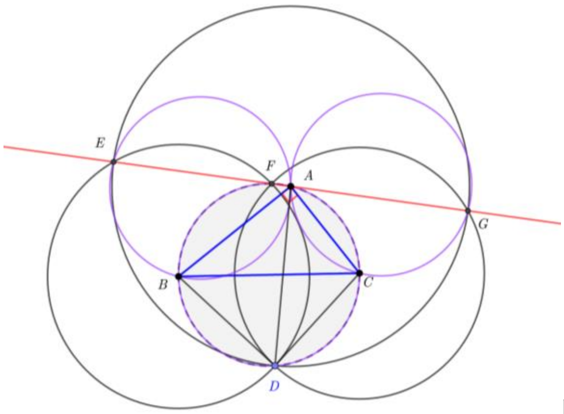
同理可得$\overline{GH} = c \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} + a \cdot \dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}$

$$\begin{aligned}
\overline{EH} + \overline{GH} &= b \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} + a \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} + c \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + a \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\beta} \\
&= \frac{b \cdot \cos\alpha \sin\beta + a \cdot \cos\beta \sin\beta + c \cdot \cos\alpha \sin\gamma + a \cdot \cos\gamma \sin\gamma}{\sin\beta \sin\gamma} \\
&= \frac{(b \cdot \sin\beta + c \cdot \sin\gamma)\cos\alpha + a \cdot \cos\beta \sin\beta + a \cdot \cos\gamma \sin\gamma}{\sin\beta \sin\gamma} \\
&= \frac{a \cdot \sin\alpha \cos\alpha + a \cdot \cos\beta \sin\beta + a \cdot \cos\gamma \sin\gamma}{\sin\beta \sin\gamma} \\
&= \frac{a}{\sin\beta \sin\gamma}(\sin\alpha \cos\alpha + \sin\beta \cos\beta + \sin\gamma \cos\gamma) \\
&= \frac{a}{\sin\beta \sin\gamma}\left(\sin\alpha \cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\beta + \frac{1}{2}\sin 2\gamma\right) \\
&= \frac{a}{\sin\beta \sin\gamma}\left\{\sin\alpha \cos\alpha + \frac{1}{2}\left[2\sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)\right]\right\} \\
&= \frac{a}{\sin\beta \sin\gamma}\left[\sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos(\gamma-\beta)\right] \\
&= \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma}\left[\cos(\gamma-\beta) - \cos(\gamma+\beta)\right] \\
&= \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma} \cdot 2\sin\beta \sin\gamma = 2a\sin\alpha = \overline{EG}
\end{aligned}$$

$\because \overline{EH} + \overline{HG} = \overline{EG} \therefore E$ 、 H 、 G 三點共線

若$\triangle ABC$為直角三角形，不失一般性，設α為直角(如圖三)

$\overline{EG} = 2a\sin\alpha = 2a\sin 90^\circ = 2a$ (圓A直徑)，所以$\overline{EG}$通過圓心A，又因$\triangle ABC$垂心與頂點A重合，故直線EG通過$\triangle ABC$的垂心。



圖(三)

故$\triangle ABC$在D點的頂心線必通過$\triangle ABC$的垂心

伍、 研究結果

研究 1 結果 給定$\triangle ABC$及三角形內或外一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，再以三交點E、G、F為頂點作$\triangle EFG$，

則
$$\begin{aligned}\overline{EF} &= 2\overline{AD}\sin\angle CAB\\ \overline{EG} &= 2\overline{BD}\sin\angle ABC\\ \overline{GF} &= 2\overline{CD}\sin\angle BCA\end{aligned}$$

研究 2 結果

D點	$\triangle EFG$面積	$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}$
重心	$=\dfrac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)$	≤ 1
內心	$2r^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$	≤ 1
垂心(銳角三角形)	$2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$	≤ 1
垂心(鈍角三角形)	$8\left\|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right\|\triangle ABC$	<8
外心	$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	1

