中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050403

幾何配數歸，碰出新滋味

學校名稱：臺中市私立弘文高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃文聖 高二 陳韋程 高二 江宗翰	余政和

關鍵詞：折點、線邊交點、周長

摘要

本研究主要在探討正多邊形翻摺時，其摺邊與邊所圍成三角形周長的規律。原題目如下：「給一正方形$ABCD$、將A摺至$\overline{CD}$上任一點E，翻摺過去的$\overline{AB}$與原$\overline{BC}$交於F。試證$\triangle CEF$的周長為正方形邊長的兩倍。」

本研究先以軟體觀察數值，發現其規律在奇數邊形與偶數邊形時不同。正奇數邊形折點左右兩三角形相加值與多邊形邊長的比值為定值，其值與多邊形內角三角函數值有關；正偶數邊形折點右邊的三角形周長為邊長 2 倍，且摺點、原多邊形頂點與線邊交點的角度也與偶數的邊數有關。除此之外，也找到了正多邊形翻摺後所形成之各三角形周長在適當配組後，其和有定值的不變性規律，及推廣摺到任意邊上，其三角形周長和或差為定值的規律。

壹、研究動機

我們在學到三角函數的單元時，老師給了我們一道正方形摺疊的題目。題目大致為：「給定一正方形，取一頂點與其正對邊上的任一點。將一邊以兩點的中垂線為對稱軸向上摺，證明摺上去的邊與兩邊圍成的三角形的周長是邊長的 2 倍。」而在解此題時我們發現當取的點為正對邊上的中點時，圍成的三角形邊長比為 3：4：5。因此我們嘗試去探討若取的點將對邊切成不同比例時，其圍成的三角形其邊長的比例。而我們也對周長固定的性質相當好奇，我們嘗試將其性質推廣到正五邊形、正六邊形等正多邊形。探討各個所圍成的三角形中，其周長和與邊長的關係。並且將摺到正對邊的性質推廣至任意邊。

貳、研究目的

一、在原題目中，找到其三角形周長與正方形邊長的關係。

二、將原題目正方形的情況推廣到正偶數邊形，並用純幾何、數學歸納法證明。

三、將原題目的結果推廣至正奇數邊形的情況。

四、將正偶數邊形不同情況的三角形配組規律找出，並用三角函數證明。

五、將前述二、三、四的結果推廣到折到鄰邊的情況，並利用數學歸納法證明。

參、研究設備及器材

計算紙、筆、電腦、Microsoft Office Excel 2013、數學計算軟體 Matlab

肆、研究過程或方法

一、文獻探討與前置作業

（一）名詞定義

定義 1：折點

給一正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若將 A_1 折至正 n 邊形上一邊 $A_{m-1}A_m$ 的一點。則定義該點為B_m。

定義 2：線邊交點

給一正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$。若將 A 點折至 $\overline{A_{m-1}A_m}$ 上一點 B_m、$m \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$。

沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 $A_{[\frac{m}{2}]}$ 、$A_{[\frac{m}{2}]-1} \dots A_{[\frac{m}{2}]-n+1}$折至 $A_{[\frac{m}{2}]}'$ 、$A_{[\frac{m}{2}]-1}' \dots A_{[\frac{m}{2}]-n+1}'$。

則定義$C_0 = \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]}'E} \cap \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]+1}A_{[\frac{m}{2}]+2}}$、$C_{n-1} = D$、$C_{-1} = E$ $\forall n-2 \geq k \geq 1$，

$C_k = \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]-[\frac{k}{2}]}'A_{[\frac{m}{2}]-[\frac{k}{2}]+1}'} \cap \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]+[\frac{k}{2}]}A_{[\frac{m}{2}]+[\frac{k}{2}]+1}'}$，此時 $B_m = C_{[\frac{m}{2}]} = C_{[\frac{m}{2}]-1}$

而定義中的直線是在折到非對邊的邊時，折過去的線段不一定與邊有交點。

定義 3：三角形周長

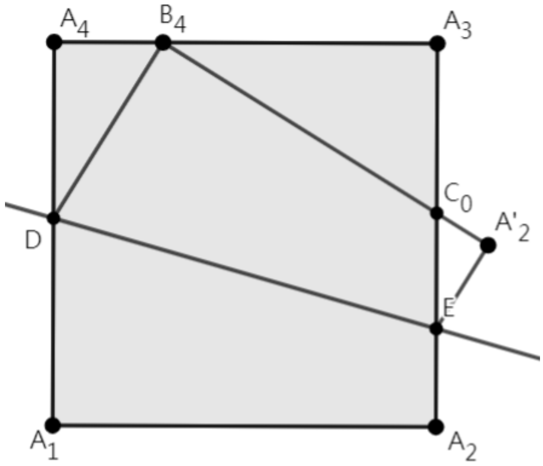
$[\Delta ABC]$代表ΔABC 的周長

二、研究流程架構

1. 原題目中利用代數以及畢氏定理出其比例關係找出所求
2. 在正五邊形中模仿原題目的折法，我們發現當折點在正對邊的時候，折點左右兩邊的三角形周長相加會是邊長的$2 + 2sin54°$倍
3 推廣至正多邊形中模仿原題目中的折法，並觀察其是否有相同性質，我們發現正奇數邊跟正偶數邊有不盡相同的結果
4. 正奇數邊形中，我們發現在折點兩邊的三角形周長相加會與邊長有規律
5. 正偶數邊形中，折點右邊的三角形周長相加會是邊長的兩倍
6. 我們改變原題目中的折法，將其折到正對邊以外的邊
7. 在正奇數邊形中，各自會有三角形相加會跟其內角的正弦值有關
8. 在正偶數邊形中，我們發現有一些三角形周長相加會有比例關係

二、研究過程

首先，我們從大陸的競賽題出發，題目如下：「如圖（一），給一單位正方形 $A_1A_2A_3A_4$、取$\overline{A_3A_4}$上一點 B_4，其對稱軸交 $\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$ 於 D、E。將 A_1DEA_2 沿 $\overline{DE}$ 折至 $A_1'DEA_2'$。若 $\overline{A_1'A_2'}$ 交 $\overline{A_2A_3}$於C_0，則試證：$[\triangle B_4A_3C_0]=2\overline{A_1A_2}$。」



圖（一）

〈證明〉：

設 $\overline{A_1D}=x$，則 $\overline{A_4D}=1-x$、$\overline{B_4D}=x$。

$\overline{A_4B_4}=\sqrt{x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x-1}$

$\overline{B_4A_3}=1-\sqrt{2x-1}$

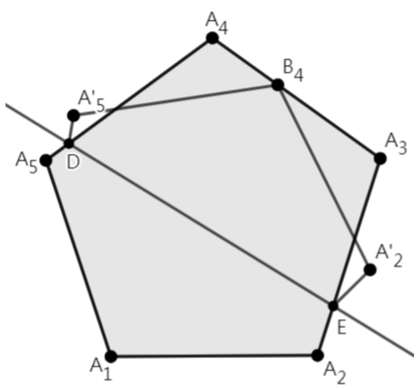
$\triangle B_4A_3C_0 \sim \triangle \mathrm{D}A_4B_4(AA) \Rightarrow [\triangle B_4A_3C_0]$

$=[\triangle \mathrm{D}A_4B_4]\times\dfrac{\overline{B_4A_3}}{\overline{A_4D}}$

$=\left(1+\sqrt{2x-1}\right)\times\dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{1-x}=2$

而在證明完原題目後，我們將這種折法推廣到正五邊形。探討是否有相同的規律。

如圖（二），我們首先探討將一頂點折到對邊的情況。



簡述：給一單位正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$

如圖標點，發現若將$[\triangle B_4A_3C_0]+[\triangle B_4A_4C_3]$。其得到的值為 3.6180339…。而若將此值減去 2，即可得到我們熟悉的黃金比例：1.618…。

而與五邊形的關係就在於$sin54°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

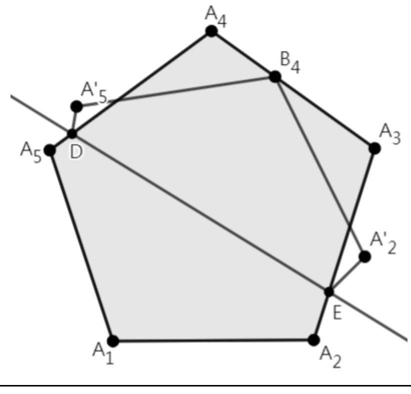
於是我們可以知道，其兩三角形的周長和為：$2+2sin54°$。即得到了我們的**引理 1**

引理 1：

給定一邊長為 1 的正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$。取 A_3A_4上一點 B_4、$\overline{DE}$ 垂直平分 $\overline{A_1B_4}$，D、E 分別為 $\overline{A_4A_5}$、$\overline{A_2A_3}$ 上一點。將五邊形 $A_1A_5DEA_2$ 沿 $\overline{DE}$ 做對稱。A_1、A_5、D、E、A_2分別對稱到 A_1'、A_5'、D'、E'、A_2'。

若$C_0=\overline{A_2'B_4}\cap\overline{A_2A_3}$、$C_3=\overline{A_5'B_4}\cap\overline{A_5A_4}$，

則：$[\triangle B_4A_3C_0]+[\triangle B_4A_4C_3]=2+2sin54°$



〈證明〉：利用和差化積

設$\angle A_4C_3B_4=\theta$，則 $\angle A_4B_4C_3=72°-\theta$。

則可令 $\overline{A_4B_4} = rsin\theta$ 、 $\overline{B_4C_3} = rsin108°$ 、$\overline{A_4C_3} = rsin(72° - \theta)$。

而 r 為 $\Delta B_4A_3C_0$ 的外接圓直徑。

則 $\overline{B_4A_3} = 1 - rsin\theta$。且$\angle A_4B_4C_3 = \angle A_3C_0B_4$ 、$\angle C_3A_4B_4 = \angle B_4A_3C_0$

$\Delta B_4A_3C_0 \approx \ \Delta B_4A_4C_3 \Rightarrow (\overline{C_0B_4} + \overline{C_0A_3}):(\overline{A_4B_4} + \overline{B_4C_3}) = \left(\overline{B_4A_3} : \overline{A_4C_3}\right)$

$= (1 - rsin\theta) : rsin(72° - \theta)$

$$\Rightarrow \ \overline{C_0B_4} + \overline{C_0A_3} = (1 - rsin\theta) \times \frac{\overline{A_4B_4} + \overline{B_4C_3}}{\overline{A_4C_3}} = (1 - rsin\theta) \times \frac{sin\theta + sin108°}{sin(72° - \theta)}$$

$[\Delta B_4A_3C_0] + [\Delta B_4A_4C_3]$

$$= rsin(72° - \theta) + rsin108° + (1 - rsin\theta) \times \frac{sin\theta + sin108°}{sin(72° - \theta)} + 1$$

$\Delta C_3A_4B_4$ 、 $\Delta C_3A_5'E$ ，$\angle A_4B_4C_3 = \angle EA_5'C_3$ 、$\angle C_3A_4B_4 = \angle C_3A_5{}'E$

$\left(\overline{C_3E} + \overline{A_5{}'E}\right):(\overline{C_3B_4} + \overline{B_4C_3}) = \left(\overline{C_3A_5{}'} : \overline{C_3A_4}\right) = (1 - rsin108°) : rsin(72° - \theta)$

又$\overline{C_3E} + \overline{A_5{}'E} = \overline{C_3E} + \overline{A_5E} = 1 - rsin(72° - \theta)$

$$\Rightarrow \frac{1 - rsin(72° - \theta)}{1 - rsin108°} = \frac{sin\theta + sin108°}{sin(72° - \theta)}$$

$$\Rightarrow \left(1 - rsin(72° - \theta)\right) \times sin(72° - \theta) = (1 - rsin108°)(sin\theta + sin108°)$$

$$\Rightarrow sin(72° - \theta) - rsin^2(72° - \theta) = sin\theta + sin108° - rsin108°sin\theta - rsin^2 108°$$

$$\Rightarrow rsin108°sin\theta + rsin^2 108° - rsin^2(72° - \theta) = sin\theta + sin108 - sin(72° - \theta)$$

$$\Rightarrow rsin108°sin\theta + rsin(36° + \theta)sin\theta = sin\theta + sin108 - sin(72° - \theta)$$

$$\Rightarrow rsin\theta = \frac{sin\theta + sin108 - sin(72° - \theta)}{sin108° + sin(36° + \theta)} \Rightarrow \frac{1 - rsin\theta}{sin(72° - \theta)} = \frac{1 + 2sin108°}{sin108° + sin(36° + \theta)}$$

$\Rightarrow [\Delta B_4A_3C_0] + [\Delta B_4A_4C_3]$

$$= rsin(72° - \theta) + rsin108° + (1 - rsin\theta) \times \frac{sin\theta + sin108°}{sin(72° - \theta)} + 1$$

$$= rsin(72° - \theta) + rsin108° + \frac{(1 + 2sin108°)(sin\theta + sin108°)}{sin108° + sin(36° + \theta)} + 1$$

$$= \frac{(sin\theta + sin108° - sin(72° - \theta))(sin108° + sin(72° - \theta))}{sin\theta(sin108° + sin(36° + \theta))}$$

$$+ \frac{(1 + 2sin108°)(sin\theta + sin108°)}{sin108° + sin(36° + \theta)} + 1$$

$$= \frac{sin108° + sin(72° - \theta) + (1 + 2sin108°)(sin\theta + sin108°) + sin(36° + \theta)}{sin108° + sin(36° + \theta)} + 1$$

$$=\frac{sin(72°-\theta)+(1+2sin108°)(sin\theta+sin108°)}{sin108°+sin(36°+\theta)}+2$$

$$=\frac{(2sin^2 108°+sin108°)sin(72°-\theta)+(1+2sin108°)(sin\theta+sin108°)}{sin108°+sin(36°+\theta)}+2$$

$$=\frac{(1+2sin108°)(sin108°sin(72°-\theta)+sin\theta+sin108°)}{sin108°+sin(36°+\theta)}+2$$

$$=\frac{(1+2sin108°)(sin(36°+\theta)-sin\theta+sin\theta+sin108°)}{sin108°+sin(36°+\theta)}+2$$

$$=1+2sin108°+2=2cos36°+2=2+2sin54°$$

下表為討論若有一單位正 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$。將 A_1 折到$\overline{A_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}A_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}}$時，得到的規律。

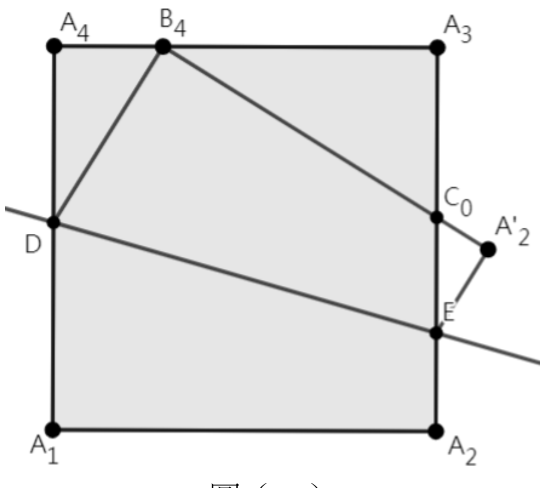
n	4	6	8	10	12
$\left[\triangle A_{\frac{n}{2}+1}B_{\frac{n}{2}+2}C_{\frac{n}{2}-2}\right]$	2	2	2	2	2

