中華民國第61屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030426

以邊追圓 - 多邊形內切圓形成規律之探討

學校名稱：臺中市立居仁國民中學

作者：	指導老師：
國二 葉懿琦 國二 盧宥妏	葉冠宏

關鍵詞：圓外切四邊形、圓外切多邊形、

多邊形內切圓

摘要

一、每一個圓外切四邊形的對邊和都相等，每一個對邊和相等的四邊形也都有內切圓。在各邊長度、順序、對邊和都相等的相異四邊形，隨著內角的不同而有不同大小的內切圓。

二、本研究從圓外切四邊形出發，試圖找到一套方法在僅知各邊邊長條件(長度、順序)下，判斷多邊形是否可能有內切圓。

三、多邊形如何在僅知邊長條件下，判斷是否有內切圓存在?以及如何進一步找出內切圓半徑長度與相對應多邊形的內角關係為本研究重心所在。

壹、 研究動機

在康軒第五冊第二章探討圓外切四邊形的性質中提到「若四邊形為圓外切四邊形，則四邊形對邊和相等。」但教材的安排上，僅止於此，並未繼續就其逆敘述做相關探討。記得在商高定理、樞紐定理等單元，都有深入討論其逆定理，使相關定理的運用更能得心應手。因此，我們就產生對這個性質的逆敘述做進一步探究的想法。

在查閱文獻的過程中，我們發現全國科展第 58 屆其中一個作品：當圓外切多邊形遇上 Brianchon 定理 - Brianchon 定理在多邊形上的探討，內容有一部分與我們研究的圓外切四邊形逆敘述相關。該作品也是從已知邊長條件出發，探討多邊形是否有內切圓。不過，該研究除了邊長條件，還要滿足作者設立的角邊連線交內部一點且將 n 邊形分割成 n 個圓外切四邊形等必要條件，而滿足其種種條件推論出正 n 邊形有內切圓的結論也是沒有研究前就可知道的資訊，這樣的結果對判斷多邊形是否有內切圓價值甚微。基於上述，我們想能否在只知道邊長條件下，就能判斷多邊形有無內切圓；如果有，能否進一步確定數量與大小?

貳、 研究目的及研究問題

一、探討多邊形邊長形成圓外切多邊形的充要關係：並探討偶數邊形與奇數邊形的形成規律

二、探討多邊形邊長、內切圓的半徑與多邊形的內角的形成關係：並探討偶數邊形與奇數邊形的形成規律

參、 研究設備及器材

本研究主要利用 Geogebra 電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與檢驗，提出研究結果。

肆、 研究過程與方法

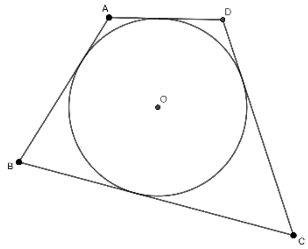
一、文獻探討

本研究範圍涉及判別任意多邊形 (本研究所稱之多邊形定義為凸多邊形) 是否為圓外切多邊形，以及其相對應內切圓半徑的長度變化之相關規律。過程中，將引用圓外切四邊形相

關性質來做探討。

(一) 圓外切四邊形 (參見文獻[1])

在幾何學辭典第 114 頁第 560 例題查到在四邊形 ABCD 中，若相對兩邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 之和等於另兩邊 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 之和，則該四邊形是圓外切四邊形。因此圓外切四邊形，必有對邊和相等的逆敘述成立。



▲圖 1-1

【性質 1-1】如圖 1-1，在平面上有一四邊形 ABCD，若 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ ，則 ABCD 必為圓外切四邊形。

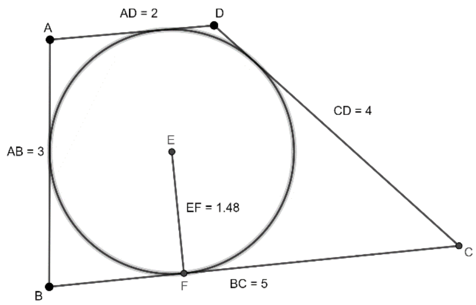
伍、研究結果與討論

以 Geogebra 繪圖軟體驗證時發現一個有趣的現象，就是對邊和相等的四邊形除了必有內切圓以外，我們發現此內切圓半徑長度並不是唯一的。當四個邊長長度、順序鎖定不動時，隨著邊與邊夾角的不同，雖一樣會產生內切圓，但所產生內切圓半徑的長短卻不盡相同，有長有短，可以說四邊形在固定邊長且滿足對邊和相等的條件時可以在其內部產生無數個不同半徑長的內切圓。

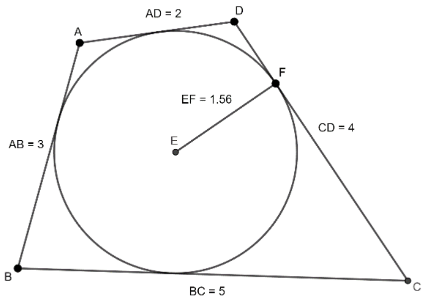
在邊數五邊以上的圓外切多邊形內角角度追尋過程中，利用內切圓半徑相等，成功地寫出二組方程式將多邊形邊長與內角完整的匡列在一起，受限於解方程式的複雜度太高，我們利用 Geogebra 動態模擬幫助逼近各內角的角度。雖然，理論上這些內角應該有唯一且固定的數值，但受限於繪圖的誤差標準，在數值只能逼近到小數第二位的條件下，我們所求出的內角角度也只能是一個近似值。

一、圓外切四邊形

圖 2-1、圖 2-2 的兩組四邊形邊長皆為 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{BC}=5$ 、 $\overline{CD}=4$ 、 $\overline{DA}=2$ ，對邊和皆為 7。比較之後，我們發現 :(一) 根據性質 1-1，兩組四邊形皆為圓外切四邊形，有內切圓。比較內切圓半徑 $\overline{EF}$ 分別為 1.48 與 1.56，並不一致。 (二) 雖然兩組四邊形邊長條件皆相同，但四個內角並不相同，所以，這兩個四邊形是完全不同形狀的四邊形。藉由上述兩點發現，我們大膽假設，在對邊和相等，固定邊長條件下(長度、順序)，多邊形內切圓的半徑長短直接受其內角變化所影響。

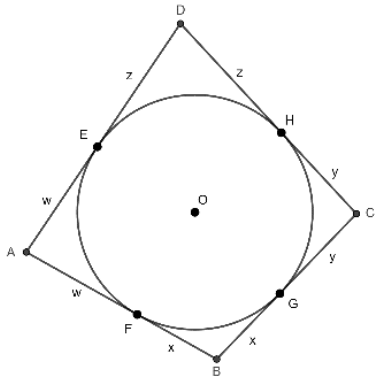


▲圖 2-1



▲圖 2-2

由性質 1-1 確認四邊形只要對邊和相等必有內切圓，順著這個思路我們設想一對邊和相等四邊形 ABCD ($\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}}$)，令 $\overline{\mathrm{AB}}=w+x$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}=x+y$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}=y+z$ 、 $\overline{\mathrm{DA}}=z+w$ (w 、 x 、 y 、 $z>0$)，因為 $\overline{\mathrm{AB}}$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}$ 、 $\overline{\mathrm{DA}}$ 存在，故 w 、 x 、 y 、 z 亦存在。換句話說若能找到一組正實數 w 、 x 、 y 、 z 使得四邊形對邊和能相等，則該四邊形必有內切圓，如圖 2-3。



▲圖 2-3

依照這個思路，我們對對邊和相等的四邊形進行驗證:

作四邊形 ABCD，使四邊長分別為 $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{k}-\mathrm{m}$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{k}-\mathrm{n}$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}=\mathrm{k}+\mathrm{m}$ 、 $\overline{\mathrm{DA}}=\mathrm{k}+\mathrm{n}$ (k 為不是 0 的常數)，令 $\overline{\mathrm{AB}}=w+x$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}=x+y$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}=y+z$ 、 $\overline{\mathrm{DA}}=z+w$ ，得四元一次聯立方程式 $w+x=\mathrm{k}-\mathrm{m}$ 、 $x+y=\mathrm{k}-\mathrm{n}$ 、 $y+z=\mathrm{k}+\mathrm{m}$ 、 $z+w=\mathrm{k}+\mathrm{n}$ 。雖然以國中學到的加減消去法可以求出 w 、 x 、 y 、 z ，但計算步驟龐雜、速度慢、不易看出規律性，我們發現高斯消去法一樣是利用加減消去法，但其計算步驟簡潔、速度快、容易看出規律性，因此，本研究解聯立方程式一律使用高斯消去法。以下為聯立方程式轉換矩陣利用高斯消去法求解 :

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&\mathrm{k-m}\\0&1&1&0&\mathrm{k-n}\\0&0&1&1&\mathrm{k+m}\\1&0&0&1&\mathrm{k+n}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&\mathrm{k-m}\\0&1&1&0&\mathrm{k-n}\\0&0&1&1&\mathrm{k+m}\\0&-1&0&1&\mathrm{m+n}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0&\mathrm{-m+n}\\0&1&1&0&\mathrm{k-n}\\0&0&1&1&\mathrm{k+m}\\0&0&1&1&\mathrm{k+m}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&\mathrm{k+n}\\0&1&0&-1&\mathrm{-m-n}\\0&0&1&1&\mathrm{k+m}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases}w+z=k+n\\x-z=-m-n\\y+z=k+m\end{cases}$ 移項 $\begin{cases}w=-z+k+n\\x=z-m-n\\y=-z+k+m\end{cases}$ 取 $z=\mathrm{t}\ (\mathrm{t}\in\mathrm{R}+)$ 得 $\begin{cases}w=-t+k+n\\x=t-m-n\\y=-t+k+m\\z=t\end{cases}$ $(\mathrm{t}\in\mathrm{R}+)$

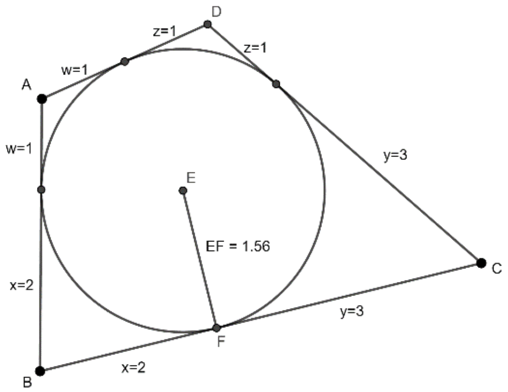
依照推論出來的結果，在這個邊長條件下使 $z=\mathrm{t}\ (\mathrm{t}\in\mathrm{R}+)$ ，且讓 w 、 x 、 y >0，則 w 、 x 、 y 、 z 能有無限多組正實數解。

實例： 作一四邊形 ABCD，使四邊長分別為 $\overline{\mathrm{AB}}=3$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}=5$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}=4$ 、 $\overline{\mathrm{DA}}=2$ (對邊和相等)，令 $\overline{\mathrm{AB}}=w+x$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}=x+y$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}=y+z$ 、 $\overline{\mathrm{DA}}=z+w$ ，得方程式 $w+x=3$ 、 $x+y=5$ 、 $y+z=4$ 、 $z+w=2$ ，其次將其轉換矩陣利用高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&3\\0&1&1&0&5\\0&0&1&1&4\\1&0&0&1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&3\\0&1&1&0&5\\0&0&1&1&4\\0&-1&0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-2\\0&1&1&0&5\\0&0&1&1&4\\0&0&1&1&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

