中華民國第61屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030425

邊連邊，心連心，殊途或同歸—翻滾正四面體組成之積木探討

學校名稱：彰化縣立鹿港國民中學

作者：	指導老師：
國二 朱芷妍	林俊毅
國二 蘇塏鈞	
國二 陳思萍	

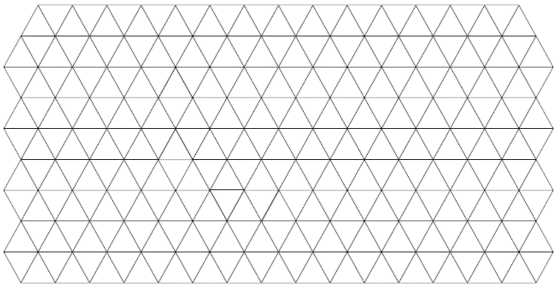
關鍵詞：正四面體、漢米爾頓圖、積木滾動的軌跡

摘要

本研究是以正四面體為單位，探討由 1~4 個單位所組成的立體積木的三個問題，分別為：1、尋找積木的所有迴路；2、觀察依照迴路在紙上實際翻滾所形成的圖形；3、尋找其圖形閉合的原因。研究結果顯示：1、n 個正四面體（$n \leq 4$）所組成的積木，依照制定的三個規則尋找其迴路數為 3 個；2、將各積木實際在三角格紙上滾動，並繪製軌跡圖，發現會形成閉合與不閉合圖形；3、確認閉合與迴路度數之關係，並證明 n 個正四面體所組成積木之單組迴路度數為 120 之倍數。後續討論三個規則是否適用在正六面體骰子上、尋找迴路數目不為 3 的特例及迴路之間的脈絡關係，並由迴路的擴增性質確認任意數量正四面體所組成的立體圖形至少有三個漢米爾頓迴路。

壹、研究動機

一開始研究者閱讀了各式各樣的科展作品，而其中有一個第 55 屆全國中小學科展作品名叫「滾積木遊戲探討」的作品，它是一個用 1×1×2 的長方體，在平面的紙上翻滾軌跡的研究。研究者對三維立體圖形轉化到二維平面的問題非常感興趣，也好奇以正四面體為單位組合而成的積木在平面上翻滾會發生何種情形，所以就採用摺紙的方式，製作正四面體的積木，並印出了全部都為正三角形的格子紙（圖一），觀察積木翻滾的軌跡並且將其畫在格子紙上。



（圖一）

將積木都摺好、黏合及編號好了以後，設定規則是從某面出發，對具有共用邊的面翻滾，每一面都要滾到且不能重複的回到原點。找出各積木在這樣的規則下的所有迴路順序是為研究動機一，而按照此順序在三角格紙上翻滾其軌跡所呈現的圖形為何是研究動機二。研究者發現有些軌跡重複數次後會回到原點，有些卻不會，因此尋求以數學式解釋這情況則是研究動機三。

貳、研究目的

一、尋找能快速簡潔地找出每個積木的所有迴路之方法。

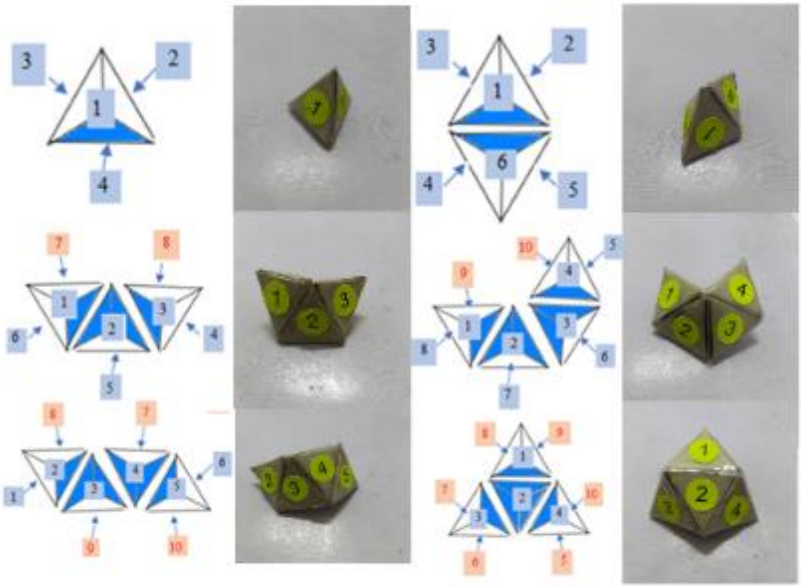
二、依照迴路順序於三角格紙上實際操作，並觀察畫出來的軌跡。

三、探討軌跡回到原點形成閉合圖形的原因。

參、研究過程與方法

一、名詞解釋

（一）積木：由一個以上的正四面體緊密連接，並在各面上標示數字，稱之為積木，研究者將一個正四面體組成的積木編號為積木 1，兩個正四面體組成的積木編號為積木 2，三個正四面體組成（凹面 2）的積木編號為積木 3，四個正四面體組成（凹面 2）的積木編號為積木 4-1，四個正四面體組成（凹面 4）的積木編號為積木 4-2，四個正四面體組成（凹面 6）的積木編號為積木 4-3，並為積木的各個面進行了編號（圖二）。

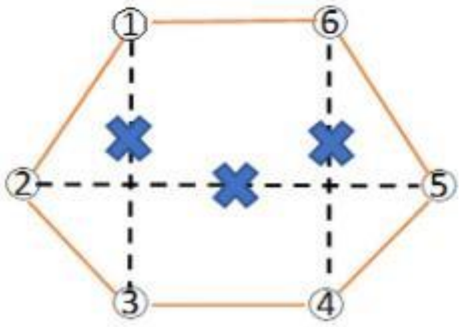


（圖二）

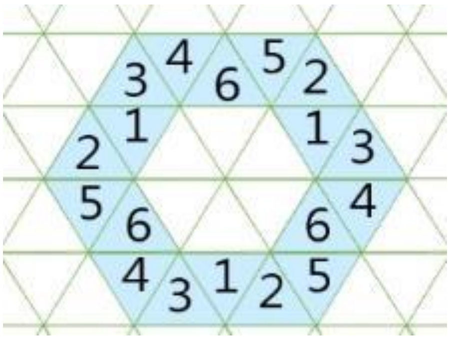
（二）迴路：將積木各個面轉化成節點，在紙上以逆時針的方向標示積木各個面的編號，然後再將積木上面相鄰的節點畫上直線，以①當起點，在每個面都要走到（不可重複）但不一定每條線都要走到的前提下走回節點①，在圖上以實線連接上個數字與下個數字，以虛線連接並打叉的是在尋找迴路的過程中不能走的路線，符合以上條件的節點順序，稱為迴

路。圖三所示為兩個正四面體組成的積木 2 的其中一個迴路①②③④⑤⑥，而ⓝ代表積木的面編號也是節點的編號，並非指迴路中的順序。

（三）軌跡：按照迴路的順序，將積木在三角格紙上實際翻轉，即為軌跡。重複翻轉的軌跡有些可為閉合圖形（圖四），有些則無法閉合（圖五）。

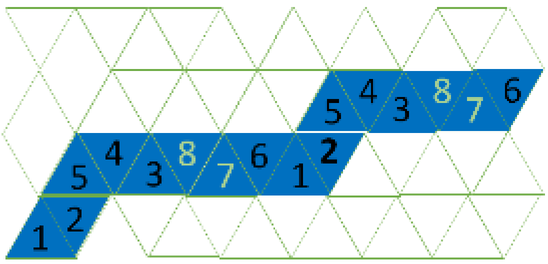


（圖三）



（圖四）

（四）凹面：從三個的積木開始會出現由兩個傾斜的面組成，像是凹下去一樣的面，將之統稱為凹面，凹面看似無法在紙面上翻滾，但將紙摺一下後，便可讓凹面與紙貼合（圖六），這樣就能增加許多變化性了！為了凸顯凹面的不同，研究者將凹面用紅筆編號。

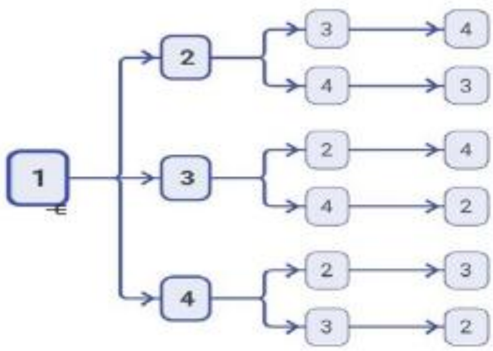


（圖五）

（圖六）

二、研究內容

起初，研究者找各種積木的迴路是一組一組毫無頭緒地找，但發現這樣可能會遺漏一些迴路，後來想到可以利用樹狀圖來找，將所有的可能性列出來，再逐一檢查並刪除重複或無法連接的可能，確保沒有遺漏任何一組迴路，下圖為一個正四面體組成的積木 1 之樹狀圖（圖七）。