（表一）n 為偶數的情況

n	3	5	7	9	11
$\left[\triangle A_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}B_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}C_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right]+\left[\triangle A_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}B_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}C_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right]$	3	3.618	3.802	3.879	3.919

（表一）n 為奇數的情況

由上表我們可大膽推測，若給定一單位正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$。將 A_1 折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上的 B_{n+2}。則$\left[\triangle A_{\frac{n}{2}+1}B_{\frac{n}{2}+2}C_{\frac{n}{2}-1}\right]=2$。而我們在原題目的圖（一）中，發現了以下性質：



圖（一）

「如圖（一），給一單位正方形$A_1A_2A_3A_4$、取$\overline{A_3A_4}$上一點 B_4，其對稱軸交 $\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$ 於 D、E。將 A_1DEA_2 沿 $\overline{DE}$ 折至 $A_1'DEA_2'$。若 $\overline{A_1'A_2'}$ 交 $\overline{A_2A_3}$於C_0，則必有：$\angle B_4A_1C_0=45°$。」

而我們在看到這個性質時，發現可以將命題做改變。我們先固定 $\angle B_4A_1C_0=45°$ 嘗試去證明 $\left[\triangle B_4A_3C_0\right]=2\overline{A_1A_2}$。最後再證明 $\overline{DE}$ 為摺痕。

將命題改變為：

給定一邊長為 1 的正方形$A_1A_2A_3A_4$。若在$\overline{A_3A_4}$、$\overline{A_3A_2}$ 上取 B_4 、C_0 使 $\angle B_4A_1C_0 = 45°$成立。 則：(1)：$[\Delta B_4A_3C_0] = 2$ (2)：若在 $\overrightarrow{B_4C_0}$ 上取 $\overline{B_4A_2'} = \overline{A_1A_2}$。則 $\overline{A_1B_4}$ 的中垂線垂直平分 $\overline{A_2A_2'}$。
〈證明〉： 將$\Delta A_1A_2C_0$ 逆時針旋轉 90° 至$\Delta A_1A_2C_0'$。 (1)：$[\Delta B_4A_3C_0] = 2$ $\because \overline{A_1A_4} = \overline{A_1A_2}$ 且 $\angle A_1A_4B_4 = 90° = \angle A_1A_2C_0$ $\therefore$ 若將$\Delta A_1A_2C_0$逆時針旋轉 90°至$\Delta A_1A_2C_0'$。則 C_0'、B_4 、A_3 共線 。 在$\Delta A_1B_4C_0$ 、 $\Delta A_1B_4C_0'$ 中 $\overline{A_1B_4}$ 為共用邊、$\overline{A_1C_0'} = \overline{A_1C_0}$、$\angle B_4A_1C_0' = 90° - 45° = \angle B_4A_1C_0$ $\Delta A_1B_4C_0' \cong \Delta A_1B_4C_0(SAS) \Rightarrow \overline{B_4C_0} = \overline{B_4C_0'} = \overline{B_4A_4} + \overline{A_2C_0}$ $\Rightarrow [\Delta B_4A_3C_0] = 2$ (2)：若在 $\overrightarrow{B_4C_0}$ 上取 $\overline{B_4A_2'} = \overline{A_1A_2}$。則 $\overline{A_1B_4}$ 的中垂線垂直平分 $\overline{A_2A_2'}$。 $\because \Delta A_1B_4C_0' \cong \Delta A_1B_4C_0(SAS) \Rightarrow \angle C_0B_4A_1 = \angle C_0'B_4A_1 = \angle B_4A_1A_2$ 且$\overline{B_4A_2'} = \overline{A_1A_2}$ $\therefore A_1A_2A_2'B_4$ 為一等腰梯形，則 $\overline{A_1B_4}$ 的中垂線垂直平分 $\overline{A_2A_2'}$。 則變換後的命題得證 則原命題得證

雖這方法看似麻煩。但可發現在過程中，我們的代數、計算量減少許多，而這正是我們要去證明正偶數邊形的最大屏障，於是我們將這種旋轉的方式推廣至正偶數邊形，以便於我們的證明。

而我們在此為了表示方便，我們對正 n 邊形的頂點給定一個模系表示法。
這種表示法可以讓我們在討論對稱點的規律時更簡易。如若在正八邊形中折上去的點為
A_1 、A_2 、A_3 、A_8，則可以表示為A_0 、A_1 、A_2 、A_3。

而我們也對其邊線交點 C_m 給定一個模系表示法，如下：

模系表示法：

若今給定一個正 n 邊形$A_1A_2A_3\dots A_n$。則定義 $\forall m$、$k\in Z$ 、$1\le k\le n$。

$A_m=A_k$ 若且唯若 $m\equiv k(mod\ n)$。

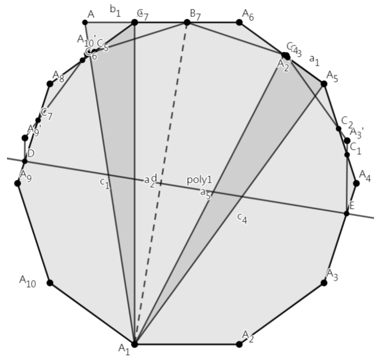
而我們也定義交點 $C_m=C_k$若且唯若 $m\equiv k(mod\ n)$。

定理 1：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$。若將 A 點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 A_2 折至 $A_2{}'$。若 $C_{n-2}=\overline{A_1{}'A_2{}'}\cap\overline{A_nA_{n+1}}$則：

(1)：$[\Delta A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]=2$

(2)：$\angle B_{n+2}A_1C_{n-2}=\dfrac{90°}{n}$



$n=5$ 的舉例

〈證明〉：變換命題，先固定角度、證明(1)，之後證明命題。

變換命題：

若在$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 、$\overline{A_nA_{n+1}}$ 上分別取 B_{n+2} 、C_{n-2} 使 $\angle B_{n+2}A_1C_{n-2}=\dfrac{90°}{n}$ 成立。

則：(1)：$\left[\Delta A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]=2$

(2)：若在 $\overrightarrow{B_{n+2}C_{n-2}}$ 取 $\overline{B_{n+2}\ A_2{}'}=\overline{A_1A_2}$。則 $\overline{A_1B_{n+2}}$ 的中垂線垂直平$\overline{A_2A'_2}$。

(1)：$\left[\Delta A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]=2$

$\because\ \overline{A_1A_{n+2}}=\overline{A_1A_n}$ 且 $\angle A_1A_nC_{n-2}=90°=\angle A_1A_{n+2}B_{n+2}$

$\therefore$ 若將$\Delta A_1A_nC_{n-2}$ 逆時針旋轉$\frac{180°}{n}$至$\Delta A_1A_{n+2}C'_{n-2}$。則 B_{n+2} 、A_{n+2} 、C'_{n-2} 共線。

$\Delta A_1B_{n+2}C'_{n-2}$ 、 $\Delta A_1B_{n+2}C_{n-2}$ 中

$\overline{A_1B_{n+2}}$ 為共邊、$\overline{A_1C'_{n-2}}=\overline{A_1C_{n-2}}$、$\angle B_{n+2}A_1C'_{n-2}=\dfrac{180°}{n}-\dfrac{90°}{n}=\angle B_{n+2}A_1C_{n-2}$

$\Delta A_1B_{n+2}C'_{n-2}\cong\Delta A_1B_{n+2}C_{n-2}\Rightarrow\overline{B_{n+2}C_{n-2}}=\overline{B_{n+2}C'_{n-2}}=\overline{B_{n+2}A_{n+2}}+\overline{A_nC_{n-2}}$

$\Rightarrow\ \left[\Delta A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]=2$

(2)：若在 $\overrightarrow{B_{n+2}C_{n-2}}$ 上取 $\overline{B_{n+2}\ A_2{}'}=\overline{A_1A_2}$。則 $\overline{A_1B_{n+2}}$ 的中垂線垂直平分 $\overline{A_2A'_2}$。

$\because\ \Delta A_1B_{n+2}C'_{n-2}\cong\Delta A_1B_{n+2}C_{n-2}\Rightarrow\angle C_{n-2}B_{n+2}A_1=\angle C'_{n-2}B_{n+2}A_1=\angle B_{n+2}A_1A_2$

且$\overline{B_{n+2}\ A_2{}'}=\overline{A_1A_2}$ $\therefore$ $A_1A_2A_2{}'B_{n+2}$為等腰梯形，則 $\overline{A_1B_{n+2}}$ 的中垂線垂直平分$\overline{A_2A'_2}$。

則變換後的命題得證。則原命題**定理 1** 得證

在這證明完了第一個定理。我們在利用 $Geogebra$ 繪圖時發現，當推廣到正偶數邊

形時，不只有折點右邊的三角形有周長為 2 這個性質。我們發現，折點右邊第 2 個三角性和左邊第 1 個三角形，周長相加同為 2。而繼續延伸，發現右邊第 k 個三角形、左邊第 $k-1$ 個三角形周長相加皆為 2。

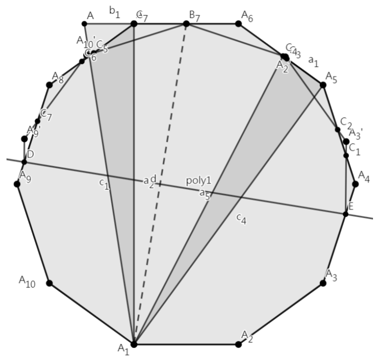
而在嘗試證明這個定理時，我們發現每一組三角形的規律都需要用到前兩組三角形的性質才有辦法證明。這個特點讓我們想到”數學歸納法”。於是我們利用了上面的定理 1、數學歸納法，得到了定理 2 並證明。

定理 2：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$。若將 A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 $A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、…$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}$折至 $A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$’ 、…$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}$’。

則：∀ $\left[\frac{n}{2}\right]+2-n\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]+1$且 $k\neq 1$

$$\left[\triangle A_k{}'C_{n-2k+1}C_{n-2k+2}\right]+\left[\triangle A_{n+k}C_{n+2k-3}C_{n+2k-4}\right]=2$$



$n=5$ 的舉例

〈證明〉：對 k 進行數學歸納法、利用定理 1 中的結論

1. $k=2$ 時

$$\left[\triangle A_2{}'C_{n-2}C_{n-3}\right]+\left[\triangle A_{n+2}C_{n+1}C_n\right]$$

$$=\left[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]\times\frac{\overline{A_2{}'C_{n-2}}+\overline{A_{n+2}B_{n+2}}}{\overline{A_{n+1}C_{n-2}}}\ \text{(定理 1：}\left[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]=2)$$

$$=2\times\frac{1-\overline{B_{n+2}C_{n-2}}+\overline{A_{n+2}B_{n+2}}}{\overline{A_{n+1}C_{n-2}}}\ \text{(定理 1：}\overline{B_{n+2}C_{n-2}}=\overline{B_{n+2}A_{n+2}}+\overline{A_nC_{n-2}})$$

$$=2\times\frac{1-\overline{A_nC_{n-2}}}{\overline{A_{n+1}C_{n-2}}}=2$$

$k=0$ 時

$$\left[\triangle A_0{}'C_{n+1}C_{n+2}\right]+\left[\triangle A_nC_{n-3}C_{n-4}\right]$$

$$=\left[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]\times\frac{\overline{A_0{}'C_{n+1}}+\overline{A_nC_{n-3}}}{\overline{A_{n+1}B_{n+2}}}$$

$$=2\times\frac{2-(\overline{B_{n+2}C_{n+1}}+\overline{A_{n+1}C_{n-3}})}{\overline{A_{n+1}B_{n+2}}}=2\times\frac{2-(\overline{B_0C_2}+\overline{A_{n+1}C_{n-2}})}{\overline{A_{n+1}B_{n+2}}}=2$$

2. 設$k=p\ge 0$時

$\left[\triangle A_p{'}C_{n-2p+1}C_{n-2p+2}\right]+\left[\triangle A_{n+p}C_{n+2p-3}C_{n+2p-4}\right]=2$、

$\left[\triangle A_{2-p}{'}C_{n+2p-3}C_{n+2p-2}\right]+\left[\triangle A_{n+2-p}C_{n-2p+1}C_{n-2p}\right]=2$ 皆成立

則$k=p+1$時

$$\begin{aligned}
&\left[\triangle A_{p+1}{'}C_{n-2p-1}C_{n-2p}\right]+\left[\triangle A_{n+p+1}C_{n+2p-1}C_{n+2p-2}\right]\\
&=2\times\frac{\left(\overline{A_{p+1}{'}C_{n-2p}}+\overline{A_{n+p+1}C_{n+2p-2}}\right)}{\overline{A_p{'}C_{n-2p+2}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-4}}}\\
&=2\times\frac{2-\left(\overline{C_{n-2p+1}C_{n-2p}}+\overline{A_p{'}C_{n-2p+1}}+\overline{C_{n+2p-2}C_{n+2p-3}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-3}}\right)}{\overline{A_p{'}C_{n-2p+2}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-4}}}\\
&=2\times\frac{2-\left(\overline{C_{n-2p+1}C_{n-2p+2}}+\overline{A_p{'}C_{n-2p+1}}+\overline{C_{n+2p-3}C_{n+2p-4}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-3}}\right)}{\overline{A_p{'}C_{n-2p+2}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-4}}}=2
\end{aligned}$$

$k=1-p$時

$$\begin{aligned}
&\left[\triangle A_{1-p}{'}C_{n+2p-1}C_{n+2p}\right]+\left[\triangle A_{n+1-p}C_{n-2p-1}C_{n-2p-2}\right]\\
&=2\times\frac{\left(\overline{A_{1-p}{'}C_{n+2p-1}}+\overline{A_{n+1-p}C_{n-2p-1}}\right)}{\overline{A_p{'}C_{n-2p+1}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-3}}}\\
&=2\times\frac{2-\left(\overline{C_{n+2p-1}C_{n+2p-2}}+\overline{A_{2-p}{'}C_{n+2p-2}}+\overline{C_{n-2p-1}C_{n-2p}}+\overline{A_{n+2-p}C_{n-2p}}\right)}{\overline{A_p{'}C_{n-2p+1}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-3}}}\\
&=2\times\frac{2-\left(\overline{C_{n+2p-1}C_{n+2p-2}}+\overline{A_{2-p}{'}C_{n+2p-2}}+\overline{C_{n-2p-1}C_{n-2p}}+\overline{A_{n+2-p}C_{n-2p}}\right)}{\overline{A_p{'}C_{n-2p+1}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-3}}}\\
&=2\times\frac{2-\left(\overline{C_{n-2p+1}C_{n-2p+2}}+\overline{A_p{'}C_{n-2p+2}}+\overline{C_{n+2p-3}C_{n+2p-4}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-4}}\right)}{\overline{A_p{'}C_{n-2p+1}}+\overline{A_{n+p}C_{n+2p-3}}}=2
\end{aligned}$$

3. 由 PMI、1.、2.得證

在證明完正偶數邊形折到對邊的情況後，我們開始想要去探討正奇數邊形的規律。而藉由正奇數邊形的數據、在正五邊形中三角函數對應的規律。我們發現到在正奇數邊形中折到對邊後，折點左右兩三角形的周長相加會與其內角的餘弦值有關，如（表一）。

n	3	5	7	9
$\left[\triangle A_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}B_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}C_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right]+\left[\triangle A_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}B_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}C_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right]$	$2+2cos60°$	$2+2cos36°$	$2+2cos\frac{180}{7}°$	$2+2cos20°$

