# 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

---

高級中等學校組　數學科

050401

**點分布與鋸齒狀函數的研究**


學校名稱：臺中市立文華高級中等學校

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 吳建宇 | 林煜家 |
| 高二 何震群 | 張仲凱 |



關鍵詞：點分布、不等量平移、鋸齒狀函數

# 摘要

若$<b_x>$有 $n$ 項，且$<a_x>$的滿足 $a_x=\begin{cases}\frac{1}{2}(b_2+b_n) & , \quad x=1 \\ \frac{1}{2}(b_{x-1}+b_{x+1}) & , \quad 1<x<n \\ \frac{1}{2}(b_1+b_{n-1}) & , \quad x=n\end{cases}$，將$<a_x>$以項數與其值繪於坐標平面並根據分布情況將點連線，圖形似**鋸齒狀函數**。

將原本散布圖的點經適當**「不等量」平移**後，再利用分段拼接概念，結合「取整函數」來設計一函數，使其能讓兩條異號的領導係數線段交替出現，形成鋸齒狀函數的圖形，最後再將點**「不等量」平移**回原本位置，即得一函數涵括所有點。

本研究將$<b_x>$設定在不同條件下，分別可根據 $n$ 值區分四類情況：$n=4k,4k+1,4k+2,4k+3$，$k$ 為正整數；在不同 $n$ 值，其$<a_x>$的一般項有著巧妙的異同處。

最後再將 $b_x$ 推廣到多項式函數，進而找到可行方法來求得對應的一般項 $a_x$。


# 壹、研究動機

在翻閱 AMC12 的題目時，我們在 1990 年那份看到一個有趣的問題：10 個人圍成一圈，每人挑選一個數字並將此數字告訴自己左右兩邊的人，然後每個人說出自己兩旁的人所選數字的平均值，右圖為每個人所說出之平均值(非原來選的數字)，則說出平均值 6 的那個人所選數字為何？(如圖 1)

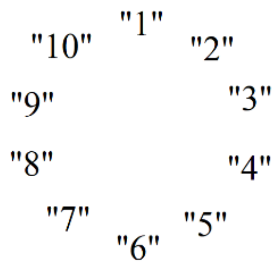


圖 1

我們好奇：是否能夠求出每個人原本挑選的數字，於是我們開始動手進行研究，除解出原題答案，希望能更進一步推廣延伸，找到一般公式解。

# 貳、研究目的

設有 $n$ 個人圍成一圈，有$<a_x>$、$<b_x>$兩數列，其中：$a_x$為第 $x$ 個人所挑的數字，$b_x$為第 $x$ 個人兩旁的人所挑的數字之平均值。

一、若$<b_x>$為等差數列，且$b_x=x$時，則數列$<a_x>$的一般式為何。

二、若$<b_x>$為等差數列，且$b_x=px+q$時，則數列$<a_x>$的一般式為何。

三、若$<b_x>$為階差數列，且$b_x=x^2$時，則數列$<a_x>$的一般式為何。

四、數列$<b_x>$滿足$b_x$為任意多項式時，是否有方法能求得$<a_x>$的一般式。

## 參、研究設備器材

繪圖軟體(GeogeBra、Desmos)，電腦程式(C++語言)，紙，筆。

## 肆、研究方法及步驟

在1990年AMC12的題目，我們的解法為：假設 $x_i$ 為「說出"$i$"(左右兩人所挑選數字的平均值)的人所選之數字」，其中 $i=1,2,3,\cdots,10$。依據題意可以列出以下式子：

$\frac{1}{2}(a_{10}+a_2)=1$，$\frac{1}{2}(a_2+a_4)=3$，$\frac{1}{2}(a_4+a_6)=5$，$\frac{1}{2}(a_6+a_8)=7$，$\frac{1}{2}(a_8+a_{10})=9$，

$\frac{1}{2}(a_1+a_3)=2$，$\frac{1}{2}(a_3+a_5)=4$，$\frac{1}{2}(a_5+a_7)=6$，$\frac{1}{2}(a_7+a_9)=8$，$\frac{1}{2}(x_9+a_1)=10$。

將前五式相加可得 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=25$，又 $a_2+a_4=6$，$a_8+a_{10}=18$

$\therefore a_6=25-6-18=1$，且 $7=\frac{1}{2}(a_6+a_8)=\frac{1}{2}(1+a_8)\ \Rightarrow a_8=13$

我們發現：當 $n$ 為奇數時，只要求出其中1人的數字，即可求出其他所有人的數字；而當 $n$ 為偶數時，則必須要求得其中2人(此兩人必須在奇偶不同位置)的數字，方可求出其他所有人的數字。將以上的解代回上述各式可得：$a_2=-3$，$a_4=9$，$a_6=1$，$a_8=13$，$a_{10}=5$。

同理，將後五式相加得 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=30$，又 $a_1+a_3=4$，$a_7+a_9=16$，

$\therefore a_5=30-4-16=10$，再將解代回各式可得 $a_1=6$，$a_3=-2$，$a_5=10$，$a_7=2$，$a_9=14$。

若令 $a_i$ 為一數列 $<a_x>$ 的第 $i$ 項，其中：

$a_1=6$，$a_2=-3$，$a_3=-2$，$a_4=9$，$a_5=10$，

$a_6=1$，$a_7=2$，$a_8=13$，$a_9=14$，$a_{10}=5$。

接著，為了找出數列 $<a_x>$ 的規律，我們想了很久，也嘗試過以代數的方式，想設法解出一般式，但都沒什麼進展。後來，在專題研究課程時，組員討論過程中，突然靈機一動，試著將各個數值以「第幾項($x$)、拿到的數字($y$)」作為坐標點 $(x,y)$ 繪到坐標平面上，似乎發現他們有著某種規律，如圖2所示。

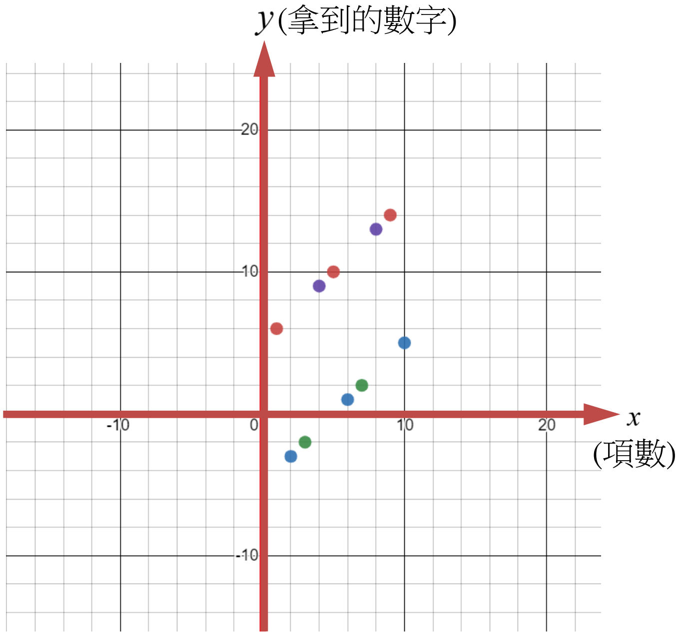



圖 2

### 一、研究方法(一)：

**步驟一：把所有點，不等量向下平移。**

**說明：** 原函數圖形傾斜，函數振幅、循環規律不易定義，難以求出一般式，在試過各種方法，偶然想到將所有 $(x,y)$ 進行「不等量下移」(註1)，發現調整後圖形為週期函數。

底下我們針對三種不同調整情況的 $b_x$ 值做討論：

(一)若 $<b_x>$ 為**等差數列**且 $b_x = x$ ，則將點 $(x\,,\,y)$ 調整為 $(x\,,\,y-x)$ 。

(二)若 $<b_x>$ 為**等差數列**且 $b_x = px+q$ ，則將點 $(x\,,\,y)$ 調整為 $(x\,,\,y-(px+q))$ 。

(三)若 $<b_x>$ 為**階差數列**且 $b_x = x^2$ ，則將點 $(x\,,\,y)$ 調整為 $(x\,,\,y-x^2)$ 。

接著，我們針對第(一)種情況，及給定的 $n$ 值( $n$ 為人數)所得到的對應點坐標繪製在圖形上，如下所述。

若 $<b_x>$ 為等差數列， $b_x = x$ ， $n=7$ 時，

將<u>未平移</u>與<u>平移後</u>的點，分別繪製如圖 3、圖 4。而第(二)種、第(三)種情況中，在坐標平面上的繪製，亦可如法炮製。

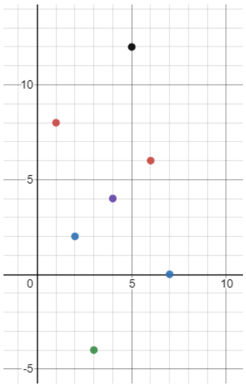


圖 3

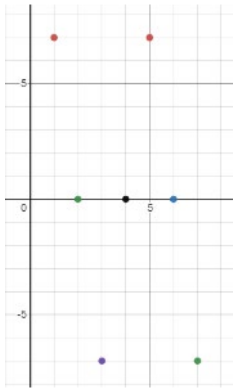


圖 4

**步驟二：將各類型的圖形，依 $n$ 值分類為 $n=4k$ 、 $n=4k+1$ 、 $n=4k+2$ 、 $n=4k+3$**

**說明：**我們可以觀察出，點的分布會受到不同 $n$ 值( $n$ 為人數)的影響。在觀察 $n=3\,,4\,,5\,,\cdots,20$ 的圖形之後，發現圖形中，點的分布情況呈現有四個 $n$ 值一循環的規律，因此將圖形以 $n$ 值做區分歸類為以下四種： $n=4k$ 、 $n=4k+1$ 、 $n=4k+2$ 、 $n=4k+3$ ，其中 $k\in$ □ 。

(註 1：此處「不等量下移」是指將點 $(x_i\,,\,y_i)$ 調整為 $(x_i'\,,\,y_i')=(x_i\,,\,y_i-g(x))$ ，其中 $g(x)$ 為一個不等量平移函數，其平移後的點分布應滿足以下條件：

1. $y_{i+4}' = y_i'$ ，其中 $x_{i+1} = x_i + 1$ 。
2. $y_{i+2}' = -y_i'$ 。

**步驟三：利用兩段領導係數互為相反數的線段，在不同區間時交互出現，形成類似鋸齒狀的圖形。**

在步驟三中，我們企圖想找出鋸齒狀圖形的函數，以便讓我們找到數列 $<a_x>$ 的一般項。

我們發現可以利用「下取整函數」不連續與階梯狀的性質。將某一函數減去下取整函數，可使該函數的特定區段(以下稱為**基準線**(註 2))水平無限平移，如圖 5、圖 6。

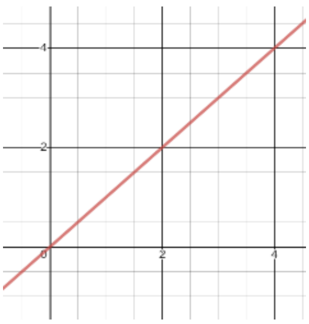


圖 5
函數 $y=x$ 圖形

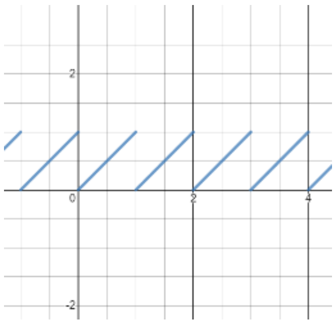


圖 6
函數 $y=x-\lfloor x \rfloor$

因此，若將基準線減去一特定的下取整函數，可讓基準線的特定區段呈現週期圖形，故建構一函數為：$y=c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$。

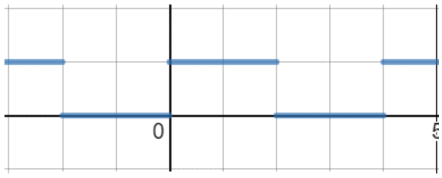


圖 7

我們所建構的函數中，$c_1(x)$、$c_2(x)$、$d_1(x)$、$d_2(x)$ 所代表的意義如下：

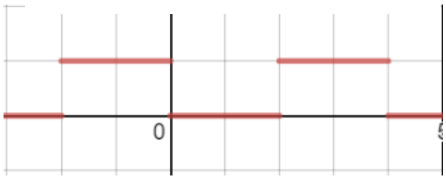


圖 8

(一)存在 $c_1(x)$ 為一個值會在 <u>1、0、1、0⋯⋯</u>，每兩單位長會交替出現的函數，如圖 7 之**藍色線**。

(二)存在 $c_2(x)$ 為一個值會在 <u>0、1、0、1⋯⋯</u>，每兩單位長會交替出現的函數，如圖 8 之**紅色線**。

其中，當 $c_1(x)$ 的值為 $1$ 時，$c_2(x)$ 的值為 $0$；當 $c_1(x)$ 的值為 $0$ 時，$c_2(x)$ 的值為 $1$。

(三) $d_1(x)$、$d_2(x)$ 分別為<u>**負**</u>、<u>**正**</u>基準線線段呈現週期出現的函數，如圖 11 為正基準線線段呈現週期出現的函數圖形，即 $d_2(x)$。

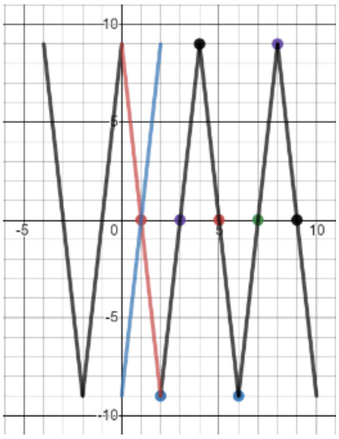


圖 9

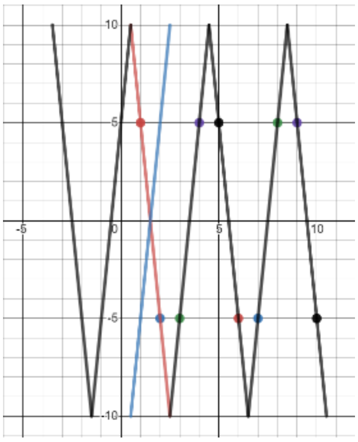


圖 10

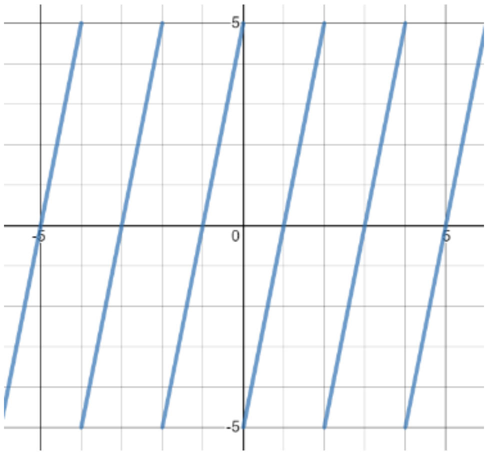


圖 11

藍色線為<u>正</u>基準線，紅色線為<u>負</u>基準線

**(註 2：基準線定義：**

在不等量平移後，兩個不同的 $c_1(x)$、$c_2(x)$，當 $x>0$ 時，第一個函數值為 $0$ 的區間裡，分別對應到的 $d_1(x)$、$d_2(x)$ 圖形稱為基準線，其中斜率為正者，稱為**正基準線**，斜率為負者，稱為**負基準線**，如上圖 9、上圖 10。)