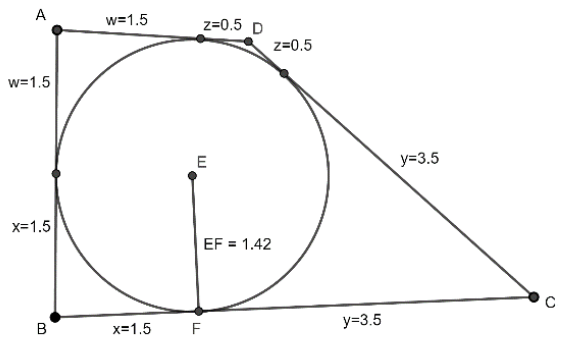
即$\begin{cases} w+z=2 \\ x-z=1 \\ y+z=4 \end{cases}$ 移項$\begin{cases} w=-z+2 \\ x=z+1 \\ y=-z+4 \end{cases}$ 取$z=\mathrm{t}\ (\mathrm{t}\in\mathrm{R}+)$ 得$\begin{cases} w=-t+2 \\ x=t+1 \\ y=-t+4 \\ z=t \end{cases}$ $(\mathrm{t}\in\mathrm{R}+)$

令$\mathrm{t}=1$，則$\mathrm{z}=1$、$w=1$、$x=2$、$y=3$，此時內切圓半徑為 1.56，如圖 2-4。



▲圖 2-4

令$\mathrm{t}=0.5$，則$\mathrm{z}=0.5$、$w=1.5$、$x=1.5$、$y=3.5$，此時內切圓半徑為 1.42，如圖 2-5。



▲圖 2-5

註 1：圖 2-4、2-5 切點至圓心所作半徑皆相同，圖 2-4 半徑為 1.56，圖 2-5 半徑為 1.42。

註 2：圖 2-4、2-5 應用 Geogebra 繪圖驗證、觀察，所繪之圖形只考量四邊形邊長條件，不考量角度條件。

由圖 2-4、2-5，發現解出不同的w、x、y、z，四邊形的內切圓半徑長短亦不相同。因此，我們進一步猜測在對邊和相等的情況下，內切圓半徑長短受w、x、y、z影響，當w、x、y、z可解出無限多組正實數解，自然就能產生無限多不同長度的內切圓半徑，這與我們觀察到在同一組邊長條件下，對邊和相等的四邊形內有各種不同半徑長內切圓圖形的情況是相吻合的。

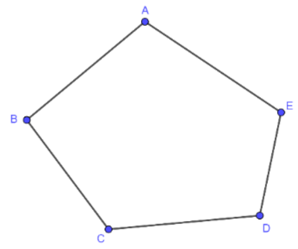
我們藉由高斯消去法與 Geogebra 檢驗，結果發現只要是對邊和相等的四邊形，w、x、y、z必有正實數解，且w、x、y與z連動，不同的z，就得出不同組的w、x、y，而在圖形中不同的w、x、y、z組合得出的內切圓半徑亦不相同。

【引理 1】如圖 2-3，在四邊形 ABCD 中，邊長$\overline{\mathrm{AB}}$、$\overline{\mathrm{BC}}$、$\overline{\mathrm{CD}}$、$\overline{\mathrm{DA}}$分別分解為

$\overline{\mathrm{AB}}=w+x$、$\overline{\mathrm{BC}}=x+y$、$\overline{\mathrm{CD}}=y+z$、$\overline{\mathrm{DA}}=z+w$，若能滿足$w$、$x$、$y$、$z>0$，則四邊形 ABCD 有無限多個內切圓。

二、五邊形推廣

我們試著將對邊和相等的四邊形必有內切圓的性質推廣到五邊形，依照國中教材多邊形邊長的名稱關係進行五邊形對邊和的驗證(以$\overline{AB}$而論，$\overline{AE}$、$\overline{BC}$為鄰邊，$\overline{CD}$、$\overline{DE}$為對邊，如圖 2-6。)，發現五邊形的邊長分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{AE}$時，要達到對邊和相等時，則$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AE}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{AE}=\overline{DE}+\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AE}+\overline{BC}+\overline{CD}$，解聯立方程式時得$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{AE}$。



▲圖 2-6

【證明】

$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AE}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{AE}=\overline{DE}+\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AE}+\overline{BC}+\overline{CD}$

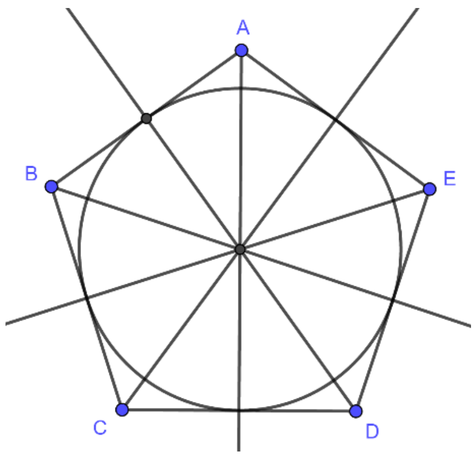
$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{AE}$

$\overline{DE}=\overline{AE}$

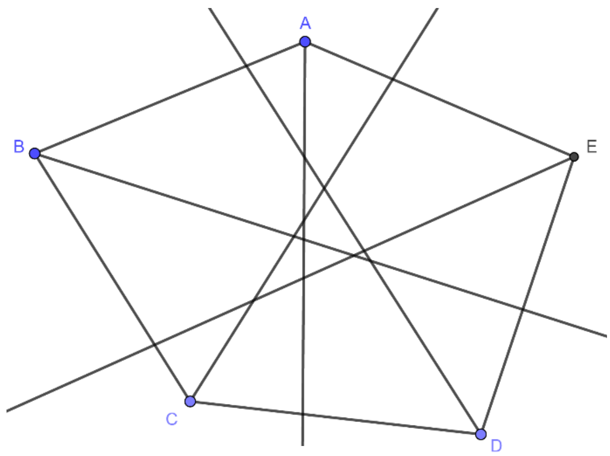
同理$\overline{DE}=\overline{BC}$、$\overline{CD}=\overline{BC}$、$\overline{AE}=\overline{AB}$

故 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{AE}$

推論發現五邊形在五個邊長等長的情況下，才能滿足五組對邊和相等的條件。而在五邊形五個邊長等長的情況下，我們觀察發現若五邊形恰為正五邊形時，則五個內角平分線交一點，有內切圓，如圖 2-7；但若此等邊五邊形不為正五邊形時，則五個內角平分線不交一點，故沒有內切圓，如圖 2-8。因此，四邊形對邊和相等，則必有內切圓的性質無法直接推廣至五邊形應用。

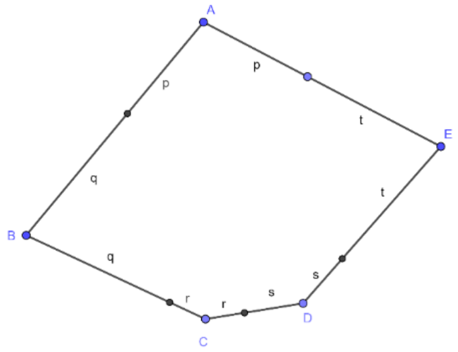


▲圖 2-7



▲圖 2-8

我們試著從另一角度邊長關係進行探討，在邊長分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{AE}$時，試著嘗試找到一組邊長關係使得$\overline{AB}=p+q$ 、$\overline{BC}=q+r$、$\overline{CD}=r+s$、$\overline{DE}=s+t$、$\overline{AE}=t+p$ (p、q、r、s、t >0)，如圖 2-9。如果能找到，承襲四邊形的經驗，這樣的五邊形有內切圓存在。



▲圖 2-9

【證明】

令$\overline{AB}=p+q=\alpha$ 、$\overline{BC}=q+r=\beta$、$\overline{CD}=r+s=\chi$、$\overline{DE}=s+t=\delta$、$\overline{AE}=t+p=\varepsilon\,(\alpha$、$\beta$、$\chi$、$\delta$、$\varepsilon$>0)

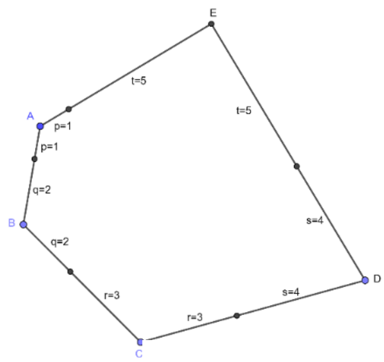
$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&0&\alpha\\0&1&1&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&\chi\\0&0&0&1&1&\delta\\1&0&0&0&1&\varepsilon\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&0&\alpha\\0&1&1&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&\chi\\0&0&0&1&1&\delta\\0&-1&0&0&1&-\alpha+\varepsilon\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&0&0&\alpha-\beta\\0&1&1&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&\chi\\0&0&0&1&1&\delta\\0&0&1&0&1&-\alpha+\beta+\varepsilon\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&1&0&\alpha-\beta+\chi\\0&1&0&-1&0&\beta-\chi\\0&0&1&1&0&\chi\\0&0&0&1&1&\delta\\0&0&0&-1&1&-\alpha+\beta-\chi+\varepsilon\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-1&\alpha-\beta+\chi-\delta\\0&1&0&0&1&\beta-\chi+\delta\\0&0&1&0&-1&\chi-\delta\\0&0&0&1&1&\delta\\0&0&0&0&2&-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-1&\alpha-\beta+\chi-\delta\\0&1&0&0&1&\beta-\chi+\delta\\0&0&1&0&-1&\chi-\delta\\0&0&0&1&1&\delta\\0&0&0&0&1&\frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon}{2}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&\frac{\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon}{2}\\0&1&0&0&0&\frac{\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon}{2}\\0&0&1&0&0&\frac{-\alpha+\beta+\chi-\delta+\varepsilon}{2}\\0&0&0&1&0&\frac{\alpha-\beta+\chi+\delta-\varepsilon}{2}\\0&0&0&0&1&\frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon}{2}\end{array}\right]$$

經由高斯消去法驗證，發現只要五邊形畫得出來，則該五邊長必有一組p、q、r、s、t實數解。我們排除掉產生非正實數解之五邊形，推估五邊形的邊長如能解出p、q、r、s、t為正實數解者，則該圖形有內切圓。

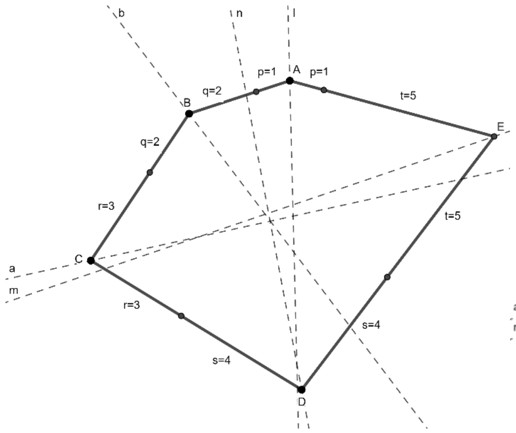
圖 2-10 為一個邊長為$\overline{AB}=3$ 、$\overline{BC}=5$、$\overline{CD}=7$、$\overline{DE}=9$、$\overline{AE}=6$的五邊形，根據上述方法驗證，可解出$p=1$、$q=2$、$r=3$、$s=4$、$t=5$唯一正實數解。

接下來，驗證五邊形內角平分線是否交於一點，以確認內切圓圓心的存在。 由圖 2-11 發現，此五邊形的內角平分線並未交於一點，故內切圓圓心不存在，五邊形沒有內切圓。