（表一）n 為奇數的情況

在這裡我們可發現，若給定一單位正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}$。將 A_1 折至

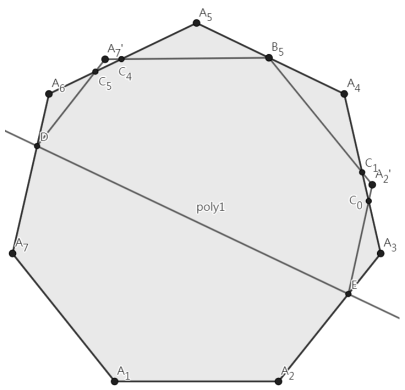
$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上的B_{n+2}。則$[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]+[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]=2+2\cos\frac{180°}{2n+1}$

不難發現，其 sin 函數中放進的角度是其正 $2n+1$ 邊形的內角的一半。

但當我們想要仿造正偶數邊形中的純幾方式去證明時，我們發現在正 $2n+1$ 邊形中，折疊後的圖形並無像正偶數邊形有固定的角度可以藉由翻轉去證明全等。

於是我們嘗試在 $Geogebra$ 中去探討其關係。發現在正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n-1}$中。若 B_{n+2} 為一動點。則 $[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]$成線性關係。而關係決定於$B_{n+2}$在$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$上移動時，所形成的分點比例。如圖（三）。

引理 2



圖（三）

$n=3$ 的舉例

設 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上有兩定點 P_1 、P_2 ，而將 A_1 分別折到 P_1 、P_2 上。而此時也會將$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-1}$ 、 $\dots\dots A_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、$A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-1}$ 、 $\dots\dots A'_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$

則$[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]$

$$=\frac{\overline{P_2B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_1C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}+\frac{\overline{P_1B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_2C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}$$

若且唯若 $B_{n+2}\in\overline{P_1P_2}$。反之，若$B_{n+2}\notin\overline{P_1P_2}$

則比例變為外分比，如下$[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]$

$$=\left|\frac{\overline{P_2B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_1C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}-\frac{\overline{P_1B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_2C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}\right|$$

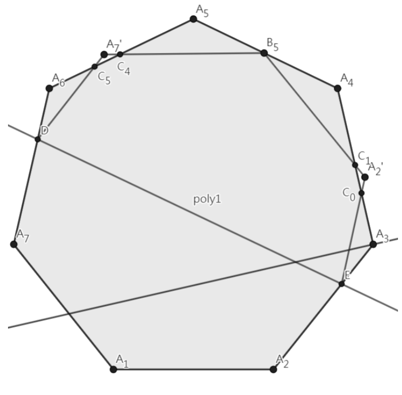
而由於篇幅關係，我們便不去證明此性質。

藉由這個性質，我們在報告中，由於正 $2n+1$ 邊形的證明過於繁瑣且複雜，故我們將 B_{n+2} 固定在$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上的特殊點，而在報告中我們選擇的是$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 的中點、三等分點。並藉由**引理 2**，即可推廣到$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上的任意點，即我們的**定理 3**：

定理 3：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n+1}$。若將 A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 $A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、 $\dots\dots A_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、 $\dots\dots A'_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 則：

$$[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]+[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]=2+2\cos\frac{180°}{2n+1}$$



$n=3$ 的舉例

證明：利用**引理 2**、三角函數的和差化積

1. 在 B_{n+2} 為中點時，易知 $\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2} \cong \triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}$

$[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]+[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]=2+2\sin\frac{90(n-2)}{n}$°得證。

2. 在 B_{n+2} 為三等分點，且$\overline{A_{n+1}B_{n+2}}$：$\overline{A_{n+2}B_{n+2}}=1$：2 時：

令 $\overline{A_{n+1}B_{n+2}}=rsin\theta \Rightarrow \overline{A_{n+2}B_{n+2}}=2rsin\theta \Rightarrow 3rsin\theta=1 \Rightarrow r=\frac{1}{3sin\theta}$

$\overline{A_{n+1}C_{n-2}}=\ rsin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)$ 、$\overline{C_{n-2}B_{n+2}}=rsin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)$

$$\overline{A_{n+2}C_{n+1}}=\frac{2rsin^2\theta}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}=\frac{\frac{2}{9}}{\overline{A_{n+1}C_{n-2}}}\text{ 、}\overline{B_{n+2}C_{n+1}}=\frac{2rsin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}=\frac{\frac{2\overline{C_{n-2}B_{n+2}}}{3}}{\overline{A_{n+1}C_{n-2}}}$$

而易知 $\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2} \approx \triangle A'_1C_{n-2}C_{n-3}$

$$\Rightarrow \frac{1-rsin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}{1-rsin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}=\frac{sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)+sin\theta}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{3sin\theta-sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}{3sin\theta-sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}=\frac{sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)+sin\theta}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$\Rightarrow 3sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)-sin^2\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)$$

$$=3sin^2\theta+2sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)sin\theta-sin^2\left(\frac{360°}{2n+1}\right)$$

$$\Rightarrow 3sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)-sin^2\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)$$

$$=2sin^2\theta+2sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)sin\theta-sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)sin\left(\frac{360°}{2n+1}+\theta\right)$$

$$\Rightarrow [\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]+[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]$$

$$=1+\overline{A_{n+1}C_{n-2}}+\overline{A_{n+2}C_{n+1}}+\ \overline{C_{n-2}B_{n+2}}+\overline{B_{n+2}C_{n+1}}$$

$$=1+\overline{A_{n+1}C_{n-2}}+\frac{\frac{2}{9}}{\overline{A_{n+1}C_{n-2}}}+\overline{C_{n-2}B_{n+2}}+\frac{\frac{2\overline{C_{n-2}B_{n+2}}}{3}}{\overline{A_{n+1}C_{n-2}}}$$

$$=1+\frac{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}{3sin\theta}+\frac{2sin\theta}{3sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}+\frac{sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{3sin\theta}+\frac{2sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{3sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$=1+\frac{sin^2\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)+2sin^2\theta+sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)+2sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)sin\theta}{3sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$=1+\frac{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)sin\left(\frac{360°}{2n+1}+\theta\right)+5sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)sin\theta}{3sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$1+\frac{sin\left(\frac{360°}{2n+1}+\theta\right)+5sin\theta}{3sin\theta}=1+1+2\,sin\frac{180°}{2n+1}=2+2\,cos\frac{180°}{2n+1}$$

3. 由**引理 2**、1.、2.得證

而如同正 $2n$ 邊形中，我們也發現折到對邊時，期中也有著其它組會有規律的的三角形序組，故得到我們的**定理 4**。

而在證明**定理 4** 之前，我們先證明**引理 3**，以便我們的證明。

引理 3：

$\forall n\in N\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}cos\left(\frac{180°k}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$ 皆成立。

〈證明〉：

首先先證明：

$\forall n\in N$、$a\in R$，皆有 $\sum_{k=1}^{n}cos(a+k\theta)=\frac{sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}cos\left(a+\frac{n+1}{2}\theta\right)$

在這給定一原點 A_0，做一射線 $\overrightarrow{A_0A_1}$ 與 x 軸夾角為 θ 且 $\overline{A_0A_1}=1$

則$A_1=(cos(\theta)\,,sin(\theta))$，而再做 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_0A_1}$ 軸夾角為 θ，則 A_2 相對於 A_1 為 $(cos(2\theta)\,,sin(2\theta))$，則 $A_2=(cos(\theta)+cos(2\theta)\,,sin(\theta)+sin(2\theta))$。

重複這步驟可做出 $A_n=\left(\sum_{k=1}^{n}cos(k\theta)\,,\sum_{k=1}^{n}sin(k\theta)\right)$

而易知，$A_i(i=1,2,\dots n)$為一正多邊形的頂點，故$\overline{A_0A_n}=\frac{sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

而又$\overline{A_nA_1}$與 x 軸夾角為 $\dfrac{n-1}{2}\theta+\theta=\dfrac{n+1}{2}\theta$

$$\sum_{k=1}^{n} cos(k\theta)=\overline{A_0A_n}cos\frac{n+1}{2}\theta=\frac{sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)$$

而若一開始的$\overrightarrow{A_0A_1}$與 x 軸夾角為 $a+\theta$，爾後步驟依舊為夾 θ ：

$$\sum_{k=1}^{n} cos(a+k\theta)=\frac{sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}cos\left(a+\frac{n+1}{2}\theta\right)$$

再來，開始證明引理

若 n 為偶數：

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}cos\left(\frac{180°k}{2n+1}\right)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}cos\left(\frac{360°k-180°}{2n+1}\right)-\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}cos\left(\frac{360°k}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{sin\left(\frac{n}{4}\times\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}\left(cos\left(-\frac{180°}{2n+1}+\frac{\frac{n}{2}+1}{2}\times\frac{360°}{2n+1}\right)-cos\left(\frac{\frac{n}{2}+1}{2}\times\frac{360°}{2n+1}\right)\right)$$

$$=2\times\frac{sin\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}sin\left(\frac{90°n+90°}{2n+1}\right)sin\left(\frac{90°}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{sin\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)}{cos\left(\frac{90°}{2n+1}\right)}sin\left(\frac{90°n+90°}{2n+1}\right)=\frac{sin\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)}{cos\left(\frac{90°}{2n+1}\right)}cos\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{sin\left(\frac{180°n}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°n}{2n+1}\right)}=\frac{1}{2}$$

若 n 為奇數：

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}cos\left(\frac{180°k}{2n+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}cos\left(\frac{360°k-180°}{2n+1}\right)-\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}cos\left(\frac{360°k}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{sin\left(\frac{n+1}{4}\times\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}cos\left(\frac{90°(n+1)}{2n+1}\right)-\frac{sin\left(\frac{n-1}{4}\times\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}cos\left(\frac{90°(n+1)}{2n+1}\right)$$

$$=cos\left(\frac{90°(n+1)}{2n+1}\right)\left(\frac{sin\left(\frac{90°(n+1)}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}-\frac{sin\left(\frac{90°(n-1)}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{90°(n+1)}{2n+1}\right)\frac{2\cos\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{90°}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{90°(n+1)}{2n+1}\right)\frac{\cos\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{90°}{2n+1}\right)}=\sin\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)\frac{\cos\left(\frac{90°n}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{90°}{2n+1}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\left(\frac{180°n}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{90°}{2n+1}\right)}=\frac{1}{2}$$

故**引理 3** 得證，接下來開始證明**定理 4**

定理 4：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n+1}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$、……$A_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$、……$A'_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 則：

$\forall\, n+1\geq k\geq\left[\frac{n+2}{2}\right]+1$，$[\triangle A_kC_{2k-n-4}C_{2k-n-3}]+[\triangle A_{2-k}C_{n-2k-2}C_{n-2k-1}]$

$=2+2\cos\frac{180°(n-k+2)}{2n+1}$

$\forall\left[\frac{n+2}{2}\right]\geq k\geq 2$，$[\triangle A'_kC_{n-2k+1}C_{n-2k+2}]+[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3}C_{-n+2k-4}]$

$=2-2\cos\frac{180°k}{2n+1}$

證明：利用**引理 3** 以及三角函數的和差化積

首先，可以發現我們的推測中：

$$\sum_{k=\left[\frac{n+2}{2}\right]+1}^{n+1}[\triangle A_kC_{2k-n-4}C_{2k-n-3}]+[\triangle A_{2-k}C_{n-2k-2}C_{n-2k-1}]$$

$$+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}[\triangle A'_kC_{n-2k+1}C_{n-2k+2}]+[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3}C_{-n+2k-4}]$$

$=2n+\ 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos\left(\frac{180°k}{2n+1}\right)=2n+1$，而利用幾何的推算，可以知道：

$$\sum_{k=\left[\frac{n+2}{2}\right]+1}^{n+1}[\triangle A_kC_{2k-n-4}C_{2k-n-3}]+[\triangle A_{2-k}C_{n-2k-2}C_{n-2k-1}]$$

$$+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}\left[\triangle A'_kC_{n-2k+1}C_{n-2k+2}\right]+\left[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3}C_{-n+2k-4}\right]$$

$$=\left(A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}C_{n-2\left[\frac{n+2}{2}\right]+2}+C_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]-n-2}C_{2\left[\frac{n+2}{2}\right]-n-1}+A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-1}C_{n-2\left[\frac{n+2}{2}\right]-1}\right)$$

$$+(C_{n-2\left[\frac{n+2}{2}\right]+2}C_{n-2\left[\frac{n+2}{2}\right]+1}+A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}C_{n-2\left[\frac{n+2}{2}\right]+1}+A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]+1}C_{k-\frac{[n+1]}{2}-2})+\cdots=2n+1$$

而在這之中，首先可以間接驗證我們的規律，而更可以從中推出：

由於我們已證明出了**定理 3**，而根據**引理 3**，**定理 4** 中正五邊形的情況得證。

而若正五邊形的情況中，在**定理 4** 的方程中，其 n 的值可不定為 2 ，而是對於任意正整數的情況成立，則可以藉由**引理 3** 推得正 7 邊形的情況成立。

而同樣地，我們可以藉由此方法推得所有正奇數邊形情況皆成立。於是我們只需證明 $k=2$ 時，對於所有正整數 n 成立。

$$\left[\triangle A'_2C_{n-3}C_{n-2}\right]=\left[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]\times\frac{A'_2C_{n-2}}{A_{n+1}C_{n-2}}=\left[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}\right]\times\frac{1-B_{n+2}C_{n-2}}{A_{n+1}C_{n-2}}$$

$$\left[\triangle A'_0C_{-n+1}C_{-n}\right]=\left[\triangle A'_0C_{n+2}C_{n+1}\right]=\left[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}\right]\times\frac{1-B_{n+2}C_{n+1}}{A_{n+2}C_{n+1}}$$

令 $\overline{A_{n+1}B_{n+2}}=rsin\theta$ 、$\overline{A_{n+2}C_{n+1}}=ksin\theta\Rightarrow\overline{A_{n+2}B_{n+2}}=ksin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)$ 、

$$(r+k)\left(sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)+sin\theta+sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)\right)=2+2\cos\frac{180°}{2n+1}$$

$$、rsin\theta+ksin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)=1\Rightarrow\frac{r}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}+\frac{k}{sin\theta}=\frac{1}{sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$\left[\triangle A'_2C_{n-3}C_{n-2}\right]+\left[\triangle A'_0C_{-n+1}C_{-n}\right]$$

$$=\left(sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)+sin\theta+sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)\right)\times\frac{1-rsin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$+\left(sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)+sin\theta+sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)\right)\times\frac{1-ksin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin(\theta)}$$

$$=\left(sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)+sin\theta+sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}+\frac{1}{sin(\theta)}-\frac{sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}\right)$$

$$= \left(sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)+sin\theta+sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)\right)\frac{sin(\theta)+sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)-sin\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$= 2+\frac{sin^2(\theta)+sin^2\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)-sin^2\left(\frac{360°}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$= 2+\frac{sin^2(\theta)-sin\theta sin\left(\frac{720°-\theta}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)} = 2+\frac{sin\theta-sin\left(\frac{720°-\theta}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{360°}{2n+1}-\theta\right)} = 2-2\,cos\frac{360°}{2n+1}$$