因此，只要將$d_1(x)$乘上只要將乘上$c_1(x)$，就可以使$d_1(x)$出現、消失、出現、消失、…，如圖 12。

同理，將$d_2(x)$乘上$c_2(x)$，同樣可以使$d_2(x)$消失[註 3]、出現、消失、出現、…，如圖 13。

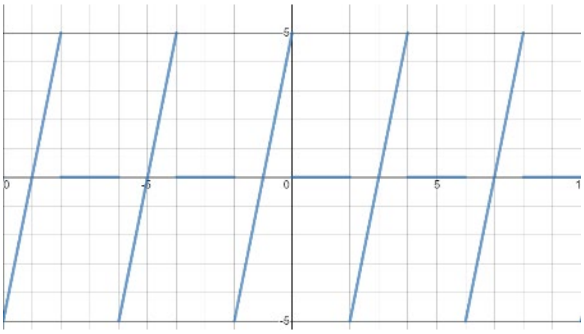



圖 12

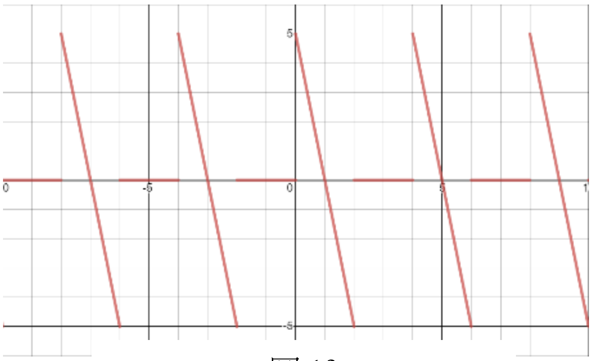



圖 13

由以上方法，我們可由<u>**負**</u>基準線和<u>**正**</u>基準線交互出現以構成類似鋸齒狀的函數，故將$c_1(x)\cdot d_1(x)$加上$c_2(x)\cdot d_2(x)$時，就能使其交互出現，如圖 14。

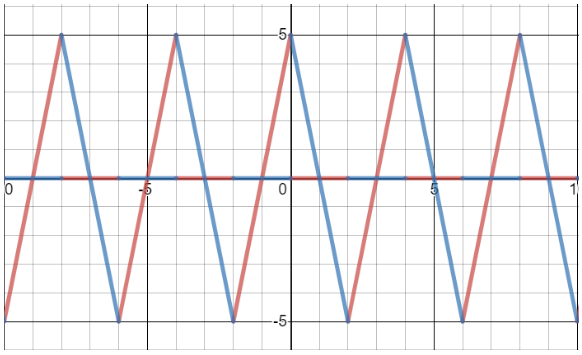



圖 14

**步驟四：將$y=f(x)=c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$**

**加上步驟一操作的「不等量平移」的值。**

**說明：**步驟三所形成的鋸齒狀圖形是沿著$x$軸水平延伸的函數，因此，必須將步驟一操作的「不等量平移」的值加回來，才會是最終的函數，如圖 15。

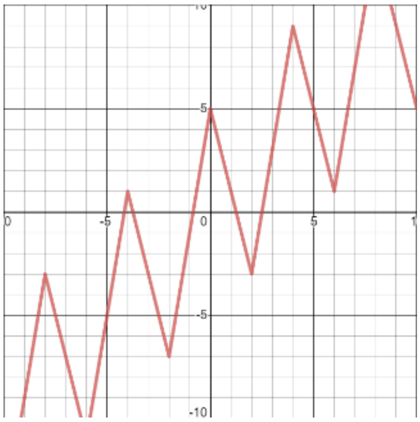



圖 15

藉由上述四個步驟，我們可找到函數，在$x$為整數時，其坐標平面上對應到的$y$坐標即為數列$\langle a_x \rangle$的第$x$項之值，亦即一般項。

而在步驟二的過程中，我們發現當$n=4k$，$k$為正整數時，且在$b_x$值不盡相同時，並無法找到$a_x$的唯一值，亦即此時的$a_x$值並不唯一，此情況違背我們探討的問題，我們將此情況稱為「無解」，並給出下列的定理。

定理：

設有$n$個人圍成一圈，有$\langle a_x \rangle$、$\langle b_x \rangle$兩數列，其中：$a_x$為第$x$個人所挑的數字，$b_x$為第$x$個人兩旁的人所挑的數字之平均值。當$b_x$為公差不為$0$的等差數列，且當$n=4k$時，$a_x$無解。

(註 3：消失意思是：當$c_1(x)$為$0$時，$d_1(x)$乘上$c_1(x)$時為$0$，該區段函數即會「消失」。)

【證明】：

(一)若 $<b_x>$ 為等差數列，$b_x = rx$，$r \in \mathbb{R} - \{0\}$，

當 $n=4$ 時，$b_1 = r$、$b_2 = 2r$、$b_3 = 3r$、$b_4 = 4r$，

得 $2b_1 = a_4 + a_2$、$2b_2 = a_1 + a_3$、$2b_3 = a_2 + a_4$、$2b_4 = a_3 + a_1 \quad \Rightarrow b_1 = b_3$，$b_2 = b_4$

將 $b_1 = b_3$、$b_2 = b_4$ 代入 $b_x = rx$，得出 $r = 3r$、$2r = 4r \quad \Rightarrow r = 0\,(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ 當 $n = 4k$ 時無解。

(二)若 $<b_x>$ 為等差數列，$b_x = rx + s$，$r, s \in \mathbb{R} - \{0\}$，

當 $n=4$ 時，$b_1 = r+s$、$b_2 = 2r+s$、$b_3 = 3r+s$、$b_4 = 4r+s$，

得 $2b_1 = a_4 + a_2$、$2b_2 = a_1 + a_3$、$2b_3 = a_2 + a_4$、$2b_4 = a_3 + a_1 \quad \Rightarrow b_1 = b_3$，$b_2 = b_4$

將 $b_1 = b_3$、$b_2 = b_4$ 代入 $b_x = rx + s$，得出 $r+s = 3r+s$、$2r+s = 4r+s \quad \Rightarrow r = 0\,(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ 當 $n = 4k$ 時無解

又，在步驟二的過程中，當 $n$ 分別為 $4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 時，我們利用上述方法找到數列 $a_x$ 的一般項公式，並給出公式一、公式二、公式三。

公式一：

設有 $n$ 個人圍成一圈，有 $<a_x>$、$<b_x>$ 兩數列，其中：$a_x$ 為第 $x$ 個人所挑的數字，$b_x$ 為第 $x$ 個人兩旁的人所挑的數字之平均值。當 $<b_x>$ 為等差數列且 $b_x = x$ 時，$<a_x>$ 的一般項公式為 $f(x) = c_1(x)\cdot d_1(x) + c_2(x)\cdot d_2(x) + x$，其中當 $n = 4k+1$、$4k+2$、$n = 4k+3$，$k \in \mathbb{N}$ 時，所對應的 $c_1(x), d_1(x), c_2(x), d_2(x)$，整理如下方表格：

| $n$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1(x)$ | $-\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4} \right\rfloor$ | $-\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4} \right\rfloor$ | $-\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-1-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor}{4} \right\rfloor$ |
| $d_1(x)$ | $-n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)-n$ | $-n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-n$ | $-n(x-3-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)-n$ |
| $c_2(x)$ | $\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4} \right\rfloor$ | $\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4} \right\rfloor$ | $\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-1-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor}{4} \right\rfloor$ |
| $d_2(x)$ | $n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)+n$ | $n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+n$ | $n(x-3-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)+n$ |

【證明】：

將各個數值以「第幾項$(x)$、拿到的數字$(y)$」作為坐標點$(x\,,\,y)$繪到坐標平面上，圖 16 為以$n=9$為例。

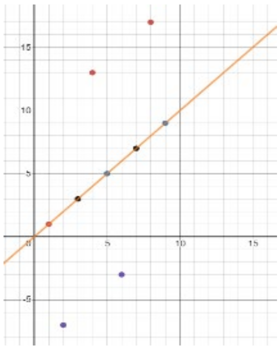


圖 16

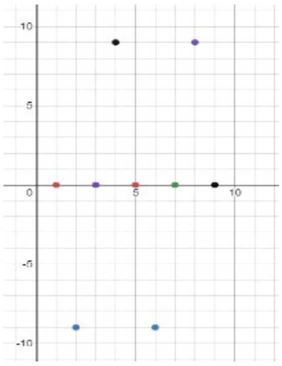


圖 17

**步驟一：將所有點不等量向下平移 ，如圖 17。**

**步驟二：利用$n$將圖形分類為$n=4k+1$、$n=4k+2$、$n=4k+3$，$k\in$□ 。**

當$n=4k+1$時，如圖 18。

$x=1$時，$y=0$；$x=2$時，$y<0$；

$x=3$時，$y=0$；$x=4$時，$y>0$。

此時$y$值為<u>零、負、零、正⋯</u>的循環，

函數最大值與最小值上<u>恰有一點</u>。

當$n=4k+2$時，如圖 19。

$x=1$時，$y>0$；$x=2$時，$y<0$；

$x=3$時，$y<0$；$x=4$時，$y>0$。

此時$y$值為<u>正、負、負、正⋯</u>的循環，

<u>沒有任何點位</u>在函數最大值與最小值上。

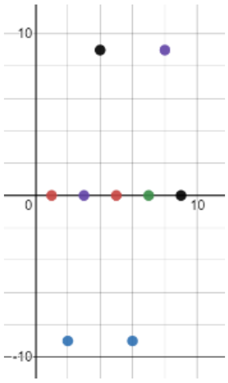


圖 18

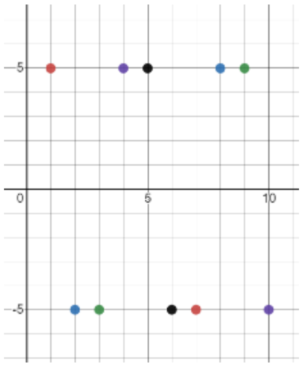


圖 19

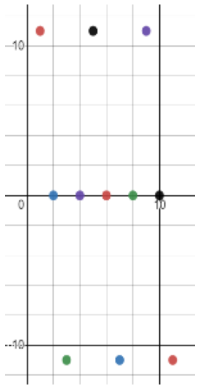


圖 20

當$n=4k+3$時，如圖 20。

$x=1$時，$y>0$；$x=2$時，$y=0$；$x=3$時，$y<0$；$x=4$時，$y=0$。

此時$y$值為<u>正、零、負、零⋯</u>的循環，函數最大值與最小值上<u>恰有一點</u>。

**步驟三：利用領導係數為相反數的兩直線，在不同區間時交互出現，形成類似鋸齒狀的圖形**

由步驟二得知，$n=4k+1\,,\,4k+2\,,\,4k+3$時點都有不同的分布，這會使得$c_1(x)$、$d_1(x)$、$c_2(x)$、$d_2(x)$分別有所差異，故分成$n=4k+1$、$n=4k+2$、$n=4k+3$討論。

(一)當$n=4k+1$時，欲求函數$c_1(x)$、$c_2(x)$：由圖 21 觀察得知，

領導係數為負的直線出現在$4m-2\geq x\geq 4m-4$，$m\in$□ ；

領導係數為正的直線出現在$4m\geq x\geq 4m-2$，$m\in$□ ；

分別如圖 21 的**紅色線**與**藍色線**。

由上述知，當$x$滿足$4m-2\geq x\geq 4m-4$，$m\in$□ 時，

可得出之關係如表：

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

，

函數$c_1(x)$的推導過程如下：

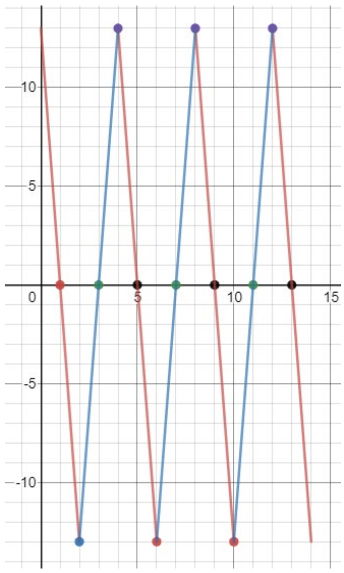


圖 21

$1\leq x\leq n$、$x\in$□

| $y$值 | | | | | | | | | 對應之函數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $x$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | $\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor$ |
| $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | $-2$ | $\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor -2$ |
| $\frac{-2}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{0}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{-2}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{0}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{-2}{4}$ | $\frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor -2}{4}$ |
| $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | $-1$ | $\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor -2\right)\right\rfloor$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $-\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor -2\right)\right\rfloor \to$ 此為函數$c_1(x)$ |

且當 $x$ 滿足 $4m\ge x\ge 4m-2$，$m\in\mathbb{Z}$ 時，可得出之關係如下表：

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

，函數 $c_2(x)$ 的推導過程如下：

| $y$值 | | | | | | | | | 對應之函數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $x$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | $\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor$ |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | $\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor +2$ |
| $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor +2}{4}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | $\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor +2\right)\right\rfloor \to$ 此為函數$c_2(x)$ |

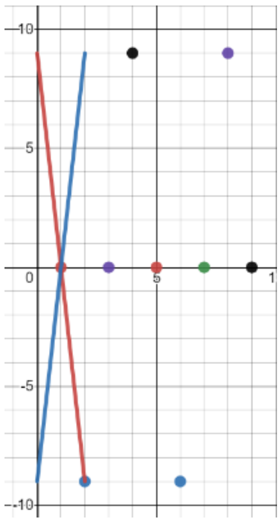


圖 22

紅色線為負基準線

藍色線為正基準線

欲求函數 $d_1(x)$、$d_2(x)$：由圖 22 觀察得知，

當 $x>0$ 時，**負基準線**(令為 $y_-$)、**正基準線**(令為 $y_+$)分別為：

$y_-=-n(x-2)-n$，$y_+=n(x-2)+n$，其中 $n$ 為項數(人數)。

接著，為了將負基準線、正基準線分別變成週期性的線段，需向右平移一個「下取整函數」的量，而此量需要由圖形觀察出需要重複平移幾個單位來決定。

如圖 23，要將從左邊數過來第一條紅色線平移至第二條紅色線，需要向右移四個單位 ($x=1$ 到 $x=5$)，從第二條紅色線移至第三條紅線也需右移四個單位 ($x=5$ 到 $x=9$)，依此類推。將每條斜率為負、正的直線右移四個單位，可以推出下一條斜率分別為負、正的直線。