（圖七）

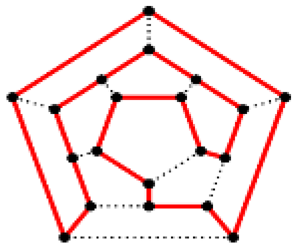
一開始樹狀圖還沒有那麼複雜，但當用樹狀圖找尋到三個積木的排列組合時，畫出來的樹狀圖相當龐大，因為與積木 3 的起點（編號①）連接的面有三個，所以圖八還僅為積木 3 樹狀圖的三分之一，而四個的積木一定有更多種可能，所以必須換一個更有效率的方法。

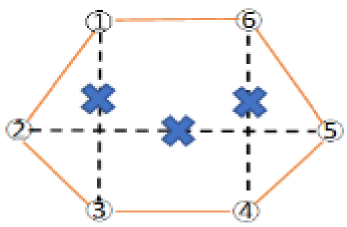
（圖八 ）

正當在尋找有什麼比較簡便的方式時，老師推薦了漢米爾頓迴路（圖九），研究者找到一篇和這個有關的作品——國立中央大學資訊工程學系江振瑞教授的「樹搜尋與回溯-歧路亡羊與追本溯源」，其中介紹了關於漢米爾頓迴路的定義：一個無向圖上的漢米爾頓迴路(Hamiltonian circuit)，是一條由某個起始節點出發，經過每個節點恰好一次，且最後會回到起始節點的路程。研究者也尋找了與漢米爾頓迴路相似的歐拉迴路(Eulerian circuit)的定義：一個無向圖上經過每個邊恰好一次的迴路。這兩種迴路令研究者想到，可以將積木的面轉換成節點，因此尋找迴路的過程即能將實際操作立體積木轉化成平面的探索，由於制定的規則裡每個面只能經過一次，所以運用與本篇研究中迴路之定義相同的漢米爾頓迴路來尋找。

以兩個正四面體組成的積木 2 為例，其共有 6 個面，而每個面皆與三個面有著共用邊，如與①相鄰的面有②、③、⑥，則在之間畫上直線，但這個圖因為面不能重複滾，例如：兩個的積木——編號①滾②接著滾③，如果接下來滾到與②相鄰的⑤的時候，便不能再重複滾回②……等等，於是研究者將迴路中沒有滾到的線改做虛線，並打叉（圖十）。

以下研究的過程分為三部分進行討論，分別為：(一)、找出各積木的迴路，(二)、將各積木依迴路連續在三角格紙上畫出軌跡，(三)、探討各軌跡是否能形成閉合圖形。


(圖九)



(圖十)

（一)、找出各積木的迴路

本研究將立體圖形積木的面及翻滾的可能轉化成平面上的節點及邊，經過觀察與分析，發現在尋找迴路時可利用三個規則，進行邊的篩選，以下說明三個規則。

由於每個節點都與另外三個節點相連，也代表以任一節點為端點的邊有三個，而按照翻滾的限制，每個節點只能通過一次，不能重複，因此若形成迴路，以有向的觀念即一條路徑進入此點而由另一條路徑離開此點，以每個節點為端點的邊必須成立兩條，捨棄一條，因此：

規則一：

1.若以節點 p 為端點的的兩條邊成立，即以節點 p 為端點的第三邊需捨棄。

2.若節點 p 的一邊被捨棄，則其他兩邊必成立。

在本研究中，把已確認連接方式的節點稱為完全點。

在n個節點的圖形中，若存在m個節點（$m < n$）所形成的迴路，則此m點迴路的每一節點皆為完全點，藉規則一，每個點成立的兩邊與該迴路的點相連，而捨棄的邊則是與該迴路的點或其他$n-m$個點相連的邊，因此迴路中的 m 個節點無法再與其他$n-m$個節點相連，意即不能再擴增成 n 個節點的迴路，因此：

規則二：

n 個節點的迴路中，不存在 m 個節點（$m<n$）的迴路。

若 n 個節點迴路存在，則 n 個點皆為完全點，藉規則一以每節點為端點的邊會成立兩條捨棄一條，因此共成立 $2n$ 條邊，捨棄 n 條邊，但由於本研究不考慮線段的方向性（$\overline{AB}=\overline{BA}$）因此：

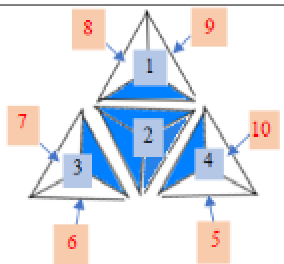
規則三：

n 個節點形成的迴路中，共成立 n 條邊捨棄$\frac{n}{2}$條，而捨棄的邊的端點集合與原 n 個節點集合相同。例如:積木 3 的迴路中有 8 個節點，成立的邊有 8 條，捨棄的邊有 4 條，捨棄的邊之端點即為原圖的 8 個節點

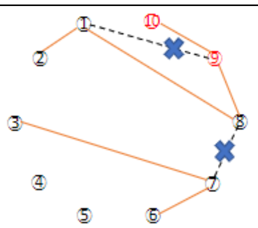
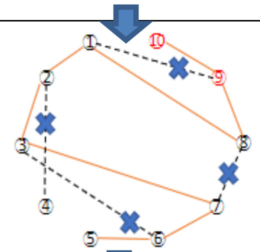
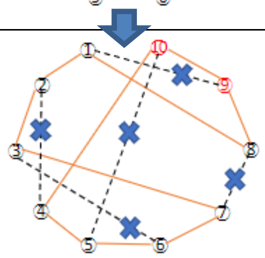
由 1 至 4 個正四面體所組成的積木皆可使用以上三個規則尋找迴路，但由於篇幅有限，僅詳細說明最複雜的積木 4-3，其餘積木的簡略說明則於附錄一。

1、積木 4-3（凹面 6）

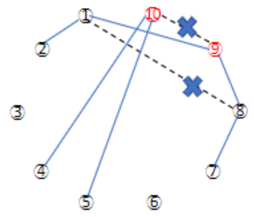
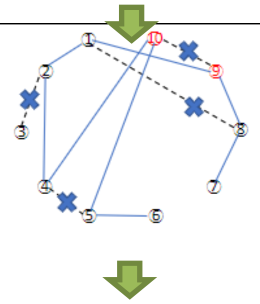
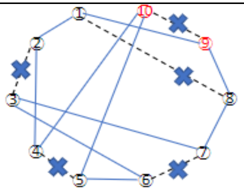
首先以節點①做起點，以①為端點的邊有①-②、①-⑧、①-⑨依序假設刪除者，並利用三個規則找尋迴路，並實際確認可行性。但因研究後發現刪除①-②部分較困難，因此將以倒敘法寫作。

積木 4-3（透視圖）	積木 4-3（立體圖）
	

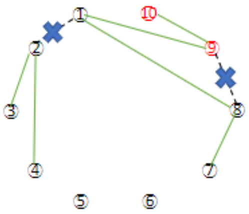
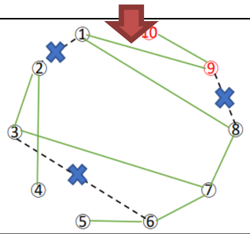
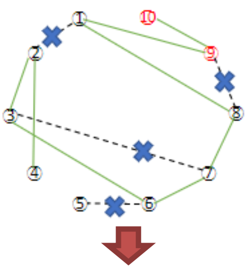
(1)刪除①-⑨

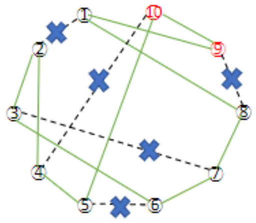
數字排列	迴路圖	解釋	刪去路線
①②③⑦⑥ ⑤④⑩⑨⑧ 或 ①⑧⑨⑩④ ⑤⑥⑦③②		1.若①-⑨刪除，藉規則一，則①、⑨成為完全點，①-②、①-⑧及⑨-⑧、⑨-⑩存在。而因①-⑧、⑨-⑧成立，藉規則一也讓⑧成為完全點。刪除⑧-⑦，藉規則一，⑦成為完全點，⑦-③、⑦-⑥成立。	①-⑨ 及 ⑦-⑧
		2.藉規則二，刪除③-⑥以避免形成少於 10 點的⑦-③-⑥迴路。刪除③-⑥，藉規則一，③、⑥成為完全點，③-②、⑥-⑤成立，因而②-③、②-①成立，②成為完全點，藉規則一，刪除②-④。	②-④ 及 ①-⑥
		3.因已刪除①-⑨、⑦-⑧、②-④、③-⑥，藉規則三，最後刪除線為⑤-⑩，藉規則一，⑤-④、⑩-④成立，形成迴路①②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧。	⑤-⑩