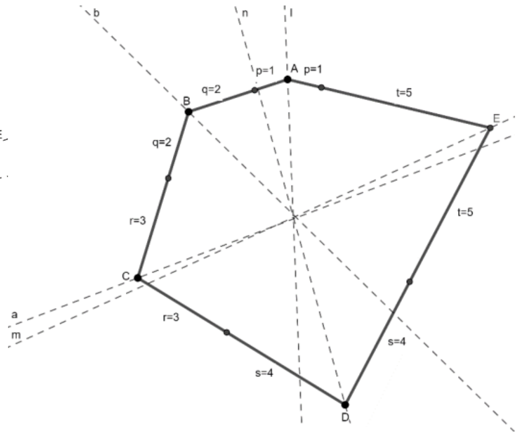


▲圖 2-10

其次，不改變五邊形各邊長度、順序，只改變五邊形的內角組成，觀察內角平分線交點的變化。我們發現邊長條件不變，只改變各邊的夾角，確實能改變內角角平分線交點的相對位置。如圖 2-12，各內角角平分線相當程度地相交在接近於一點的位置。



▲圖 2-11



▲圖 2-12

我們繼續假設，如果此五邊形內角平分線確實交於一點 K，如圖 2-13，則 K 到各邊的距離相等 ($\overline{KU}=\overline{KV}=\overline{KW}=\overline{KX}=\overline{KY}$)，依圖形列關係式可得

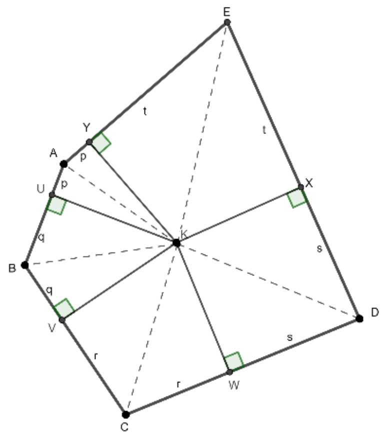
$\angle EAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDE+\angle DEA=540^0$ 、

$$p\cdot\tan\frac{\angle EAB}{2}=q\cdot\tan\frac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\frac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\frac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\frac{\angle DEA}{2}$$

我們由圖形知道△KAU、△KBV、△KCW、△KDX、△KEY 都是直角△，其中股邊 $\overline{KU}=\overline{KV}=\overline{KW}=\overline{KX}=\overline{KY}$ ，因為

$\angle KAU=\frac{1}{2}\angle EAB$ 、 $\angle KBV=\frac{1}{2}\angle ABC$ 、 $\angle KCW=\frac{1}{2}\angle BCD$ 、

$\angle KDX=\frac{1}{2}\angle CDE$ 、 $\angle KEY=\frac{1}{2}\angle DEA$ 且要滿足

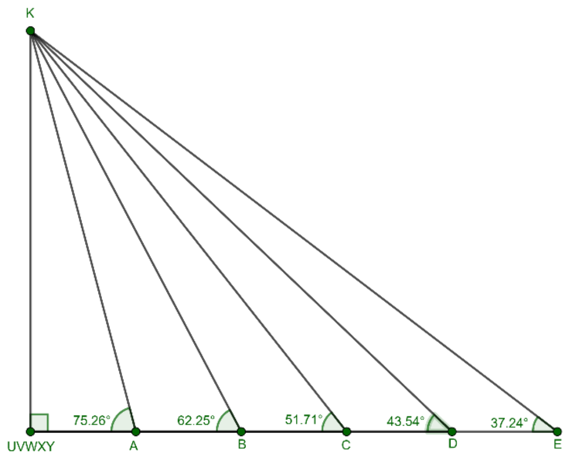


▲圖 2-13

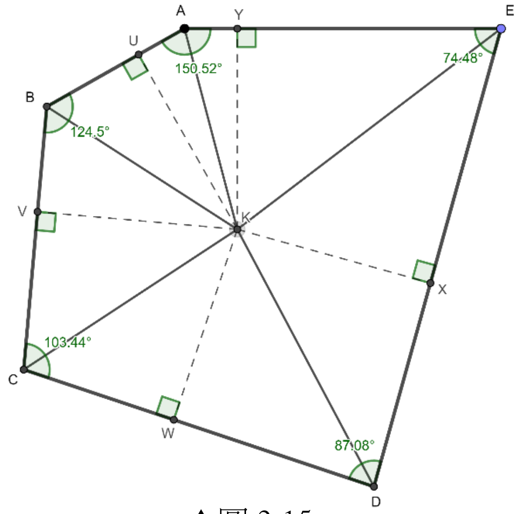
$\angle EAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDE+\angle DEA=540^0$ ，所以 $\angle KAU+\angle KBV+\angle KCW+\angle KDX+\angle KEY=270^0$ 。為了解出 $\angle KAU$ 、 $\angle KBV$ 、 $\angle KCW$ 、 $\angle KDX$ 、 $\angle KEY$ ，利用五個直角△一股邊長度與一直角內角相同進行疊合，利用 Geogebra 做角度可能解。

動態模擬後發現，當 $p=\overline{AU}=1$ 、 $q=\overline{BV}=2$ 、 $r=\overline{CW}=3$ 、 $s=\overline{DX}=4$ 、 $t=\overline{EY}=5$ 時， $\angle KAU=75.26°$ ($\angle EAB=150.52°$)、 $\angle KBV=62.25°$ ($\angle ABC=124.5°$)、 $\angle KCW=51.71°$ ($\angle BCD=103.42°$)、 $\angle KDX=43.54°$ ($\angle CDE=87.08°$)、 $\angle KEY=37.24°$ ($\angle DEA=74.48°$)，如圖 2-14，恰可滿足上述兩式關係式。

藉由圖 2-14 找到的角度，反推五邊形的內角分別為 $\angle ABC=124.5°$ 、 $\angle BCD=103.42°$ 、 $\angle CDE=87.08°$ 、 $\angle DEA=74.48°$ 、 $\angle EAB=150.52°$，配合邊長 $\overline{\mathrm{AB}}=3$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}=5$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}=7$ 、 $\overline{\mathrm{DE}}=9$ 、 $\overline{\mathrm{AE}}=6$ ，利用 Geogebra 實際地將五邊形依序畫出，並劃出五個內角角平分線，確認所有的內角平分線確實交於一點 K，如圖 2-15。



▲圖 2-14



▲圖 2-15

由以上步驟，我們可以認為五邊形的邊長只要可以解出 p 、 q 、 r 、 s 、 t 為正實數解者，其內角平分線都可以交於一點，內切圓圓心存在。除此之外，我們也發現五邊形內角一旦固定，則內切圓半徑就會跟著固定，而能滿足條件者只有一組固定解。

我們得到以下結果 ：

(一) 五邊形邊長利用高斯消去法求解， p 、 q 、 r 、 s 、 t 若能解出正實數解，則五個內角平分線必可交於一點。

(二) 五邊形內角平分線交於一點者，在相同邊長條件下(長度、順序)，可產生內切圓的圖形只有一種。

【引理 2】如圖 2-9，在五邊形 ABCDE 中，邊長 $\overline{\mathrm{AB}}$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}$ 、 $\overline{\mathrm{DE}}$ 、 $\overline{\mathrm{EA}}$ 分別分解為 $\overline{\mathrm{AB}}=p+q$ 、 $\overline{\mathrm{BC}}=q+r$ 、 $\overline{\mathrm{CD}}=r+s$ 、 $\overline{\mathrm{DE}}=s+t$ 、 $\overline{\mathrm{EA}}=t+p$ ，若能滿足 p、q、r、s、t>0、 $p\cdot\tan\frac{\angle EAB}{2}=q\cdot\tan\frac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\frac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\frac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\frac{\angle DEA}{2}$ ，則五邊形 ABCDE 有一個內切圓。

我們認為此方法應可推廣至 n 邊形，以下進行六邊形的推廣。

三、六邊形推廣

假設有一六邊形 ABCDEF，邊長依序為 $\overline{AB}=\alpha$ 、 $\overline{BC}=\beta$ 、 $\overline{CD}=\chi$ 、 $\overline{DE}=\delta$ 、 $\overline{EF}=\varepsilon$ 、 $\overline{FA}=\phi$ 。令 $p+q=\alpha$ 、 $q+r=\beta$ 、 $r+s=\chi$ 、 $s+t=\delta$ 、 $t+u=\varepsilon$ 、 $u+p=\phi$ (α、β、χ、δ、ε、ϕ>0)，利用高斯消去法化簡 :

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&\alpha\\0&1&1&0&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\1&0&0&0&0&1&\phi\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&\alpha\\0&1&1&0&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&1&0&0&0&-1&\alpha-\phi\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&0&\alpha-\beta\\0&1&1&0&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&1&0&0&1&-\alpha+\beta+\phi\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&\alpha-\beta+\chi\\0&1&0&-1&0&0&\beta-\chi\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&0&1&0&-1&\alpha-\beta+\chi-\phi\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&0&\alpha-\beta+\chi-\delta\\0&1&0&0&1&0&-\alpha+\beta+\delta\\0&0&1&0&-1&0&\chi-\delta\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&0&0&1&1&-\alpha+\beta-\chi+\delta+\phi\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon\\0&1&0&0&0&-1&\beta-\chi+\delta-\phi\\0&0&1&0&0&1&\chi-\delta+\varepsilon\\0&0&0&1&0&-1&\delta-\varepsilon\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&0&0&0&0&-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi\end{bmatrix}$$

由第六列得 $0=-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi$ ，分析後發現:

(一) 若 $-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi=0$ ，則方程組有無限多解。根據四邊形與五邊形的經驗，解出一組解，可得一組內切圓半徑，所以，當解出無限多解，應可做出無限多組內切圓半徑。

(二) 若 $-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi\neq 0$ ，則方程組無解。根據四邊形與五邊形的經驗，做不出內切圓半徑，內切圓不存在。

(三) 由分析(一)了解，當 $-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi=0$ ，則 $\beta+\delta+\phi=\alpha+\chi+\varepsilon$ ，以圖形邊長表示為 $\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FA}=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$ 。也就是表示，在六邊形中，每隔一邊間隔取邊長和，可得兩組邊長和，若此兩組邊長和相等，則必可做出內切圓。

(四) 用同樣的方法再次驗證四邊形，也出現相同的規則，我們猜測只要多邊形的邊數為偶數，那麼每隔一邊間隔取邊長和，若此兩組邊長和相等，則可做出內切圓。

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&\alpha\\0&1&1&0&\beta\\0&0&1&1&\chi\\1&0&0&1&\delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&\alpha\\0&1&1&0&\beta\\0&0&1&1&\chi\\0&1&0&-1&\alpha-\delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&\alpha-\beta\\0&1&1&0&\beta\\0&0&1&1&\chi\\0&0&1&1&-\alpha+\beta+\delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&\alpha-\beta+\chi\\0&1&0&-1&-\alpha+\beta\\0&0&1&1&\chi\\0&0&0&0&-\alpha+\beta-\chi+\delta\end{bmatrix}$$