從圖 24 得知，每個線段都占兩個 $x$

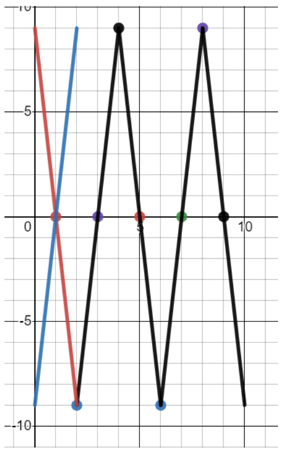


圖 23

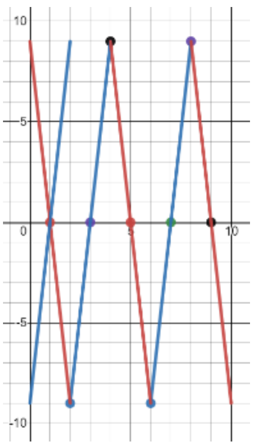


圖 24

$y$ 每兩個 $x$ 單位就要變一次值。我們以一次右移兩個單位為發想，列出下方的 $x$ 、 $y$ 關係表：

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 |

利用此表，嘗試找出他的函數對應關係如下表：

| $y$ | | | | | | | | | | 對應的函數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $x$ |
| $\frac{0}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{6}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{8}{2}$ | $\frac{9}{2}$ | $\frac{x}{2}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ |
| 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 | $2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ |

將原本的 $y_- = -n(x-2)-n$ 、 $y_+ = n(x-2)+n$ 同時向右平移 $2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ ，可得交互循環的兩種線段變成 $d_1(x) = -n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor)-n$ 、 $d_2(x) = n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor)+n$ ，分別如圖 25、圖 26。

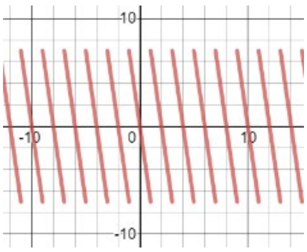


圖 25　函數 $d_1(x)$ 圖形

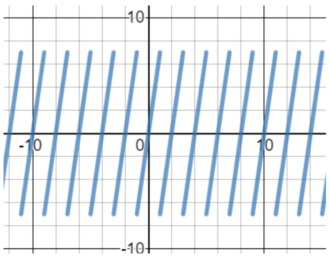


圖 26　函數 $d_2(x)$ 圖形

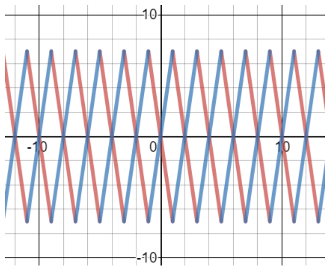


圖 27　將兩函數疊在一起

推導至此，可能會產生疑惑：明明原本的圖是要每次向右移四個單位，但剛才的做法卻是每次平移兩個單位，這樣不會多出一倍的線段(如圖 28、圖 29)嗎？沒錯，這一點我們也有考慮到，因此我們就利用了 $c_1(x)$ 、 $c_2(x)$ 的性質：「0 、1 交替出現」。只需將不要的線所代表的函數乘以0，就可以使該線段消失，如圖 30、圖 31。接著，將推得的 $c_1(x), c_2(x), d_1(x), d_2(x)$ 合併成 $c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$ ，得出：

$$y = f(x) = -\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor-2\right) \right\rfloor\cdot\left(-n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)-n\right)$$

$$+\left\lfloor \frac{1}{4}\times\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor+2\right) \right\rfloor\cdot\left(n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)+n\right)$$ ，如圖32

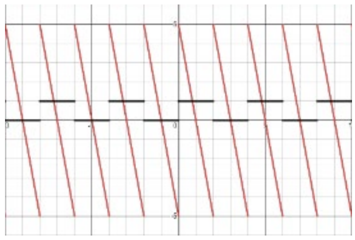


圖 28

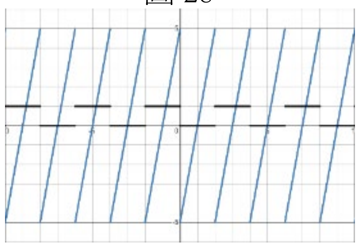


圖 29

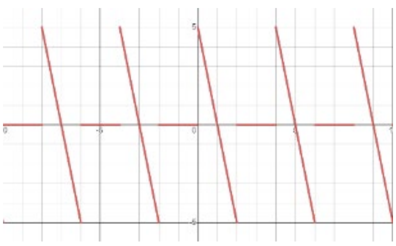


圖 30

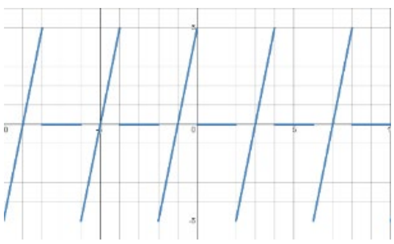


圖 31

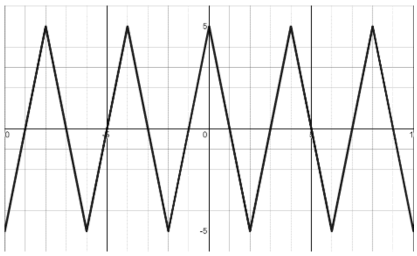


圖 32

最後，利用先前提到的作法，利用步驟四，加上步驟一所扣掉(下移)的值，亦即將上述的結果加上步驟一減去的平移量 $x$ ，得出函數式如下：

$$y=f(x)=-\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2\right)\right\rfloor\times\left(-n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor\right)-n\right)$$
$$+\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2\right)\right\rfloor\times\left(n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor\right)+n\right)+x$$

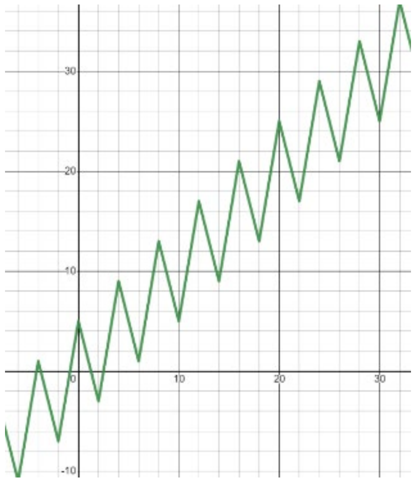



圖 33

此函數之圖形如圖 33。此時， $n=4k+1$ 的情形完成。

(二)當 $n=4k+2$ 時，欲求函數 $c_1(x)$ 、 $c_2(x)$ ：由圖 34 觀察得知，

領導係數為負的直線出現在 $4m-\frac{3}{2}\geq x\geq 4m-\frac{7}{2}$ ， $m\in\mathbb{Z}$ ；

領導係數為正的直線出現在 $4m+\frac{1}{2}\geq x\geq 4m-\frac{3}{2}$ ， $m\in\mathbb{Z}$ ；

分別如圖 34 的**紅色線與藍色線**。

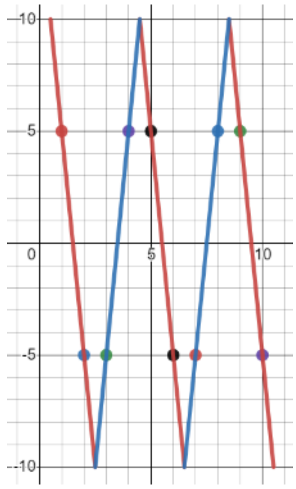



圖 34

由上述知，當 $x$ 滿足 $4m-\frac{3}{2}\geq x\geq 4m-\frac{7}{2}$ ， $m\in\mathbb{Z}$ 時，可得出

之關係如表：

| $x$ | 0.5 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

，

函數 $c_1(x)$ 的推導過程如下：

| $y$值 | | | | | | | | | | 對應的函數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 | $x$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $x-0.5$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | $\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor$ |
| $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | $-2$ | $-1$ | $\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2$ |
| $\frac{-2}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{0}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{-2}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{0}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{-2}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}$ |
| $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | $\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2\right)\right\rfloor$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | $-\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2\right)\right\rfloor$ $\rightarrow$ 此為函數 $c_1(x)$ |

且當 $x$ 滿足 $4m+\frac{1}{2}\geq x\geq 4m-\frac{3}{2}$ ， $m\in\mathbb{Z}$ 時，可得出之關係如表：

| $x$ | 0.5 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

，函數 $c_2(x)$ 的推導過程如下：

| $y$值 | | | | | | | | | | 對應的函數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 | $x$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $x-0.5$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | $\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor$ |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | $\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor+2$ |
| $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor+2}{4}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor+2\right) \right\rfloor$ → 此為函數$c_2(x)$ |

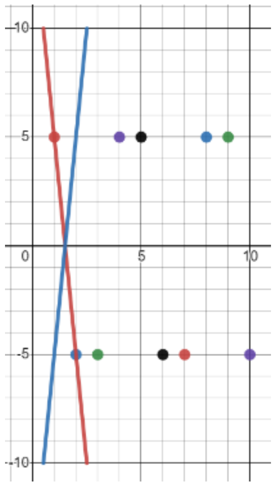


圖 35

紅色線為負基準線

藍色線為正基準線

欲求函數 $d_1(x)$、$d_2(x)$：由圖 35 觀察得知，

當 $x>0$ 時，**負基準線**(令為 $y_-$)、**正基準線**(令為 $y_+$)分別為：

$y_- = -n(x-\frac{5}{2})-n$，$y_+ = n(x-\frac{5}{2})+n$，其中 $n$ 為項數(人數)。

同樣地，為了將負基準線、正基準線分別變成週期性的線段，需向右平移一個「下取整函數」的量，而此量需要由圖形觀察出需要重複平移幾個單位來決定。

如圖 36，要將從左邊數過來的第一條紅色線平移至第二條紅色線，需要向右移四個單位 ($x=0.5$ 到 $x=4.5$)，從第二條紅色線移至第三條紅線也需右移四個單位 ($x=4.5$ 到 $x=8.5$)，依此類推。將每條斜率為負、正的直線右移四個單位，可以推出下一條斜率分別為負、正的直線。

從圖 37 得知，每個線段都占兩個 $x$ 單位，因此 $y$ 每兩個 $x$ 單位就要變一次值。我們以一次右移兩個單位為發想，列出下方的 $x$、$y$ 關係表：

| $x$ | 0.5 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 |

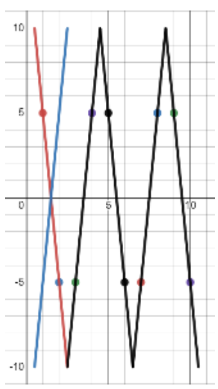


圖 36

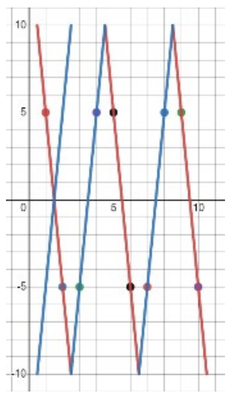


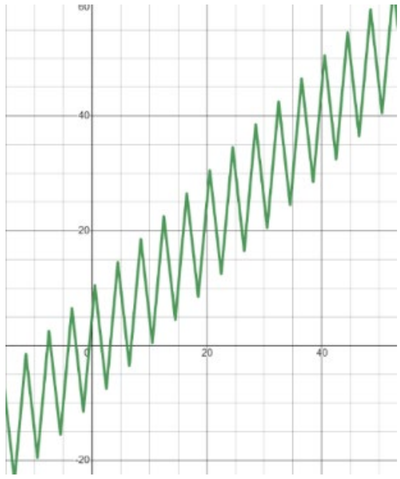
圖 37

我們嘗試找出他的函數對應關係如下表：

| $y$值 | | | | | | | | | | 對應的函數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 | $x$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $x-0.5$ |
| $\frac{0}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{6}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{8}{2}$ | $\frac{9}{2}$ | $\frac{x-0.5}{2}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | $\left\lfloor \frac{x-0.5}{2} \right\rfloor$ |
| 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 | $2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2} \right\rfloor$ |

將原本的 $y_- = -n(x-\frac{5}{2})-n$、$y_+ = n(x-\frac{5}{2})+n$ 同時向右平移 $2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2} \right\rfloor$，可得交互循環的

兩種線段，變成$d_1(x)=-n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-n$、$d_2(x)=n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+n$，此兩函數和$n=4k+1$的情況相同，存在有多餘的線條，因此我們繼續利用兩函數$c_1(x)$、$c_2(x)$的0、1交替的性質，仿照$n=4k+1$的方式，讓多餘的線條消失，可將推得的四個函數式合併成$c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$，最後，加上步驟一所扣掉的值(下移的平移量)$x$，得出下方函數式：



$$f(x)=y=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2)\right\rfloor(-n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-n)$$
$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2)\right\rfloor(n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+n)+x$$

此函數之圖形如圖 38。此時，$n=4k+2$的情形完成。

(三)當$n=4k+3$時，推導過程與$n=4k+1$的情況相同，

可得：$c_1(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot\left\lfloor x-1-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor\right\rfloor$，$c_2(x)=\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-1-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor)\right\rfloor$

領導係數為負的直線出現在$4m-1\geq x\geq 4m-3$，$m\in$□；

領導係數為正的直線出現在$4m+1\geq x\geq 4m-1$，$m\in$□；

分別如圖 39 的**紅色線與藍色線**。

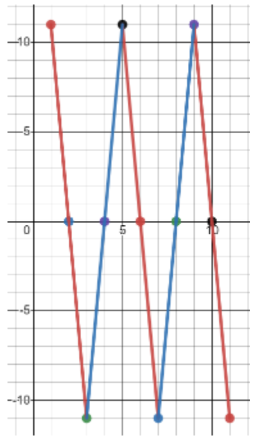


圖 39

且$d_1(x)=-n(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)-n$，$d_2(x)=n(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)+n$

利用$c_1(x),c_2(x),d_1(x),d_2(x)$構成函數$c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$，

最後加上步驟一所扣掉的值(下移的平移量)$x$，得出下方函數式：

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{\left\lfloor x-1-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor(-n(x-3-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)-n)$$
$$+\left\lfloor\frac{\left\lfloor x-1-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor(n(x-3-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)+n)+x\text{。}$$

此函數之圖形如圖 40。此時，$n=4k+3$的情形完成。

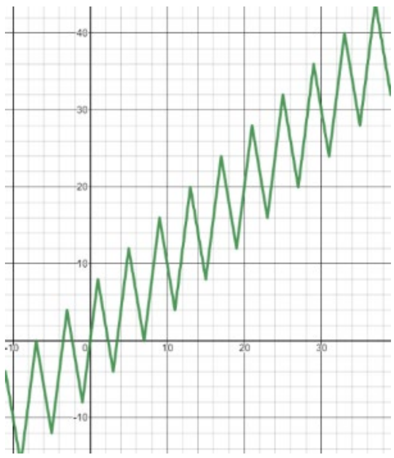


圖 40

至此，我們找到：當$b_x=x$且$n\neq 4k$ ($k\in$□ )時，$a_x$的一般項公式。至於當$b_x=px+q$且$n\neq 4k$ ($k\in$□ )時的情況，是否能找到$a_x$的一般項公式呢？我們給出公式二來說明$a_x$的一般項公式。