而在證明完正奇數邊形的情況後，我們回去看了我們對於正偶數邊形的研究。

我們將有些未配組的三角形配成一組，發現了如表（二）中的結果。

n	6	8	10	12	14
$\left[\triangle A_{\frac{n}{2}+2}B_{\frac{n}{2}+2}C_{\frac{n}{2}+1}\right]+\left[\triangle A_{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}-4}C_{\frac{n}{2}-3}\right]$	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$2+\sqrt{3}$	$2+2cos\frac{360}{14}$°
$\left[\triangle A'_2C_{\frac{n}{2}-3}C_{\frac{n}{2}-2}\right]+\left[\triangle A'_0C_{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}+2}\right]$	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$2-\sqrt{3}$	$2-2cos\frac{360}{14}$°
$\left[\triangle A_{\frac{n}{2}+3}C_{\frac{n}{2}+2}C_{\frac{n}{2}+3}\right]+\left[\triangle A_{\frac{n}{2}-1}C_{\frac{n}{2}-6}C_{\frac{n}{2}-5}\right]$	0	0	$2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	3	$2+2cos\frac{720}{14}$
$\left[\triangle A'_3C_{\frac{n}{2}-5}C_{\frac{n}{2}-4}\right]+\left[\triangle A'_{-1}C_{\frac{n}{2}+3}C_{\frac{n}{2}+4}\right]$	0	0	$2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	1	$2-2cos\frac{720}{14}$

表（二）正偶數邊形折到對邊後，不同的三角形配組結果

在這些數字中，我們可以發現，其規律跟正奇數邊形有很大的相似度。其所對應的倍數皆相同。於是，我們得到了折到對邊時，最後的**定理 5**

定理 5：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、$\dots A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}$折至 $A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}{}'$ 、 $\dots A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}{}'$。則：

$\forall\, n+1 \geq k \geq \left[\frac{n+2}{2}\right]+1$，

$$[\triangle A_kC_{2k-n-4}C_{2k-n-3}]+[\triangle A_{2-k}C_{n-2k}C_{n-2k+1}]=2+2\cos\frac{180°(n-k+1)}{n}$$

$\forall \left[\frac{n+2}{2}\right] \geq k \geq 2$，

$$[\triangle A'_kC_{n-2k+1}C_{n-2k+2}]+[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3}C_{-n+2k-2}]=2-2\cos\frac{180°(k-1)}{n}$$

〈證明〉：利用三角函數的和差化積、**引理 3**

我們同樣的利用**引理 3**、證明**定理 4** 的概念來證明。

首先，由**定理2**可知

$$\sum_{k=\left[\frac{n+2}{2}\right]+1}^{n}[\triangle A_kC_{2k-n-4}C_{2k-n-3}]+[\triangle A_{2-k}C_{n-2k}C_{n-2k+1}]$$
$$+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}[\triangle A'_kC_{n-2k+1}C_{n-2k+2}]+[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3}C_{-n+2k-2}]=2n$$

而易知

$$\sum_{k=\left[\frac{n+2}{2}\right]+1}^{n}2+2\cos\frac{180°(n-k+1)}{n}+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}2-2\cos\frac{180°(k-1)}{n}=2n$$

即可間接說明我們的定理

而接下來用數學歸納法證明：

1. $k=n+1$時，由 **定理2** 知成立

$k=2$時，

設$[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]$ $\overline{A_{n+1}B_{n+2}}=r\sin\theta$ 、$\overline{A_{n+2}B_{n+2}}=k\sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)$

則有：$ksin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)+rsin\theta=1$、$ksin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)=rsin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)+rsin\left(\frac{180°}{n}\right)-1$

$$[\triangle A'_2C_{n-3}C_{n-2}]+[\triangle A'_0C_{n+1}C_{n+2}]$$

$$=[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]\times\frac{1-B_{n+2}C_{n-2}}{A_{n+1}C_{n-2}}+[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]\times\frac{1-B_{n+2}C_{n+1}}{A_{n+2}C_{n+1}}$$

$$=\frac{2-2rsin\left(\frac{180°}{n}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}+\left(sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)+sin(\theta)+sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)\times\frac{1-ksin\left(\frac{180°}{n}\right)}{sin(\theta)}$$

$$=\frac{2-2rsin\left(\frac{180°}{n}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}+\left(sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)+sin(\theta)+sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)$$

$$\times\frac{sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)-sin\left(\frac{180°}{n}\right)+rsin\left(\frac{180°}{n}\right)sin(\theta)}{sin(\theta)sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}$$

$$=\frac{2sin(\theta)+2sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)-2sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{rsin(\theta)sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}$$

$$=\frac{\left(sin(\theta)+sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)-sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)\left(sin(\theta)+sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)+sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{sin(\theta)sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}$$

$$=2+\frac{sin^2(\theta)+sin^2\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)-sin^2\left(\frac{180°}{n}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}$$

$$=2+\frac{sin^2(\theta)-sin\theta sin\left(\frac{360°-\theta}{n}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}=2+\frac{sin\theta-sin\left(\frac{360°-\theta}{n}\right)}{sin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)}=2-2\cos\frac{180°}{n}$$

而根據**引理 3**，易知**定理 5** 在正六邊形的情況上符合。

而由上述得到的結果，易知若將正六邊形套入**定理 5**，其得到的通式不僅限於 $n=3$。而是對於所有 $n\in N$ 皆成立。而藉由這結果、**引理 3**，得到**定理 5** 在正八邊形的情況皆為正確。而以此方法類推，可得到**定理 5** 對於所有正偶數邊形皆為成立。故以此得證。

而在探討完正多邊形折到對邊的情況後。我們開始探討，若是折到其他邊，是否在周長上也會有相同的性質。而同樣的，我們一樣將正 $2n$ 邊形、正 $2n+1$ 邊形分開討論。而經由利用 $Geogebra$ 的測試後，我們發現了如表（三）中呈現的規律。

表格說明：給一單位正 n 邊形 $A_1A_2A_3 \ldots A_n$。將A_1折到$\overline{A_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}A_{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}$時，得到的規律。

n	6	8	10	12	14
$\left[\triangle A_{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-2}C_{\frac{n}{2}-3}\right]$	2	2	2	2	2

（表二）n 為偶數的情況

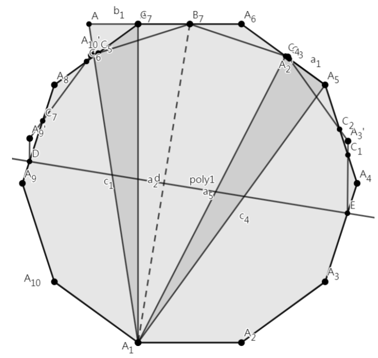
不難發現，跟前面折到對邊的情況幾乎相同。於是我們先往折到所有不含 A_1 的邊時，所形成的三角形中，含有 $A_{\frac{n}{2}+1}$ 的三角形的周長規律。而形成了我們**定理 5**

定理 6：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$。若將 A_1 點折至 $\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$ 上一點 B_{n+p+1}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 A_{p+1} 折至 A_{p+1}'。若 $C_{n-2} = \overline{A_1'A_2'} \cap \overline{A_nA_{n+1}}$

則：(1)：$\left[\triangle A_{n+1}C_{n-p}C_{n-p-1}\right] = 2$

(2)：$\angle C_{n-p}A_1C_{n-p-1} = \dfrac{90°}{n}$



$n = 5$ 的舉例

〈證明〉：變換命題，先固定角度、證明(1)，之後證明命題。

變換命題：

若在$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$、$\overline{A_nA_{n+1}}$ 上分別取 C_{n-p}、C_{n-p-1} 使 $\angle C_{n-p}A_1C_{n-p-1} = \dfrac{90°}{n}$ 成立。

則：(1)：$\left[\triangle A_{n+1}C_{n-p}C_{n-p-1}\right] = 2$

(2)：在 $\overrightarrow{C_{n-p}C_{n-p-1}}$ 取 $\overline{C_{n-p}\,A_{p+1}'} = \overline{A_1A_2}$。則 $\overline{A_1C_{n-p}}$ 的中垂線平$\overline{A_{p+1}A'_{p+1}}$。

(1)：$\left[\triangle A_{n+1}C_{n-p}C_{n-p-1}\right] = 2$

$\because \overline{A_1A_{n+2}} = \overline{A_1A_n}$ 且 $\angle A_1A_nC_{n-p-1} = 90° = \angle A_1A_{n+2}C_{n-p}$

$\therefore$ 若將$\triangle A_1A_nC_{n-p-1}$ 逆時針旋轉$\dfrac{180°}{n}$至$\triangle A_1A_{n+2}C'_{n-p-1}$。則 C_{n-p}、A_{n+2}、C'_{n-p-1}共線。

$\triangle A_1\,C_{n-p}C'_{n-p-1}$、 $\triangle A_1C_{n-p}C_{n-p-1}$ 中

$\overline{A_1C_{n-p}}$ 為共邊、$\overline{A_1C'_{n-p-1}} = \overline{A_1C_{n-p-1}}$、$\angle C_{n-p}A_1C'_{n-p-1} = \dfrac{90°}{n} = \angle C_{n-p}A_1C_{n-p-1}$

$\triangle A_1\,C_{n-p}C'_{n-p-1} \cong \triangle A_1C_{n-p}C_{n-p-1}$

$\Rightarrow \overline{C_{n-p-1}C_{n-p}} = \overline{C_{n-p}C'_{n-p-1}} = \overline{C_{n-p}A_{n+2}} + \overline{A_nC_{n-p-1}}$

$\Rightarrow \left[\triangle A_{n+1}C_{n-p}C_{n-p-1}\right] = 2$

(2)：若在$\overrightarrow{C_{n-p}C_{n-p-1}}$取$\overline{C_{n-p}\,A_{p+1}{}'} = \overline{A_1A_2}$。則$\overline{A_1C_{n-p}}$的中垂線垂直平分$\overline{A_{p+1}A'_{p+1}}$。

$\because \triangle A_1\,C_{n-p}C'_{n-p-1} \cong \triangle A_1C_{n-p}C_{n-p-1}$

$\Rightarrow \angle C_{n-p-1}C_{n-p}A_1 = \angle C'_{n-p-1}C_{n-p}A_1 = \angle C_{n-p}A_1A_{p+1}$

且$\overline{C_{n-p}\,A_{p+1}{}'} = \overline{A_1A_2} \therefore\ A_1A_{p+1}A'_{p+1}C_{n-p}$為等腰梯形，則$\overline{A_1C_{n-p}}$的中垂線垂直平分$\overline{A_{p+1}A'_{p+1}}$。

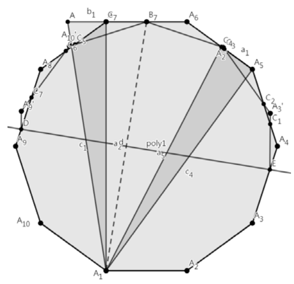
則變換後的命題得證，則原命題**定理 3** 得證。

而我們也把折到對邊時**定理 2** 的情況推廣到折到其他鄰邊的情況，而我們發現，每一組周長有規律的三角形，若是兩三角形對於多邊形是異側，則周長的和為定值。反之，若是在同側，則周長的差為定值。由這性質，我們得到了**定理 6。**

定理 7：
給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_{2n}$。若將 A_1 點折至$\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$上一點 B_{n+p+1}，此時 $n-1 \geq p \geq 1$、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 $A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}$ 、$\dots A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}$折至 $A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}{}'$ 、$\dots A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}{}'$。

則：$\forall \left[\frac{n+p+1}{2}\right] - n + 1 \leq k \leq \left[\frac{n+p+1}{2}\right]$

$\left[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right] - \left[\triangle\ A_k{}'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right] = 2$
若且唯若$2 \leq k \leq p$；反之，當 $1 \geq k$ 或 $k \geq p+1$ 時
$\left[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right] + \left[\triangle\ A_k{}'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right] = 2$



$n = 5$ 的舉例

〈證明〉:

利用**引理 3**、**定理 6**，由於證明方法與**定理2、定理 6** 相似，以下則不細說。

由**定理2**幾何遞推的方式易知。

$$\sum_{k=2}^{p}\left[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right]-\left[\triangle\ A_k\,'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right]+$$

$$\sum_{k=\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}^{1}\left[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right]+\left[\triangle\ A_k\,'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right]$$

$$+\sum_{k=p+1}^{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}\left[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right]+\left[\triangle\ A_k\,'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right]=2n$$

甚至於，利用**定理2的方法**可以推到：

$$\sum_{k=2}^{p}\left[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right]-\left[\triangle\ A_k\,'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right]=2(p-1)$$

在這裡只需先證明在 $k=2$ 、 $k=1$ 的情況中即可藉由**引理 3** 推正六邊形成立，由於

$$\sum_{k=2}^{p}\left[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right]-\left[\triangle\ A_k\,'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right]=2(p-1)，$$

若在正六邊形中寫出的三角函數通式，對於所有正整數 n 皆成立。可藉由**引理 3** 證明出對於正八邊形必成立，而以此法類推，即可推得**定理 7。**而由於篇幅關係，在此不細說。

說明完了正偶數邊形折到其他鄰邊時，三角形配組周長相加為 2 的情況。我們如法炮製前提研究的規律，去探討正奇數邊形中，三角形周長相加與餘弦定理的規律。進而得到我們下述的**定理 8。**而同時也去將**定理 5** 的情況做延伸。

定理 8：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{p-1}A_p}$ 上一點 B_p，此時 $2n+1\geq p\geq n+2$、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A'_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$，則：

$\forall\, n+1\geq k\geq\left[\frac{p}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+2$

$$\left[\triangle A_kC_{2k-n-4-p}C_{2k-n-3-p}\right]+\left[\triangle A_{2-k}C_{n-2k-3-p}C_{n-2k-2-p}\right]=2+2\cos\frac{180°(n-k+2)}{2n+1}\ 、$$

$\forall\left[\frac{p}{2}\right]-n+1\geq k\geq 2$

$$\left[\triangle A'_kC_{n-2k+1+p}C_{n-2k+2+p}\right]+\left[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3+p}C_{-n+2k-4+p}\right]=2-2\cos\frac{180°k}{2n+1}$$

〈證明〉：利用**引理 3**、**定理 5** 的結論，由於證明方法與**定理2**、**定理 7** 相似，下不細說。

首先要先證明：

$\left[\triangle A_k C_{2k-n-4-p} C_{2k-n-3-p}\right] + \left[\triangle A_{2-k} C_{n-2k-3-p} C_{n-2k-2-p}\right]$

$= 2 + 2\cos\dfrac{180°(n-k+2)}{2n+1}$ 在 $k = n+1$ 時成立。

$\left[\triangle A_{n+1} C_{n-2-p} C_{n-1-p}\right] + \left[\triangle A_{n+2} C_{n-4-p} C_{n-3+p}\right]$

令$A_{n+1}C_{n-2-p} = rsin(\theta)$ 、$A_{n+2}C_{n-3+p} = ksin\left(\dfrac{180°}{n} - \theta\right)$ 、

$C_{n-3-p}C_{n-2-p} = lsin\left(\dfrac{180°}{n}\right)$ 、$rsin(\theta) + lsin\left(\dfrac{180°}{n}\right) + ksin\left(\dfrac{180°}{n} - \theta\right) = 1$

、$rsin\left(\dfrac{180°}{n}\right) + lsin(\theta) = 1$ 、$ksin\left(\dfrac{180°}{n}\right) + lsin\left(\dfrac{180°}{n} - \theta\right) = 1$