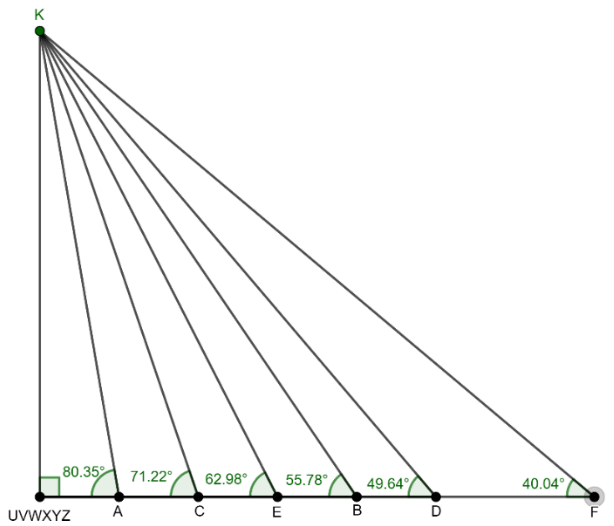
實例 : 邊長依序為 $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{CD}=7$ 、 $\overline{DE}=8$ 、 $\overline{EF}=10$ 、 $\overline{FA}=8$ ，令 $p+q=5$ 、 $q+r=6$ 、 $r+s=7$ 、 $s+t=8$ 、 $t+u=10$ 、 $u+p=8$ 。根據分析(一)、分析(三)，當 $\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FA}=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$ 時，則 p、q、r、s、t、u 有無限多解。

我們發現，當 $p=\overline{AU}=1$ 、 $q=\overline{BV}=4$ 、 $r=\overline{CW}=2$ 、 $s=\overline{DX}=5$ 、 $t=\overline{EY}=3$ 、 $u=\overline{FZ}=7$ 時，可以滿足 $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{CD}=7$ 、 $\overline{DE}=8$ 、 $\overline{EF}=10$ 、 $\overline{FA}=8$ 的六邊形邊長條件。接下來，使用圓外切五邊形找內角角度的做法，我們假設下列兩條關係式成立，利用 Geogebra 找尋滿足關係式之角度:

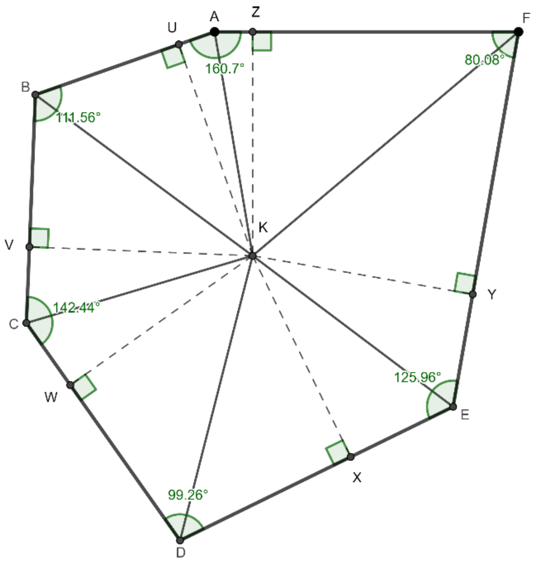
$\angle \mathrm{FAB} + \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{BCD} + \angle \mathrm{CDE} + \angle \mathrm{DEF} + \angle \mathrm{EFA} = 720^0$

$$p \cdot \tan \frac{\angle FAB}{2} = q \cdot \tan \frac{\angle ABC}{2} = r \cdot \tan \frac{\angle BCD}{2} = s \cdot \tan \frac{\angle CDE}{2} = t \cdot \tan \frac{\angle DEF}{2} = u \cdot \tan \frac{\angle EFA}{2}$$

動態推演後發現，當 $p = \overline{\mathrm{AU}} = 1$、$q = \overline{\mathrm{BV}} = 4$、$r = \overline{\mathrm{CW}} = 2$、$s = \overline{\mathrm{DX}} = 5$、$t = \overline{\mathrm{EY}} = 3$、$u = \overline{\mathrm{FZ}} = 7$時，$\angle \mathrm{KAU} = 80.35°$ ($\angle FAB = 160.7°$)、$\angle \mathrm{KBV} = 55.78°$ ($\angle ABC = 111.56°$)、$\angle \mathrm{KCW} = 71.22°$ ($\angle BCD = 142.44°$)、$\angle \mathrm{KDX} = 49.63°$ ($\angle CDE = 99.26°$)、$\angle \mathrm{KEY} = 62.98°$ ($\angle DEF = 125.96°$)、$\angle \mathrm{KFZ} = 40.04°$ ($\angle EFA = 80.08°$)，如圖 2-16，恰可滿足上述兩式關係式。藉由圖 2-16 找到的角度，反推六邊形的內角分別為 $\angle FAB = 160.7°$、$\angle ABC = 111.56°$、$\angle BCD = 142.44°$、$\angle CDE = 99.26°$、$\angle DEF = 125.96°$、$\angle EFA = 80.08°$，配合邊長 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$、$\overline{\mathrm{BC}} = 6$、$\overline{\mathrm{CD}} = 7$、$\overline{\mathrm{DE}} = 8$、$\overline{\mathrm{EF}} = 10$、$\overline{\mathrm{FA}} = 8$，利用 Geogebra 實際地將六邊形依序畫出，並劃出六個內角角平分線，確認所有的內角平分線確實交於一點 K，如圖 2-17。



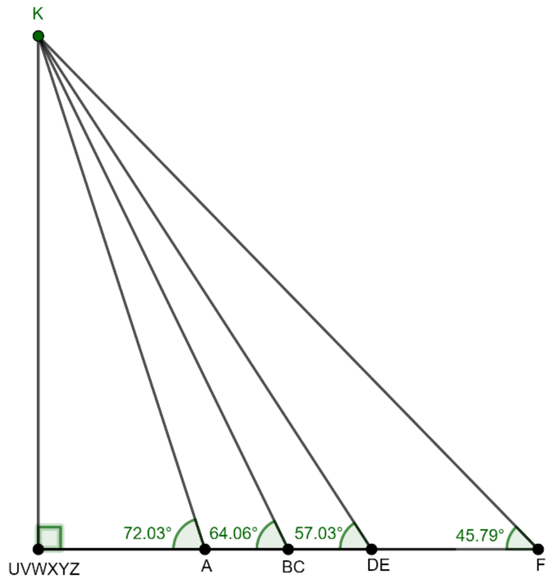
▲圖 2-16



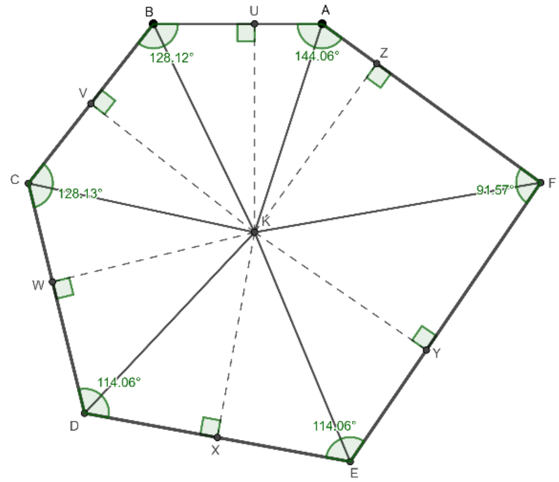
▲圖 2-17

我們找了另一組 p、q、r、s、t、u 的長度組合，使 $p = \overline{\mathrm{AU}} = 2$、$q = \overline{\mathrm{BV}} = 3$、$r = \overline{\mathrm{CW}} = 3$、$s = \overline{\mathrm{DX}} = 4$、$t = \overline{\mathrm{EY}} = 4$、$u = \overline{\mathrm{FZ}} = 6$，這個組合同樣滿足 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$、$\overline{\mathrm{BC}} = 6$、$\overline{\mathrm{CD}} = 7$、$\overline{\mathrm{DE}} = 8$、$\overline{\mathrm{EF}} = 10$、$\overline{\mathrm{FA}} = 8$的六邊形邊長條件。

我們發現，當 $p = \overline{\mathrm{AU}} = 2$、$q = \overline{\mathrm{BV}} = 3$、$r = \overline{\mathrm{CW}} = 3$、$s = \overline{\mathrm{DX}} = 4$、$t = \overline{\mathrm{EY}} = 4$、$u = \overline{\mathrm{FZ}} = 6$時，$\angle \mathrm{KAU} = 72.03°$ ($\angle FAB = 144.06°$)、$\angle \mathrm{KBV} = 64.06°$ ($\angle ABC = 128.12°$)、$\angle \mathrm{KCW} = 64.06°$ ($\angle BCD = 128.12°$)、$\angle \mathrm{KDX} = 57.03°$ ($\angle CDE = 114.06°$)、$\angle \mathrm{KEY} = 57.03°$ ($\angle DEF = 114.06°$)、$\angle \mathrm{KFZ} = 45.79°$ ($\angle EFA = 96.57°$)，如圖 2-18，恰可滿足上述兩式關係式。藉由圖 2-18 找到的角度，反推六邊形的內角分別為 $\angle FAB = 160.7°$、$\angle ABC = 111.56°$、$\angle BCD = 142.44°$、$\angle CDE = 99.26°$、$\angle DEF = 125.96°$、$\angle EFA = 80.08°$，配合邊長 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$、$\overline{\mathrm{BC}} = 6$、$\overline{\mathrm{CD}} = 7$、$\overline{\mathrm{DE}} = 8$、$\overline{\mathrm{EF}} = 10$、$\overline{\mathrm{FA}} = 8$，利用 Geogebra 實際地將六邊形依序畫出，並劃出六個內角角平分線，確認所有的內角平分線確實交於一點 K，如圖 2-19。



▲圖 2-18



▲圖 2-19

由以上步驟，我們可以確認六邊形的邊長只要可以解出 p 、q 、r 、s 、t 、u 為正實數解者，其內角平分線都可以交於一點，內切圓圓心存在。除此之外，我們也發現六邊形內角一旦固定，則內切圓半徑就會跟著固定，而能滿足條件者有無限多組解。

我們得到以下結果 ：

(一)六邊形邊長利用高斯消去法求解， p 、q 、r 、s 、t 、u 若能解出正實數解，則六條內角平分線必交於一點。

(二)在邊長長度、順序不變的狀況下，六邊形內角交於平分線交於一點者，其圖形有無限多種，內切圓隨著六邊形內角的不同而有不同的半徑長。

(三)四邊形與六邊形有相同的規律，只要間隔一邊取邊長和，若兩邊長和相同，則可做出無限多組內切圓。

【引理 3】在六邊形 ABCDEF 中，邊長 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FA}$ 分別分解為

$$\overline{AB}=p+q \text{、} \overline{BC}=q+r \text{、} \overline{CD}=r+s \text{、} \overline{DE}=s+t \text{、} \overline{EF}=t+u \text{、} \overline{FA}=u+p\text{，}$$

若能滿足 p、q、r、s、t、$u>0$ 、 $p\cdot\tan\dfrac{\angle FAB}{2}=q\cdot\tan\dfrac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\dfrac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\dfrac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\dfrac{\angle DEF}{2}=u\cdot\tan\dfrac{\angle EFA}{2}$ ，則六邊形 ABCDEF 有無限多個內切圓。