公式二：

設有 $n$ 個人圍成一圈，有 $<a_x>$、$<b_x>$ 兩數列，其中：$a_x$ 為第 $x$ 個人所挑的數字，$b_x$ 為第 $x$ 個人兩旁的人所挑的數字之平均值。當 $<b_x>$ 為等差數列且 $b_x=px+q$ 時，$<a_x>$ 的一般項公式為 $f(x)=c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)+px+q$，其中當 $n=4k+1$、$4k+2$、$n=4k+3$ 時，所對應的 $c_1(x)$, $d_1(x)$, $c_2(x)$, $d_2(x)$，整理如下方表格：

| $n$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1(x)$ | $-\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_1(x)$ | $-pn(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)-pn$ | $-pn(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-pn$ | $-pn(x-3-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor)-pn$ |
| $c_2(x)$ | $\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \dfrac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_2(x)$ | $pn(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)+pn$ | $pn(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+pn$ | $pn(x-3-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor)+pn$ |

【證明】：

將各個數值以「第幾項($x$)、拿到的數字($y$)」作為坐標點 $(x\,,y)$ 繪到坐標平面上，如圖 41 為 $b_x=2x-1$，$n=9$ 為例

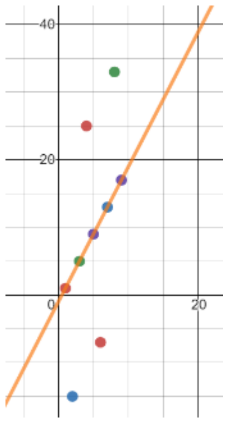


圖 41

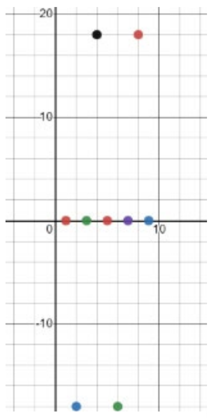


圖 42

**步驟一：將所有點不等量向下平移，如圖 42。**

**步驟二：利用 $n$ 將圖形分類為 $4k+1$、$4k+2$、$4k+3$。**

當 $n=4k+1$ 時，如圖 43。

$x=1$ 時，$y=0$；$x=2$ 時，$y<0$；

$x=3$ 時，$y=0$；$x=4$ 時，$y>0$。

此時 $y$ 值為<u>零、負、零、正⋯</u>的循環，函數最大值與最小值上<u>恰有一點</u>。

當 $n=4k+2$ 時，如圖 44。

$x=1$ 時，$y>0$；$x=2$ 時，$y<0$；

$x=3$ 時，$y<0$；$x=4$ 時，$y>0$。

此時 $y$ 值為<u>正、負、負、正⋯</u>的循環，

<u>沒有任何點</u>位在函數最大值或最小值上。

當 $n=4k+3$ 時，如圖 45。

$x=1$ 時，$y>0$；$x=2$ 時，$y=0$；

$x=3$ 時，$y<0$；$x=4$ 時，$y=0$。

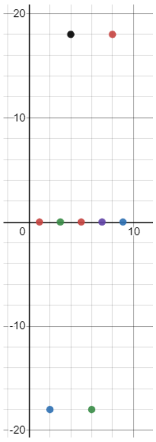


圖 43

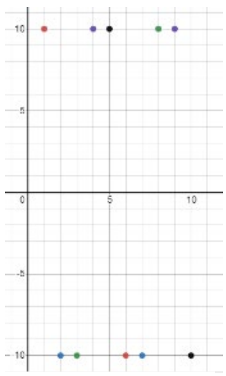


圖 44

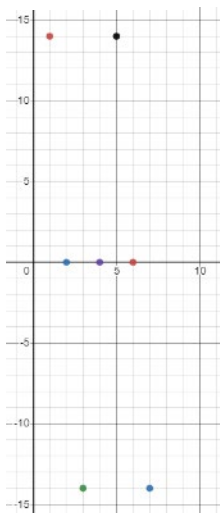


圖 45

此時形成 $y$ 值為<u>正、零、負、零……</u>的循環，函數最大值與最小值上<u>恰有一點</u>。

**步驟三：利用領導係數為相反數的兩直線，在不同區間時交互出現，形成類似鋸齒狀的圖形**

由步驟二得知，$n=4k+1$ 、$n=4k+2$ 、$n=4k+3$ 時，都有不同的點分布，這會使 $c_1(x)$ 、$d_1(x)$ 、$c_2(x)$ 、$d_2(x)$ 有所差異。

以下將 $n$ 值分成：$n=4k+1$ 、$n=4k+2$ 、$n=4k+3$，來進行討論。

而從步驟二亦可得知：三種圖形資料點分布的性質都與公式一相同，因此，使得 $d_1(x)$ 、$d_2(x)$ 出現週期循環的取整函數 $c_1(x)$ 、$c_2(x)$，全部都與公式一相同，這裡就不再贅述。

而與公式一的差異是：<u>**負基準線**</u>、<u>**正基準線**</u>，因此這裡僅就<u>**負**</u>、<u>**正基準線**</u>來討論。

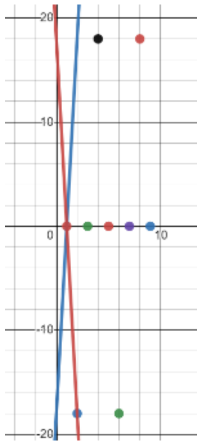


圖 46

(一)當 $n=4k+1$ 時，欲求函數 $d_1(x)$ 、$d_2(x)$ ：由圖 46 觀察得知，

當 $x>0$ 時，<u>**負基準線**</u>(令為 $y_-$)、<u>**正基準線**</u>(令為 $y_+$)分別為：

$y_-=-2n(x-2)-2n$ ，$y_+=2n(x-2)+2n$ ，其中 $n$ 為項數(人數)。

如圖 58，要將從左邊數過來的第一條紅色線平移至第二條紅色線，需要向右移四個單位 $(x=0$ 到 $x=4)$ ，從第二條紅色線移至第三條紅線也需右移四個單位 $(x=4$ 到 $x=8)$ ，依此類推。將每條斜率為負、正的直線右移四個單位，可以推出下一條斜率分別為負、正的直線。因此，使負、正基準線呈現週期性的取整函數亦與公式一的 $n=4k+1$ 情況相同。

因此，$d_1(x)=-2n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor)-2n$ 、$d_2(x)=2n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor)+2n$ 分別如圖 47、圖 48。

這裡仍可利用 $c_1(x)$ 、$c_2(x)$ 的「0 、1 交替出現」性質，把不需要的直線消除。接著，將推得的 $c_1(x), c_2(x), d_1(x), d_2(x)$ 合併成 $c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$ 得出下方的函數式：

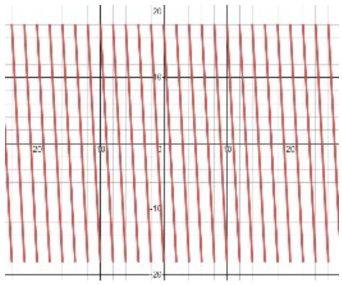


圖 47

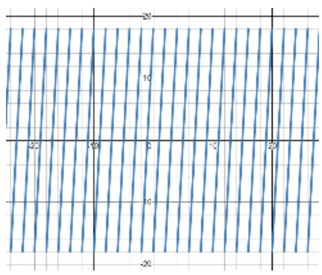


圖 48

$$y=f(x)=-\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor-2\right) \right\rfloor\cdot\left(-2n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)-2n\right)+\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor+2\right) \right\rfloor\cdot\left(2n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)+2n\right)$$

最後，利用先前提到的作法，利用步驟四，加上步驟一所扣掉(下移)的值，亦即將上述的結果加上步驟一減去的平移量 $2x-1$，得出下列函數式：

$$y=f(x)=-\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor-2\right) \right\rfloor\cdot\left(-2n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)-2n\right)$$
$$+\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor+2\right) \right\rfloor\cdot\left(2n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)+2n\right)+2x-1$$

此函數圖形如圖 49，而當平移量為 $px+q$ 時，則函數式為

$$y=f(x)=-\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor-2\right) \right\rfloor\cdot\left(-pn\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)-pn\right)$$
$$+\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor+2\right) \right\rfloor\cdot\left(pn\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)+pn\right)+px+q$$

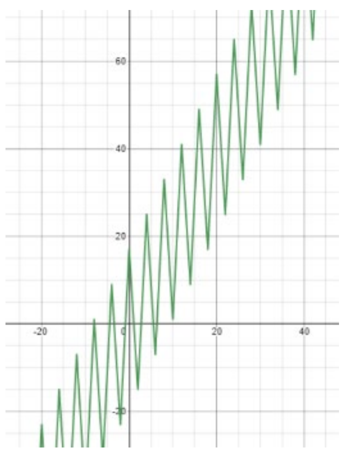


圖 49

(二)當 $n=4k+2$ 時，欲求函數 $d_1(x)$ 、 $d_2(x)$ ：由圖 50 觀察得知，此時， $n=4k+1$ 的情形完成。


圖 50

當 $x>0$ 時，**<u>負基準線</u>**(令為 $y_-$)、**<u>正基準線</u>**(令為 $y_+$)分別為：

$y_-=-2n(x-\frac{5}{2})-2n$ ， $y_+=2n(x-\frac{5}{2})+2n$ ，其中 $n$ 為項數(人數)。

使負、正基準線呈現週期性的取整函數也與公式一中，當 $n=4k+2$ 時情況相同。因此 $d_1(x)=-2n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-2n$ 、 $d_2(x)=2n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+2n$ 。仿照 $n=4k+1$ 的情況，將 $c_1(x),c_2(x),d_1(x),d_2(x)$ 合併成 $c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$ ，再加上步驟一所扣掉的值(下移的平移量) $2x-1$ ，得出下列函數式：

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2)\right\rfloor\cdot(-2n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-2n)$$

$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2)\right\rfloor\cdot(2n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+2n)+2x-1$$

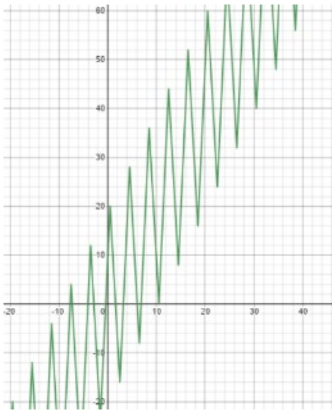


圖 51

此函數圖形如圖 51，而當平移量為 $px+q$ 時，則函數式為

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2)\right\rfloor\cdot(-pn(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-pn)$$

$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2)\right\rfloor\cdot(pn(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+pn)+px+q$$

此時， $n=4k+2$ 的情形完成。

(三)當 $n=4k+3$ 時，推導過程與 $n=4k+1$ 的情況相同，如圖 52，

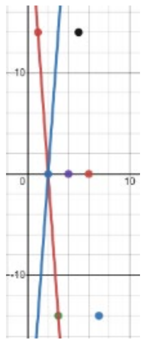



圖 52

可得： $d_1(x)=-2n(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)-2n$ 、 $d_2(x)=2n(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)+2n$ ，

仿照 $n=4k+1$ 的情況，將推得的 $c_1(x),d_2(x),c_1(x),d_2(x)$ 合併成 $c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$ ，再加上步驟一所扣掉的值(下移的平移量) $2x-1$ ，得出下列函數式：

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2)\right\rfloor\times(-2n(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)-2n)$$

$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2)\right\rfloor\times(2n(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)+2n)+2x-1$$

此函數圖形如圖 53，

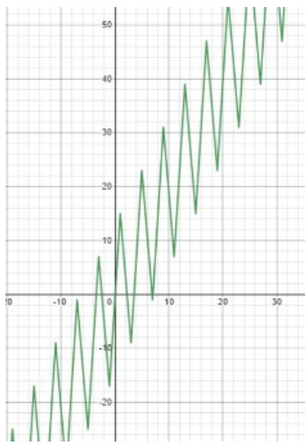


圖 53

而當平移量為 $px+q$ 時，則函數式為

$$y=f(x)=-\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2\right)\right\rfloor\times\left(-pn\left(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right)-pn\right)$$

$$+\left\lfloor \frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2\right)\right\rfloor\times\left(pn\left(x-3-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right)+pn\right)+px+q$$

此時，$n=4k+3$ 的情形完成。

至此，利用定理及公式一、公式二，我們可以知道，當 $<b_x>$ 為<u>等差數列</u>且 $n\neq 4k$ $(k\in\mathbb{N})$ 時，$a_x$ 的一般項公式都已被找出，而高一下學期的課程中，亦有<u>階差數列</u>的出現，例如：數列 $<b_x>$ 為 $1,4,9,16,25,\cdots$(差成等差)，接下來我們將給出公式三來說明：若分別當 $b_x=x^2$ 且 $n\neq 4k$ $(k\in\mathbb{N})$ 時，$a_x$ 的一般項公式。而公式三中，我們會需要使用到找二次函數的方法，因此，先來介紹我們如何找出二次曲線。以下為不同情況時的兩種找法。

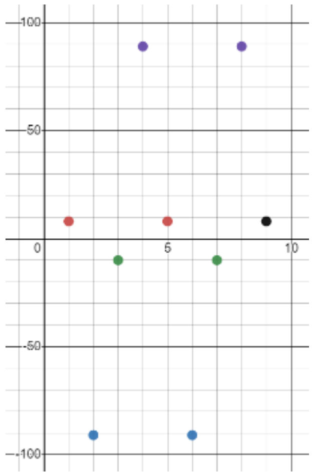


圖 54

**二、研究方法(二)：**

由於當 $n$ 為奇數、偶數時點分布的情況不一樣，所以求二次函數所用的方法也不同。以下分成 $n$ 為奇數與 $n$ 為偶數的情況，個別介紹其尋找二次函數的方法。

**(一)當 $n$ 為奇數時，利用三點求二次函數**

根據公式一、公式二，當 $n$ 為奇數時，每3個點可形成一個一次函數。因此，由圖 54，我們猜測當 $b_x=x^2$ 時，三個點形成的函數為二次函數。此處直接將三個點代入預設函數 $y=px^2+qx+r$，構成三元一次聯立方程式，解 $p$、$q$、$r$ 的值。可得一個二次函數。