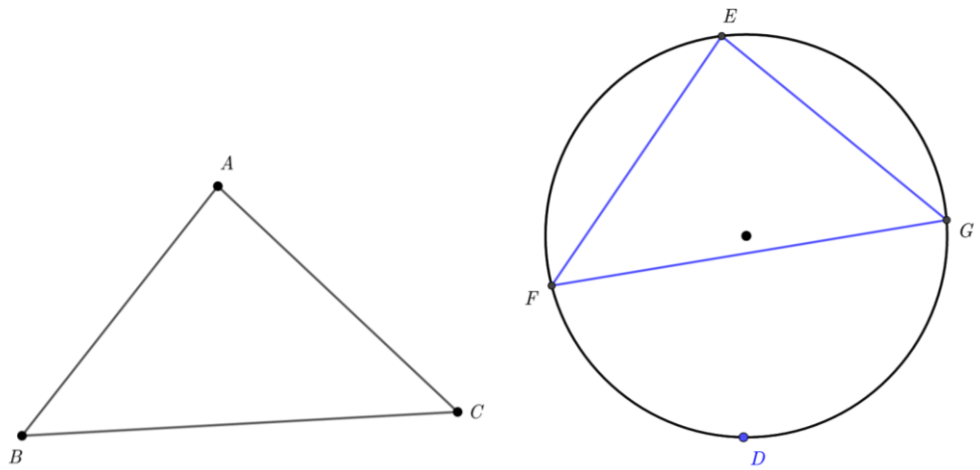
研究 3 結果 一、若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點在$\triangle ABC$的外接圓上時，則$\triangle ABC$在D點的頂心三角形會退化為一直線，即三頂點三點共線。

二、若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點在其外接圓上，則$\triangle ABC$在D點的頂心線通過$\triangle ABC$的垂心。

陸、 未來展望與參考資料

(一)未來展望

我們希望進一步探討點在三角形外所形成的頂心三角形之相關性質及點在原三角形內面積與周長之最大值及最小值之可能，我們發現點若在原三角形外之無窮遠處，所形成的頂心三角形會與原三角形相似。



(二)參考資料

1. 李政豐、朱啟台、陳昭地(103 年 4 月)。三角形三個最大值問題的迴響(電子版)。科學教育月刊
2. 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會換心手術— 從三角形出發探討 N 邊形多心性質之研究
3. Shanhe Wu, Lokenath Debnath.Generalization of the Wolstenholme cyclic inequality and its application. Computers & Mathematics with Applications. 2007 年 1 月,53(1): 104－114
4. Bankoff, L. (1958). An Elementary Proof of the Erdos-Mordell Theorem.*The American Mathematical Monthly,65*(7), 521-521. doi:10.2307/2308580
5. 高中數學課本第三冊（2019）。第一章：三角。南一書局。
6. 高中數學課本第三冊（2019）。第三章：平面向量。南一書局。

【評語】050404

這件作品是研究頂心三角形邊長、面積與原來給定的三角形邊長、面積之間的比例關係，以及探討頂心三角形三點共線(頂心線)的問題。關於邊長的比例，作者分別就原三角形為銳角、直角、鈍角三角形得到相同的比例公式。對於面積的比例，作者針對原三角形為銳角、鈍角三角形得到不同的比例上界，分別為1與8。關於頂心線的部分，作者證明了對於任意的原三角形 ABC 及外接圓上的一點 D，則三角形 ABC 在 D 點的頂心線通過三角形 ABC 的垂心。本作品所討論的議題有相當趣味性，所討論的議題也涵蓋了大部分的三角形。數學的深度也不錯，整件作品的撰寫方式及表達能力也通暢流順。美中不足之處在於原三角形 ABC 為鈍角三角形時，面積比例為 8 無法證明此結果為最佳上界。

作品簡報

頂心三角形誕生的奇蹟

組別：高級中等學校組

科別：數學科

摘要

在第59屆科展作品(中華民國第59屆中小學科學展覽會換心手術)有給定了一個新的名詞(頂心三角形)：平面上給定$\triangle ABC$及一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，三圓交於E、F、G三點，再以三交點E、F、G為頂點作$\triangle EFG$，則$\triangle EFG$稱為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，本篇作品主要探討原三角形與其頂心三角形邊長與面積比例關係及頂心線相關性質。