四、偶數邊形推廣

由六邊形分析(四)發現，四邊形與六邊形有相同的形成規律，我們進一步尋找八邊形是否有相同的規律。

假設有一八邊形 ABCDEFGH，邊長依序為$\overline{\mathrm{AB}}=\alpha$、$\overline{\mathrm{BC}}=\beta$、$\overline{\mathrm{CD}}=\chi$、$\overline{\mathrm{DE}}=\delta$、$\overline{\mathrm{EF}}=\varepsilon$、$\overline{\mathrm{FG}}=\phi$、$\overline{\mathrm{GH}}=\mu$、$\overline{\mathrm{HA}}=\lambda$。令 $p+q=\alpha$、$q+r=\beta$、$\mathrm{r}+\mathrm{s}=\chi$、$\mathrm{s}+\mathrm{t}=\delta$、$\mathrm{t}+\mathrm{u}=\varepsilon$、$\mathrm{u}+\mathrm{v}=\phi$、$\mathrm{v}+\mathrm{w}=\mu$、$\mathrm{w}+p=\lambda$ (α、β、χ、δ、ε、ϕ、μ、λ>0)，利用高斯消去法化簡：

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&\alpha \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&\beta \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&\chi \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&\delta \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&\varepsilon \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&\phi \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 1&0&0&0&0&0&0&1&\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&\alpha \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&\beta \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&\chi \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&\delta \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&\varepsilon \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&\phi \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 0&-1&0&0&0&0&0&1&-\alpha+\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&-1&0&0&0&0&0&\alpha-\beta \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&\beta \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&\chi \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&\delta \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&\varepsilon \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&\phi \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&-\alpha+\beta+\lambda \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&0&0&0&\alpha-\beta+\chi \\ 0&1&0&-1&0&0&0&0&\beta-\chi \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&\chi \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&\delta \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&\varepsilon \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&\phi \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 0&0&0&-1&0&0&0&1&-\alpha+\beta-\chi+\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1&0&0&0&\alpha-\beta+\chi-\delta \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&\beta-\chi+\delta \\ 0&0&1&0&-1&0&0&0&\chi-\delta \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&\delta \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&\varepsilon \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&\phi \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 0&0&0&0&1&0&0&1&-\alpha+\beta-\chi+\delta+\lambda \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&1&0&0&\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon \\ 0&1&0&0&0&-1&0&0&\beta-\chi+\delta-\varepsilon \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&\chi-\delta+\varepsilon \\ 0&0&0&1&0&-1&0&0&\delta-\varepsilon \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&\varepsilon \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&\phi \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 0&0&0&0&0&-1&0&1&-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&-1&0&\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi \\ 0&1&0&0&0&0&1&0&\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi \\ 0&0&1&0&0&0&-1&0&\chi-\delta+\varepsilon-\phi \\ 0&0&0&1&0&0&1&0&\delta-\varepsilon+\phi \\ 0&0&0&0&1&0&-1&0&\varepsilon-\phi \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&\phi \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi+\lambda \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1&\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu \\ 0&1&0&0&0&0&0&-1&\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&\chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu \\ 0&0&0&1&0&0&0&-1&\delta-\varepsilon+\phi-\mu \\ 0&0&0&0&1&0&0&1&\varepsilon-\phi+\mu \\ 0&0&0&0&0&1&0&-1&\phi-\mu \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&\mu \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu+\lambda \end{bmatrix}$$

經高斯消去法驗證，我們發現若$-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu+\lambda=0$，則方程組有無限多組

解。進一步推論得到：

$$\alpha+\chi+\varepsilon+\mu=\beta+\delta+\varepsilon+\lambda \to \overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{HA}$$

比對八邊形、六邊形、四邊形等化簡結果，我們發現這些偶數邊多邊形都有相同的形成規律：每隔一邊各取一組邊長和，共取兩組，當兩組邊長和相等，且分組解 p 、q 、r 、s 、t 、u 、v 、w......為正實數時，多邊形相對應的內切圓有無限多組。

【引理 4】在八邊形 ABCDEFGH 中，邊長 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FG}$ 、$\overline{GH}$、$\overline{HA}$ 分別分解為 $\overline{AB}=p+q$ 、 $\overline{BC}=q+r$ 、 $\overline{CD}=r+s$ 、 $\overline{DE}=s+t$ 、 $\overline{EF}=t+u$ 、 $\overline{FG}=u+v$ 、 $\overline{GH}=v+w$ 、 $\overline{HA}=w+p$ ，若能滿足 p、q、r、s、t、u、v、w >0、 $p\cdot\tan\frac{\angle HAB}{2}=q\cdot\tan\frac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\frac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\frac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\frac{\angle DEF}{2}=u\cdot\tan\frac{\angle EFG}{2}=v\cdot\tan\frac{\angle FGH}{2}=w\cdot\tan\frac{\angle GHA}{2}$ ，則八邊形 ABCDEFGH 有無限多個內切圓。

基於上述，我們認為偶數邊多邊形應該有相同的形成規律，以下嘗試以數學歸納法來做驗證:

1. 當 n = 4 ，根據第 9 頁分析 4 的矩陣，可得：

聯立方程組 $\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=a_3 \\ x_1+x_4=a_4 \end{cases}$ 無限多解 $\Leftrightarrow$ $a_1+a_3=a_2+a_4$

2. 假設 n = 2k 時，下列敘述成立:

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ \vdots \\ x_{2k-1}+x_{2k}=a_{2k-1} \\ x_{2k}+x_1=a_{2k} \end{cases} \text{無限多解} \Leftrightarrow a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-3}+a_{2k-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k-2}+a_{2k}$$

3. 當 n = 2(k+1) 時，考慮聯立方程組：

$$\begin{cases} y_1+y_2=b_1 \\ y_2+y_3=b_2 \\ \vdots \\ y_{2k-2}+y_{2k-1}=b_{2k-2} \\ y_{2k-1}+y_{2k}=b_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=b_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=b_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_1=b_{2k+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=b_1 \\ y_2+y_3=b_2 \\ \vdots \\ y_{2k-2}+y_{2k-1}=b_{2k-2} \\ y_{2k-1}+(y_{2k}+y_{2k+1}+y_{2k+2})=b_{2k-1}+b_{2k+1} \\ (y_{2k}+y_{2k+1}+y_{2k+2})+y_1=b_{2k}+b_{2k+2} \end{cases}$$

根據 2，可得：

$$\begin{cases} y_1+y_2=b_1 \\ y_2+y_3=b_2 \\ \vdots \\ y_{2k-2}+y_{2k-1}=b_{2k-2} \\ y_{2k-1}+y_{2k}=b_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=b_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=b_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_1=b_{2k+2} \end{cases} \text{無限多解} \Leftrightarrow \quad b_1+b_3+\cdots+b_{2k-3}+(b_{2k-1}+b_{2k+1})=b_2+b_4+\cdots+b_{2k-2}+(b_{2k}+b_{2k+2})$$

由數學歸納法推論可知只要多邊形為偶數邊，利用高斯消去法判斷邊長分組解皆為正實數，則多邊形隔邊和必相等且可有無限多個內切圓。

【定理 1】在偶數邊形中，利用高斯消去法解邊長分組解，若能解出正實數解，則間隔一邊取邊長和，兩組邊長和必相等，且多邊形在不同內角的組合下有無限多個內切圓。

五、奇數邊形推廣

由偶數邊多邊形推廣發現，偶數邊形有相同的形成規律，我們進一步檢驗奇數邊形是否也有相同的規律。

假設有一七邊形 ABCDEFG，邊長依序為 $\overline{\mathrm{AB}}=\alpha$、$\overline{\mathrm{BC}}=\beta$、$\overline{\mathrm{CD}}=\chi$、$\overline{\mathrm{DE}}=\delta$、$\overline{\mathrm{EF}}=\varepsilon$、$\overline{\mathrm{FG}}=\phi$、$\overline{\mathrm{GA}}=\mu$。令 $p+q=\alpha$、$q+r=\beta$、$\mathrm{r}+\mathrm{s}=\chi$、$\mathrm{s}+\mathrm{t}=\delta$、$\mathrm{t}+\mathrm{u}=\varepsilon$、$\mathrm{u}+\mathrm{v}=\phi$、$v+p=\mu$ （α、β、χ、δ、ε、ϕ、μ>0)，利用高斯消去法化簡：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mu \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha+\mu \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha+\beta+\mu \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta+\chi \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \beta-\chi \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -\alpha+\beta-\chi+\mu \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \alpha-\beta+\chi-\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta-\chi+\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \chi-\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\alpha+\beta-\chi+\delta+\mu \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \beta-\chi+\delta-\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \chi-\delta+\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \delta-\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\alpha+\beta-\chi-\varepsilon+\mu \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \chi-\delta+\varepsilon-\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \delta-\varepsilon+\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \varepsilon-\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi+\mu \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \chi-\delta+\varepsilon-\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \delta-\varepsilon+\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \varepsilon-\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi+\mu}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha+\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon-\phi+\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon+\phi-\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi+\mu}{2} \end{bmatrix}$$

與五邊形的研究結果比對，我們發現七邊形、五邊形等奇數邊形形成規律也完全相同，只要 p、q、r、s、t、u、v 為正實數，則七邊形就可做出內切圓，且形狀只有一組，依偶數邊形的經驗，我們認為如此的規律亦適用所有的奇數邊形。

【引理 5】在七邊形 ABCDEFG 中，邊長 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GA}$ 分別分解為 $\overline{AB}=p+q$、$\overline{BC}=q+r$、$\overline{CD}=r+s$、$\overline{DE}=s+t$、$\overline{EF}=t+u$、$\overline{FG}=u+v$、$\overline{GA}=v+p$，若能滿足 p、q、r、s、t、u、v>0、 $p\cdot\tan\frac{\angle GAB}{2}=q\cdot\tan\frac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\frac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\frac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\frac{\angle DEF}{2}=u\cdot\tan\frac{\angle EFG}{2}=v\cdot\tan\frac{\angle FGA}{2}$，則七邊形 ABCDEFG 有一個內切圓。

以下嘗試以數學歸納法來做驗證：

1. 令 n = 5 ，根據第 6 頁的矩陣，可得：

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=a_3 \\ x_4+x_5=a_4 \\ x_5+x_1=a_5 \end{cases} \text{恰一解} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1=b_1 \\ x_2=b_2 \\ x_3=b_3 \\ x_4=b_4 \\ x_5=b_5 \end{matrix}$$

其中 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5 皆和 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 有關。

2. 假設 n = 2k+1 時，下列敘述成立：

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ \vdots \\ x_{2k-1}+x_{2k}=a_{2k-1} \\ x_{2k}+x_{2k+1}=a_{2k} \\ x_{2k+1}+x_1=a_{2k+1} \end{cases} \text{恰一解} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=b_1 \\ x_2=b_2 \\ \vdots \\ x_{2k-1}=b_{2k-1} \\ x_{2k}=b_{2k} \\ x_{2k+1}=b_{2k+1} \end{cases}$$

3. 當 n = 2(k+1)+1 時 ，考慮聯立方程組 ：

$$\begin{cases} y_1+y_2=c_1 \\ y_2+y_3=c_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}+y_{2k}=c_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=c_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=c_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_{2k+3}=c_{2k+2} \\ y_{2k+3}+y_1=c_{2k+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=c_1 \\ y_2+y_3=c_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}+y_{2k}=c_{2k-1} \\ y_{2k}+(y_{2k+1}+y_{2k+2}+y_{2k+3})=c_{2k}+c_{2k+2} \\ (y_{2k+1}+y_{2k+2}+y_{2k+3})+y_1=c_{2k+1}+c_{2k+3} \end{cases}$$