**(二)當 $n$ 為偶數時，利用兩點和一個關係求二次函數**

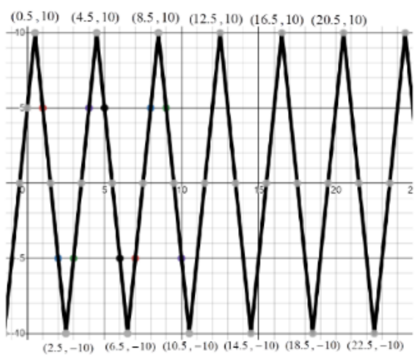


圖 55

我們根據公式一、公式二的結果，當 $n$ 為偶數時，每 2 個點可形成一個一次函數，其出現函數極值時的 $x$ 不是整數，而是某整數+0.5(如圖 55 所示，負、正領導係數直線各自延伸後之交點，其交點為某整數+0.5)。

因此我們推測當 $<b_x>=x^2$、$n$ 為偶數時，2 個點所形成的二次函數，出現極值時的 $x$ 應該也是一個整數加上 0.5。

由圖 56，我們將相鄰且 $y$ 值異號的兩點設為在同一條二次函數上。此處之二次函數以 2 個點代入 $y=px^2+qx+r$，解聯立得到一個以 $p$ 來表示的關係式。

利用相鄰兩條二次函數會<u>在第一條曲線最後一個整數點</u>和<u>在第二條曲線第一個整數點</u>的中間發生交會，即兩個函數在交會點的 $x$ 值時應該相等的性質。將先前解出的兩條二次函數 $p$ 的表達式代入，

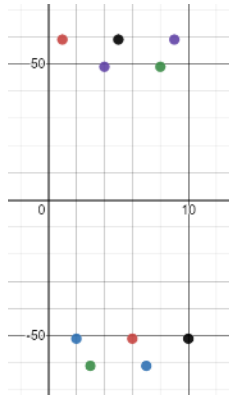


圖 56

解出各自的 $p$ 值。將各自 $p$ 代回原本的二次函數，可得出相鄰的兩條曲線。

我們原本以 $y=px^2+qx+r$ 操作，欲求出 $p$ 、 $q$ 、 $r$ 的一般式，但是每個不同 $k$ 值得出的 $p$ 、 $q$ 、 $r$ 難以看出關聯性，因此我們想到將式子配方成完全平方式 $y=p(x-h)^2+k$ ，我們發現這個方法的 $p$ 、 $h$ 、 $k$ 容易看出關聯性，易於求出一般式。

以下我們說明公式三，並解釋其推導來由。

公式三：

設有 $n$ 個人圍成一圈，有 $<a_x>$ 、 $<b_x>$ 兩數列，其中： $a_x$ 為第 $x$ 個人所挑的數字， $b_x$ 為第 $x$ 個人兩旁的人所挑的數字之平均值。當 $<b_x>$ 為階差數列且 $b_x=x^2$ 時， $<a_x>$ 的一般項公式為 $f(x)=c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)+x^2$ ，其中當 $n=4k+1$ 、 $4k+2$ 、 $n=4k+3$ ， $k\in$□ 時，所對應的 $c_1(x)$ , $d_1(x)$ , $c_2(x)$ , $d_2(x)$ ，整理如下方表格：

| $n$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1(x)$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_1(x)$ | $-n(x+\frac{n-1}{2}-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)^2+n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1$ | $-\frac{2n}{3}(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2+\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1$ | $-n(x+\frac{n-3}{2}-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)^2+\frac{n(n^2+2n+5)}{4}-1$ |
| $c_2(x)$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_2(x)$ | $n(x+\frac{n-1}{2}-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)^2-n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1$ | $\frac{2n}{3}(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2-\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1$ | $n(x+\frac{n-3}{2}-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)^2-\frac{n(n^2+2n+5)}{4}-1$ |

【證明】：

將各個數值以「第幾項( $x$ )、拿到的數字( $y$ )」作為坐標點 $(x,y)$ 繪到坐標平面上，圖 57[註4]為 $n=9$ 為例。

**步驟一：將所有點不等量下拉調整，如圖 58。**

**步驟二：利用 $n$ 將圖形分類為 $4k+1$ 、 $4k+2$ 、 $4k+3$ 。**

當 $n=4k+1$ 時，如圖 59。

$x=1$ 時， $y>0$ ； $x=2$ 時， $y<0$ ；

$x=3$ 時， $y<0$ ； $x=4$ 時， $y>0$ 。

此時 $y$ 值為<u>正、負、負、正…</u>的循環，函數最大值與最小值上<u>恰有一點</u>。

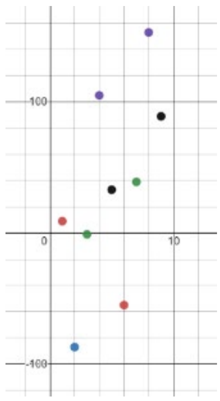


圖 57

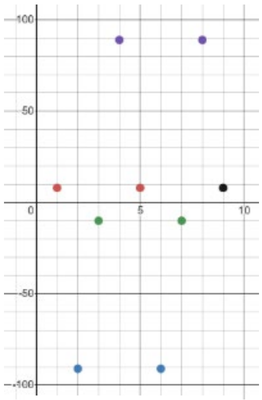


圖 58

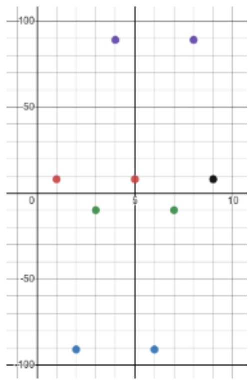


圖 59

(註 4：坐標軸有經過鉛直伸縮。事實上，圖 57 到圖 68 的坐標軸均有經過鉛直伸縮。)

當 $n=4k+2$ 時，如圖 60。

$x=1$ 時，$y>0$；$x=2$ 時，$y<0$；

$x=3$ 時，$y<0$；$x=4$ 時，$y>0$。

此時 $y$ 值為<u>正、負、負、正⋯</u>的循環，<u>沒有任何點</u>位在函數最大值與最小值上。

當 $n=4k+3$ 時，如圖 61。

$x=1$ 時，$y>0$；$x=2$ 時，$y>0$；

$x=3$ 時，$y<0$；$x=4$ 時，$y<0$。

此時 $y$ 值為<u>正、正、負、負⋯⋯</u>的循環，函數最大值與最小值上<u>恰有一點</u>。

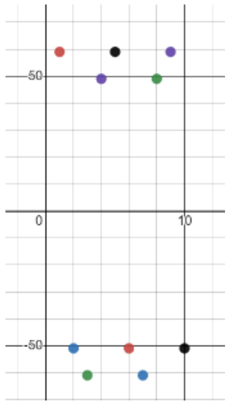


圖 60

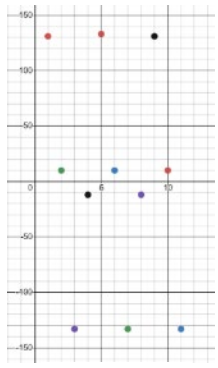


圖 61

這裡與公式一、公式二的點分布情況不同之處為：沒有任何一點會落在 $x$ 軸上，且相鄰兩點的 $y$ 坐標都不相等。

**步驟三：利用領導係數為相反數的兩個二次函數，在不同區間時交互出現，形成類似鋸齒狀的圖形**

由步驟二得知，$n=4k+1,4k+2,4k+3$ 時，都有不同的點分布，這會使得 $c_1(x)$、$d_1(x)$、$c_2(x)$、$d_2(x)$ 分別有所差異，故分成 $n=4k+1,4k+2,4k+3$ 討論。

由步驟二觀察得知，雖然並無任何一點在 $x$ 上，但點分布的相對位置都與公式一、公式二相同，因此 $c_1(x)$、$c_2(x)$ 都與公式一、公式二相同。因此這裡就不再贅述。而與公式一的差異是：<u>**正基準線**</u>、<u>**負基準線**</u>，因此這裡只以<u>**正**</u>、<u>**負基準線**</u>來討論。

我們求二次函數基準線所使用的方法為：畫出當 $n=3,4,5,\cdots,19$ 經不等量平移後的散布圖，設所求的二次函數為完全平方式 $y=a(x-k)^2+h$ ，利用「不共線三點」或「兩點一關係」求得二次函數。接著將同類型的 $n$ ($n=4k+1$、$n=4k+2$、$n=4k+3$)的完全平方式分類在一起。我們假設 $a$、$h$、$k$ 都跟 $n$ 有關聯，把 $a$、$h$、$k$ 分別作因式分解，以 $n$ 表示 $a$、$h$、$k$。結果如下：

(一)當 $n=4k+1$ 時，欲求函數 $d_1(x)$、$d_2(x)$：由圖 62 觀察得知，

當 $x>0$ 時，<u>**負基準線**</u>(令為 $y_-$)、<u>**正基準線**</u>(令為 $y_+$)分別為：

$$y_-=-n(x+\frac{(n-1)}{2})^2+n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1,$$

$$y_+=n(x+\frac{(n-1)}{2})^2-n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1$$，其中 $n$ 為項數(人數)。

如圖 62，要將從左邊數過來的第一條紅色線平移至第二條紅色線，需要向右移四個單位 ($x=0$ 到 $x=4$)，從第二條紅色線移至第三條紅線也需右移四個單位 ($x=4$ 到 $x=8$)，依此類推。將每條斜率為負、正的直線右移四個單位，可以推出下一條斜率分別為負、正的直線。

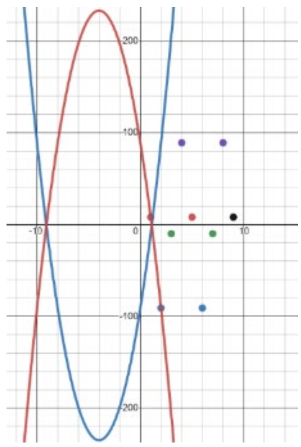


圖 62
紅色線為負基準線
藍色線為正基準線

因此，使負、正基準線呈現週期性的取整函數，亦與公式一、公式二的$n=4k+1$情況相同。

因此，$d_1(x)=-n(\ x+\dfrac{(n-1)}{2}-2\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor)^2+n\dfrac{(n^2+2n+5)}{4}-1$、

$$d_2(x)=n(\ x+\frac{(n-1)}{2}-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)^2-n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1$$ ，

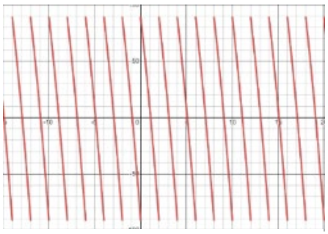


圖 63

分別如圖 63、圖 64。

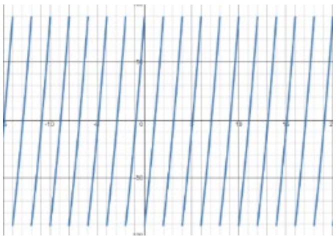


圖 64

這裡仍可利用$c_1(x)$、$c_2(x)$的「0、1交替出現」性質，把不需要的直線消除。接著，將推得的$c_1(x), c_2(x), d_1(x), d_2(x)$合併成$c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$**得出下方的函數式：**

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2)\right\rfloor\cdot\left(-n(x+\frac{(n-1)}{2}-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)^2+n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1\right)$$
$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2)\right\rfloor\cdot\left(n(x+\frac{(n-1)}{2}-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)^2-n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1\right)$$

最後，利用先前提到的作法，利用步驟四，加上步驟一所扣掉(下移)的值，亦即將上述的結果加上步驟一減去的平移量$x^2$，得出下列函數式：

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2)\right\rfloor\cdot\left(-n(x+\frac{(n-1)}{2}-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)^2+n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1\right)$$
$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2)\right\rfloor\cdot\left(n(x+\frac{(n-1)}{2}-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor)^2-n\frac{(n^2+2n+5)}{4}-1\right)+x^2$$

此時，$n=4k+1$的情形完成，函數圖形如圖 65。

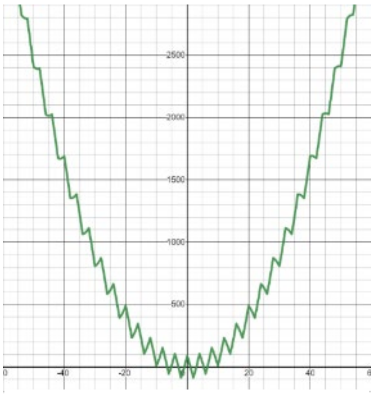


圖 65

(二)當 $n=4k+2$ 時，欲求函數 $d_1(x)$、$d_2(x)$：由圖 66 觀察得知，當 $x>0$ 時，**負基準線**(令為 $y_-$)、**正基準線**(令為 $y_+$)分別為：

$$y_- = -\frac{2n}{3}\left(x+\frac{3n-3}{4}\right)^2+\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1,$$

$$y_+ = \frac{2n}{3}\left(x+\frac{3n-3}{4}\right)^2-\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1,$$

其中 $n$ 為項數(人數)。使負、正基準線呈現週期性的取整函數也與公式一、公式二中，當 $n=4k+2$ 時情況相同。

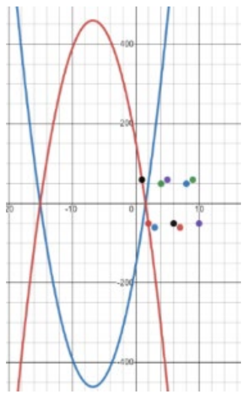


圖 66
紅色線為負基準線
藍色線為正基準線

因此 $d_1(x)=-\frac{2n}{3}(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2+\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1$、

$$d_2(x)=\frac{2n}{3}(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2-\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1。$$

仿照 $n=4k+1$ 的情況，將 $c_1(x), c_2(x), d_1(x), d_2(x)$ 合併成 $c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$，再加上步驟一所扣掉的值(下移的平移量) $x^2$，得出下列函數式：

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2)\right\rfloor\cdot\left(-\frac{2n}{3}(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2+\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1\right)$$

$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot(\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2)\right\rfloor\cdot(\frac{2n}{3}(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2-\frac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1)+x^2$$

此時，$n=4k+2$ 的情形完成，函數圖形如圖 67。

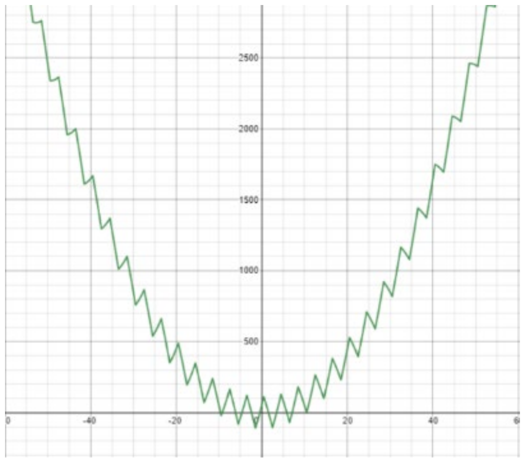


圖 67

(三)當 $n=4k+3$ 時，推導過程與 $n=4k+1$ 相同，

因此 $d_1(x)=-n(x+\frac{n-3}{2}-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor)^2+\frac{n(n^2+2n+5)}{4}-1$、