則可藉由與**定理 5** 相同的技巧推得：

$k = n+1$ 時，

$$\left[\triangle A_{n+1} C_{n-2-p} C_{n-1-p}\right] + \left[\triangle A_{n+2} C_{n-4-p} C_{n-3+p}\right]$$
$$= \left(sin(\theta) + sin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right) + sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)\right) \times (r+k)$$
$$= 1 - lsin\left(\frac{180°}{2n+1}\right) + 1 - lsin(\theta) + 1 - lsin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right) + rsin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right) + ksin(\theta)$$
$$= 2\left(\frac{1 - rsin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right) + lsin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right)} - \frac{1 - rsin(\theta) + ksin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin(\theta)}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1 + lsin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right)} - \frac{1 + ksin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin(\theta)}\right)$$
$$= \frac{\left(sin(\theta) + sin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right) - sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)\right)\left(sin(\theta) + sin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right) + sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)\right)}{sin(\theta)sin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right)}$$
$$= 2 + \frac{sin^2(\theta) + sin^2\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right) - sin^2\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right)}$$
$$= 2 + \frac{sin^2(\theta) - sin\theta sin\left(\frac{360° - \theta}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right)} = 2 + \frac{sin\theta - sin\left(\frac{360° - \theta}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1} - \theta\right)} = 2 - 2\cos\frac{180°}{2n+1}$$

$\left[\triangle A_k C_{2k-n-4-p} C_{2k-n-3-p}\right] + \left[\triangle A_{2-k} C_{n-2k-3-p} C_{n-2k-2-p}\right]$

$= 2 + 2\cos\dfrac{180°(n-k+2)}{2n+1}$ 在 $k = n+1$ 時成立。

而藉由此結果、**引理 3**，可知道**定理 8** 在正七邊形的情況必定成立。

而更可從$rsin(\theta)+lsin\left(\frac{180°}{n}\right)+ksin\left(\frac{180°}{n}-\theta\right)=1$ 此三角函式的結果中，

發現對於任意正奇數邊形此假設皆可適用。由**引理3**可知，結果對於任意 n 為正整數皆成立。

於是，由正七邊形寫出的三角函式是對於任意正整數 n 成立。而又由**引理 3，**可知**定理 8** 對於 $n=4$ 成立。而同理的，我們可得**定理 8** 成立。

而正奇數邊形中最後一個定理，是在討論如同**定理 7** 中有許多三角形配組出的結果，由於一組中的三角形對於正 $2n$ 邊形為同側，故規律呈現為配組三角形周長的差為定值。

定理 9：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{p-1}A_p}$ 上一點 B_p，此時 $2n+1\geq p\geq n+2$、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A'_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$，則：$\forall\, 2\geq k\geq p-n-\left[\frac{p}{2}\right]$

$\left[\triangle A'_kC_{n-2k+3+p}C_{n-2k+4+p}\right]-\left[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3+p}C_{-n+2k-4+p}\right]$

$=2-2\cos\frac{180°k}{2n+1}$

〈證明〉：利用**引理 3**、**定理 8** 的結論，由於證明方法與**定理2**、**定理 8** 相似，下不細說。

首先由**定理 8** 之中，

$$\forall\, n+1\geq k\geq\left[\frac{p}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+2$$

$$\left[\triangle A_kC_{2k-n-4-p}C_{2k-n-3-p}\right]+\left[\triangle A_{2-k}C_{n-2k-3-p}C_{n-2k-2-p}\right]=2+2\cos\frac{180°(n-k+2)}{2n+1}$$ 、

$$\forall\left[\frac{p}{2}\right]-n+1\geq k\geq 2$$

$$\left[\triangle A'_kC_{n-2k+1+p}C_{n-2k+2+p}\right]+\left[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3+p}C_{-n+2k-4+p}\right]=2-2\cos\frac{180°k}{2n+1}$$

藉由上述以及**引理 3** 可知

$$\sum_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}^{2}\left[\triangle A'_k C_{n-2k+1+p} C_{n-2k+2+p}\right]-\left[\triangle A'_{2-k} C_{-n+2k-3+p} C_{-n+2k-4+p}\right]$$

$$=2\sum_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}^{2}(2-2\cos\frac{180°k}{2n+1})$$

於是我們只需證明：$k=2$ 時對於正整數 n 成立。而由於方法跟**定理 5** 相同，不多細說。

$k=2$ 時，

$$\left[\triangle A'_2 C_{n-1+p} C_{n+p}\right]-\left[\triangle A'_0 C_{n+2+p} C_{n+1+p}\right]$$

$$=\left(sin(\theta)+sin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)+sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)\right)\times(r+k)$$

$$=1-lsin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)+1-lsin(\theta)+1-lsin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)+rsin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)+ksin(\theta)$$

$$=2\left(\frac{1-rsin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)+lsin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)}-\frac{1-rsin(\theta)+ksin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin(\theta)}\right)$$

$$=2\left(\frac{1+lsin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)}-\frac{1+ksin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{rsin(\theta)}\right)$$

$$=\frac{\left(sin(\theta)+sin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)-sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)\right)\left(sin(\theta)+sin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)+sin\left(\frac{180°}{2n+1}\right)\right)}{sin(\theta)sin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$=2+\frac{sin^2(\theta)+sin^2\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)-sin^2\left(\frac{180°}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)}$$

$$=2+\frac{sin^2(\theta)-sin\theta sin\left(\frac{360°-\theta}{2n+1}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)}=2+\frac{sin\theta-sin\left(\frac{360°-\theta}{2n+1}\right)}{sin\left(\frac{180°}{2n+1}-\theta\right)}=2-2\cos\frac{180°}{2n+1}$$

而說明完了正奇數邊形的所有情況，最後一個就是**定理 5** 的通解。

也就是在正偶數邊形中，以不同於**定理 6** 中的情形將三角形配組，得出不同的結果。

定理 10：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_{2n}$。若將

$\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$ 上一點 B_{n+p+1}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}$ 、$\dots A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}$ 折至 $A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}{}'$ 、$\dots A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}{}'$。

$\forall\, 2 \le k \le p$，

$$[\triangle A_k C_{2k-n-3-p} C_{2k-n-2-p}] - [\triangle A_{2-k} C_{n-2k-p+1} C_{n-2k+2-p}] = 2 + 2\cos\frac{180°(n-k+1)}{n}$$

$\forall 2 \ge k \cup k \ge p$

$$[\triangle A'_k C_{n-2k+2-p} C_{n-2k+3-p}] + [\triangle A'_{2-k} C_{-n+2k-2-p} C_{-n+2k-1-p}] = 2 - 2\cos\frac{180°(k-1)}{n}$$

〈證明〉：利用**引理 3**、**定理 5** 的結論，由於證明方法與**定理2**、**定理 8** 相似，下不細說。

首先，由**定理 7**可知

$$\sum_{k=2}^{p}[\triangle\, A_{n+k} C_{n+2k-(p+2)} C_{n+2k-(p+3)}] - [\triangle\, A_k{}' C_{n-2k+p} C_{n-2k+p+1}]$$

$$+\sum_{k=p+1}^{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}[\triangle A'_k C_{n-2k+1} C_{n-2k+2}] + [\triangle A'_{2-k} C_{-n+2k-3} C_{-n+2k-2}] = 2n$$

而易知

$$\sum_{k=p+1}^{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]} 2 + 2\cos\frac{180°(n-k+1)}{n} + \sum_{k=2}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} 2 - 2\cos\frac{180°(k-1)}{n} = 2n$$

即可間接說明我們的定理。

$k = n$ 時，

$$[\triangle A_n C_{n-3-p} C_{n-2-p}] - [\triangle A_{n+2} C_{n-p+1} C_{n+2-p}]$$

$$= [\triangle A_{n+1} C_{n-p} C_{n-p-1}] \times \left(\frac{A_n C_{n-2-p}}{A_{n+1} C_{n-p-1}} - \frac{A_{n+2} C_{n-p+1}}{A_{n+1} C_{n-p}}\right)$$

$$= [\triangle A_{n+1} C_{n-p} C_{n-p-1}] \times \frac{1 - A_{n+1} C_{n-p-1} + C_{n-p-1} C_{n-2-p}}{A_{n+1} C_{n-p-1}}$$

$$-[\triangle A_{n+1} C_{n-p} C_{n-p-1}] \times \frac{1 - A_{n+1} A_{n+1} C_{n-p} + C_{n-p+1} C_{n-p}}{A_{n+1} C_{n-p}}$$

$$= 2\left(\frac{1 - A_{n+1}C_{n-p-1} + C_{n-p-1}C_{n-2-p}}{A_{n+1}C_{n-p-1}} - \frac{1 - A_{n+1}A_{n+1}C_{n-p} + C_{n-p+1}C_{n-p}}{A_{n+1}C_{n-p}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1 - rsin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right) + lsin\left(\frac{180°}{n}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right)} - \frac{1 - rsin(\theta) + ksin\left(\frac{180°}{n}\right)}{rsin(\theta)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1 + lsin\left(\frac{180°}{n}\right)}{rsin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right)} - \frac{1 + ksin\left(\frac{180°}{n}\right)}{rsin(\theta)}\right)$$

$$= \frac{\left(sin(\theta) + sin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right) - sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)\left(sin(\theta) + sin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right) + sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{sin(\theta)sin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right)}$$

$$= 2 + \frac{sin^2(\theta) + sin^2\left(\frac{180°}{n} - \theta\right) - sin^2\left(\frac{180°}{n}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right)}$$

$$= 2 + \frac{sin^2(\theta) - sin\theta sin\left(\frac{360° - \theta}{n}\right)}{sin\theta sin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right)} = 2 + \frac{sin\theta - sin\left(\frac{360° - \theta}{n}\right)}{sin\left(\frac{180°}{n} - \theta\right)} = 2 - 2\,cos\,\frac{180°}{n}$$

而證明完了$k = n$的情況，藉由**引理 3**，易知**定理 8** 在正六邊形的情況上符合。

而由上述三角函式得到的結果，易知若將正六邊形套入**定理 5**，其得到的三角通式不僅限於 $n = 3$ 。而是對於所有 $n \in N$ 皆成立。而藉由這結果、**引理 3**，可知若將其六邊形的三角通式中 $n = 4$ 代入，可得到**定理 5** 在正八邊形的情況皆為正確。而以此方法類推，可得到**定理 5** 對於所有正偶數邊形皆為成立。故以此得證。

伍、結論

本研究主要在探討正多邊形固定一點折到其中一邊其圍成的三角形周長和的規律。

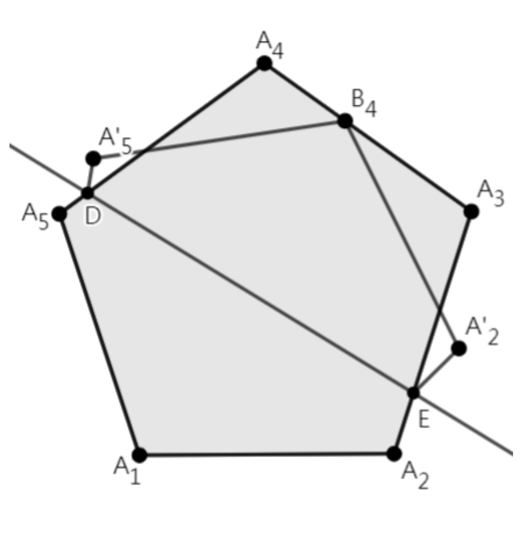
一、　解出原題目並推廣至正五邊形

引理 1：

給定一邊長為 1 的正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$。取 A_3A_4 上一點 B_4、$\overline{DE}$ 垂直平分 $\overline{A_1B_4}$，D、E 分別為 $\overline{A_4A_5}$、$\overline{A_2A_3}$ 上一點。將五邊形 $A_1A_5DEA_2$ 沿 $\overline{DE}$ 做對稱。A_1、A_5、D、E、A_2分別對稱到A_1'、A_5'、D'、E'、A_2'。

若$C_0 = \overline{A_2'B_4} \cap \overline{A_2A_3}$、$C_3 = \overline{A_5'B_4} \cap \overline{A_5A_4}$，

則：$[\triangle B_4A_3C_0] + [\triangle B_4A_4C_3] = 2 + 2sin54°$



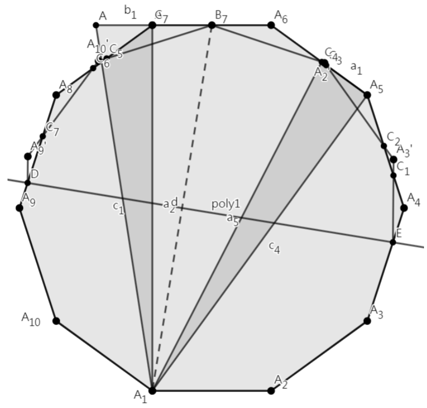
二、 將折到對邊的情況推廣到正偶數邊形

定理 1：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$。若將 A_1 點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 A_2 折至 A_2'。若 $C_{n-2}=\overline{A_1'A_2'}\cap\overline{A_nA_{n+1}}$

則：(1)：$[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]=2$

(2)：$\angle B_{n+2}A_1C_{n-2}=\dfrac{90°}{n}$



$n=5$ 的舉例

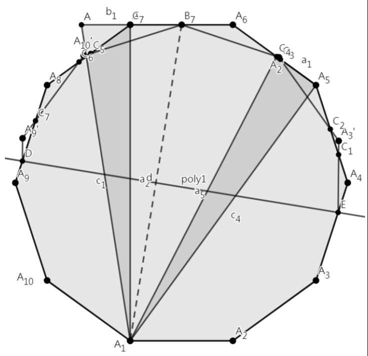
三、 在正偶數邊形中找到其他組三角形可使得周長相加為 2

定理 2：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$。若將 A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 $A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、$\ldots A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}$折至 $A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}'$ 、$\ldots A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}'$。

則：$\forall\left[\frac{n}{2}\right]+2-n\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]+1$且 $k\neq 1$

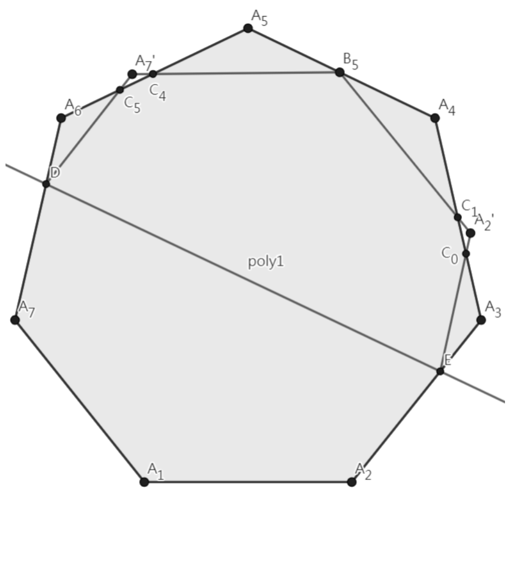
則：$[\triangle\ A_k'C_{n-2k+1}C_{n-2k+2}]+[\triangle\ A_{n+k}C_{n+2k-3}C_{n+2k-4}]=2$



$n=5$ 的舉例

四、 將折到對邊的規律推廣至正奇數邊形

引理 2



圖（三）$n=3$ 的舉例

設 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上有兩定點 P_1、P_2 ，而將 A_1 分別折到 P_1 、P_2 上。而此時同樣也會將$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 、