根據 2，可得 ：

$$\begin{cases} y_1+y_2=c_1 \\ y_2+y_3=c_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}+y_{2k}=c_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=c_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=c_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_{2k+3}=c_{2k+2} \\ y_{2k+3}+y_1=c_{2k+3} \end{cases} \text{恰一解} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=d_1 \\ y_2=d_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}=d_{2k-1} \\ y_{2k}=d_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}+y_{2k+3}=d_{2k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=d_1 \\ y_2=d_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}=d_{2k-1} \\ y_{2k}=d_{2k} \\ y_{2k+1}=d_{2k+1}-c_{2k+2} \\ y_{2k+2}=c_{2k+1}+c_{2k+2}-d_{2k+1} \\ y_{2k+3}=d_{2k+1}-c_{2k+1} \end{cases}$$

由數學歸納法推論可知只要多邊形為奇數邊，利用高斯消去法解邊長分組解，若能解出正實數解，則多邊形在特定的角度條件下有一個的內切圓。

【定理 2】在奇數邊形中，利用高斯消去法解邊長分組解，若能解出正實數解，則多邊形在特定的角度條件下有一個內切圓。

陸、結論

藉由探討圓外切四邊形逆定理是否成立之機會，我們除了找到其逆定理確實存在外，我們經過一步步假設與檢驗，更發現了多邊形如何只利用邊長條件判別其是否可能為圓外切多邊形? 如果是圓外切多邊形，那又要如何找到其內切圓半徑長與相對應多邊形的內角關係? 茲將結論說明如下:

一、圓外切多邊形的判別 ：

(一) 偶數邊多邊形 ：在多邊形畫得出的狀況下，利用高斯消去法找各邊分解組合解，若能找出正實數解，則必為圓外切多邊形，此時，隔邊和必相等。反之，隔邊和不相等，分組解無解，不為圓外切多邊形。

(二) 奇數邊多邊形 ：在多邊形畫得出的狀況下，利用高斯消去法找各邊分解組合解，若能找出正實數解，則必為圓外切多邊形。反之，找出的解出現非正實數，則不為圓外切多邊形。

二、內切圓半徑長與多邊形的內角關係：

內切圓圓心到各邊距離相等，利用這個性質，我們合併了股邊(內切圓半徑)相等的直角△，配合多邊形內角總和找出內切圓半徑與各內角的角度，其中偶數邊與奇數邊多邊形做出來的規律稍有不同。

(一) 偶數邊多邊形：如經邊長關係判定為圓外切多邊形，則此多邊形將產生無限多個不同半徑的內切圓。在相同的邊長條件下(長度、順序)，配合多邊形的內角的大小不同所對應到內切圓半徑長短亦不相同，也就是說相同邊長條件下，多邊形可經由內角的改變形成不同形狀的多邊形，進而產生不同大小的內切圓。

以六邊形 ABCDEF 為例，若能找一組 p 、q 、r 、s 、t 、u >0，使得 $p+q=\overline{\mathrm{AB}}$ 、$q+r=\overline{\mathrm{BC}}$ 、$r+s=\overline{\mathrm{CD}}$ 、$s+t=\overline{\mathrm{DE}}$ 、$t+u=\overline{\mathrm{EF}}$ 、$u+p=\overline{\mathrm{FA}}$ 。在滿足

$\angle\mathrm{FAB}+\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{CDE}+\angle\mathrm{DEF}+\angle\mathrm{EFA}=720^0$ 、

$$p\cdot\tan\frac{\angle \mathrm{F}AB}{2}=q\cdot\tan\frac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\frac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\frac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\frac{\angle DEF}{2}=u\cdot\tan\frac{\angle EFA}{2}$$

兩個條件下，此六邊形必有內切圓，且內切圓半徑為 $p\cdot\tan\frac{\angle \mathrm{F}AB}{2}$ 。

(二) 奇數邊多邊形：如邊長關係經判定為圓外切多邊形，則此多邊形將產生唯一一個內切圓，在相同邊長的條件下(長度、順序)，多邊形只有一組內角條件能形成內切圓。

以五邊形 ABCDE 為例，若能找一組 p 、q 、r 、s 、t >0，使得 $p+q=\overline{\mathrm{AB}}$ 、$q+r=\overline{\mathrm{BC}}$ 、$r+s=\overline{\mathrm{CD}}$ 、$s+t=\overline{\mathrm{DE}}$ 、$t+p=\overline{\mathrm{EF}}$ 。在滿足

$\angle\mathrm{EAB}+\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{CDE}+\angle\mathrm{DEA}=540^0$ 、

$$p\cdot\tan\frac{\angle \mathrm{E}AB}{2}=q\cdot\tan\frac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\frac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\frac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\frac{\angle DE\mathrm{A}}{2}$$

兩個條件下，此五邊形必有內切圓，且內切圓半徑為 $p\cdot\tan\frac{\angle \mathrm{E}AB}{2}$ 。

柒、參考資料及其他

1. 笹部貞市郎原著(1995)。幾何學辭典。臺北市:九章出版社。
2. 陸思明編著(2004)。一次方程組的解法與矩陣的列運算。臺北市:建弘出版社。
3. 國中數學第五冊。新北市:康軒出版社。
4. 宋傑瑞、陳奕勛，當圓外切多邊形遇上 Brianchon 定理-Brianchon 定理在多邊形上的探討，中華民國第 58 屆中小學科展國中組數學科，2018 年 7 月。

【評語】030426

本作品所要探討的是，在多邊形各邊的長度已知的前提下，多邊形的內切圓是否一定存在這樣的問題。作者們針對這個問題，給出了一些判斷的條件。作品中所給出的一些想法十分別出心裁，值得鼓勵。在討論這樣的內切圓如果存在時，邊長應該滿足何種條件這個部分，作者們是透過聯立方程式的解的角度來看，但是如果考慮的是偶數邊多邊形，這樣的討論方式好像略嫌複雜了些，而對於奇數邊多邊形，給出判斷的條件（如果所有的解都大於0）又好像不需要透過解來得到。後半部討論判斷的條件時，只給出了：『如果內切圓存在，那麼邊角的某些條件必然要成立』這樣的結論，對於滿足這樣的邊角關係，就保證內切圓必然存在，是透過某些特例可實際作圖得出來說明。這當然和原本作者們希望達成的目標有著出入。作者們確實給出了一些可分析的條件。如果能把解方程式的這些與原本問題的關連性不大的部分放在一邊，把精力集中於說明滿足給定的邊角關係的多邊形是不是一定存在（或者，侷限於四邊形、五邊形做討論）這個問題上，應該會更好些。有點可惜了。

作品簡報

國中組　數學科

以邊追圓

多邊形內切圓
形成規律之探討

一、研究動機

1. 課本教材逆敘述之疑惑

(一)圓外切四邊形性質逆敘述?

(二)勾股定理、樞紐定理逆敘述之思考……

2. 歷屆作品成果之不足

(一)滿足條件繁複。

(二)結果單一，事前就了解。

二、研究目的及研究問題

1. 探討多邊形**邊長**形成**圓外切多邊形**的充要關係。

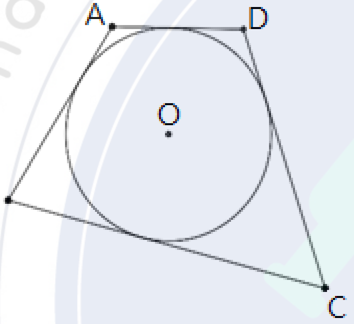
2. 探討多邊形**邊長**、內切圓**半徑**與多邊形**內角**的形成關係。

三、研究結果與討論

1. 圓外切四邊形

（一）圓外切四邊形**逆敘述成立**：

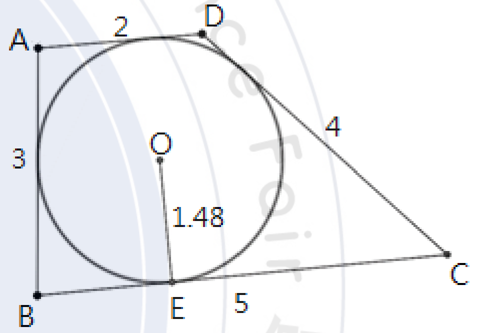
$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC} \Leftrightarrow$ ABCD為圓外切四邊形



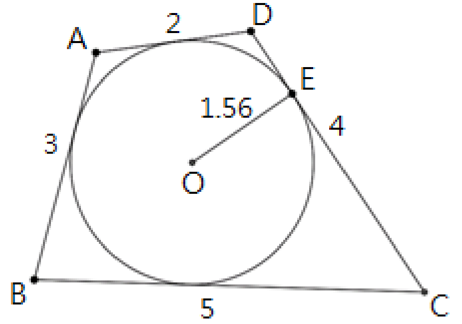
▲圖1

（二）圓外切四邊形動態模擬**發現**：

邊長條件一樣，內切圓半徑卻不一樣。



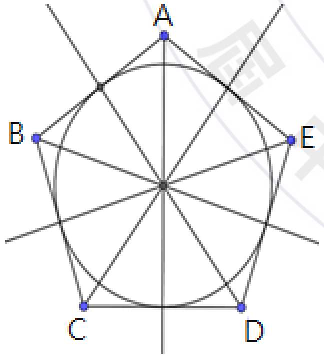
▲圖2



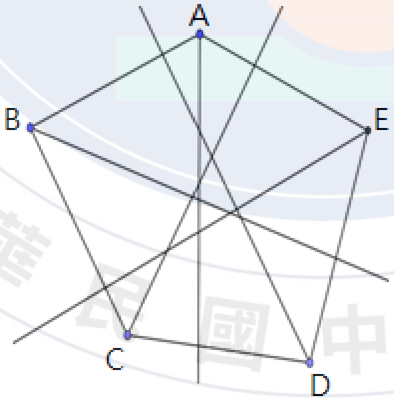
▲圖3

2. 五邊形推廣

（一）四邊形對邊和逆敘述**無法適用**五邊形



▲圖4



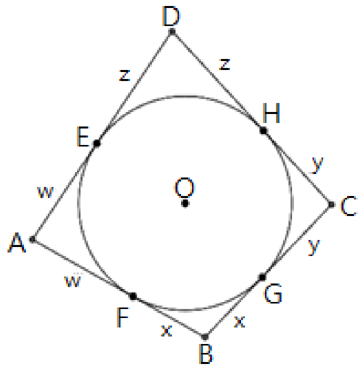
▲圖5

（二）尋找可能方法：**邊長分組解**

(1) $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

(2) $\begin{cases} w+x=\overline{AB} \\ x+y=\overline{BC} \\ y+z=\overline{CD} \\ z+w=\overline{DA} \end{cases}$

(3) $w、x、y、z>0 \Leftrightarrow \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}$



▲圖6

3. 高斯消去法-解四邊形邊長分組解

令 $\begin{cases} \overline{AB} = w + x = k - m \\ \overline{BC} = x + y = k - n \\ \overline{CD} = y + z = k + m \\ \overline{DA} = z + w = k + n \end{cases} k \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & k-m \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k-n \\ 0 & 0 & 1 & 1 & k+m \\ 1 & 0 & 0 & 1 & k+n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & k-m \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k-n \\ 0 & 0 & 1 & 1 & k+m \\ 0 & -1 & 0 & 1 & m+n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -m+n \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k-n \\ 0 & 0 & 1 & 1 & k+m \\ 0 & 0 & 1 & 1 & k+m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & k+n \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -m-n \\ 0 & 0 & 1 & 1 & k+m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