$d_2(x)=n(x+\frac{n-3}{2}-2(\frac{x-1}{2}))^2-\frac{n(n^2+2n+5)}{4}-1$，再將推得的 $c_1(x), c_2(x), d_1(x), d_2(x)$ 合併成 $c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)$，再加上步驟一所扣掉的值(下移的平移量) $x^2$，得出下列函數式：

$$y=f(x)=-\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2\right)\right\rfloor\cdot\left(-n\left(x+\frac{n-3}{2}-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right)^2+\frac{n(n^2+2n+5)}{4}-1\right)$$
$$+\left\lfloor\frac{1}{4}\cdot\left(\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2\right)\right\rfloor\cdot\left(n\left(x+\frac{n-3}{2}-2\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor\right)^2-\frac{n(n^2+2n+5)}{4}-1\right)+x^2$$

此時，$n=4k+3$的情形完成。函數圖形如圖 68。

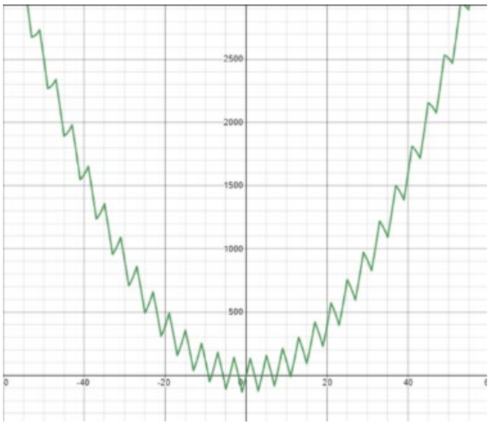


圖 68

**三、$b_x$ 為多項式函數時，求得一般項 $a_x$ 的方法：**

接著，為了在數字更大的時候，也能快速得到某 $\langle b_x \rangle$數列的 $a_x$ 解，因此，我們寫個程式來實現。因為我們要找的只有 $a_x$ 數列中，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 個別的點，而不是整段函數，所以，以下我們將介紹**程式點解法**。

因為先前發現 $n$ 的圖形可分為 $4k+1$ 、 $4k+2$ 、 $4k+3$ 三種，因此點解法也分為此三種情況來討論。

(1) 當 $n=4k+1$時，以 $k=1$ ，$n=5$ 為例：

$b_1=\frac{1}{2}(a_5+a_2)$，$b_2=\frac{1}{2}(a_1+a_3)$，$b_3=\frac{1}{2}(a_2+a_4)$，$b_4=\frac{1}{2}(a_3+a_5)$，$b_5=\frac{1}{2}(a_4+a_1)$

整理後，令 $\sum_{i=1}^{5}b_i=S$，

則 $a_1=S-2(b_3+b_4)$，$a_2=S-2(b_4+b_5)$，$a_3=S-2(b_5+b_1)$，$a_4=S-2(b_1+b_2)$，
$a_5=S-2(b_2+b_3)$

(2) 當 $n=4k+2$時，以 $k=1$ ，$n=6$ 為例：

$b_1=\frac{1}{2}(a_6+a_2)$，$b_2=\frac{1}{2}(a_1+a_3)$，$b_3=\frac{1}{2}(a_2+a_4)$，$b_4=\frac{1}{2}(a_3+a_5)$，$b_5=\frac{1}{2}(a_4+a_6)$，
$b_6=\frac{1}{2}(a_5+a_1)$

整理後，令 $\sum_{i=1}^{3}b_{2i-1}=S_{奇}$ 、 $\sum_{i=1}^{3}b_{2i}=S_{偶}$

則 $a_1=S_{偶}-2(b_4)$，$a_2=S_{奇}-2(b_5)$
$a_3=S_{偶}-2(b_6)$，$a_4=S_{奇}-2(b_1)$
$a_5=S_{偶}-2(b_2)$，$a_6=S_{奇}-2(b_3)$

(3) 當 $n=4k+2$時，以 $k=1$ ，$n=7$ 為例：

$b_1=\frac{1}{2}(a_7+a_2)$，$b_2=\frac{1}{2}(a_1+a_3)$，$b_3=\frac{1}{2}(a_2+a_4)$，$b_4=\frac{1}{2}(a_3+a_5)$，$b_5=\frac{1}{2}(a_4+a_6)$，
$b_6=\frac{1}{2}(a_5+a_7)$，$b_7=\frac{1}{2}(a_6+a_1)$

整理後，令 $\sum_{i=1}^{7}b_i=S$

則 $a_1=S-2(b_1+b_4+b_5)$，$a_2=S-2(b_2+b_5+b_6)$，$a_3=S-2(b_3+b_6+b_7)$，
$a_4=S-2(b_4+b_7+b_1)$，$a_5=S-2(b_5+b_1+b_2)$，$a_6=S-2(b_6+b_2+b_3)$，
$a_7=S-2(b_7+b_3+b_4)$

歸納後，我們可得到以下性質：

1. $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$

2. 因為一個 $b_i$ 相當於兩個「半個 $a_i$ 」，因此 $a_i = S - 2(<b>) \;\Rightarrow\; b$ 的數量

 在 $n = 4k+1 \quad or \quad n = 4k+3$ 時，有 $\frac{n-1}{2}$ 個；

 在 $n = 4k+2$ 時，因為已經分成奇、偶兩個部分，因此 $b$ 只有 $\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)$ 個。

3. $a_i = S - 2(<b>) \;\Rightarrow\; b_i$ 的 $i$ 會隨 $a_i$ 的 $i+1$

4. $a_i = S - 2(<b>) \;\Rightarrow\; b_i$ 的 $i > n$ 會直接回到 $1$

再列出更多不同 $n$ 值的情況後，觀察規律並歸納得出：

(1)當 $n = 4k+1$ 時，

$$S = \sum_{i=1}^{n} b_i \text{ ，} a_i = S - 2\left[\sum_{j=1}^{k} (b_{i+4j-2} + b_{i+4j-1})\right]$$

，其中 $i$ 、 $j$ 是自變數。

(2)當 $n = 4k+2$ 時，

$$S_{奇} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} b_{2i-1} \text{ 、 } S_{偶} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} b_{2i} \text{ ，} a_{i,奇} = S_{偶} - 2\left[\sum_{j=1}^{k} b_{i+4j-1}\right] \text{ 、 } a_{i,偶} = S_{奇} - 2\left[\sum_{j=1}^{k} b_{i+4j-1}\right] \text{。}$$

(3)當 $n = 4k+3$ 時，

$$S = \sum_{i=1}^{n} b_i \text{ ，} a_i = S - 2\left[ b_i + \sum_{j=1}^{k} (b_{i+4j-1} + b_{i+4j}) \right]$$

有了上述歸納的性質後，我們可以將數列 $<b_x>$ 得到以下的**相加性質**：

1. 我們在操作相同 $n$ 值時，「 $<b_x>$ 數列不同」的情況時，偶然發現可以將「 $n$ 值相同時」的 $<b_x>$ 數列 $px^2+qx+r$ 拆成 $<b_x> = px^2$ ， $<b_x> = qx$ ， $<b_x> = r$ 這三個數列，個別求出 $<a_x>$ 各項後再將它們相加，即可得原 $<b_x> = px^2+qx+r$ 的 $<a_x>$ 各項，

 即： $n = N$ ( $N \in \mathbb{N}$ )時，

 「 $<b_x> = px^2+qx+r$ 的 $a_1$ 」……①

 $=$「 $<b_x> = px^2$ 的 $a_1$ 」…②+「 $<b_x> = qx$ 的 $a_1$ 」…③+「 $<b_x> = r$ 的 $a_1$ 」…④

 其餘 $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_N$ 都相同。

2. 我們往三次方做時發現上述內容也會成立，因此試圖以點解法證明：

 由於同個 $<b_x>$ ， $n$ 值相同時， $<a_x>$ 各項和 $=$ $<b_x>$ 各項和；且 $<a_x>$ 可置換成 $<b_x>$ 的表達式。

 又，(1) $n$ 值相同時，1.中的①～④的 $<a_x>$ 置換成 $<b_x>$ 的式子相同。

 (2)先將式①～④的 $<a_x>$ 轉換成 $<b_x>$ 後，因為①的 $<b_x> = px^2+qx+r$ ，

 且②、③、④的 $<b_x>$ 分別 $px^2+qx+r$ 。

因此，可得：當 $<b_x>$ 任意高次多項式時，可先將 $<b_x>$ 分成單項函數，把 $<a_x>$ 解出後再分別相加，即可得到該任意多項式的 $<a_x>$ 各項。

至此，我們可利用程式解法，將高次多項式 $b_x$ 拆解為單項函數後進行操作，再將其加總可回到 $b_x$ 。

而當$b_x$為任意的多項式函數時，我們是否能求得$a_x$？接下來，我們分步驟來討論之。

步驟一：試圖推導出：當$b_x$為不同的單項函數時，所對應到的「不等量平移函數」(以下稱為「**平移量**」)，其中不等量平移均滿足研究方法時的定義。

步驟二：根據之前研究方法的討論結果，我們可知—

當$b_x$為常數項，即$b_x = 1$時，其**平移量**為$-1$；

當$b_x$為一次項，即$b_x = x$時，其**平移量**為$-x$；

當$b_x$為二次項，即$b_x = x^2$時，其**平移量**為$-x^2 + 1$。

步驟三：由前述所得到的結果，我們可專心分析$< b_x >$為特定次方(單項式)時的**平移量**，最後再將所求的$< b_x >$拆成多個單項式後再將它們求得$a_x$，最後相加。

步驟四：我們試求了三次方的方程式，依據先前推測其**平移量**為$-x^3$，而實際操作後發現圖形呈現一次函數遞減趨勢，因此我們假設其一次函數為$ax + b$，最後，推出須作調整：$+3x$才能滿足不等量平移的條件，得出：當$b_x$為三次項，即$b_x = x^3$時，其**平移量**為$-x^3 + 3x$。

步驟五：接著，我們試圖找出四次方的**平移量**，依據先前推測其**平移量**為$-x^4$，操作後發現圖形呈現二次函數遞減趨勢，因此我們假設其二次函數為$px^2 + qx + r$，最後推出需作調整：$+6x^2 - 5$才能滿足不等量平移的條件，得出：當$b_x = x^4$時，其**平移量**為$-x^4 + 6x^2 - 5$。

步驟六：由步驟二、四、五，我們歸納出**平移量**有以下關係：

(1)都是以減開始，並且負正相間；

(2)領導係數都是$-1$；

(3)每一項都差了二次方，且最低次方為一次項或常數項。

步驟七：由步驟四、五，以及步驟六的**平移量**關係，繼續求出$b_x$分別為五次項及六次項。

當$b_x$為五次項，即$b_x = x^5$時，其**平移量**為$-x^5 + 10x^3 - 25x$；

當$b_x$為六次項，即$b_x = x^6$時，其**平移量**為$-x^6 + 15x^4 - 75x^2 + 61$。

步驟八：由步驟七的結果，再與步驟六比較發現更進一步的**平移量**關係：

(4)當$b_x$為偶數次單項式時，其平移量的係數總和為$0$，而平移量中的常數項為其他係數總和的相反數。

(5)將$< b_x >$次方稱為第$p$次方，而$k$值為：**平移量**經降冪排列後，由左數起的第$k$項係數，符號$f(p\,,k)$的意義為：當$< b_x >$為$p$次方，其**平移量**的第$k$項係數。

(6)當$k = 2$時，$f(p\,,2)$似乎呈現二次方關係，由於$f(p\,,1)$均為$-1$，呈現零次關係，而$f(p\,,1)$、$f(p\,,2)$的首項出現，其$< b_x >$差了二次方，據此我們推測$f(p\,,3)$為四次方關係，$f(k\,,4)$為六次方關係，以此類推。

(7)$f(p\,,k)$均可被其首項整除。

步驟九：根據上述歸納結果，我們繼續往下推，並使用計算機及電腦軟體驗證完全符合以上步驟一到步驟八的條件：

當$b_x$為七次項，即$b_x = x^7$時，其**平移量**$-x^7 + 21x^5 - 75x^3 + 427x$；

當$b_x$為八次項，即$b_x = x^8$時，其**平移量**$-x^8 + 28x^6 - 350x^4 + 1708x^2 - 1385$；

當$b_x$為九次項，即$b_x = x^9$時，其**平移量**$-x^9 + 36x^7 - 630x^5 + 5124x^3 - 12465x$；

當$b_x$為十次項，即$b_x = x^{10}$時，其**平移量**$-x^{10} + 45x^8 - 1050x^6 + 12810x^4 - 62325x^2 + 50521$

步驟十：由上述步驟發現，當$b_x$分別為七次項至十次項，且$k = 1, 2, 3$時，即$f(p\,,1), f(p\,,2), f(p\,,3)$，$p = 7, 8, 9, 10$時，完全符合步驟八所提到的**平移量**第(6)點關係。

且根據目前之條件我們推得 $f(p,k)$ 的關係如下：

$$f(p,1)=-1$$

$$f(p,2)=\frac{1}{2}(p^2-p)$$

$$f(p,3)=-\frac{5}{24}(p^4-8p^3+19p^2-12p)$$

$$f(p,4)=\frac{61}{720}(p^6-19p^5+137p^4-461p^3+702p^2-360p)$$

將以上因式分解得：

$$f(p,1)=-1$$

$$f(p,2)=\frac{1}{2}p(p-1)$$

$$f(p,3)=-\frac{5}{24}p(p-1)(p-2)(p-3)$$

$$f(p,4)=\frac{61}{720}p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)$$

步驟十一：根據步驟十的結果，可以發現**平移量**的關係：

(8)整體符合第(7)點關係的結果，**平移量**可提出之數的分子為該 $f(p,k)$ 首項。

(9)承(8)，分母為 $(2k-2)!$

(10)不看(8)(9)之係數，剩餘的平移量為 $\dfrac{p!}{(p-2k+2)!}$

步驟十二：由以上結果我們推測 $f(p,k)$ 為以下結果：

即 $f(p,k)=\dfrac{f(2k-2,k)\cdot p!}{(2k-2)!\cdot(p-2k+2)!}$，且 $f(2k-2,k)=-\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f(2i-2,i)\cdot(2k-2)!}{(2i-2)!\cdot(2k-2i)!}$，

其中 $f(0,1)=-1$。

至此，我們研究得到：當數列 $<b_x>$ 滿足多項式函數時，其一般項 $a_x$ 的求法。

# 伍、研究結果

設有$n$個人圍成一圈，有$<a_x>$、$<b_x>$兩數列，其中：$a_x$為第$x$個人所挑的數字，$b_x$為第$x$個人兩旁的人所挑的數字之平均值。當$<b_x>$為不同條件下，$<a_x>$的一般項公式的研究結果如下。