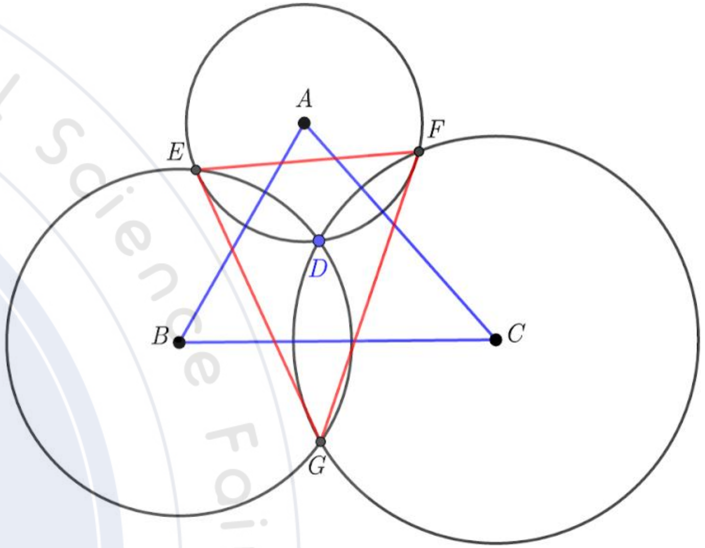
研究動機

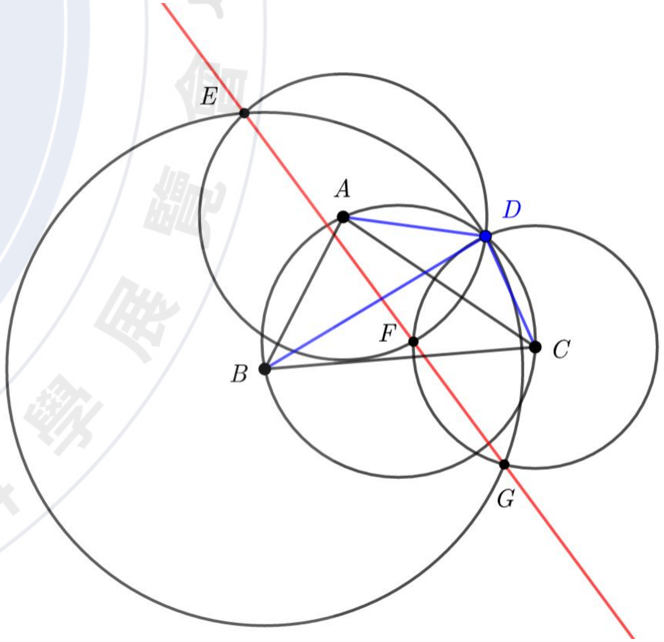
我們看完第59屆科展作品後，我們瞭解了如果由原三角形三頂點為圓心，頂點到垂心(內心、外心)之距離為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，原三角形之垂心(內心、外心)會成為心三角形之內心(外心、垂心)，因此我們想要探討這個性質的延伸，討論三角形之間的面積比例關係，並進一步探討若是由三角形三頂點為圓心，頂點到三角形內任意一點為半徑畫圓，三圓交於三點形成一新三角形，此新三角形會有什麼性質。

名詞定義

一、頂心三角形：平面上給定$\triangle ABC$及一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，三圓交於三點E、F、G，再以三交點E、F、G為頂點作$\triangle EFG$，則新$\triangle EFG$稱為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形。

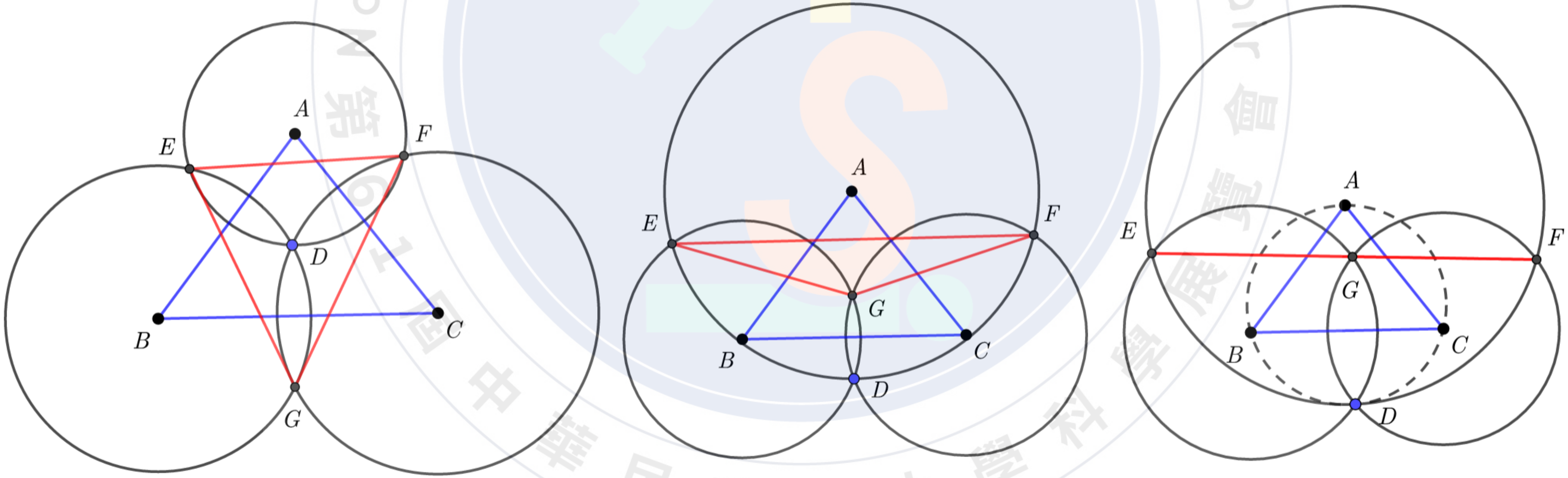
二、頂心線：若$\triangle ABC$為一任意三角形，D在其外接圓上，則$\triangle ABC$在D點的頂心三角形會退化成一直線，我們稱該直線為$\triangle ABC$在D點的頂心線。