$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-1}$、$\ldots\ldots A_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}\ldots\ldots A'_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$

則$[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]$

$$=\frac{\overline{P_2B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_1C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}+\frac{\overline{P_1B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_2C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}$$

若且唯若 $B_{n+2}\in\overline{P_1P_2}$。反之，若$B_{n+2}\notin\overline{P_1P_2}$

則比例變為外分比，如下$[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]$

$$=\left|\frac{\overline{P_2B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_1C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}-\frac{\overline{P_1B_{n+2}}[\triangle A_{n+2}P_2C_{n+1}]}{P_2B_{n+2}+P_1B_{n+2}}\right|$$

藉由這個性質說明**定理 3**

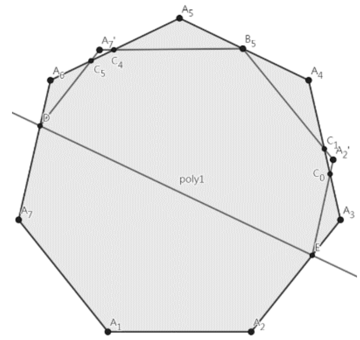
定理 3：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$、……$A_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$、……$A'_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 則：

$$[\triangle A_{n+1}B_{n+2}C_{n-2}]+[\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+1}]=2+2\sin\frac{90(2n-1)}{2n+1}$$。



$n=3$ 的舉例

五、 將**定理 2** 中的結果類推到**定理 4**

定理 4：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$、……$A_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$、……$A'_{2-\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ 則：

$$\forall\, n+1\ge k\ge\left[\frac{n+2}{2}\right]+1，\left[\triangle A_kC_{k-\frac{[n+1]}{2}-2}C_{k-\frac{[n+1]}{2}-1}\right]+\left[\triangle A_{2-k}C_{-k+\frac{[n+1]}{2}}C_{-1-k+\frac{[n+1]}{2}}\right]$$

$$=2+2\cos\frac{180°(n-k+2)}{2n+1}\text{、}\forall\left[\frac{n+2}{2}\right]\ge k\ge 2，$$

$$\left[\triangle A'_kC_{k-\frac{[n+1]}{2}-2}C_{k-\frac{[n+1]}{2}-1}\right]+\left[\triangle A'_{2-k}C_{-k+\frac{[n+1]}{2}}C_{-1-k+\frac{[n+1]}{2}}\right]=2-2\cos\frac{180°k}{2n+1}$$

六、 找到在正偶數邊形中，折到對邊時，其他有規律的三角形配組

定理 5：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上一點 B_{n+2}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$、…$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}$折至 $A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}{}'$、…$A_{\left[\frac{n+2}{2}\right]-n+1}{}'$。則：

$$\forall\, n+1\ge k\ge\left\lceil\frac{n+2}{2}\right\rceil+1，$$

$$[\triangle A_kC_{2k-n-4}C_{2k-n-3}]+[\triangle A_{2-k}C_{n-2k}C_{n-2k+1}]=2+2\cos\frac{180°(n-k+1)}{n}$$

$$\forall\left\lceil\frac{n+2}{2}\right\rceil\ge k\ge 2，$$

$$[\triangle A'_kC_{n-2k+1}C_{n-2k+2}]+[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3}C_{-n+2k-2}]=2-2\cos\frac{180°(k-1)}{n}$$

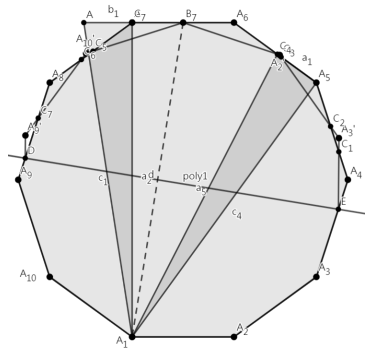
七、 將折到對邊的情況中的**定理 1**：推廣到折到其他鄰邊

定理 6：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$。若將 A_1 點折至 $\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$ 上一點 B_{n+p+1}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 A_{p+1} 折至 A_{p+1}'。若 $C_{n-2} = \overline{A_1'A_2'} \cap \overline{A_nA_{n+1}}$

則：(1)：$\left[\triangle A_{n+1}C_{n-p}C_{n-p-1}\right] = 2$

(2)：$\angle C_{n-p}A_1C_{n-p-1} = \dfrac{90°}{n}$



$n = 5$ 的舉例

八、 將**定理 2** 推廣

定理 7：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$。若將 A_1 點折至 $\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$ 上一點 B_{n+p+1}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

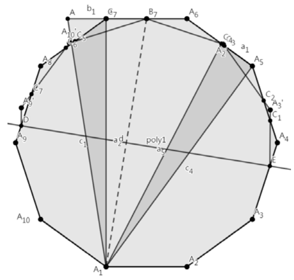
$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}$ 、…$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}$ 折至 $A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}'$ 、…$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}'$。

則：$\forall \left[\frac{n+p+1}{2}\right] - n + 1 \le k \le \left[\frac{n+p+1}{2}\right]$ 且 $k \ne 1$

$\left[\triangle A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right] - \left[\triangle A_k'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right] = 2$

若且唯若 $2 \le k \le p$；反之，當 $2 \ge k$ 或 $k \ge p$ 時

$\left[\triangle A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}\right] + \left[\triangle A_k'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}\right] = 2$



$n = 5$ 的舉例

九、

定理 8：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n+1}$。若將

A_1 點折至 $\overline{A_{p-1}A_p}$ 上一點 B_p，此時 $2n+1 \ge p \ge n+2$、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A'_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$，則：

$$\forall\, n+1 \ge k \ge \left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + 2$$

$$\left[\triangle A_kC_{2k-n-4-p}C_{2k-n-3-p}\right] + \left[\triangle A_{2-k}C_{n-2k-3-p}C_{n-2k-2-p}\right] = 2 + 2\cos\frac{180°(n-k+2)}{2n+1}$$ 、

$$\forall \left[\frac{p}{2}\right] - n + 1 \ge k \ge 2$$

$$\left[\triangle A'_kC_{n-2k+1+p}C_{n-2k+2+p}\right] + \left[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3+p}C_{-n+2k-4+p}\right] = 2 - 2\cos\frac{180°k}{2n+1}$$

十、

定理 9：

給定一邊長為 1 的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{p-1}A_p}$ 上一點 B_p，此時 $2n+1\geq p\geq n+2$、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ 、……$A'_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$，則：$\forall\, 2\geq k\geq p-n-\left[\frac{p}{2}\right]$

$$\left[\triangle A'_kC_{n-2k+3+p}C_{n-2k+4+p}\right]-\left[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-3+p}C_{-n+2k-4+p}\right]$$
$$=2-2\cos\frac{180°k}{2n+1}$$

十一、

定理 10：

給定一邊長為 1 的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$。若將

$\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$ 上一點 B_{n+p+1}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}$ 、…$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}$折至 $A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}{}'$ 、…$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}{}'$。

$\forall\, 2\leq k\leq p$，

$$\left[\triangle A_kC_{2k-n-3-p}C_{2k-n-2-p}\right]-\left[\triangle A_{2-k}C_{n-2k-p+1}C_{n-2k+2-p}\right]=2+2\cos\frac{180°(n-k+1)}{n}$$

$\forall 2\geq k\cup k\geq p$

$$\left[\triangle A'_kC_{n-2k+2-p}C_{n-2k+3-p}\right]+\left[\triangle A'_{2-k}C_{-n+2k-2-p}C_{-n+2k-1-p}\right]=2-2\cos\frac{180°(k-1)}{n}$$

陸、參考資料及其他

1. 游森棚 (2013)。高中數學第一、二、三、四冊。翰林出版社，108 年 4 月、9 月初版。
2. 羅和憲(2013)。芳賀第二定理的延伸及其形成線段數值的數字變化方式。第 53 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。
3. 許凱宣、徐紹敦(2019)。翻轉正 n 邊形邊上點的猜想。第 59 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。
4. 林琦焜。從三角求和公式到 Fourier 級數。
5. 安田富久(2016)。芳賀定理（折り紙）について ＜もし折るなら･･･ ＞。北数教“第 97 回数学教育実践研究会”。

【評語】050403

本作品所探究的問題可以視為是從摺紙出發的問題，作者考慮將正 n 邊形的一個頂點，折到對邊，計算出折點左右兩邊的三角形周長是一個與正 n 邊形內角一半有關的定值。對於奇數邊與偶數邊不同的現象，作者都進行了相當的探究，偶數邊的情形用平面幾何和三角函數證明，做得很不錯。但是，奇數邊的情況，結論相較是單薄些。似乎對於奇數邊的證明所遇到的困難，作者尚未完全克服。整體來看，作品有得到部分證明有趣的結果，如果能夠有更完整的推論或是其他面向的延展應該會更好。

作品簡報

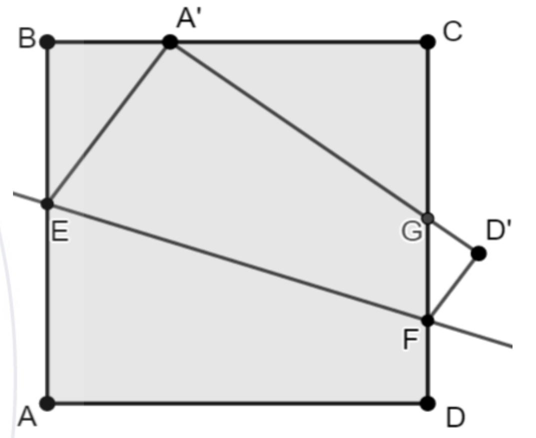
幾何配數歸，碰出新滋味

高中職組-數學科

前言

動機：

以下列此題出發：「如右圖，給一單位正方形$A_1A_2A_3A_4$、取$\overline{A_3A_4}$上一點 B_4，其對稱軸交 $\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$ 於 D、E。將 A_1DEA_2 沿 $\overline{DE}$ 折至 $A_1'DEA_2'$ 若 $\overline{A_1'A_2'}$ 交 $\overline{A_2A_3}$於 C_0則試證：$[\Delta B_4A_3C_0] = 2\overline{A_1A_2}$。」



研究目的：

1. 探討若在正多邊形中做相似的幾何操作，是否存在著如原題目正方形中，周長與邊長的比例關係
2. 正多邊形中周長與邊長的規律，是否能以其他的三角形配組形成相似的規律
3. 正多邊形中，若對除了對邊以外的任意邊作相同操作，是否也能類推至同樣的結果

名詞定義

定義1：折點

給一正 n 邊形$A_1A_2A_3 \ldots A_n$，若將 A_1 折至正 n 邊形上一邊 $A_{m-1}A_m$的一點。則定義該點為B_m。

定義2：線邊交點

給一正 n 邊形$A_1A_2A_3 \ldots A_n$。若將 A 點折至 $\overline{A_{m-1}A_m}$ 上 B_m、$m \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$。

沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 $A_{[\frac{m}{2}]}$ 、$A_{[\frac{m}{2}]-1}$ … $A_{[\frac{m}{2}]-n+1}$折至 $A_{[\frac{m}{2}]}'$、$A_{[\frac{m}{2}]-1}'$ … $A_{[\frac{m}{2}]-n+1}'$。

則定義$C_0 = \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]}'E} \cap \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]+1}A_{[\frac{m}{2}]+2}}$、$C_{n-1} = D$、$C_{-1} = E$ $\forall n-2 \geq k \geq 1$，

$C_k = \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]-[\frac{k}{2}]}'A_{[\frac{m}{2}]-[\frac{k}{2}]+1}'} \cap \overleftrightarrow{A_{[\frac{m}{2}]+[\frac{k}{2}]}A_{[\frac{m}{2}]+[\frac{k}{2}]+1}}'$，此時 $B_m = C_{[\frac{m}{2}]} = C_{[\frac{m}{2}]-1}$

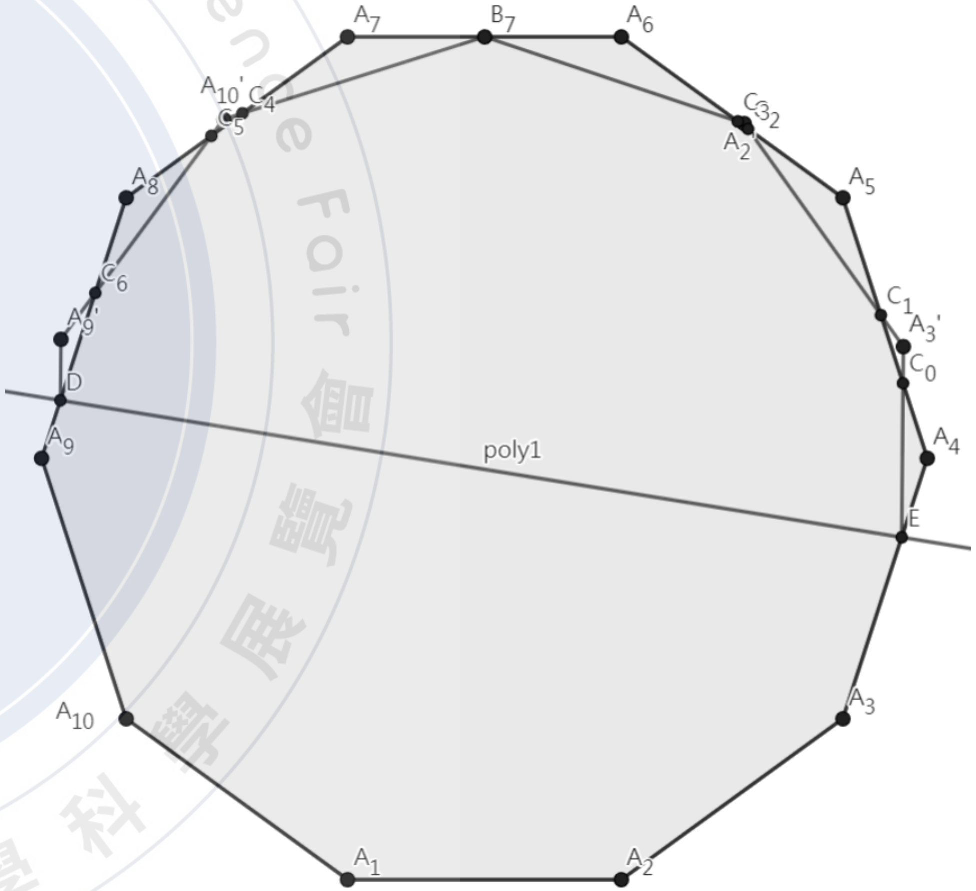
定義3：三角形周長

$[\Delta ABC]$代表ΔABC 的周長

定義4：模系表示法：

若今給定一個正 n 邊形$A_1A_2A_3 \ldots A_n$。則定義 $\forall m$、$k \in Z$ 、$1 \leq k \leq n$。

$A_m = A_k$ 若且唯若 $m \equiv k (mod\ n)$。同樣 $C_m = C_k$若且唯若 $m \equiv k(mod\ n)$。



五邊形初步探討

簡述：

給一單位正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$如圖標點，發現若將$[\Delta B_4A_3C_0]+[\Delta B_4A_4C_3]$。其得到的值為3.6180339⋯。而若將此值減去2，即可得到我們熟悉的黃金比例：1.618⋯。