(2)刪除①-⑧

數字排列	迴路圖	解釋	刪去路線
①②④⑩⑤ ⑥③⑦⑧⑨ 或 ①⑨⑧⑦③ ⑥⑤⑩④②		1.若①-⑧刪除，藉規則一，則①、⑧成為完全點，①-②、①-⑨及⑧-⑦、⑧-⑨存在。因①-⑨、⑧-⑨成立，藉規則一也讓⑨成為完全點，刪除⑨-⑩，藉規則一，⑩成為完全點，⑩-④、⑩-⑤存在。	①-⑧ 及 ⑨-⑩
		2.藉規則二，刪除④-⑤以避免形成少於10 點的④-⑤-⑩迴路。刪除④-⑤，藉規則一，④、⑤成為完全點，④-②、⑤-⑥成立，因而②-①、②-④成立，藉規則一也讓②成為完全點，刪除②-③。	②-③ 及 ④-⑤
		3.因已刪除①-⑧、⑨-⑩、②-③、④-⑤，藉規則三，另一條刪除線為⑥-⑦，因此⑥-③、⑦-③成立，形成迴路①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨。	⑥-⑦

(3)刪除①-②

數字排列	迴路圖	解釋	刪去路線
①⑧⑦⑥③ ②④⑤⑩⑨ 或 ①⑨⑩⑤④ ②③⑥⑦⑧		1.若①-②刪除，藉規則一，則①、②成為完全點，①-⑧、①-⑨及②-③、②-④成立，而藉規則二⑧-⑨刪除，以避免形成①-⑧-⑨之迴路，⑧-⑨刪除，藉規則一，⑧、⑨成為完全點，藉規則一⑧-⑦、⑨-⑩成立。	①-② 及 ⑧-⑨
	這裡研究者發現，由於找出下一條路線有兩個分支，所以研究者假設③-⑥或③-⑦刪除情形繼續尋找迴路。		
		2.(1)假設③-⑥刪除，藉規則一，③、⑥成為完全點，則⑥-⑤、⑥-⑦及③-⑦成立，但⑦-③、⑦-⑥、⑦-⑧同時存在違反規則一，因此若刪除③-⑥則產生矛盾。	③-⑦ 及 ⑤-⑥
		(2)假設③-⑦刪除，③-⑥、⑦-⑥成立，藉規則一，⑥成為完全點，刪⑤-⑥。	

		3.已刪除線為①-②、⑧-⑨、③-⑦、⑤-⑥，藉規則三，第五條刪除線為④-⑩，形成迴路①⑧⑦⑥③②④⑤⑩⑨。	④-⑩

依照三個規則對本研究中由一至四個正四面體所組成的積木尋找迴路，研究結果顯示可以快速地進行篩選，但在處理積木 4-3 時，卻出現了需要進一步假設之情形，因此若深入探討五個正四面體組成的積木時，可能須找尋更進一步的規則條件才能快速篩選。

而根據本節的研究過程，將各積木迴路的數字排列及刪除編號結果整理成表格，發現假設該積木正四面體個數為 S，則面數為「S×2+2」，迴路個數皆為 3，刪除線的個數皆為「S+1」(表一)。

（表一）

	面數	迴路個數	迴路的數字排列	刪除的線的編號
積木 1	4	3	①②③④	1-4、2-4
			①②④③	1-4、2-3
			①③②④	3-4、1-2
積木 2	6	3	①②③④⑤⑥	1-3、4-6、2-5
			①②⑤⑥④③	1-6、4-5、2-3
			①③②⑤④⑥	1-2、3-4、5-6
積木 3	8	3	①②③⑧④⑤⑥⑦	2-5、3-4、7-8、1-6
			①②⑤④③⑧⑦⑥	5-6、4-8、2-3、1-7
			①⑥⑤②③④⑧⑦	1-2、6-7、4-5、3-8
積木 4-1	10	3	①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨	3-4、1-9、5-10、6-7、2-8
			①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧	1-8、4-7、9-10、5-6、2-3
			①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨	1-2、8-9、6-7、3-4、5-10
積木 4-2	10	3	①②③⑨⑩⑥⑤④⑦⑧	3-4、1-9、5-10、6-7、2-8
			①②⑧⑦⑥⑩⑤④③⑨	1-8、4-7、9-10、5-6、2-3
			①⑧②③④⑦⑥⑤⑨⑩	1-2、3-9、4-5、7-8、6-10
積木 4-3	10	3	①②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧	3-6、7-8、2-4、5-10、1-9
			①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨	4-5、9-10、6-7、2-3、1-8
			①⑨⑩⑤④②③⑥⑦⑧	1-2、8-9、3-7、5-6、4-10

（二)、將各積木依迴路連續在三角格紙上畫出軌跡

依據上節所尋找到的迴路順序實際在三角紙上翻滾並以電腦繪製其軌跡圖形，結果圖形的呈現有些為無限延伸，有些在幾次循環後成為閉合圖形。

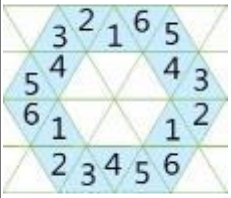
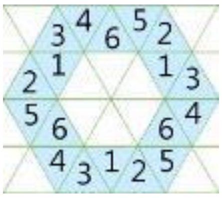
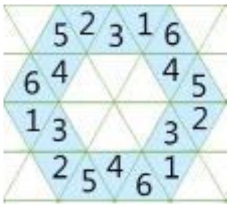
積木 1 共有三個迴路分別為①②③④、①②④③、①③②④，皆無法形成閉合圖形，其圖形研究者發現非常的相似（表二)。

（表二）

積木 1	①②③④	①②④③	① ③②④
			

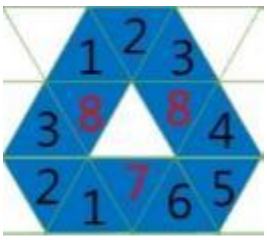
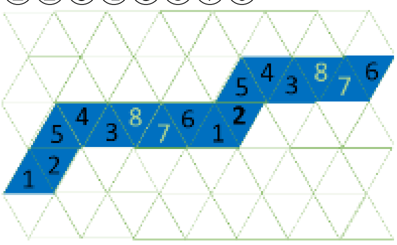
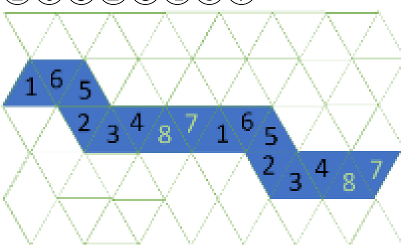
積木 2 由兩個正四面體組成，有六個面，據上節研究結果可知共有三個迴路，分別為①②③④⑤⑥、①②⑤⑥④③、①③②⑤④⑥，在三角格紙上實際操作觀察其軌跡後，發現皆重複三次循環即能回到起點，且形成的圖形皆相同，內部空白部分周長：皆為 6 單位長；外部周長：皆為 12 單位長（表三)。

（表三）

積木 2	①②③④⑤⑥	①②⑤⑥④③	①③②⑤④⑥
			

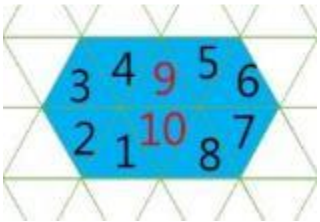
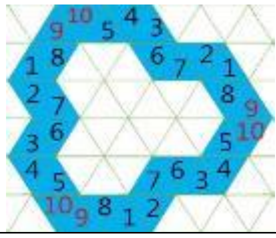
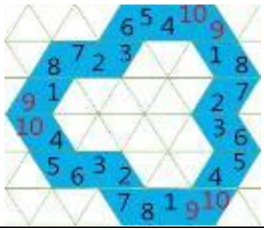
積木 3 共有三個迴路，分別為①②③⑧④⑤⑥⑦、①②⑤④③⑧⑦⑥、①⑥⑤②③④⑧⑦，總共有兩個不閉合的圖形以及一個閉合圖形，閉合圖形須重複 1.5 次循環即能回到起點，內部空白部分周長：為 3 單位長；外部周長：為 9 單位長（表四)。