研究一：頂心三角形邊長關係

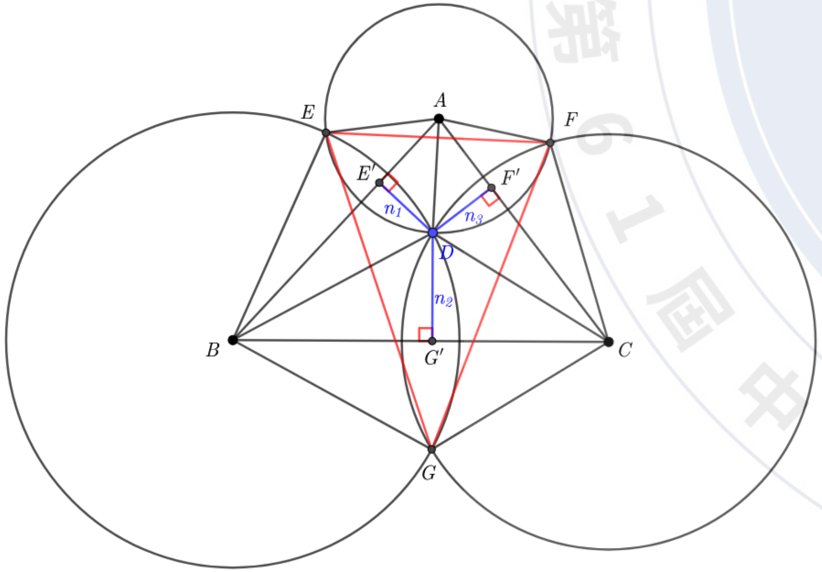
平面上給定$\triangle ABC$及三角形內或外一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，再以三交點E、F、G為頂點作$\triangle EFG$，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$、$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$、$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$。