而與五邊形的關係就在於$sin54° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

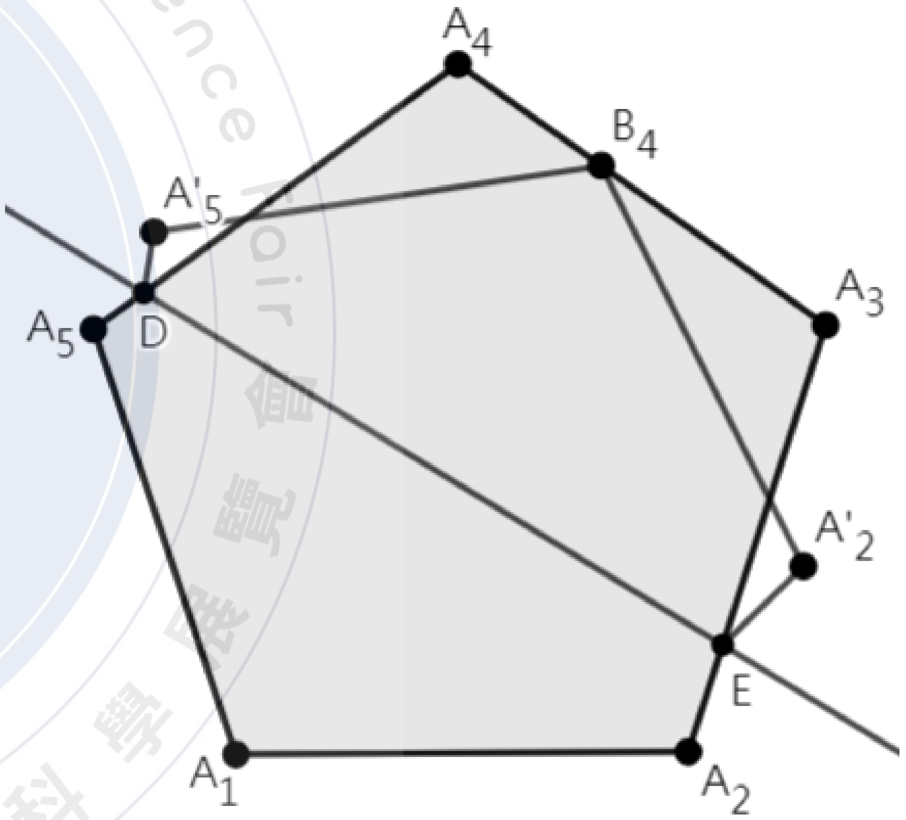
於是我們可以知道，其兩三角形的周長和為：$2+2sin54°$。

引理1：

給定一邊長為1的正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$。取 A_3A_4上一點 B_4、$\overline{DE}$ 垂直平分 $\overline{A_1B_4}$，D、E 分別為 $\overline{A_4A_5}$、$\overline{A_2A_3}$ 上一點。將五邊形 $A_1A_5DEA_2$ 沿 $\overline{DE}$ 做對稱。A_1、A_5、D、E、A_2分別對稱到 A_1'、A_5'、D'、E'、A_2'

若$C_0=\overline{A_2'B_4}\cap\overline{A_2A_3}$、$C_3=\overline{A_5'B_4}\cap\overline{A_5A_4}$，

則：$[\Delta B_4A_3C_0]+[\Delta B_4A_4C_3]=2+2sin54°$



窮舉正多邊形得到的規律(定理1及定理3)

n	4	6	8	10	12
$[\Delta A_{\frac{n}{2}+1}B_{\frac{n}{2}+2}C_{\frac{n}{2}-2}]$	2	2	2	2	2

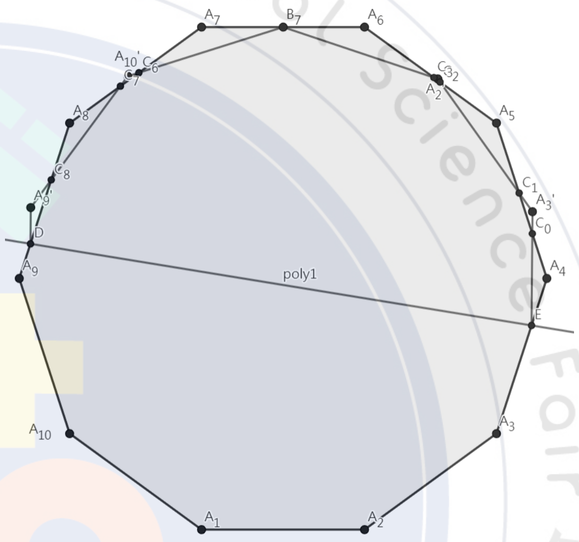
n 為偶數的情況：

可推測對於所有正偶數邊形，在將頂點折到對邊時折點右邊的三角形周長必為正偶數邊形周長的兩倍

n	3	5	7	9	11
$[\Delta A_{[\frac{n}{2}]+1}B_{[\frac{n}{2}]+2}C_{[\frac{n}{2}]-2}]+[\Delta A_{[\frac{n}{2}]+2}B_{[\frac{n}{2}]+2}C_{[\frac{n}{2}]+1}]$	3	3.618	3.802	3.879	3.919

n 為偶數的情況：

可推測對於所有正偶數邊形，在將頂點折到對邊時折點右邊的三角形周長必為正偶數邊形周長的兩倍

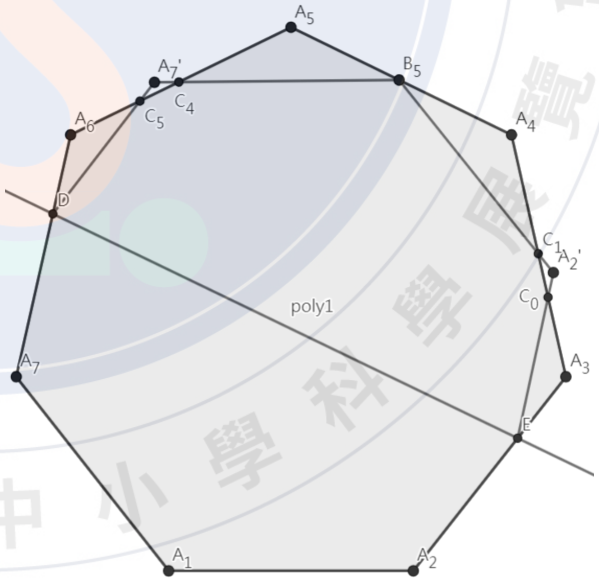


以此正十邊形為例：

其折點右邊的三角形

$[\Delta A_6B_7C_3]=2$

我們也發現$\angle B_7A_1C_4=18°$



以此正七邊形為例：

$[\Delta A_4B_5C_1]+[\Delta A_5B_5C_4]$

$=2+2\cos\dfrac{180°}{7}$

而不僅未像正偶數邊形

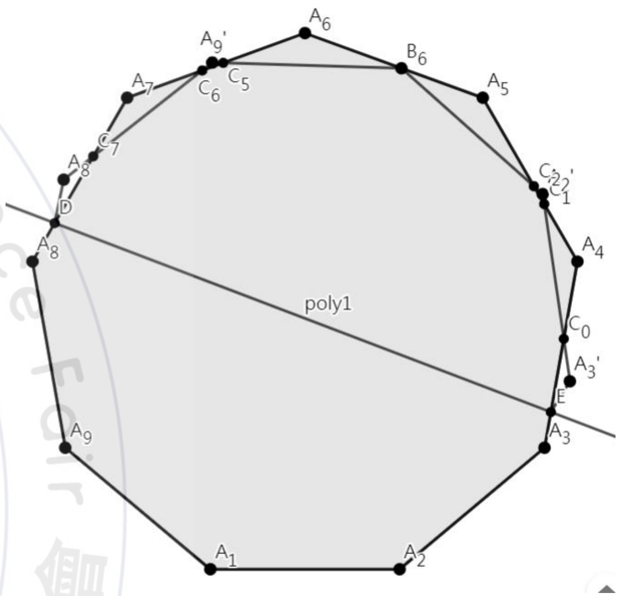
找到角度的規律

三角形的配組情況也不同

正奇數邊形不同三角形的配組(定理4)

n	9	11	13	15
$[\Delta A_{k+1}C_{k-2}C_{k-1}]+$ $[\Delta A_{1-k}C_{-k}C_{-k-1}]$	$2+2cos\frac{180}{9}°$	$2+2cos\frac{180}{11}°$	$2+2cos\frac{180}{11}°$	$2+2cos\frac{180}{15}°$
$[\Delta A'_2C_{k-3}C_{k-2}]$ $+[\Delta A'_0C_{1-k}C_{-k}]$	$2-2cos\frac{360}{9}°$	$2-2cos\frac{360}{11}°$	$2-2cos\frac{360}{11}°$	$2-2cos\frac{360}{15}°$
$[\Delta A_kC_{k-4}C_{k-3}]+$ $[\Delta A_{2-k}C_{-k+2}C_{-k+1}]$	$2+2cos\frac{360}{9}°$	$2+2cos\frac{360}{11}°$	$2+2cos\frac{360}{11}°$	$2+2cos\frac{360}{15}°$
$[\Delta A'_3C_{k-5}C_{k-4}]$ $+[\Delta A'_{-1}C_{3-k}C_{2-k}]$	$2-2cos\frac{540}{9}°$	$2-2cos\frac{540}{11}°$	$2-2cos\frac{540}{11}°$	$2-2cos\frac{540}{15}°$

在這裡 $k=[\frac{n-1}{2}]$



如這裡以正九邊形為例：

$$[\Delta A_5C_2C_3]+[\Delta A_{-3}C_{-4}C_{-5}]=2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

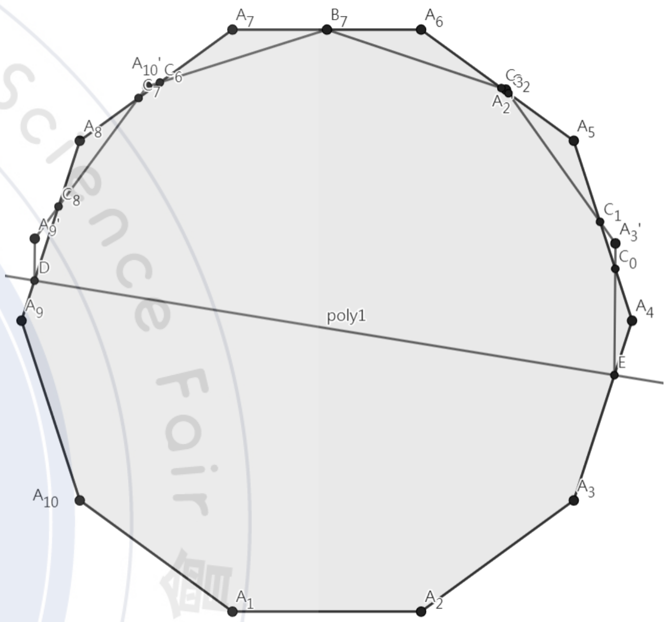
$$[\Delta A'_2C_1C_2]+[\Delta A'_0C_{-3}C_{-4}]=2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$[\Delta A_4C_0C_1]+[\Delta A_{-2}C_{-2}C_{-3}]=2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$[\Delta A'_3C_0C_{-1}]+[\Delta A'_{-1}C_7C_8]=2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

正偶數邊形不同三角形的配組(定理5)

n	8	10	12	14
$[\Delta A_{\frac{n}{2}+2}B_{\frac{n}{2}+2}C_{\frac{n}{2}+1}]+[\Delta A_{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}-4}C_{\frac{n}{2}-3}]$	$2+\sqrt{2}$	$2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$2+\sqrt{3}$	$2+2cos\frac{360}{14}°$
$[\Delta A'_2C_{\frac{n}{2}-3}C_{\frac{n}{2}-2}]+[\Delta A'_0C_{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}+2}]$	$2-\sqrt{2}$	$2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$2-\sqrt{3}$	$2-2cos\frac{360}{14}°$
$[\Delta A_{\frac{n}{2}+3}C_{\frac{n}{2}+2}C_{\frac{n}{2}+3}]+[\Delta A_{\frac{n}{2}-1}C_{\frac{n}{2}-6}C_{\frac{n}{2}-5}]$	0	$2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	3	$2+2cos\frac{720}{14}°$
$[\Delta A'_3C_{\frac{n}{2}-5}C_{\frac{n}{2}-4}]+[\Delta A'_{-1}C_{\frac{n}{2}+3}C_{\frac{n}{2}+4}]$	0	$2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	1	$2-2cos\frac{720}{14}°$



如這裡以正十邊形為例：

$$[\Delta A_7B_7C_6]+[\Delta A_5C_2C_1]=2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$[\Delta A'_2C_3C_2]+[\Delta A'_0C_7C_6]=2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$[\Delta A_8C_8C_7]+[\Delta A_4C_{-1}C_0]=2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$[\Delta A'_3C_0C_1]+[\Delta A'_{-1}C_8C_9]=2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

將規律推廣至折至任意邊

定理6、7：

一給定邊長為1的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$。若將 A_1點折至

$\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$ 上一點 B_{n+p+1}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 A_{p+1} 折至 $A_{p+1}{}'$。若

$C_{n-2}=\overline{A_1{}'A_2{}'}\cap\overline{A_nA_{n+1}}$

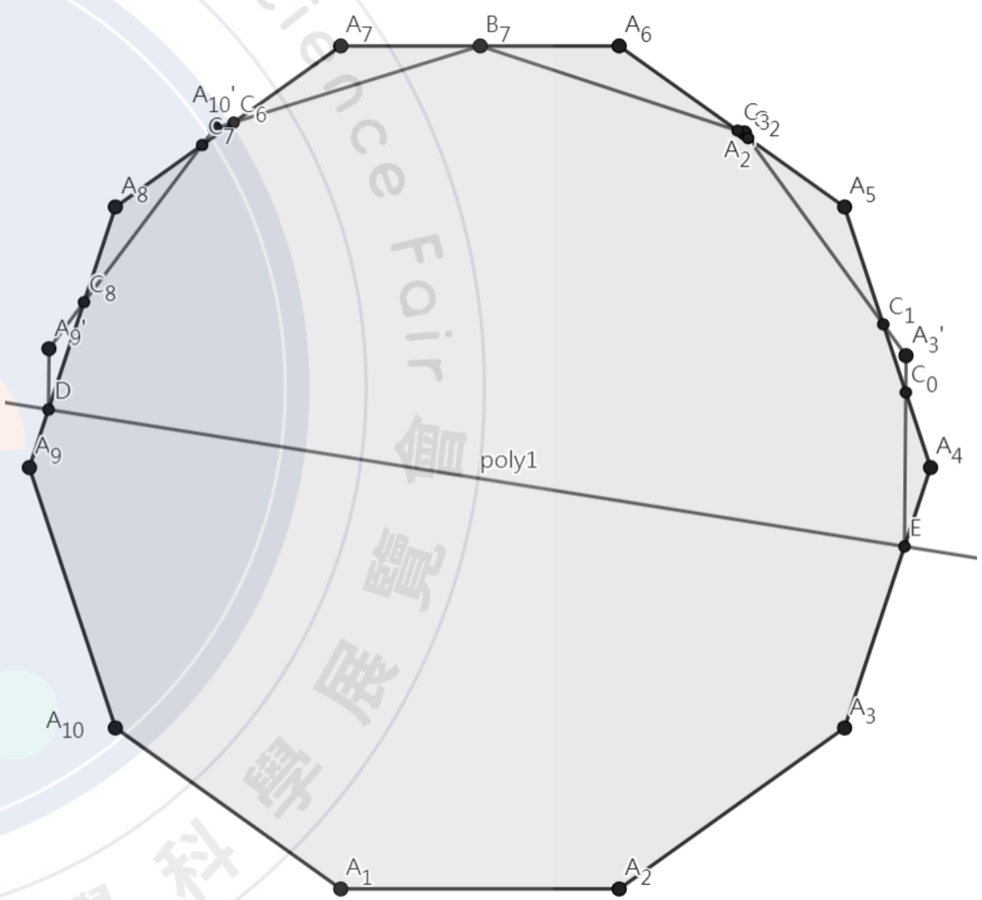
則：(1)：$[\Delta A_{n+1}C_{n-p}C_{n-p-1}]=2$、(2)：$\angle C_{n-p}A_1C_{n-p-1}=\dfrac{90^\circ}{n}$

$$\forall\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1\le k\le\left[\frac{n+p+1}{2}\right]$$

$$[\Delta\, A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}]-[\Delta\, A_k{}'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}]=2$$