（表四）

積木 3	①②③⑧④⑤⑥⑦	①②⑤④③⑧⑦⑥	①⑥⑤②③④⑧⑦
			

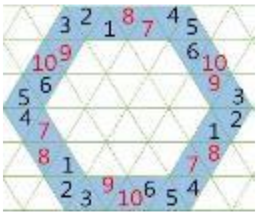
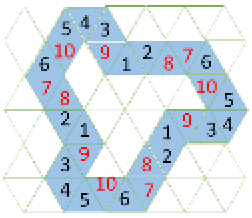
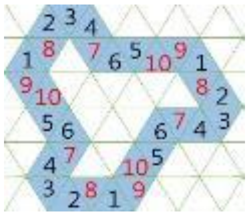
積木 4-1 共有三個迴路，分別為①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨、①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧、①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨，皆可形成閉合圖形，研究者發現其中一個閉合圖形只需重複 1 次循環就可以回到起點，這個軌跡沒有內部空白部分周長；外部周長：為 8 單位長，其它兩個閉合圖形都需要重複 3 次，內部空白部分周長：皆為 12 單位長；外部周長：皆為 18 單位長（表五）。

（表五）

積木 4-1	①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨	①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧	①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨
			

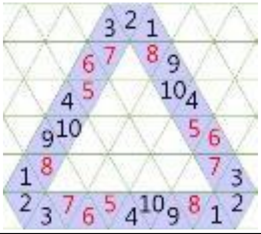
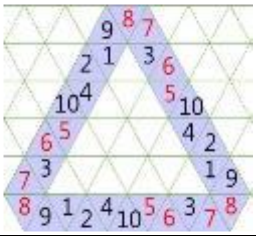
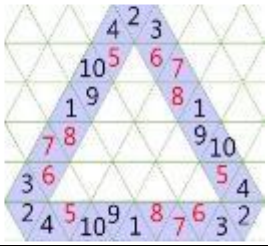
積木 4-2 共有三個迴路分別為①②③⑨⑩⑥⑤④⑦⑧、①②⑧⑦⑥⑩⑤④③⑨、①⑧②③④⑦⑥⑤⑨⑩，皆可形成閉合圖形，每一個閉合圖形都重複 3 次循環即能回到起點，雖然第一個圖與其他兩個不太一樣，但三個圖都是內部空白部分周長：皆為 12 單位長；外部周長：皆為 18 單位長（表六）。

（表六）

積木 4-2	①②③⑨⑩⑥⑤④⑦⑧	①②⑧⑦⑥⑩⑤④③⑨	①⑧②③④⑦⑥⑤⑨⑩
			

積木 4-3 共有三個迴路分別為①②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧、①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨、①⑨⑩⑤④②③⑥⑦⑧，皆可形成閉合圖形，每一個閉合圖形都重複 3 次循環即可回到起點，而且三個軌跡圖形狀相似，內部空白部分周長：皆為 12 單位長；外部周長：皆為 18 單位長（表七）。

（表七）

積木 4-3	①②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧ 	①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨ 	①⑨⑩⑤④②③⑥⑦⑧ 

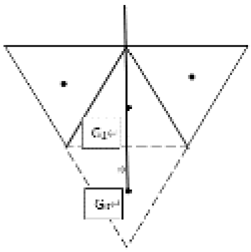
下表是將軌跡圖的資料整理過後所做的表格（表八），整理後發現，除了積木 1 以外的積木都存在閉合圖形、積木 3 的閉合圖形回到起點需重複翻滾的迴路次數不是整數，滾了 1.5 次，其他的閉合圖形滾的都是整數、只有積木 4-1 的第 1 個迴路沒有內部周長，且外部周長不是 3 的倍數。

（表八）

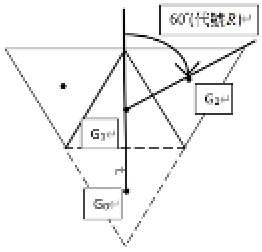
	迴路編號	閉合圖形數目	滾的迴路次數	內部周長	外部周長
積木 1	①②③④	0	0	無閉合圖形	
	①②④③		0		
	①③②④		0		
積木 2	①②③④⑤⑥	3	3	6	12
	①②⑤⑥④③		3	6	12
	①③②⑤④⑥		3	6	12
積木 3	①②③⑧④⑤⑥⑦	1	1.5	3	9
	①②⑤④③⑧⑦⑥		0	無閉合圖形	
	①⑥⑤②③④⑧⑦		0		
積木 4-1	①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨	3	1	無	8
	①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧		3	12	18
	①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨		3	12	18
積木 4-2	①②③⑨⑩⑥⑤④⑦⑧	3	3	12	18
	①②⑧⑦⑥⑩⑤④③⑨		3	12	18
	①⑧②③④⑦⑥⑤⑨⑩		3	12	18
積木 4-3	①②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧	3	3	12	18
	①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨		3	12	18
	①⑨⑩⑤④②③⑥⑦⑧		3	12	18

（三）、探討各軌跡是否能形成閉合圖形

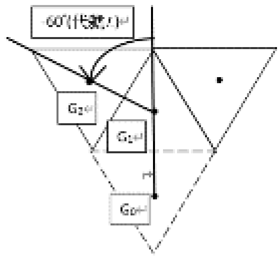
由上節研究發現迴路存在閉合圖形與不閉合圖形，為了探討發生上述現象的原因，將軌跡圖上各個三角形的重心標出並將其連線：以前一個重心 G_0 和該個重心 G_1 的連線當作基準線（圖十一）。若下一個重心 G_2 在基準線的右邊，基準線轉向 60°，記為 *R*（right），並將重心連線（圖十二）。若下一個重心 G_2 在基準線的左邊，基準線轉向-60°，記為 *L*（left），並將重心連線（圖十三）。



（圖十一）

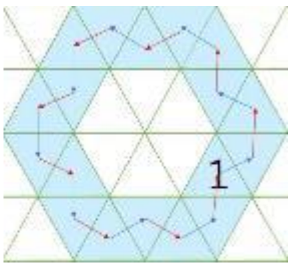


（圖十二）

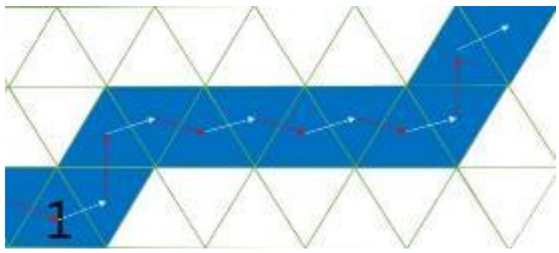


（圖十三）

完成如下圖（圖十四）及（圖十五）：



（圖十四）



（圖十五）

利用記錄 *R*、*L* 的方式將所有軌跡總角度都計算完後，發現單組迴路總角度有 0°、120°、240°及 360°，積木 1 有三個不閉合圖形，積木 2 皆為閉合圖形，一組迴路的角度為 120°，皆重複三次迴路形成閉合圖形，積木 3 有一個不閉合圖形，一組迴路的角度有 0°、120°和 240°三種，形成閉合圖形需循環的次數為 3 次和 1.5 次，積木 4-1 有三個閉合圖形，回到原點需循環的次數有 1 次跟 3 次兩種，一組迴路的角度分別為 360°和 120°，積木 4-2 和積木 4-3 相同，皆是閉合圖形，循環一次迴路的角度皆為 120°，循環三次即可回到原點，詳細原因於討論三。

以下是研究者將三角形重心在迴路順序中，把轉向情形以 *R*、*L* 表示，並將每組迴路中三角形重心轉向總角度、形成閉合圖形需重複的次數整理出的表格。

（表九）

積木	迴路名稱	轉化成 *R*、*L*	每組迴路中三角形重心轉向總角度	形成閉合圖形所需重複的次數（×代表無法閉合）
積木 1	①②③④	*LRLR*	0	×
	①②④③	*LRLR*	0	×
	①③②④	*RLRL*	0	×
積木 2	①②③④⑤⑥	*RLLRLL*	-120	3
	①②⑤⑥④③	*RLLRLL*	-120	3
	①③②⑤④⑥	*LRLLRL*	-120	3
積木 3	①②③⑧④⑤⑥⑦	*RRRLRRRL*	240	1.5
	①②⑤④③⑧⑦⑥	*LLRRLRLR*	0	×
	①⑥⑤②③④⑧⑦	*LLRLRRLL*	-120	3
積木 4-1	①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨	*RRRRLRRRRL*	360	1
	①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧	*LLRRLLRLLR*	-120	3
	①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨	*RLLRLLRRLL*	-120	3
積木 4-2	①②③⑨⑩⑥⑤④⑦⑧	*RLLRLRLLRL*	-120	3
	①②⑧⑦⑥⑩⑤④③⑨	*RRLLLRLLRL*	-120	3
	①⑧②③④⑦⑥⑤⑩⑨	*RRLLLRLLRL*	-120	3
積木 4-3	①②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧	*LLLRLRLRLR*	-120	3
	①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨	*RLRLRLRLLL*	-120	3
	①⑨⑩⑤④②③⑥⑦⑧	*LRLRLLLRLR*	-120	3