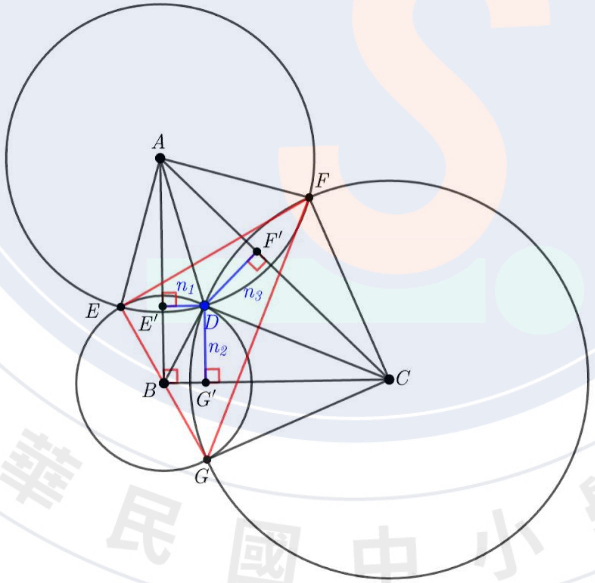


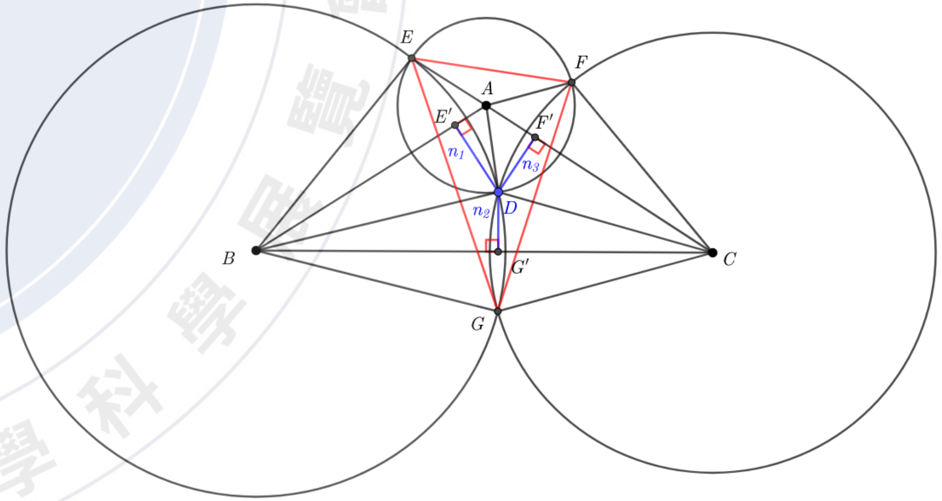
研究二：頂心三角形面積關係

若$\triangle ABC$為一任意三角形， D點為$\triangle ABC$內任意一點，D點到$\triangle ABC$三邊長之垂足為E'、G'、F'三點，$\overline{E'D}=n_1,\overline{G'D}=n_2,\overline{F'D}=n_3$，$\angle BAC=\alpha,\angle ABC=\beta,\angle BCA=\gamma$，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在$D$點的頂心三角形，則$\triangle EFG$的面積為

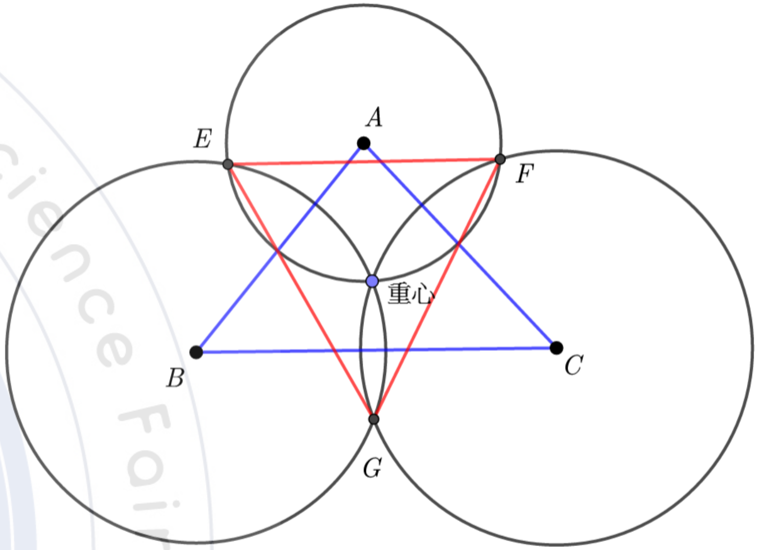
$$2n_1n_3\sin\alpha+2n_1n_2\sin\beta+2n_2n_3\sin\gamma$$