若且唯若$2\le k\le p$；反之，當 $1\ge k$ 或 $k\ge p+1$ 時

$$[\Delta\, A_{n+k}C_{n+2k-(p+2)}C_{n+2k-(p+3)}]+[\Delta\, A_k{}'C_{n-2k+p}C_{n-2k+p+1}]=2$$



將規律推廣至折至任意邊

定理8：

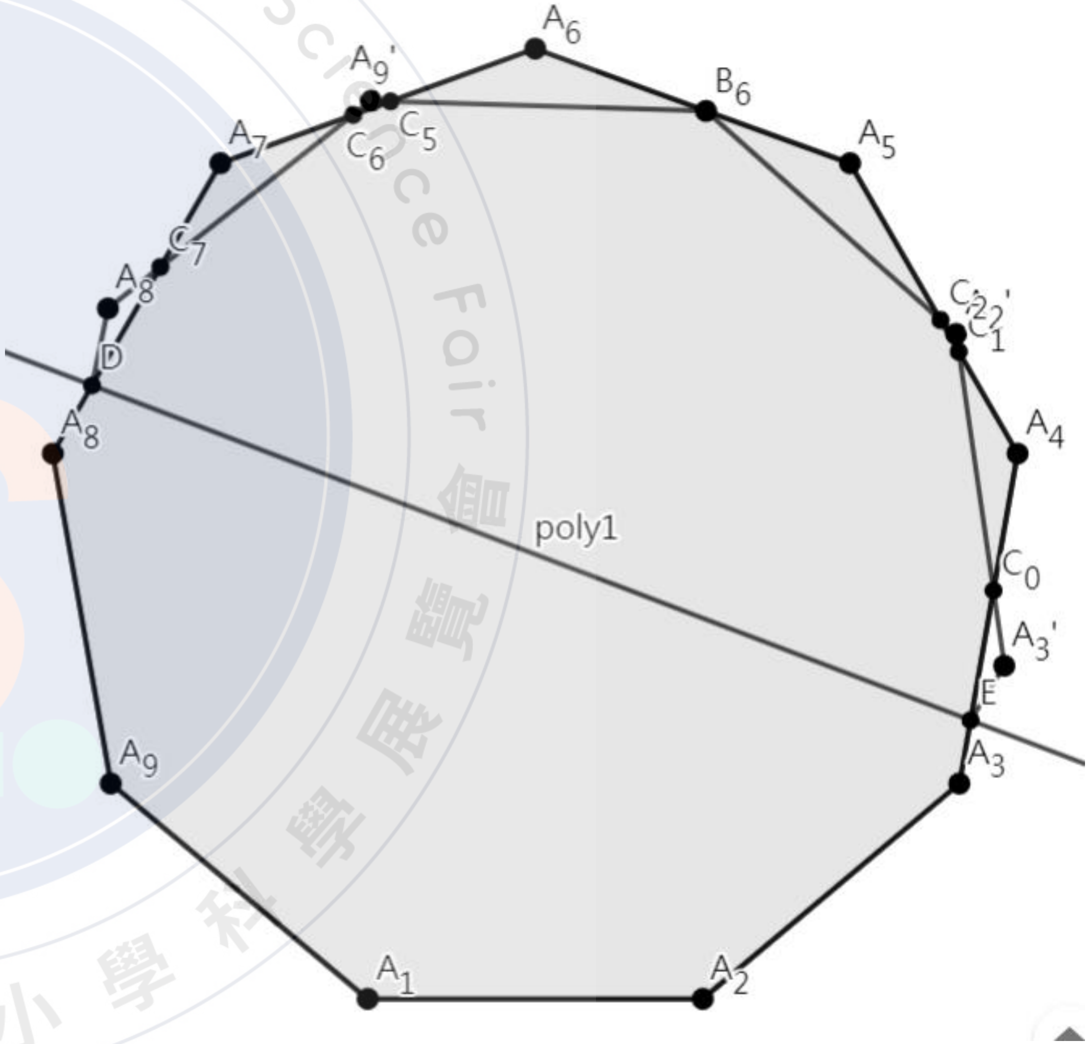
給定一邊長為1的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}$。若將 A_1點折至 $\overline{A_{p-1}A_p}$ 上一點 B_p，此時 $2n+1\geq p\geq n+2$、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將 $A_{\left[\frac{p}{2}\right]}$、……$A_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$折到$A'_{\left[\frac{p}{2}\right]}$、……$A'_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$，則：

$$\forall\, n+1\geq k\geq\left[\frac{p}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+2：2+2\cos\frac{180°(n-k+2)}{2n+1}$$

$$=\left[\Delta A_kC_{2k-n-4-p}C_{2k-n-3-p}\right]+\left[\Delta A_{2-k}C_{n-2k-3-p}C_{n-2k-2-p}\right]；$$

$$\forall\left[\frac{p}{2}\right]-n+1\geq k\geq 2：2-2\cos\frac{180°k}{2n+1}$$

$$=\left[\Delta A'_kC_{n-2k+1+p}C_{n-2k+2+p}\right]+\left[\Delta A'_{2-k}C_{-n+2k-3+p}C_{-n+2k-4+p}\right]$$



將規律推廣至折至任意邊

定理9：

給定一邊長為1的正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_{2n+1}$。若將

A_1點折至 $\overline{A_{p-1}A_p}$ 上一點 B_p，此時 $2n+1 \geq p \geq n+2$、沿摺痕

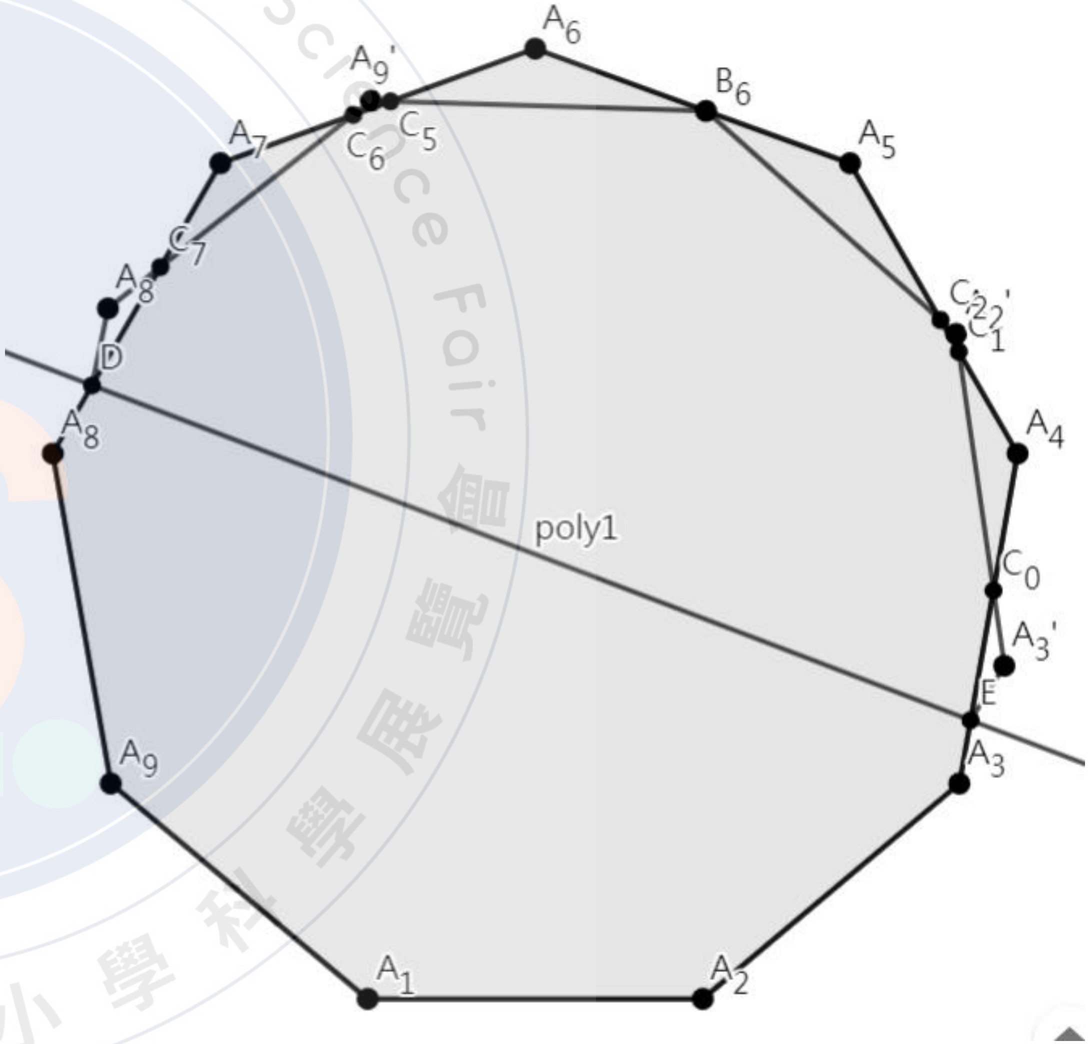
$\overline{DE}$ 將 $A_{\left[\frac{p}{2}\right]}$、……$A_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$ 折到 $A'_{\left[\frac{p}{2}\right]}$、……$A'_{p-n-\left[\frac{p}{2}\right]}$，

則：$\forall\, 2 \geq k \geq p-n-\left[\frac{p}{2}\right]$：$2-2\cos\dfrac{180°k}{2n+1}$

$=\left[\Delta A'_k C_{n-2k+3+p} C_{n-2k+4+p}\right]-\left[\Delta A'_{2-k} C_{-n+2k-3+p} C_{-n+2k-4+p}\right]$

與定理8不同的是，這裡 k 對應的範圍不同

而差別在於，k 在定理9的情況下是指兩三角形在正多邊形同側



將規律推廣至折至任意邊

定理10：

給定一邊長為1的正 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$。若將

$\overline{A_{n+p}A_{n+p+1}}$ 上一點 B_{n+p+1}、沿摺痕 $\overline{DE}$ 將

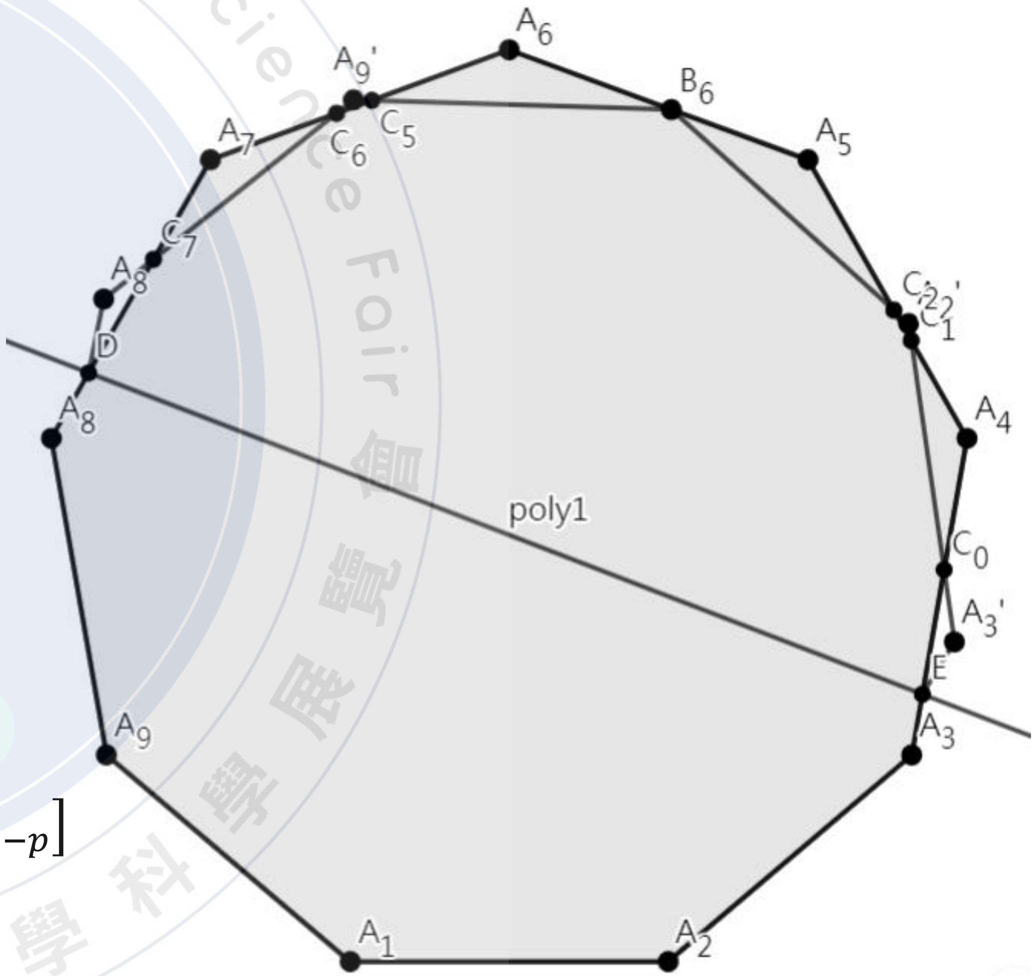
$A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}$、$\dots A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}$ 折到 $A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]}{}'$、$\dots A_{\left[\frac{n+p+1}{2}\right]-n+1}{}'$。

$\forall\, 2 \le\le p$，$[\Delta A_k C_{2k-n-3-p} C_{2k-n-2-p}] - [\Delta A_{2-k} C_{n-2k-p+1} C_{n-2k+2-p}]$

$$= 2 + 2\cos\frac{180°(n-k+1)}{n}$$

$\forall 2 \ge k \cup p$，$[\Delta A'_k C_{n-2k+2-p} C_{n-2k+3-p}] + [\Delta A'_{2-k} C_{-n+2k-2-p} C_{-n+2k-1-p}]$

$$= 2 - 2\cos\frac{180°(k-1)}{n}$$



參考資料

1. 羅和憲(2013)。芳賀第二定理的延伸及其形成線段數值的數字變化方式。第 53 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。

2. 許凱宣、徐紹敦(2019)。翻轉正 n 邊形邊上點的猜想。第 59 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。

3. 林琦焜。從三角求和公式到 Fourier 級數。

4. 安田富久(2016)。芳賀定理（折り紙）について ＜もし折るなら・・・＞。北数教“第 97 回数学教育実践研究会”。