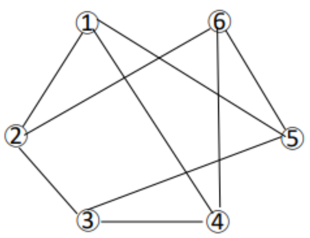
肆、討論與結論

一、討論

本研究探討由一個、兩個、三個、四個正四面體組成的積木之迴路並實際滾出軌跡，最後尋找軌跡有閉合與不閉合圖形的原因。根據研究結果進行討論與結論，並對後續研究提出建議，以下共分為四部分，依序為：一、迴路數不為 3 的特例，二、將骰子轉化成迴路圖並套用三個規則，三、探討閉合圖形單組轉向角度是否皆為 120 的倍數，四、藉擴增性質，確認 n 個正四面體堆疊的積木其迴路數至少有 3 個。

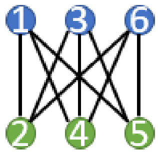
（一）、迴路數不為 3 的特例

在研究內容一發現四個以內的積木皆有三個迴路，那麼具有「任一節點與其它三點相連」此一特性的圖，是不是真的都只有三個迴路？後來我們上網查到此一特性有著專有名詞，正則圖的定義：圖中每個頂點都與相同數目的節點相連的圖，每個節點皆與 n 個節點相連的圖稱為 n－正則圖，而本研究中的圖皆為 3－正則圖(Regular graph)。為了探討上述問題，研究者嘗試繪製了許多具 3－正則圖特性的圖，結果發現下圖雖具有 3－正則圖特性，但依照三個規則尋找發現存在 6 個迴路。

<table>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>情況 1. 捨①-②，會有①④③②⑥⑤及①④⑥②③⑤兩種情形。</td></tr>
<tr><td>情況 2. 捨①-④，則①、④成為完全點，
①-②、①-⑤及④-③、④-⑥存在，若選擇②-③組成①②③④⑥⑤；若選擇②-③組成①②⑥④③⑤。</td></tr>
<tr><td>情況 3. 捨①-⑤，則①、⑤成為完全點，
①-②、①-④及⑤-③、⑤-⑥成立，若選擇②-③組成①②③⑤⑥④；若選擇②-③組成①②⑥⑤③④。</td></tr>
</table>

經老師提示後，研究者上網找到了一篇關於著色問題的文獻──舊的塗色問題，新的計算方法。著色問題的定義：每個相連的節點皆不同色。以著色的方式，進行節點的分組，若僅用兩種顏色即能將所有節點進行著色，即為二分圖；而需用三種顏色才能將所有節點進行著色的，即為三分圖。研究者以最小組數為目標，對繪製的 6 個節點圖進行著色，經過整理發現僅有二分圖（兩種顏色）及三分圖（三種顏色）兩種類型。過程中發現許多節點圖乍看不同，但皆能透過節點的移動變成相同的圖，視為同構圖，結果發現 6 個節點的二分圖（兩種顏色）有 6 個迴路，而三分圖（三種顏色），迴路有 3 個（表十一）。

（表十一）

6 個節點			
	迴路圖	迴路順序	迴路個數
二分圖		①④③②⑥⑤ ①④⑥②③⑤ ①②③④⑥⑤ ①②⑥④③⑤ ①②③⑤⑥④ ①②⑥⑤③④	6
三分圖		①③②⑥④⑤ ①③④⑤⑥② ①⑤⑥④③②	3

經過此次的試作，發現 6 個節點的 3－正則圖依照著色問題的規則，僅有二分圖（兩種顏色）及三分圖（三種顏色）兩類，而本研究由 1~4 個正四面體組成積木所轉化成的節點圖皆有 3 個迴路，經檢定也確定皆為三分圖（三種顏色），因此迴路的個數與著色問題或有關聯，是未來可以深入研究的方向。

（二）、將骰子轉化成迴路圖並套用三個規則

雖然三個規則對四個以內的正四面體適用，但研究者不確定是否套用在其他圖形上也能找出迴路，於是便找了市面上常見的的骰子來嘗試。首先以節點①做起點，以①為端點的邊有①-②、①-③、①-④、①-⑤四條邊，依序假設刪除者，且因骰子的一個節點與另四個節點相連，所以必須將三個規則稍作調整來找尋迴路。我們以刪去①-②為例：

改良的三個規則（可與 P.8 頁的規則作比較）：

規則一：

1.若以節點 p 為端點的的兩條邊成立，即以節點 p 為端點的<u>第三、四邊需捨棄</u>。

2.若節點的兩邊被捨棄，則其他兩邊必成立。

在本研究中，把已確認連接方式的節點稱為完全點。

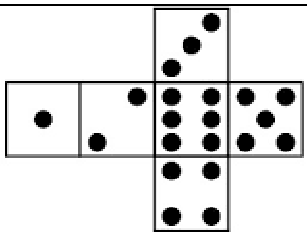
規則二：

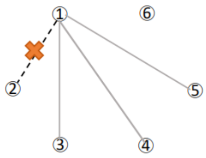
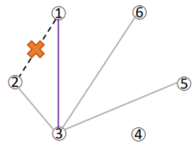
n 個節點的迴路中，不存在 m 個節點（$m < n$）的迴路。

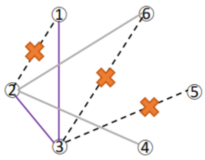
規則三：

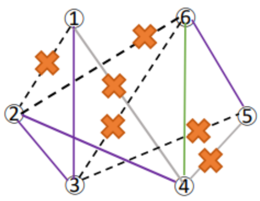
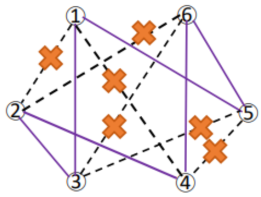
n 個節點形成的迴路中，共成立 n 條邊捨棄 n 條，而捨棄的邊的端點集合與原 n 個節點集合相同。

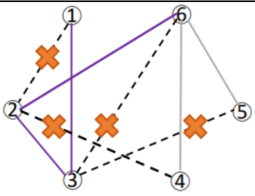
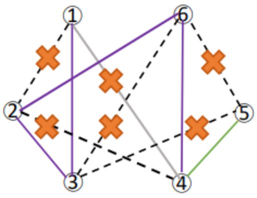
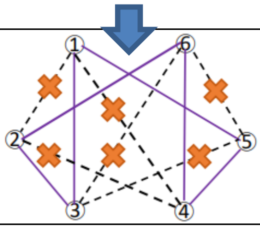
圖形的標示為：1、將刪去路線打叉，最後換作虛線。2、分支為灰色直線。3、綠色為是其中一條分支，但已確定的線。4、紫色為已確定的線段。

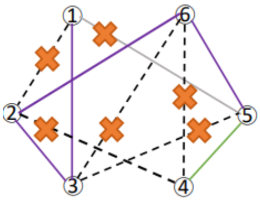
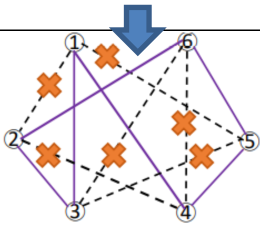
展開圖	立體圖
	

	刪去①-②後	①-③的路線
迴路圖		
解釋	研究者試作數字最小的①-③。	可以發現，雖然決定了一條路線，但又出現 3 條分支，於是研究者便以數字最小的①-③-②進行試作。

線段	迴路圖	解釋	刪去路線
①③②		若走①-③-②，則③成為完全點，③-⑤及③-⑥刪除。	③-⑤ 及 ③-⑥
仍有兩個分支，分別是①-③-②-④以及①-③-②-⑥。			