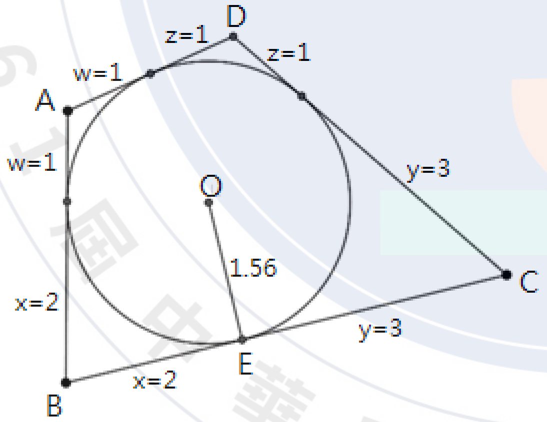
$$\begin{cases} w = -t + k + n \\ x = t - m - n \\ y = -t + k + m \\ z = t \end{cases} t \in R+$$

(一)使 $z = t\,(t \in R+)$，且讓 $w、x、y > 0$ ，則 $w、x、y、z$ 有無限多組正實數解。

(二)猜測:一組分組解可做一組內切圓，無限多組分組解，應可做出無限多組內切圓。

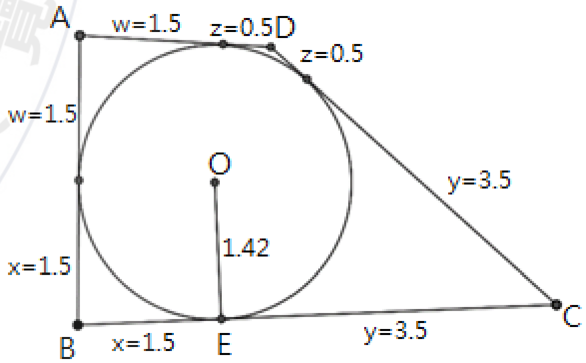
4. 四邊形邊長分組解圖形檢驗

邊長 $\overline{AB} = 3$，$\overline{BC} = 5$，$\overline{CD} = 4$，$\overline{DA} = 2$ 分組解 $w = 1$，$x = 2$，$y = 3$，$z = 1$



▲圖7

邊長 $\overline{AB} = 3$，$\overline{BC} = 5$，$\overline{CD} = 4$，$\overline{DA} = 2$ 分組解 $w = 1.5$，$x = 1.5$，$y = 3.5$，$z = 0.5$



▲圖8

(一)發現:邊長條件固定下，不同的分組解確實可做出不同半徑長的內切圓，符合猜測。

5. 高斯消去法-五邊形推廣

$$
\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&\alpha\\ 0&1&1&0&0&\beta\\ 0&0&1&1&0&\chi\\ 0&0&0&1&1&\delta\\ 1&0&0&0&1&\varepsilon \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&\alpha\\ 0&1&1&0&0&\beta\\ 0&0&1&1&0&\chi\\ 0&0&0&1&1&\delta\\ 0&-1&0&0&1&-\alpha+\varepsilon \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1&0&-1&0&0&\alpha-\beta\\ 0&1&1&0&0&\beta\\ 0&0&1&1&0&\chi\\ 0&0&0&1&1&\delta\\ 0&0&1&0&1&-\alpha+\beta+\varepsilon \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&\alpha-\beta+\chi\\ 0&1&0&-1&0&\beta-\chi\\ 0&0&1&1&0&\chi\\ 0&0&0&1&1&\delta\\ 0&0&0&-1&1&-\alpha+\beta-\chi+\varepsilon \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1&\alpha-\beta+\chi-\delta\\ 0&1&0&0&1&\beta-\chi+\delta\\ 0&0&1&0&-1&\chi-\delta\\ 0&0&0&1&1&\delta\\ 0&0&0&0&2&-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1&\alpha-\beta+\chi-\delta\\ 0&1&0&0&1&\beta-\chi+\delta\\ 0&0&1&0&-1&\chi-\delta\\ 0&0&0&1&1&\delta\\ 0&0&0&0&1&\frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\to
\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&\frac{\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon}{2}\\ 0&1&0&0&0&\frac{\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon}{2}\\ 0&0&1&0&0&\frac{-\alpha+\beta+\chi-\delta+\varepsilon}{2}\\ 0&0&0&1&0&\frac{\alpha-\beta+\chi+\delta-\varepsilon}{2}\\ 0&0&0&0&1&\frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon}{2} \end{bmatrix}
$$

(一)分組解必有實數解。

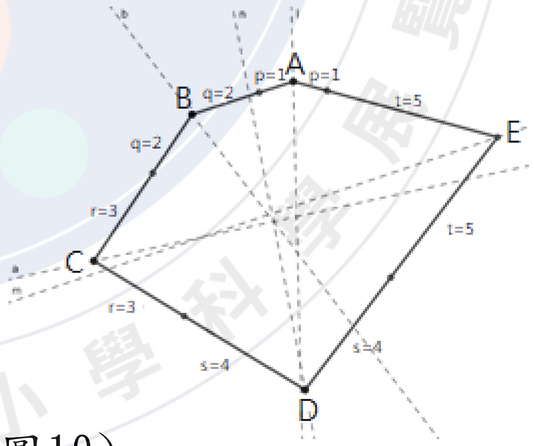
(二)猜測:分組解若為正實數解，則五邊形應有內切圓。

6. 五邊形邊長分組解圖形檢驗

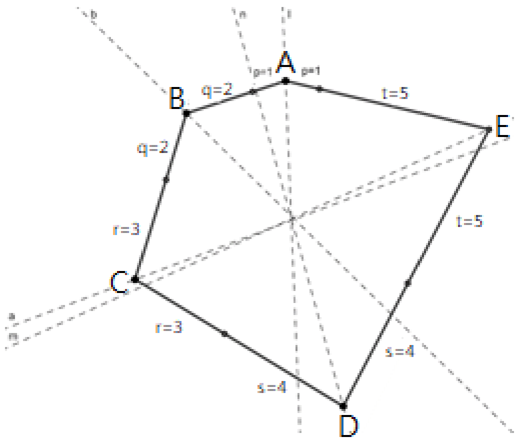
$$
\text{邊長}
\begin{matrix} \overline{AB}=3\\ \overline{BC}=5\\ \overline{CD}=7\\ \overline{DE}=9\\ \overline{EA}=6 \end{matrix}
\text{分組解}
\begin{cases} p=1\\ q=2\\ r=3\\ s=4\\ t=5 \end{cases}
$$

(一)角平分線沒有交一點。（圖9）

(二)改變內角，角平分線的交點逐漸接近。（圖10）



▲圖9



▲圖10

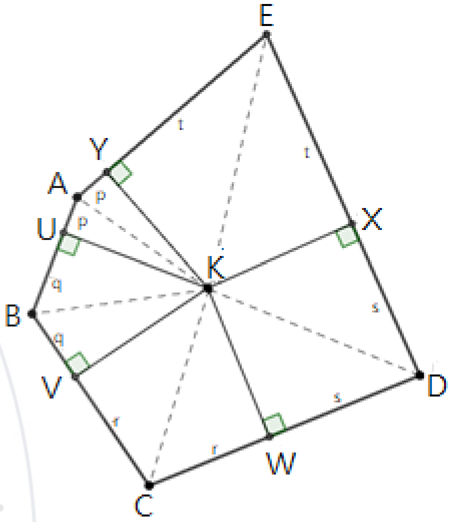
7.五邊形動態檢驗

(一)根據觀察，**假設**角平分線交一點K。（圖11）

(二)如角平分線確實交一點，則**邊角關係**必須滿足下列方程式。

$$\angle EAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEA = 540^0$$

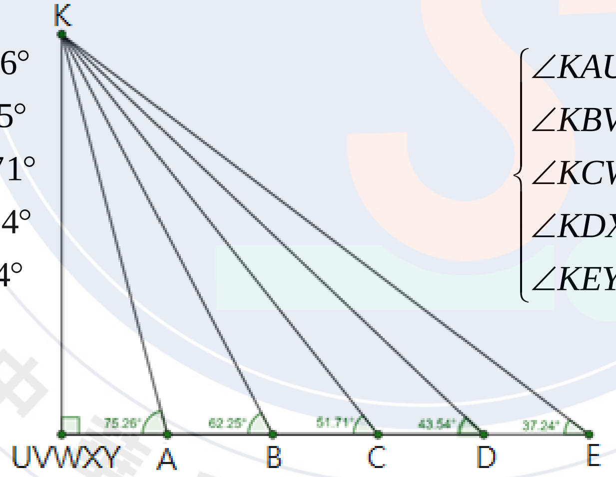
$$p \cdot \tan\frac{\angle EAB}{2} = q \cdot \tan\frac{\angle ABC}{2} = r \cdot \tan\frac{\angle BCD}{2} = s \cdot \tan\frac{\angle CDE}{2} = t \cdot \tan\frac{\angle DEA}{2}$$



▲圖11

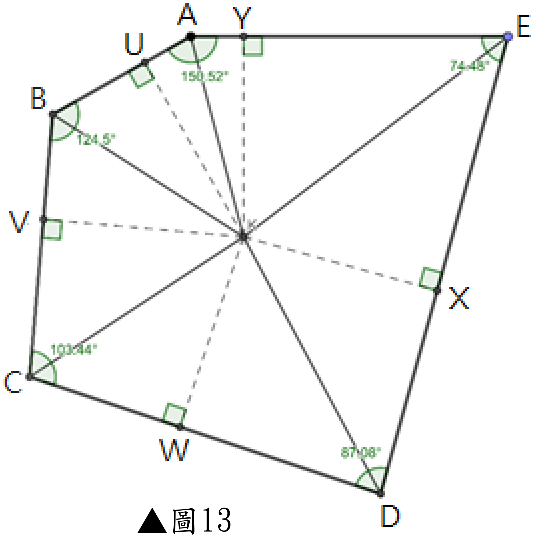
(三)利用Geogebra模擬，動態檢驗符合方程式之角度。（圖12）

$$\begin{aligned} p &= \overline{AU} = 1 \\ q &= \overline{BV} = 2 \\ r &= \overline{CW} = 3 \\ s &= \overline{DX} = 4 \\ t &= \overline{EY} = 5 \end{aligned} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \angle KAU &= 75.26^\circ \\ \angle KBV &= 62.25^\circ \\ \angle KCW &= 51.71^\circ \\ \angle KDX &= 43.54^\circ \\ \angle KEY &= 37.24^\circ \end{aligned} \right.$$



▲圖12

$$\left\{ \begin{aligned} \angle KAU &= 75.26^\circ \\ \angle KBV &= 62.25^\circ \\ \angle KCW &= 51.71^\circ \\ \angle KDX &= 43.54^\circ \\ \angle KEY &= 37.24^\circ \end{aligned} \right. \rightarrow \begin{aligned} \angle EAB &= 150.52^\circ \\ \angle ABC &= 124.5^\circ \\ \angle BCD &= 103.42^\circ \\ \angle CDE &= 87.08^\circ \\ \angle DEA &= 74.48^\circ \end{aligned}$$



▲圖13

(四)依動態檢驗所得角度，配合邊長條件，畫出的五邊形角平分線**交一點**。（圖13）

8. 高斯消去法-六邊形推廣

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1&1&0&0&0&0&\alpha\\0&1&1&0&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\1&0&0&0&0&1&\phi\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccccc|c}1&1&0&0&0&0&\alpha\\0&1&1&0&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&1&0&0&0&-1&\alpha-\phi\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&-1&0&0&0&\alpha-\beta\\0&1&1&0&0&0&\beta\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&1&0&0&1&-\alpha+\beta+\phi\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&\alpha-\beta+\chi\\0&1&0&-1&0&0&\beta-\chi\\0&0&1&1&0&0&\chi\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&0&1&0&-1&\alpha-\beta+\chi-\phi\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&-1&0&\alpha-\beta+\chi-\delta\\0&1&0&0&1&0&-\alpha+\beta+\delta\\0&0&1&0&-1&0&\chi-\delta\\0&0&0&1&1&0&\delta\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&0&0&1&1&-\alpha+\beta-\chi+\delta+\phi\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&1&\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon\\0&1&0&0&0&-1&\beta-\chi+\delta-\phi\\0&0&1&0&0&1&\chi-\delta+\varepsilon\\0&0&0&1&0&-1&\delta-\varepsilon\\0&0&0&0&1&1&\varepsilon\\0&0&0&0&0&0&-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi\end{array}\right]$$