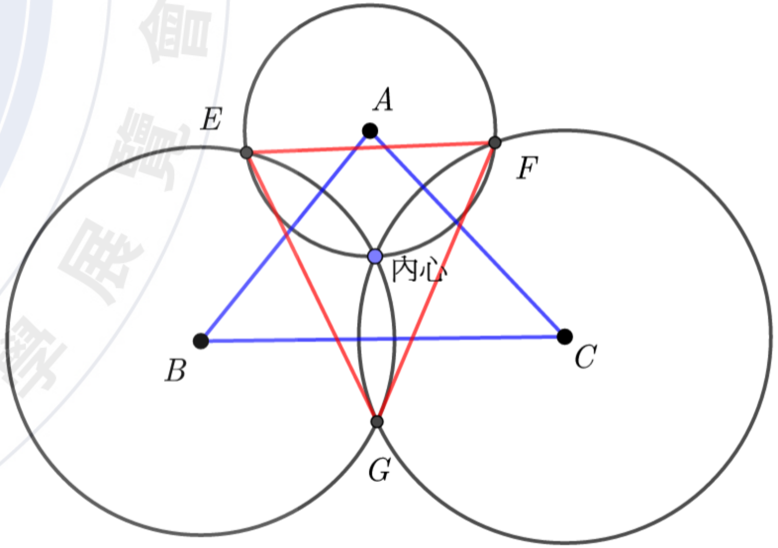




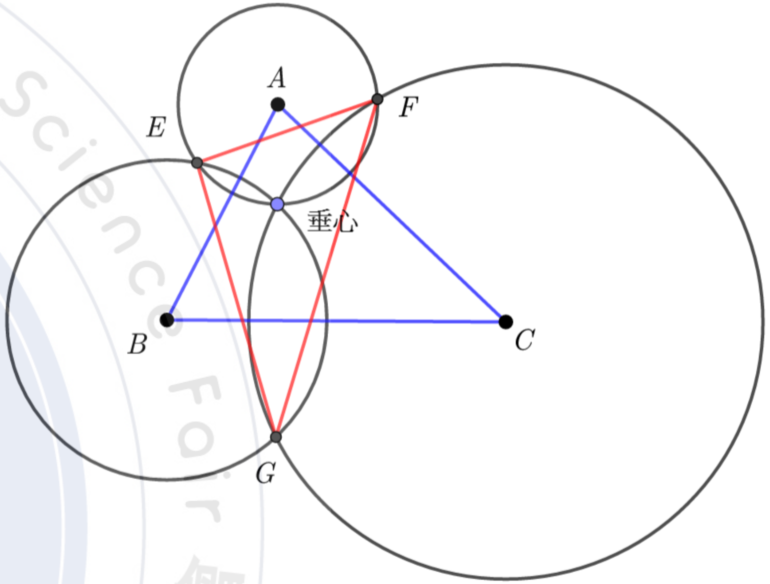
一、若$\triangle ABC$為一任意三角形，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$ 在重心的頂心三角形，則$\triangle EFG$面積$=\frac{2}{9}\sin A\sin B\sin C\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)$，且$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\leq 1$, $\triangle ABC$為正三角形時等號成立。



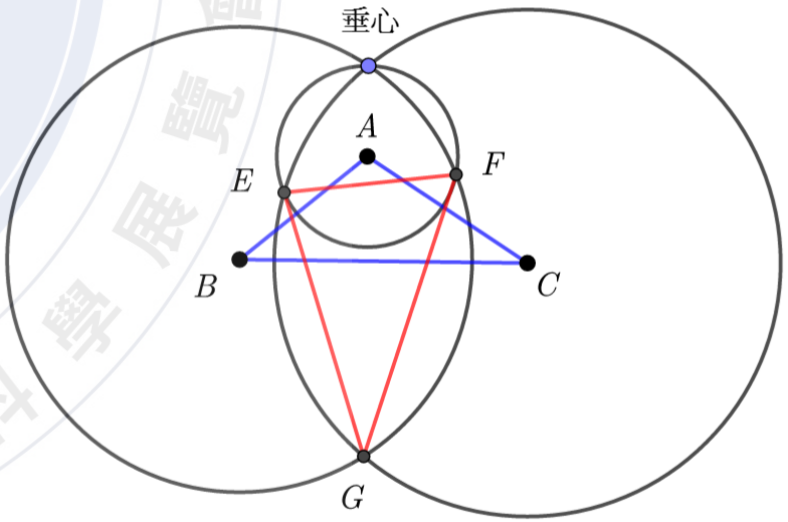
二、若$\triangle ABC$為一任意三角形，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$ 在內心的頂心三角形，則$\triangle EFG$面積$=2r^2\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)$，$r$為$\triangle ABC$內接圓半徑，且$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\leq 1$, $\triangle ABC$為正三角形時等號成立。



三、若$\triangle ABC$為一銳角三角形，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在垂心的頂心三角形，則$\triangle EFG$面積$=2R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$，$R$為$\triangle ABC$外接圓半徑，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\le 1$，$\triangle ABC$為正三角形時等號成立。