①③②④			
路線	迴路圖	解釋	刪去路線
①③②④		1.若走①-③-②-④，則②成為完全點，藉規則一，②-⑥刪除。④的分支有④-②、④-⑤、④-⑥。因②-⑥及③-⑥（在①-③-②部分刪除）都已刪除，藉規則一，⑥成為完全點，⑥-④、⑥-⑤確認，④之分支④-②、④-⑤刪除。	②-④ 及 ②-⑥ 及 ④-⑤
①③②④⑥⑤		2.⑤-③（在①-③-②部分刪除）及⑤-④刪除，藉規則一，⑤成為完全點，⑤-①確認。形成迴路①③②④⑥⑤。	無

①③②⑥			
路線	迴路圖	解釋	刪去路線
①③②⑥		1.若走①-③-②-⑥，則②成為完全點，藉規則一，②-④刪除。⑥的分支有⑥-④、⑥-⑤。	②-④
分支一：①③②⑥④			
路線	迴路圖	解釋	刪去路線
①③②⑥④		1.若走①-③-②-⑥-④，則⑥成為完全點，藉規則一，⑥-⑤刪除。④的分支有④-①、④-⑤。不能走①因為會少於 6 個節點形成迴路，藉規則二，④-①刪除。④-⑤確認。	①-④ 及 ⑤-⑥
①③②⑥④⑤		2.⑤-③（在①-③-②部分刪除）及⑥-⑤刪除都已刪除，藉規則一，⑤成為完全點。形成迴路①③②⑥④⑤。	無

分支二：①③②⑥⑤			
路線	迴路圖	解釋	刪去路線
①③②⑥⑤		1.若走①-③-②-⑥-⑤，則⑥成為完全點，藉規則一，⑥-④刪除。⑤的分支有⑤-①、⑤-④。不能走①因為會少於 6 個節點形成迴路，藉規則二，⑤-①刪除，⑤-④成立。	①-⑤ 及 ④-⑥
①③②⑥⑤④		2. ④-②、④-⑥刪除，藉規則一，④成為完全點，④-①成立。形成迴路①③②⑥⑤④	無

經過此次的試做，發現在過程中使用三個規則似有不足，必須透過假設才能完整找出回路數目，正六面體的骰子似乎隱藏著更多可快速篩選的規則，如果下次還有機會做科展，也許我們便會往這個方面探討。

（三）、探討閉合圖形單組轉向角度是否皆為 120 的倍數

在研究內容三中，研究者找出了單組迴路的轉向角度，發現不閉合角度為 0°；而閉合圖形度數則有 120°、240°、360°三種。為了探討轉向角度有何規律，以及延伸為一般化的通則（n 個正四面體積木皆可套用），研究者進行了以下的證明：

n 個正四面體組成的積木，其面數為 2（n+1），因此單一組迴路，其轉向次數亦為 2（$n+1$）次。若設其中有 x 個 R（轉向度數+60°），y 個 L（轉向度數−60°），

則單一組迴路轉向度數為 $60x+(-60y)$

又 $x+y=2(n+1)$

因此 $60x+(-60y)$

$=60x+(-60)[2(n+1)-x]$

$=60x-120(n+1)+60x$

$=120(x-n-1)$

因此，藉由以上的算式，可得知在 n 個正四面體組成的積木中：

1、迴路度數會分為兩類：

（1）迴路度數 0°：當 $x-n-1=0$，總度數為 0，圖形為不閉合。

（2）迴路度數不為 0°：當 $x-n-1\neq0$，總度數為 120 的倍數，圖形為閉合。

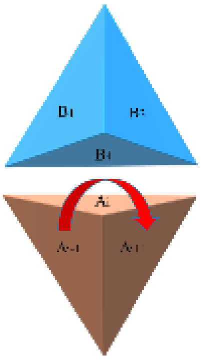
2、轉向角度由 n、x（或 y）兩個變數決定。

（四）、藉擴增性質，確認 n 個正四面體堆疊的積木其迴路數至少有 3 個

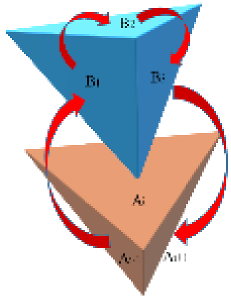
依據研究發現，迴路具有擴增性質。若 n 個正四面體組成積木上的某一迴路順序為｛$A_1,A_2\ldots,A_{i-1},A_i,A_{i+1}\ldots A_{2n+2}$｝，如在 Ai 的面上新增一個正四面體，其各面為 B_1,B_2,B_3,B_4，設 Ai 與 B4 相連（圖十六），則疊合後的積木這兩面皆會消失，銜接後 A_{i-1} 與 B_1 相連，A_{i+1} 與 B_3 相連，則可擴增形成一個由 n+1 個正四面體積木組成新的迴路：｛$A_1,A_2\ldots,A_{i-1},B_1,B_2,B_3,A_{i+1}\ldots A_{2n+2}$｝（圖十七）。

新增正四面體後的迴路順序並不會跳過 B_2 而形成 $A_{i-1}\rightarrow B_1\rightarrow B_3\rightarrow A_{i+1}$ 的迴路，那是因為與 B_2 相連的面有 B_1,B_3 及原本積木上的某一面，若跳過 B_2，則代表在節點圖上同時捨棄了 B_2-B_1 及 B_2-B_3 的路徑，而根據規則一：以節點 p 為端點的路徑同時只能存在兩條，捨棄一

條，因此跳過 B2 會產生捨棄兩條路徑的矛盾情形，因此在 *n* 個正四面體積木的任一面再新增一個正四面體，其擴增後迴路的順序是可被確認的。



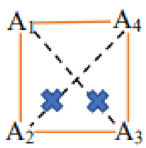
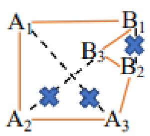
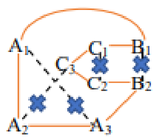
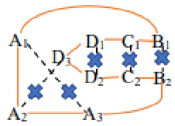
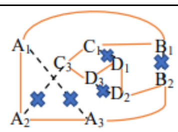
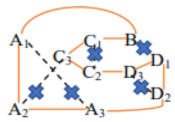
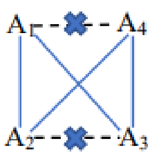
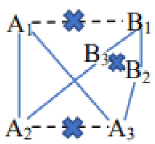
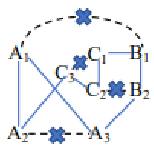
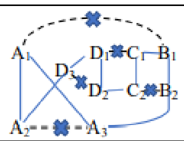
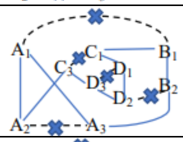
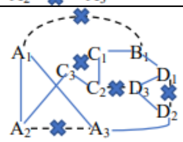
（圖十六）



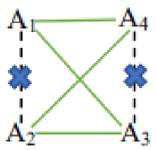
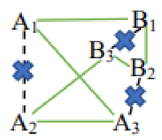
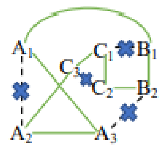
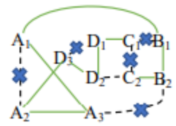
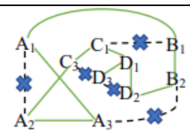
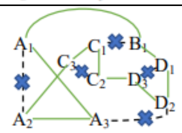
（圖十七）

藉以上說明可發現迴路的改變是由 A_i 變為 B_1,B_2,B_3，迴路順序因積木堆疊產生的變化具有規律，利用此一原則對之前積木 1 至積木 4-3 所尋找到的迴路進行驗證，結果發現所有迴路皆有其脈絡，整理結果如表十二。

（表十二）

積木 1	積木 2	積木 3	積木 4	
			4-1	
			4-2	
			4-3	
			4-1	
			4-2	
			4-3	

（表十二）

<table>
<tr><th>積木 1</th><th>積木 2</th><th>積木 3</th><th colspan="2">積木 4</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">
</td><td>4-1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4-2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4-3</td><td>
</td></tr>
</table>

由此討論確認了迴路具有擴增性，也確認 n 個正四面體組成之積木，至少有 3 個漢米爾頓迴路，但可惜並無法提出當 n>4 時僅有 3 個迴路的證明，這也是我們未來研究之方向。

二、結論

本研究探討由一至四個正四面體組成的積木，將面及翻轉可能轉化為節點和線以後，利用三個規則找出的所有迴路；再將之實際滾動繪出，觀察軌跡的相異處及尋找發生閉合的原因；經過討論後提出以下三點結論。