(一)數列$<b_x>$為**等差數列**且$b_x = x$時，

數列$<a_x>$的一般項為$f(x)=c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)+x$，其中$c_1(x)$, $d_1(x)$, $c_2(x)$, $d_2(x)$隨著$n$值的不同而改變，當$n=4k$，$k\in\mathbb{N}$時，一般項$f(x)$無解，其餘情況整理如下：

| $n$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1(x)$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor}{4}\right\rfloor$ |
| $d_1(x)$ | $-n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)-n$ | $-n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-n$ | $-n(x-3-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)-n$ |
| $c_2(x)$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor\right\rfloor}{4}\right\rfloor$ |
| $d_2(x)$ | $n(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)+n$ | $n(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+n$ | $n(x-3-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)+n$ |

(二)數列$<b_x>$為**等差數列**且$b_x = px+q$時，

數列$<a_x>$的一般項為$f(x)=c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)+px+q$，其中$c_1(x)$, $d_1(x)$, $c_2(x)$, $d_2(x)$隨著$n$值的不同而改變，當$n=4k$，$k\in\mathbb{N}$時，一般項$f(x)$無解，其餘情況整理如下：

| $n$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1(x)$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_1(x)$ | $-pn(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)-pn$ | $-pn(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)-pn$ | $-pn(x-3-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor)-pn$ |
| $c_2(x)$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_2(x)$ | $pn(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor)+pn$ | $pn(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor)+pn$ | $pn(x-3-2\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor)+pn$ |

(三)數列 $<b_x>$ 為**階差數列**且 $b_x = x^2$ 時，

數列 $<a_x>$ 的一般項為 $f(x)=c_1(x)\cdot d_1(x)+c_2(x)\cdot d_2(x)+x^2$ ，其中 $c_1(x)\,,d_1(x)\,,c_2(x)\,,d_2(x)$ 隨著 $n$ 值的不同而改變，當 $n=4k$ ， $k\in\mathbb{N}$ 時，一般項 $f(x)$ 無解，其餘情況整理如下：

| $n$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1(x)$ | $-\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor x-4\left\lfloor\dfrac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\dfrac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ | $-\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\dfrac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_1(x)$ | $-n(x+\dfrac{n-1}{2}-2\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor)^2+n\dfrac{(n^2+2n+5)}{4}-1$ | $-\dfrac{2n}{3}(x+\dfrac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\dfrac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2+\dfrac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1$ | $-n(x+\dfrac{n-3}{2}-2\left\lfloor\dfrac{x-1}{2}\right\rfloor)^2+\dfrac{n(n^2+2n+5)}{4}-1$ |
| $c_2(x)$ | $\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor x-4\left\lfloor\dfrac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor\dfrac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ | $\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor\dfrac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ |
| $d_2(x)$ | $n(x+\dfrac{n-1}{2}-2\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor)^2-n\dfrac{(n^2+2n+5)}{4}-1$ | $\dfrac{2n}{3}(x+\dfrac{3n-3}{4}-2\left\lfloor\dfrac{x-0.5}{2}\right\rfloor)^2-\dfrac{9n^3+18n^2+25n}{24}-1$ | $n(x+\dfrac{n-3}{2}-2\left\lfloor\dfrac{x-1}{2}\right\rfloor)^2-\dfrac{n(n^2+2n+5)}{4}-1$ |

(四)當數列 $<b_x>$ 滿足 $b_x$ 為任意多項式時，

可將 $b_x$ 拆為多個單項函數，個別分析求得其 $a_x$ 之後，再將其加總，即可得原 $b_x$ 所對應之一般項 $a_x$ 之結果。而當 $b_x$ 為單項函數時的不等量平移函數為如下之定義，其中符號 $f(p\,,k)$ 的意義為當 $b_x$ 為 $p$ 次方，平移量的第 $k$ 項係數：

$f(p\,,k)=\dfrac{f(2k-2\,,k)\cdot p!}{(2k-2)!\cdot(p-2k+2)!}$ ，且 $f(2k-2\,,k)=-\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{f(2i-2\,,i)\cdot(2k-2)!}{(2i-2)!\cdot(2k-2i)!}$ ，

其中定義 $f(0\,,1)=f(1\,,1)=-1$

# 陸、參考文獻資料與其他

一、參考文獻：


(一)許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬(民 108 年 7 月)。普通型高級中學數學第二冊。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

(二)維基百科。取整函數。檢自：
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%96%E6%95%B4%E5%87%BD%E6%95%B0。

(三)薛昭雄、顏啟麟、何焱銘、陳榮輝、鄭仁峰編譯(民 100 年 7 月)。美國 AMC12 數學測驗歷屆試題暨詳解(I)。臺北市：博凱出版社有限公司。


二、其他(C++程式碼)：

下頁所節錄的**程式碼**，是我們**因應本研究所特地撰寫**的。在計算上，有時會有數字太大不易計算，此程式碼可輔助我們較快速解決找一般項的問題，並能在計算上能有效偵錯。下頁為我們撰寫的程式碼及簡易運算結果。

使用 C++程式輔助計算 $a_x$ 一般項的操作過程

```cpp
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<string>
#include<stdio.h>
#include<sstream>
using namespace std;
int adj(long long int n,long long int i){
    if(i%n==0){
        return n;
    }
    else if(i>n){
        return i%n;
    }
    else{
        return i;
    }
}
long long int x_length(long long int i){
    int length=0;
    if(i<0){
        length+=1;
        i*=-1;
    }
    length+=(floor(log10(i))+1);
    return length;
}
int main(){
    R:
    long long int n=0,max_pow=0,S=0,sigma=0,nmin=0,nMAX=0;
    int lead[99]={0};
    int s[99]={0};
    int sigma2[2]={0};
    int x[99]={0};
    int i=0,j=0;
    cout<<"輸入最高次方 :";
    while(cin>>max_pow){
        cout<<"輸入n最小~最大值:";
        cin>>nmin>>nMAX;
        for(int i=max_pow;i>=0;i--){
            cout<<"輸入"<<i<<"次方的係數 :";
            cin>>lead[i];
        }
        n=nmin;
        if(nmin<=2){
            nmin=3;
            goto F;
        }
        else{
            goto F;
        }
        ///F///
        F:
        if(n%4!=0){
            cout<<"\nn="<<n<<endl;
        }
        if(n<=nMAX){
            if(n%4==0){
                n++;
                goto F;
            }
            if(n%4==3){
                goto ODD_1;
            }
            else if(n%4==1){
                goto ODD_2;
            }
            else{
                goto EVEN;
            }
        }
        else{
            goto R;
        }
    }
    /** n=3,7,11...etc **/
    ODD_1:
    for(int i=1;i<=n;i++){
        s[i]=0;
        for(int j=0;j<=max_pow;j++){
            s[i]+=lead[j]*pow(i,j);
        }
    }
    sigma=0;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        sigma+=s[i];
    }
    cout<<endl;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        cout<<s[i]<<" ";
    }
    cout<<endl;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        S=0;
        int d=3;
        S+=s[adj(n,i+d)];
        if((n-3)/4>0){
            for(int times=(n-3)/4;times>=1;times--){
                d++;
                S+=s[adj(n,i+d)];
                d+=3;
                S+=s[adj(n,i+d)];
            }
        }
        cout<<"("<<i<<","<<sigma-2*S<<")"<<endl;
        x[i]=sigma-2*S;
    }
    goto M;
    /** n=5,9,13...etc **/
    ODD_2:
    for(int i=1;i<=n;i++){
        s[i]=0;
        for(int j=0;j<=max_pow;j++){
            s[i]+=lead[j]*pow(i,j);
        }
    }
    sigma=0;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        sigma+=s[i];
    }
    cout<<endl;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        cout<<s[i]<<" ";
    }
    cout<<endl;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        S=0;
        int d=2;
        S+=s[adj(n,i+d)];
        d++;
        S+=s[adj(n,i+d)];
        if((n-5)/4>0){
            for(int times=(n-5)/4;times>=1;times--){
                d+=3;
                S+=s[adj(n,i+d)];
                d++;
                S+=s[adj(n,i+d)];
            }
        }
        cout<<"("<<i<<","<<sigma-2*S<<")"<<endl;
        x[i]=sigma-2*S;
    }
    goto M;
    /** n=6,10,14...etc **/
    EVEN:
    for(int i=1;i<=n;i++){
        s[i]=0;
        for(int j=0;j<=max_pow;j++){
            s[i]+=lead[j]*pow(i,j);
        }
    }
    sigma2[1]=0;
    for(int i=2;i<=n;i+=2){
        sigma2[1]+=s[i];
    }
    sigma2[0]=0;
    for(int i=1;i<=n-1;i+=2){
        sigma2[0]+=s[i];
    }
    cout<<endl;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        cout<<s[i]<<" ";
    }

    cout<<endl;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        S=0;
        int d=3;
        S+=s[adj(n,i+d)];
        if((n-6)/4>0){
            for(int times=(n-6)/4;times>=1;times--){
                d+=4;
                S+=s[adj(n,i+d)];
            }
        }
        cout<<"("<<i<<","<<sigma2[i%2]-2*S<<")"<<endl;
        x[i]=sigma2[i%2]-2*S;
    }
    goto M;
    /** minus x^n **/
    M:
        cout<<endl;
        int MAX=0;
        for(int i=1;i<=n;i++){
            for(int j=max_pow;j>=0;j--){
                x[i]-=lead[j]*pow(i,j);
            }
        }
        for(int i=1;i<=n;i++){
            cout<<"("<<i<<","<<x[i]<<")"<<endl;
        }
        n++;
        goto F;
    return 0;
}
```

上頁程式碼中，因為 $n=4k$ ( $k \in \mathbb{N}$ )的情況導致無解，所以在撰寫 C++程式碼的過程中，直接設定跳過 $n=4k$ 的運算。下方為 C++程式運算結果。

C++程式運算結果：

```
輸入最高次方 :1
輸入n最小~最大值:3 5
輸入1次方的係數 :1
輸入0次方的係數 :0

n=3

1 2 3
(1,4)
(2,2)
(3,0)

(1,3)
(2,0)
(3,-3)

n=5

1 2 3 4 5
(1,1)
(2,-3)
(3,3)
(4,9)
(5,5)

(1,0)
(2,-5)
(3,0)
(4,5)
(5,0)
```

C++程式運算結果簡易說明：

```
輸入最高次方 :1
輸入n最小~最大值:3 5
輸入1次方的係數 :1
輸入0次方的係數 :0

n=3        n值

1 2 3      <bx>
(1,4)
(2,2)      未調整(-x)前
(3,0)

(1,3)
(2,0)      調整(-x)後
(3,-3)

n=5

1 2 3 4 5
(1,1)
(2,-3)
(3,3)
(4,9)
(5,5)

(1,0)
(2,-5)
(3,0)
(4,5)
(5,0)
```

## 【評語】050401

本作品探討未知數列的一般項公式，是努力做的作品，給定的資訊是相鄰兩項的平均值 。這是一個線性聯立方程組，有特殊矩陣結構 (tri-diagonal)，所以已經有很快很穩定的數值解法。因此，是否值得為特殊的狀況 ，例如等差的情形去做出一般式，是需要仔細思考評估的。這一套方法，太過繁雜，依賴圖形來歸納公式，有很高的機會會做得比代數機械運算來的慢。特別是多項式時，作者已經沒辦法給出數學公式證明，而是靠觀察前幾項來猜出一般式，嚴謹度不足。

# 作品簡報

# 點分布與鋸齒狀函數的研究

組別：高級中等學校組

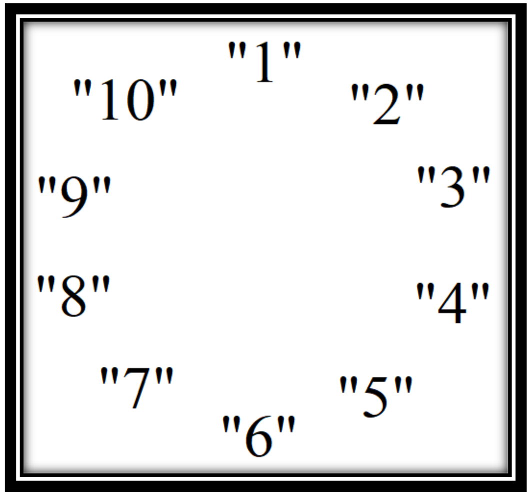
科別：數學科

# 摘　要

假定有兩數列<$a_x$>、<$b_x$>，兩數列各有 $n$ 項，將數列<$a_x$>以項數($x$)與其值($y$)，描繪到坐標平面上，並根據將所有的點分布情況加以連線，其圖形狀似**鋸齒狀函數**。經過本研究，可將原本散布圖的點經適當的**「不等量」平移**後，再利用分段拼接概念，結合「取整函數」來設計出一函數，使其能夠使兩條異號的領導係數線段交替出現，形成類似鋸齒狀函數的圖形，最後再將點**「不等量」平移**回原本的位置，得到一函數涵括所有的點。最後再將 $b_x$ 推廣到多項式函數，進而找到可行方法來求得對應的一般項 $a_x$。

# 研究動機

10 人圍成一圈，每人挑一個數字並將此數字告訴自己左右兩邊的人，然後每人說出自己兩旁的人所選數字的平均值，右圖為每個人所說出之平均值(非原來選的數字)，則說出平均值 6 的那個人所選數字為何？



# 研究目的

設有$n$個人圍成一圈，有$\langle a_x \rangle$、$\langle b_x \rangle$兩數列，其中：$a_x$為第$x$個人所挑的數字，$b_x$為第$x$個人兩旁的人所挑的數字之平均值。

一、若$\langle b_x \rangle$為等差數列，且$b_x = x$時，則數列$\langle a_x \rangle$的一般式為何

二、若$\langle b_x \rangle$為等差數列，且$b_x = px+q$時，則數列$\langle a_x \rangle$的一般式為何

三、若$\langle b_x \rangle$為階差數列，且$b_x = x^2$時，則數列$\langle a_x \rangle$的一般式為何

四、數列$\langle b_x \rangle$滿足$b_x$為任意多項式時，是否有方法能求得$\langle a_x \rangle$的一般式

# 研究方法與流程圖

研究方法1：$c_1(x)$ , $c_2(x)$ , $d_1(x)$ , $d_2(x)$

原題目 → $b_x = x$ / $b_x = px + q$ / $b_x = x^2$ → 代數問題 → 解析幾何 → 不等量平移 → 建構&合成函數 $c_1(x)$ $c_2(x)$ → 不等量平移 → 解出一般解

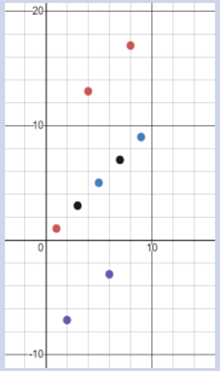
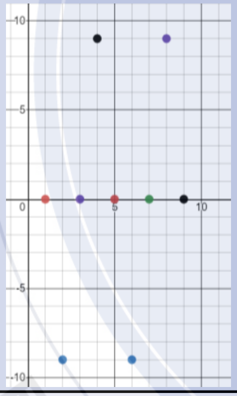
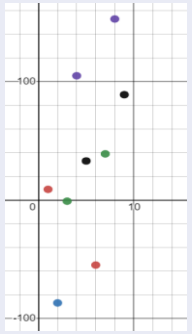
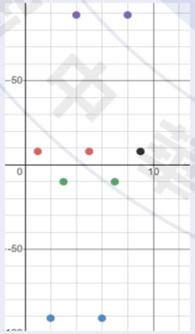
研究方法 2：二次函數解法 (1) 三點 (2) 二點一關係