(一)若 $-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi=0$，則方程組有**無限多解**。 一組解，一個內切圓，無限多解，無限多個內切圓。

(二)若 $-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi=0$，則 $\beta+\delta+\phi=\alpha+\chi+\varepsilon \rightarrow \overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FA}=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$。

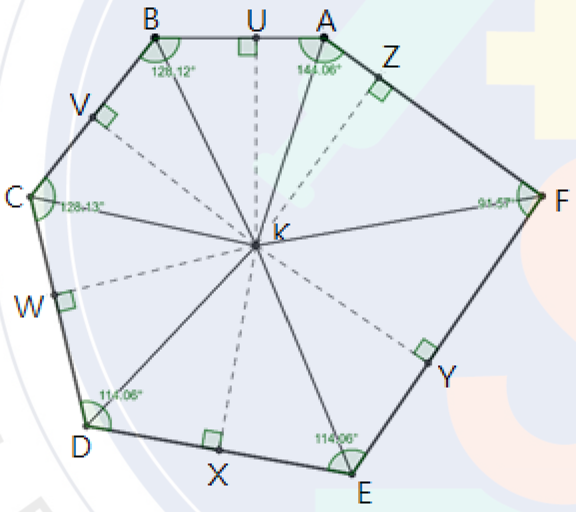
(三)每隔一邊取邊長和，可得兩組邊長和，若此兩組**邊長和相等**，在分組解皆為正數下，應可做出內切圓。

9. 六邊形動態檢驗

$$\angle FAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDE+\angle DEF+\angle EFA=720^0$$

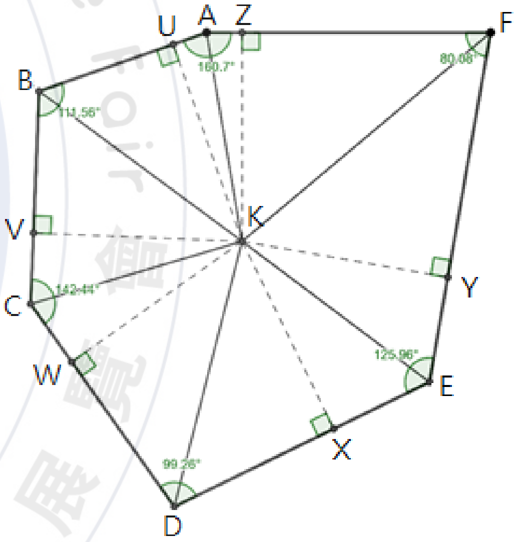
$$p\cdot\tan\frac{\angle FAB}{2}=q\cdot\tan\frac{\angle ABC}{2}=r\cdot\tan\frac{\angle BCD}{2}=s\cdot\tan\frac{\angle CDE}{2}=t\cdot\tan\frac{\angle DEF}{2}=u\cdot\tan\frac{\angle EFA}{2}$$

$$\begin{array}{l}\overline{AB}=5\\ \overline{BC}=6\\ \overline{CD}=7\\ \overline{DE}=8\\ \overline{EF}=10\\ \overline{FA}=8\end{array}\rightarrow\begin{cases}p=2\\ q=3\\ r=3\\ s=4\\ t=4\\ u=6\end{cases}$$



▲圖14

$$\begin{array}{l}\overline{AB}=5\\ \overline{BC}=6\\ \overline{CD}=7\\ \overline{DE}=8\\ \overline{EF}=10\\ \overline{FA}=8\end{array}\rightarrow\begin{cases}p=1\\ q=4\\ r=2\\ s=5\\ t=3\\ u=7\end{cases}$$



▲圖15

（一）在分組解皆為正數、滿足邊角方程式的狀況下，經由動態檢驗找出的角度畫出的六邊形角平分線**交一點**，**動態檢驗**結果與**五邊形一致**。

（二）同一組邊長能做出**不同大小**的內切圓，分組解推論過程與**四邊形有一致性**。

10.偶數邊形推廣

(一)四邊形、六邊形、八邊形高斯消去法結果比較

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha-\beta+\chi \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\alpha+\beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha+\beta-\chi+\delta \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \beta-\chi+\delta-\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \chi-\delta+\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \delta-\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \delta-\varepsilon+\phi-\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon-\phi+\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \phi-\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu+\lambda \end{array}\right]$$

發現:分組解結果有明顯的**規律性**。

猜測:應可**擴展**至所有偶數邊形。

(二)數學歸納法驗證

1. 當 n = 4 ,根據第9頁分析4的矩陣,可得:

聯立方程組 $\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=a_3 \\ x_1+x_4=a_4 \end{cases}$ 無限多解 $\Leftrightarrow a_1+a_3=a_2+a_4$

2. 假設 n = 2k 時,下列敘述成立:

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ \vdots \\ x_{2k-1}+x_{2k}=a_{2k-1} \\ x_{2k}+x_1=a_{2k} \end{cases}$$ 無限多解 $\Leftrightarrow a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-3}+a_{2k-1}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k-2}+a_{2k}$

3. 當 n = 2(k+1) 時,考慮聯立方程組:

$$\begin{cases} y_1+y_2=b_1 \\ y_2+y_3=b_2 \\ \vdots \\ y_{2k-2}+y_{2k-1}=b_{2k-2} \\ y_{2k-1}+y_{2k}=b_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=b_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=b_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_1=b_{2k+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=b_1 \\ y_2+y_3=b_2 \\ \vdots \\ y_{2k-2}+y_{2k-1}=b_{2k-2} \\ y_{2k-1}+(y_{2k}+y_{2k+1}+y_{2k+2})=b_{2k-1}+b_{2k+1} \\ (y_{2k}+y_{2k+1}+y_{2k+2})+y_1=b_{2k}+b_{2k+2} \end{cases}$$

根據2,可得:

$$\begin{cases} y_1+y_2=b_1 \\ y_2+y_3=b_2 \\ \vdots \\ y_{2k-2}+y_{2k-1}=b_{2k-2} \\ y_{2k-1}+y_{2k}=b_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=b_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=b_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_1=b_{2k+2} \end{cases}$$

無限多解 $\Leftrightarrow$

$$b_1+b_3+\cdots+b_{2k-3}+(b_{2k-1}+b_{2k+1})=b_2+b_4+\cdots+b_{2k-2}+(b_{2k}+b_{2k+2})$$

驗證:偶數邊形確實有**一致的規律**。

11. 奇數邊形推廣

(一)五邊形、七邊形高斯消去法結果比較

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-\alpha+\beta+\chi-\delta+\varepsilon}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi+\delta-\varepsilon}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha+\beta+\chi-\delta+\varepsilon-\phi+\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi+\delta-\varepsilon+\phi-\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta+\varepsilon-\phi+\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha-\beta+\chi-\delta+\varepsilon+\phi-\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-\alpha+\beta-\chi+\delta-\varepsilon+\phi+\mu}{2} \end{array}\right]$$

發現:分組解結果一樣有明顯的**規律性**。

猜測:應可**擴展**至所有奇數邊形。

(二)數學歸納法驗證

1. 令n = 5 ，根據第6頁的矩陣，可得 :

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=a_3 \\ x_4+x_5=a_4 \\ x_5+x_1=a_5 \end{cases} \overset{\text{恰一解}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} x_1=b_1 \\ x_2=b_2 \\ x_3=b_3 \\ x_4=b_4 \\ x_5=b_5 \end{array}$$

其中 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5 皆和 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 有關。

2. 假設 n = 2k+1 時，下列敘述成

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ \vdots \\ x_{2k-1}+x_{2k}=a_{2k-1} \\ x_{2k}+x_{2k+1}=a_{2k} \\ x_{2k+1}+x_1=a_{2k+1} \end{cases} \overset{\text{恰一解}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1=b_1 \\ x_2=b_2 \\ \vdots \\ x_{2k-1}=b_{2k-1} \\ x_{2k}=b_{2k} \\ x_{2k+1}=b_{2k+1} \end{cases}$$

3. 當 n = 2(k+1)+1時 ，考慮聯立方程組 :

$$\begin{cases} y_1+y_2=c_1 \\ y_2+y_3=c_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}+y_{2k}=c_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=c_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=c_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_{2k+3}=c_{2k+2} \\ y_{2k+3}+y_1=c_{2k+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=c_1 \\ y_2+y_3=c_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}+y_{2k}=c_{2k-1} \\ y_{2k}+(y_{2k+1}+y_{2k+2}+y_{2k+3})=c_{2k}+c_{2k+2} \\ (y_{2k+1}+y_{2k+2}+y_{2k+3})+y_1=c_{2k+1}+c_{2k+3} \end{cases}$$

根據2，可得 :

$$\begin{cases} y_1+y_2=c_1 \\ y_2+y_3=c_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}+y_{2k}=c_{2k-1} \\ y_{2k}+y_{2k+1}=c_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}=c_{2k+1} \\ y_{2k+2}+y_{2k+3}=c_{2k+2} \\ y_{2k+3}+y_1=c_{2k+3} \end{cases} \overset{\text{恰一解}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y_1=d_1 \\ y_2=d_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}=d_{2k-1} \\ y_{2k}=d_{2k} \\ y_{2k+1}+y_{2k+2}+y_{2k+3}=d_{2k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=d_1 \\ y_2=d_2 \\ \vdots \\ y_{2k-1}=d_{2k-1} \\ y_{2k}=d_{2k} \\ y_{2k+1}=d_{2k+1}-c_{2k+2} \\ y_{2k+2}=c_{2k+1}+c_{2k+2}-d_{2k+1} \\ y_{2k+3}=d_{2k+1}-c_{2k+1} \end{cases}$$

驗證:奇數邊形確實有**一致的規律**。

四、結論

1. 圓外切多邊形的判別

（一）不論奇、偶數邊，方法一致：利用高斯消去法找各邊**分解組合解**，若能找出**正實數解**，則在特殊的**角度配合**下，必為**圓外切多邊形**。

（二）偶數邊**快速判別**:隔邊和不相等，必沒有內切圓。

2. 內切圓半徑長與多邊形的內角關係

（一)在各邊**分解組合解**皆為正實數下，利用**內角和固定**、**內切圓半徑相等**兩條件，可直接**鎖住**多邊形各**內角**角度。

【以五邊形為例】

$$\angle EAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEA = 540^0$$

$$p \cdot \tan\frac{\angle EAB}{2} = q \cdot \tan\frac{\angle ABC}{2} = r \cdot \tan\frac{\angle BCD}{2} = s \cdot \tan\frac{\angle CDE}{2} = t \cdot \tan\frac{\angle DEA}{2}$$

↔ 內切圓半徑為 $p \cdot \tan\frac{\angle EAB}{2}$,

（二)多邊形內角角度確定，其內切圓半徑也隨之確定。

（三)在相同的邊長條件下，**奇數邊形**只能做出**一組**內切圓，**偶數邊形**能做出**無限多組**內切圓。