（一）、可利用三個規則找出積木的所有迴路，並利用擴增性質確認 n 個正四面體組成的積木，至少有 3 個哈爾米頓迴路

利用將面與翻轉轉化為節點和線，發現可利用三個規則依序刪除線段找出迴路：規則一：若以節點 p 為端點的的兩條邊成立，即以節點 p 為端點的第三邊需捨棄，若節點 p 的一邊被捨棄，則其他兩邊必成立。規則二：n 個節點的迴路中，不存在 m 個節點（$m<n$）的迴路。規則三：n 個節點形成的迴路中，共成立 n 條邊捨棄$\frac{n}{2}$條，而捨棄的邊的端點集合與原 n 個節點集合相同。

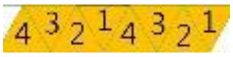
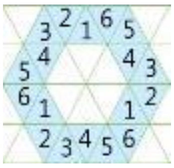
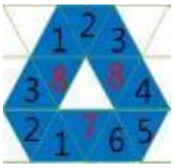
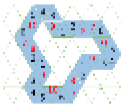
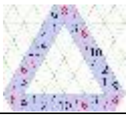
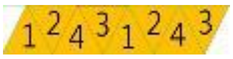
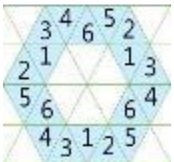
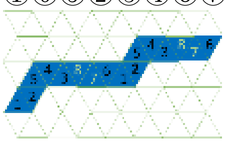
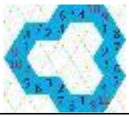
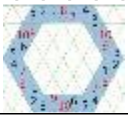
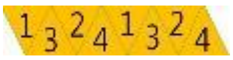
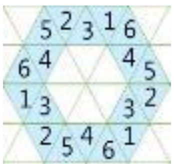
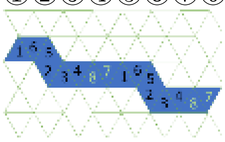
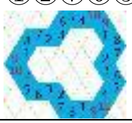
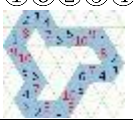
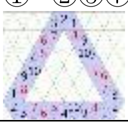
研究發現 n 個正四面體（$n\leq4$）所組成積木之節點圖皆為漢米爾頓圖，其迴路個數為 3 個。而三個規則經實際操作，亦可運用在正六面體積木的尋找迴路。另外具有每個節點皆與其他三個節點相連特性（3－正則圖）的節點圖，經討論發現在 6 個節點的情況中，依著色規則可塗成 2 個顏色的有 6 個迴路，而需 3 個顏色的圖則有 3 個迴路，其迴路數與著色問題或有關連。而後透過對於迴路的擴增性討論，除了辨明積木 1~積木 4-3 所有迴路間的脈絡關係，也確定由 n 個正四面體組成的積木，至少有 3 個漢米爾頓迴路。

（二）、正四面體積木的軌跡圖形存在脈絡關係

依據找出的迴路，將正四面體積木實際在三角紙上滾動，並繪製出軌跡圖，最後發現形成的圖形有閉合與不閉合圖形，其中閉合圖形所需的迴路組數分別是：1 組、1.5 組及 3 組。

而由迴路的擴增性質可以發現它們之間有著脈絡的關係，因此研究者將每個迴路的軌跡圖進行整理（表十三），其中積木一的三個迴路軌跡相同，積木二的迴路軌跡也一樣，但隨著正四面體的堆疊數目增加，到了積木三就出現不同變化，而積木四的變化更是多樣有趣。

（表十三）

積木 1	積木 2	積木 3	積木 4	
①②③④ 	①②③④⑤⑥ 	①②③⑧④⑤⑥⑦ 	4-1	①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨ 
			4-2	①②⑧⑦⑥⑩⑤④③⑨ 
			4-3	①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨ 
①②④③ 	①②⑤⑥④③ 	①⑥⑤②③④⑧⑦ 	4-1	①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨ 
			4-2	①②③⑨⑩⑥⑤④⑦⑧ 
			4-3	①⑨⑩⑤④②③⑥⑦⑧ 
①③②④ 	①③②⑤④⑥ 	①②⑤④③⑧⑦⑥ 	4-1	①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧ 
			4-2	①⑧②③④⑦⑥⑤⑩⑨ 
			4-3	①　②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧ 

（三）、n 個正四面體組成積木的一組迴路度數為 120°的倍數

透過討論證明了 n 個正四面體組成積木的若有 x 個 R，則轉向度數有以下兩點性質：

1、迴路度數為 $120(x-n-1)$：

（1）若迴路度數 0°：當$x-n-1=0$，總度數為 0，圖形為不閉合。

（2）若迴路度數不為 0°：當$x-n-1\neq 0$，總度數為 120 的倍數，圖形為閉合。

2、轉向角度由 n、x（或 y）兩個變數決定。

研究確認了單一迴路的轉向角度為 120°的倍數，也得知軌跡重複數次能閉合的原因，而藉由知道重心轉動角度這個方法，只需記錄一組迴路的 R、L 次數，即能決定圖形能否形成閉合圖形及滾動的組數等問題。而積木 4-1 已出現轉向度數 360°的情形，只需一組迴路即出現閉合，若在 n>4 的積木上便有可能出現總度數超出 360°的度數，也代表軌跡圖形會在一次迴路中閉合超過一次。

經過這次的科展研究，發現乍看之下平凡的正四面體，在堆疊之下竟有這麼多有趣的問題可以探討，由三維圖形轉成二維圖形、漢米爾頓迴路、迴路度數、脈絡關係，甚至與著色問題皆有關聯，此一議題還有很多值得去深入研究的問題，而如何將研究結論應用在生活裡也是一個我們可以努力的方向。

伍、參考資料

一、游復廷、蔣沁珊、吳書磊，滾積木遊戲探討，中華民國第 55 屆中小學科學展覽會，取自：

https://www.ntsec.edu.tw/ScienceContent.aspx?cat=12468&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=10&sid=12550

二、國立中央大學江振瑞教授，樹搜尋與回溯-歧路亡羊與追本溯源，取自：https://slidesplayer.com/slide/15480696/

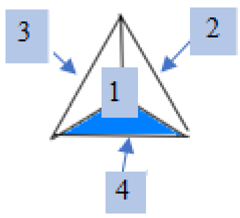
三、翰林版數學課本第四冊，3-1 內角與外角

四、羅驥韡，舊的塗色問題，新的計算方法，取自： https://reurl.cc/W3LvDO

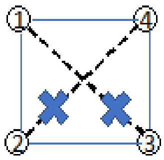
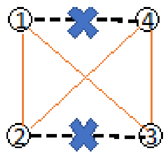
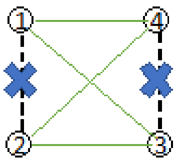
陸、附錄

一、積木 1、2、3、4-1、4-2 的迴路

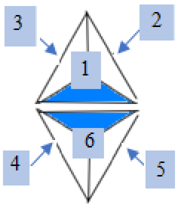
（一）、積木-1（無凹面）

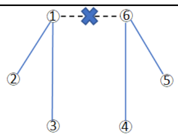
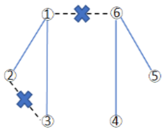
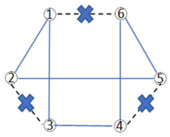
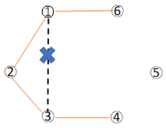
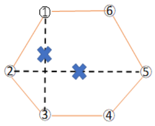
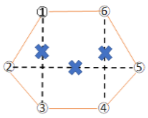
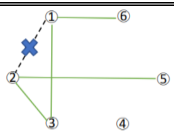
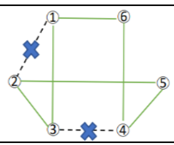
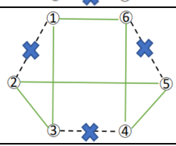
積木-1（透視圖）	積木-1（立體圖）
	

由於積木-1 的每面都相連，所以此積木是採用以節點①當起點，將②、③、④所有的排列組合找出，最後找出了六種排列方式化成迴路後，發現只剩三種。

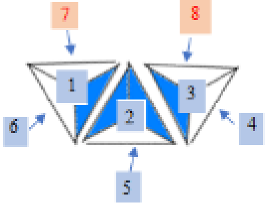
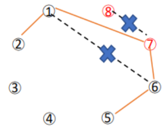
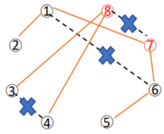
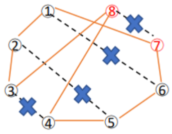
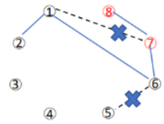
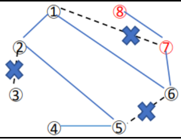
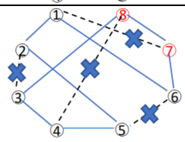
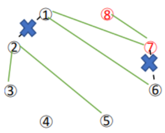
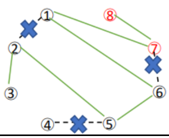
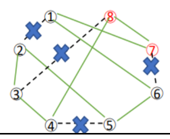
數字排列	迴路圖	刪去路線
①②③④ 及 ①④③②		①-③ 及 ② -④
①②④③ 及 ①③④②		①-④ 及 ②-③
①②④③ 及 ①③④②		①-② 及 ①-④