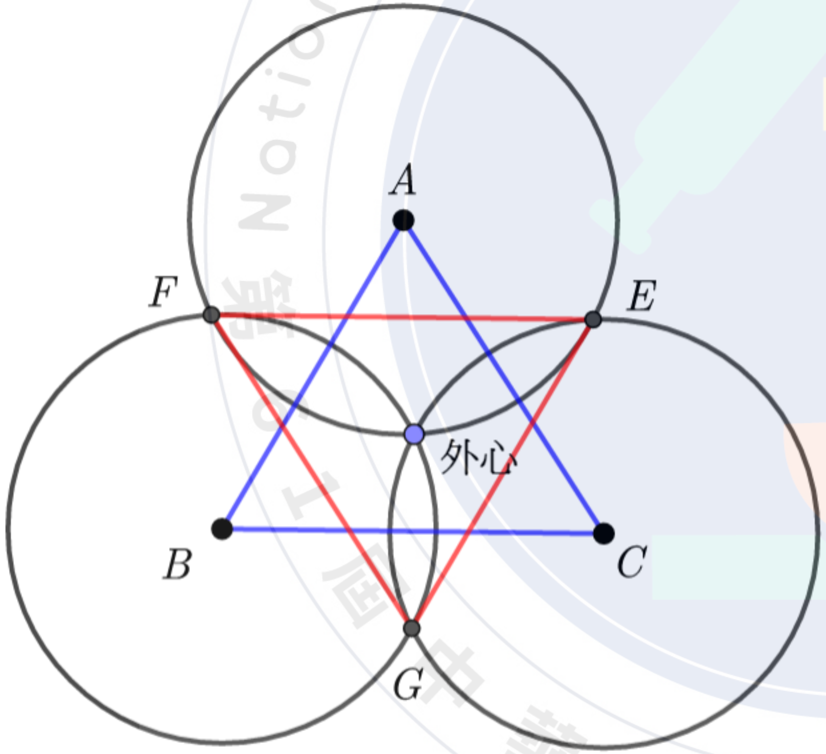


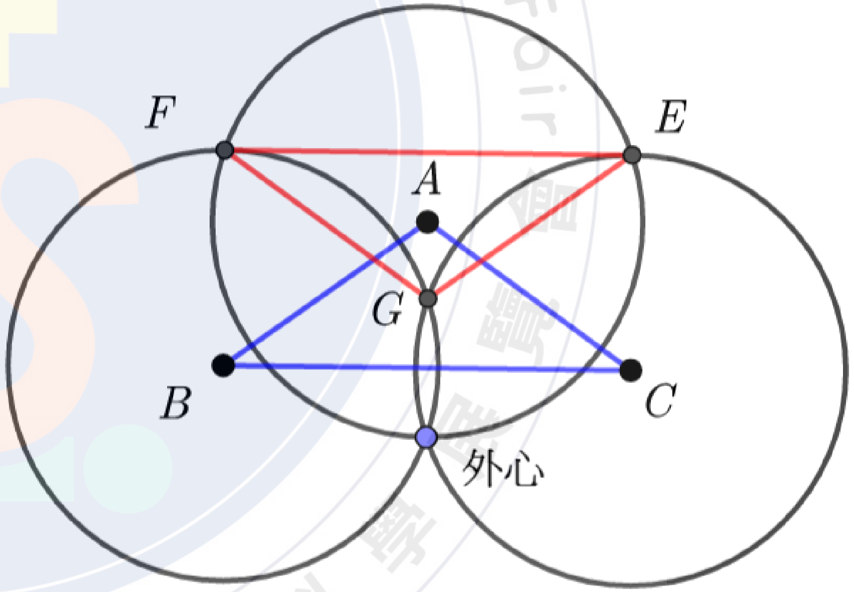
四、若$\triangle ABC$為一鈍角三角形，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在垂心的頂心三角形，則$\triangle EFG$面積$=8\left|\cos A\cos B\cos C\right|\triangle ABC$，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}<8$。



五、若$\triangle ABC$為一銳角三角形或鈍角三角形，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$ 在外心的頂心三角形，

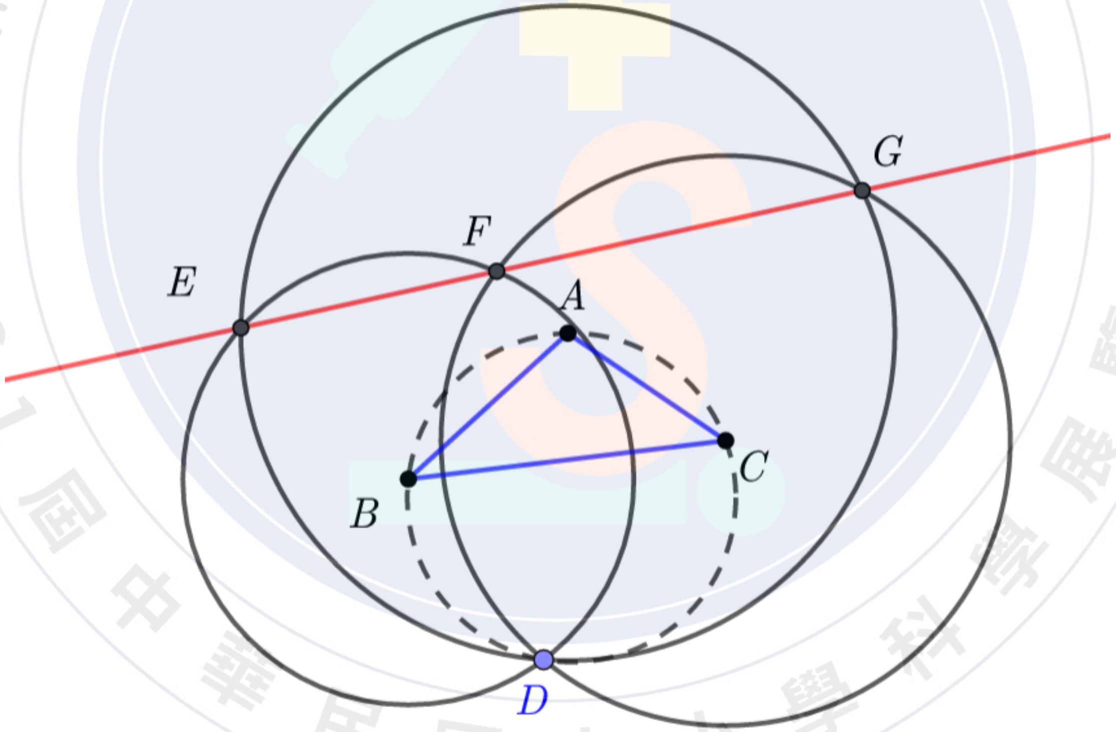
則$\triangle EFG$面積$=2R^2 \sin A \sin B \sin C$，$R$為$\triangle ABC$外接圓半徑，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=1$