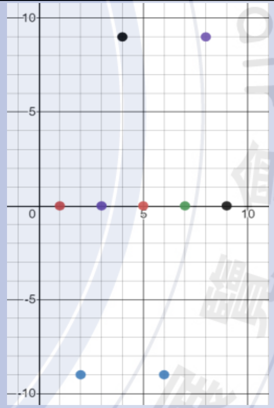
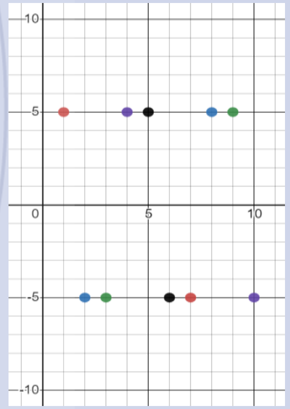
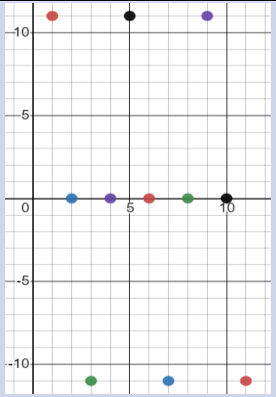
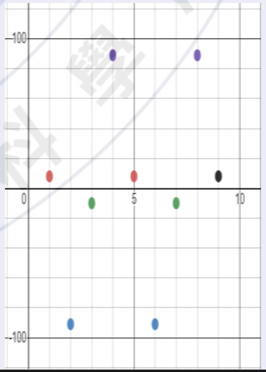
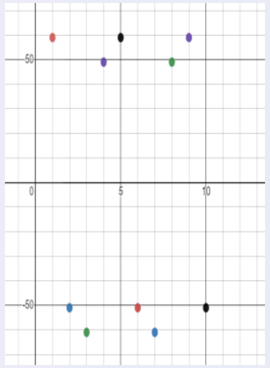
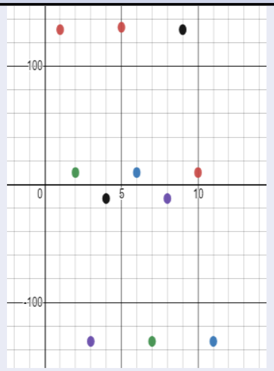
定理：設有$n$個人圍成一圈，有兩數列$\langle a_x \rangle$、$\langle b_x \rangle$，其中：$a_x$為第 $x$ 個人所挑的數字，$b_x$為第$x$個人兩旁的人所挑的數字之平均值。當$b_x$為公差不為0的等差數列，且當 $n=4k$ 時，$a_x$無解。

# 研究過程(以 $b_x = x$ 、 $b_x = x^2$ 為例)

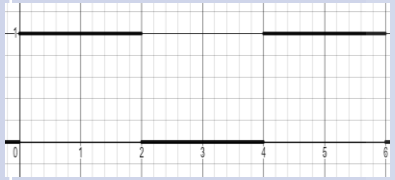
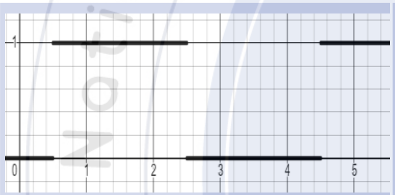
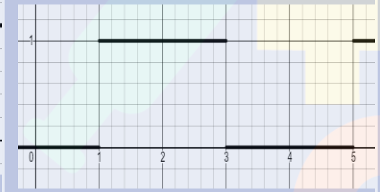
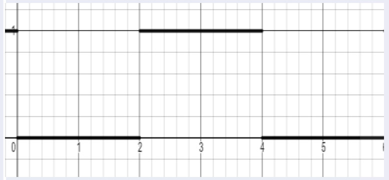
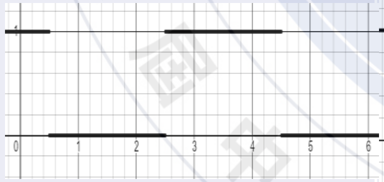
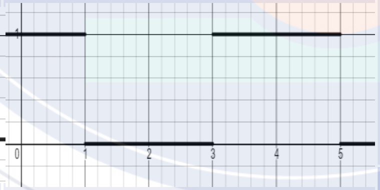
步驟一：
先將所有的點進行「不等量平移」

步驟二:
依 $n$ 值分類為三種類

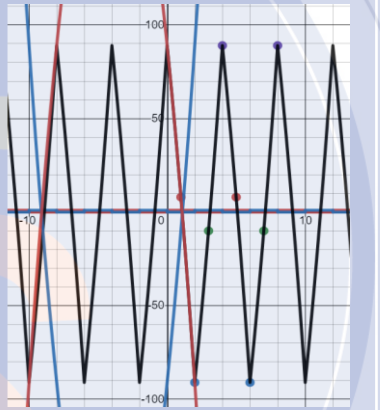
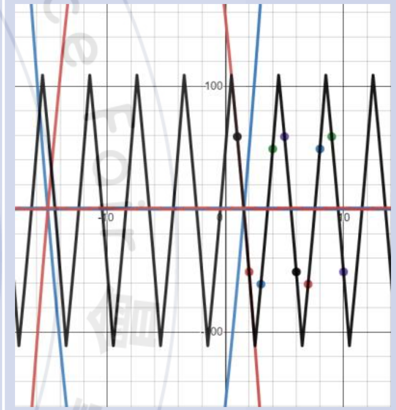
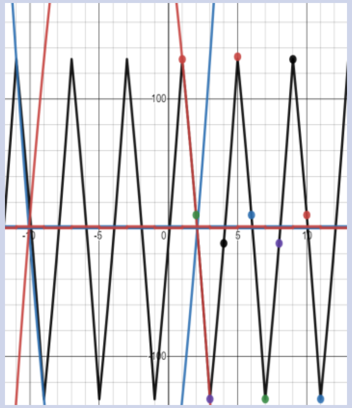
| | 原始圖 | 「不等量平移」後的圖 |
|---|---|---|
| $b_x = x$ |  |  |
| $b_x = x^2$ |  |  |

| | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $b_x = x$ |  |  |  |
| $b_x = x^2$ |  |  |  |

## 步驟三：
## 利用不同函數合成，形成鋸齒狀函數，下表為 $c_1(x)$ , $c_2(x)$

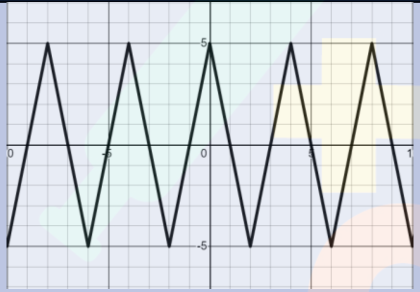
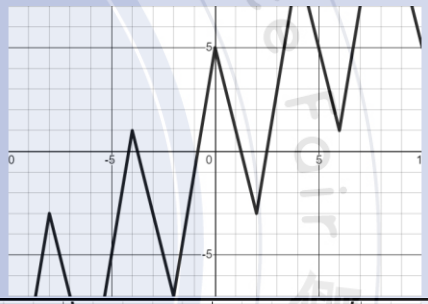
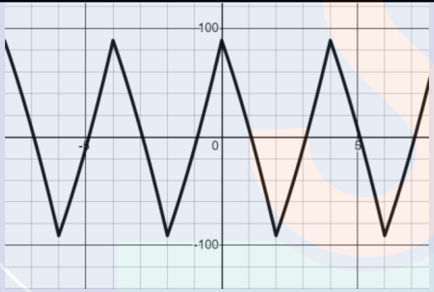
| | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1(x)$ |  $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ |  $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ |  $-\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor-2}{4}\right\rfloor$ |
| $c_2(x)$ |  $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ |  $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ |  $\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor+2}{4}\right\rfloor$ |

以 $b_x = x^2$ 為例，負、正基準線如下：

| $b_x = x^2$ | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $y_- = -n(x+\frac{(n-1)}{2})^2 + n\frac{(n^2+2n+5)}{4}$ | $y_- = -\frac{2n}{3}\left(x+\frac{3n-3}{4}\right)^2 + n\frac{(9n^2+18n+25)}{24}$ | $y_- = -n\left(x+\frac{n-3}{2}\right)^2 + n\frac{\left(n^2+2n+5\right)}{4}$ |
| $y_+ = n(x+\frac{(n-1)}{2})^2 - n\frac{(n^2+2n+5)}{4}$ | $y_+ = \frac{2n}{3}\left(x+\frac{3n-3}{4}\right)^2 - n\frac{(9n^2+18n+25)}{24}$ | $y_+ = n\left(x+\frac{n-3}{2}\right)^2 - n\frac{\left(n^2+2n+5\right)}{4}$ |

由於負、正基準線只有單一條線，為了達到一個重複出現的函數，需要將該線不等量平移。而此函數為一個下取整函數，我們稱之為平移函數。平移函數亦會受到不同種類的 $n$ 而改變。

步驟四：
加上步驟一「不等量平移」的值

| | 步驟三完成圖 | 「不等量平移」後的圖 |
|---|---|---|
| $b_x = x$ |  |  |
| $b_x = x^2$ |  |  |

將負、正基準線向右移一個平移函數，可以得到重複特定線段的一個函數。但此函數並不符合目的，須將先前求出的 $c_1(x)$、$c_2(x)$ 分別乘以 $d_1(x)$、 $d_2(x)$，可利用 $c_1(x)$ 與 $c_2(x)$ 的0、1交替性質將多餘線段適時地消失，則該函數就為<u>鋸齒狀函數</u>。

# 研究結果

設有$n$個人圍成一圈，有$<a_x>$、$<b_x>$兩數列，其中：$a_x$為第$x$個人所挑的數字，$b_x$為第$x$個人兩旁的人所挑的數字之平均值。當$<b_x>$為不同條件下，$<a_x>$的一般項公式的研究結果如下：

數列$<b_x>$為等差數列，且$b_x = x$，

$$4k+1 \quad f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor -2}{4} \right\rfloor \left(-n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor\right)-n\right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4}\right\rfloor \right\rfloor +2}{4} \right\rfloor \left(n\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor\right)+n\right) + x$$

$$4k+2 \quad f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor \right\rfloor -2}{4} \right\rfloor \left(-n\left(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor\right)-n\right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4}\right\rfloor \right\rfloor +2}{4} \right\rfloor \left(n\left(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2}\right\rfloor\right)+n\right) + x$$

$$4k+3 \quad f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor \right\rfloor}{4} \right\rfloor \left(-n\left(x-3-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor\right)-n\right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4}\right\rfloor \right\rfloor}{4} \right\rfloor \left(n\left(x-3-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor\right)+n\right) + x$$

數列$\langle b_x \rangle$為等差數列，且 $b_x = px + q$，

## $4k+1$

$$f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor - 2}{4} \right\rfloor \left(-pn\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - pn\right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor + 2}{4} \right\rfloor \left(pn\left(x-2-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) + pn\right) + px + q$$

## $4k+2$

$$f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor - 2}{4} \right\rfloor \left(-pn\left(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2} \right\rfloor\right) - pn\right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor + 2}{4} \right\rfloor \left(pn\left(x-\frac{5}{2}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2} \right\rfloor\right) + pn\right) + px + q$$

## $4k+3$

$$f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4} \right\rfloor \right\rfloor - 2}{4} \right\rfloor \left(-pn\left(x-3-2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor\right) - pn\right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4} \right\rfloor \right\rfloor + 2}{4} \right\rfloor \left(pn\left(x-3-2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor\right) + pn\right) + px + q$$

數列 $<b_x>$ 為階差數列，且 $b_x = x^2$，

## $4k+1$

$$f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor - 2}{4} \right\rfloor \left( -n\left(x+\frac{n-1}{2}-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)^2 + n\frac{(n^2+2n+5)}{4} \right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-4\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor + 2}{4} \right\rfloor \left( n\left(x+\frac{n-1}{2}-2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)^2 - n\frac{(n^2+2n+5)}{4} \right) + x^2 - 1$$

## $4k+2$

$$f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor - 2}{4} \right\rfloor \left( -\frac{2n}{3}\left(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2} \right\rfloor\right)^2 + \frac{9n^3+18n^2+25n}{24} \right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-0.5-4\left\lfloor \frac{x-0.5}{4} \right\rfloor \right\rfloor + 2}{4} \right\rfloor \left( \frac{2n}{3}\left(x+\frac{3n-3}{4}-2\left\lfloor \frac{x-0.5}{2} \right\rfloor\right)^2 - \frac{9n^3+18n^2+25n}{24} \right) + x^2 - 1$$

## $4k+3$

$$f(x) = -\left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4} \right\rfloor \right\rfloor - 2}{4} \right\rfloor \left( -n\left(x+\frac{n-3}{2}-2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor\right)^2 + \frac{n(n^2+2n+5)}{4} \right) + \left\lfloor \frac{\left\lfloor x-1-4\left\lfloor \frac{x-1}{4} \right\rfloor \right\rfloor + 2}{4} \right\rfloor \left( n\left(x+\frac{n-3}{2}-2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor\right)^2 + -\frac{n(n^2+2n+5)}{4} \right) + x^2 - 1$$

當數列 $<b_x>$ 滿足 $b_x$ 為任意多項式時，
可將 $b_x$ 拆為多個單項函數，個別分析求得其 $a_x$ 之後，再將其加總，即可得原 $b_x$ 所對應之一般項 $a_x$ 之結果。
而當 $b_x$ 為單項函數時的不等量平移函數為如下之定義，其中符號 $f(p,k)$ 的意義為：當 $b_x$ 為 $p$ 次方，平移量的第 $k$ 項係數：

$$f(p,k)=\frac{f(2k-2,k)\cdot p!}{(2k-2)!\cdot(p-2k+2)!}\text{，且 } f(2k-2,k)=-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f(2i-2,i)\cdot(2k-2)!}{(2i-2)!\cdot(2k-2i)!}$$

其中定義：$f(0,1)=f(1,1)=-1$

# 參考資料


(一)許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬(民108年7月)。普通型高級中學數學第二冊。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

(二)維基百科。取整函數。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%96%E6%95%B4%E5%87%BD%E6%95%B0。

(三)薛昭雄、顏啟麟、何焱銘、陳榮輝、鄭仁峰編譯(民100年7月)。美國AMC12數學測驗歷屆試題暨詳解(I)。臺北市：博凱出版社有限公司。

# C++ 程式碼節錄

此**程式碼**，是我們**因應本研究所特地撰寫**的。在計算上，有時會有數字太大不易計算，此程式碼可輔助我們較快速解決找一般項的問題，並能在計算上能有效偵錯。