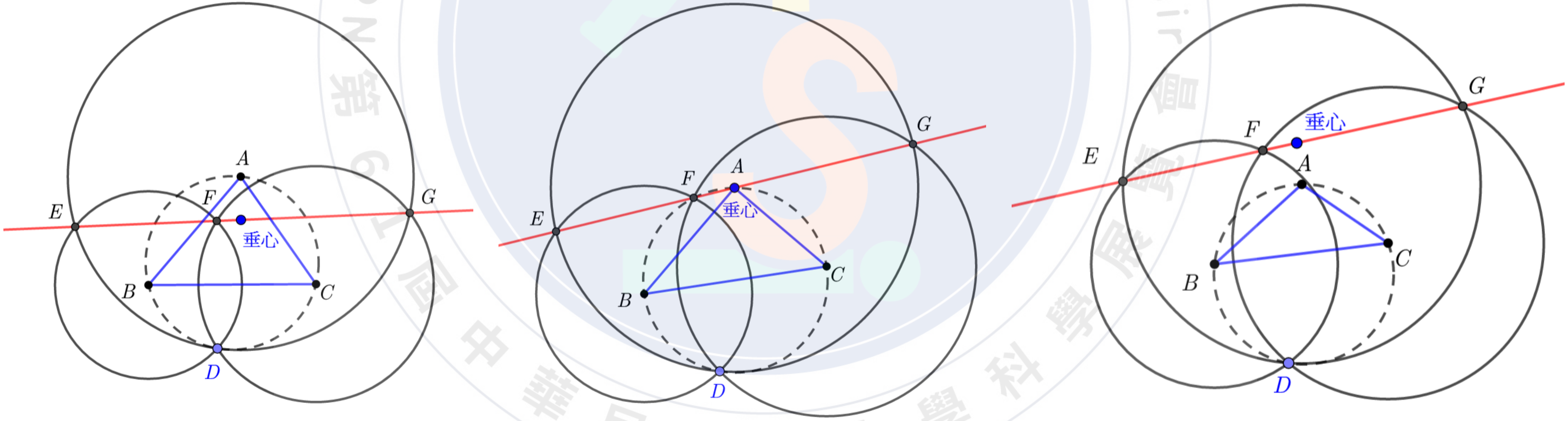
研究三：頂心線

若 $\triangle ABC$ 為一任意三角形， D 點在 $\triangle ABC$ 的外接圓上時，則 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形會退化成一直線，即三頂點三點共線



頂心線必通過原三角形的垂心

若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點為$\triangle ABC$之外接圓上一動點，則$\triangle ABC$在D點的頂心線必通過$\triangle ABC$之垂心。



參考資料

1.李政豐、朱啟台、陳昭地(103年4月)。三角形三個最大值問題的迴響(電子版)。科學教育月刊

2.中華民國第59屆中小學科學展覽會換心手術— 從三角形出發探討 N 邊形多心性質之研究

3.Shanhe Wu, Lokenath Debnath. Generalization of the Wolstenholme cyclic inequality and its application. Computers & Mathematics with Applications. 2007年1月, 53 (1): 104 – 114

4.Bankoff, L. (1958). An Elementary Proof of the Erdos-Mordell Theorem. *The American Mathematical Monthly, 65*(7), 521-521. doi:10.2307/2308580

5.高中數學課本第三冊（2019）。第一章：三角。南一書局。

6.高中數學課本第三冊（2019）。第三章：平面向量。南一書局。