（二）、積木 2（無凹面）

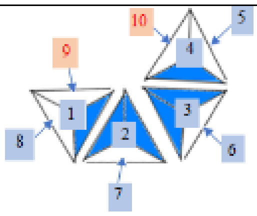
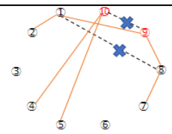
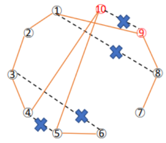
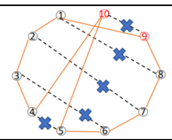
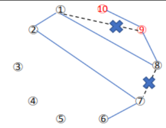
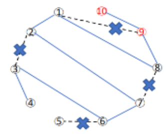
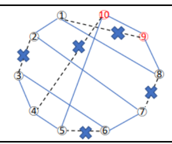
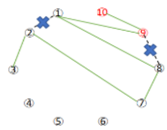
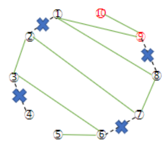
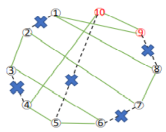
積木-2（透視圖）	積木-2（立體圖）
	

數字排列	迴路圖	解釋	刪去路線
①②⑤⑥④③ 或 ①③④⑥⑤②		1.若刪除①-⑥，則①-②、①-③及⑥-④、⑥-⑤確認。 ——規則一。	①-⑥
		2.若走②-③，便會在小於共 6 個節點的情況下形成迴路，因此②-③刪除。——規則二。	②-③
		3.②-③刪除，則②之節點②-①、②-⑤確定。——規則一。接下來不可走④-⑤，因為會小於 6 個節點直接形成迴路因此④-⑤刪除，③-④確定。——規則二。	④-⑤
①②③④⑤⑥ 或 ①⑥⑤④③②		1.刪除①-③，①-②、①-⑥及③-②、③-④確認。——規則一。	①-③
		2.②之節點②-①、②-③確認，②-⑤刪除⑤-④、⑤-⑥存在。——規則一。	②-⑤
		3.⑥之節點⑥-⑤、⑥-①確認，⑥-④刪除。——規則一。	①-⑥
①③②⑤④⑥ 或 ①⑥④⑤②③		1. 若刪除①-②，則①③、①-⑥及②-③、②-⑤存在。 ——規則一。	①-②
		2. ③之節點③-②、③-①存在，③-④刪除。④之節點④-⑥、④-⑤確認。——規則一	③-④
		3. ⑥之節點①-⑥、⑥-④確認，⑥-⑤刪除。——規則一。	⑤-⑥

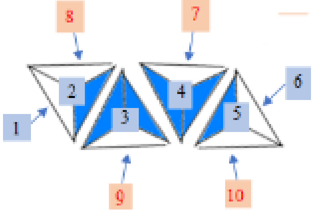
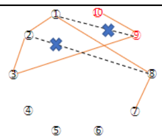
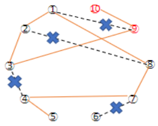
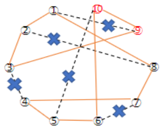
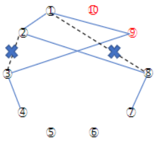
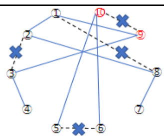
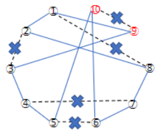
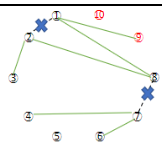
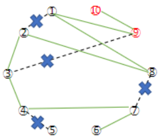
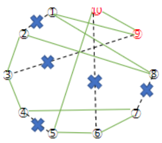
（三）、積木 3（凹面 2）

積木-3（透視圖）		積木-3（立體圖）	
			
數字排列	迴路圖	解釋	刪去路線
①②③⑧ ④⑤⑥⑦ 或 ①⑦⑥⑤ ④⑧③②		1. 若刪除①-⑥，則①-②、①-⑦及⑥-⑤、⑥⑦成立。⑦之節點①-⑦、⑥-⑦確認，⑦-⑧刪除。——規則一。	①-⑥ 及 ⑦-⑧
		2. 若⑦-⑧刪除，則⑧-④、⑧-③成立，——規則一。③-④刪除，因為會形成一個起點不是①的迴路。	③-④
		3. ④之節點④-⑤、④-⑧及③之節點③-②、③-⑧確認，②之節點②-①、②-③確認，②-⑤，刪除。——規則一。	②-⑤
①②⑤④ ③⑧⑦⑥ 或 ①⑥⑦⑧ ③④⑤②		1. 若①-⑦刪除，則①-②、①-⑥及⑦-⑥、⑦-⑧成立。⑥之節點⑥-①、⑥-⑦確認，⑥-⑤刪除。——規則一。	①-⑦ 及 ⑤-⑥
		2. 若⑤-⑥刪除，則⑤之節點⑤-②、⑤-④確認。②之節點②-①、②-⑤確認，②-③刪除。——規則一。	②-③
		3. 若③-②刪除，則③之節點③-④、③-⑧成立。④之節點④-③、④-⑤成立，④-⑧刪除。——規則一。	①-⑧
①⑥⑤② ③④⑧⑦ 或 ①⑦⑧④ ③②⑤⑥		1. 若①-②刪除，則①-⑥、①-⑦及②-③、②-⑤存在。如⑥-⑦存在，會少於 8 個節點形成迴路，因此⑥-⑦刪除。——規則二。	①-②
		2. 若⑥-⑦刪除，則⑥之節點⑥-①、⑥-⑤確認。⑤之節點⑤-②、⑤-⑥確認，④-⑤刪除。——規則一。	③-④
		3. 若④-⑤刪除，則④之節點④-③、④-⑧確認。③之節點③-②、③-④確認，③-⑧刪除。——規則一。	⑤-⑥

（四）、積木 4-1（凹面 2）

積木 4-1（透視圖）		積木（立體圖）	
			
數字排列	迴路圖	解釋	刪去路線
①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨ 或 ①⑨⑧⑦⑥⑤⑩④③②		1. 若①-⑧刪除，則①-②、①-⑨及⑦-⑥、⑦-⑧存在。⑨之節點⑨-①、⑨-⑧確認，⑨-⑩刪除。——規則一。	①-⑧ 及 ⑨-⑩
		2. 若⑨-⑩刪除，則⑩之節點⑩-④、⑩-⑤確認。——規則一。④-⑤刪除，因為會少於 10 個節點形成迴路。——規則二。若④-⑤刪除，則④-③、④-⑩及⑤-⑥、⑤-⑩存在。③-⑥刪除，因會少於 10 個節點形成迴路。——規則二。	③-⑥ 及 ④-⑤
		3. 若③-⑥刪除，則③之節點③-②、③-④存在。②之節點②-①、②-③存在，②-⑦刪除。——規則一。	②-⑦
①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧ 或 ①⑧⑨⑩⑤④③⑥⑦②		3. 若③-⑥刪除，則③之節點③-②、③-④存在。②之節點②-①、②-③存在，②-⑦刪除。——規則一。	①-⑨ 及 ⑧-⑦
		2. ②之節點①-②、②-⑦確認，②-③刪除。③之節點③-④、③-⑥確認。⑥之節點⑥-③、⑥-⑦確認，⑥-⑤刪除——規則一。	②-③ 及 ⑤-⑥
		3. 若⑤-⑥刪除，則⑤之節點⑤④⑤⑩確認。④之節點④③④⑤確認，④-⑩刪除。——規則一。	④-⑩
①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨ 或 ①⑨⑩④⑤⑥③②⑦⑧		1. 若①-②刪除，則①⑧①⑨及②-③、②-⑦存在。——規則一。⑧-⑨刪除，因會少於 10 個節點形成迴路。——規則二。⑧-⑨刪除，⑧之節點⑧-⑦、⑧-①、⑨之節點⑨-⑩、⑨-①確認——規則一。	①-② 及 ⑧-⑨
		2. ⑦之節點⑦-②、⑦-⑧確認，⑦-⑥刪除。若⑦-⑥刪除，則⑥之節點⑥-③、⑥-⑤確認。③之節點③-②、③-⑥確認，③-④刪除。——規則一。	③-④ 及 ⑥-⑦
		3. 若③-④刪除，④之節點④-⑤、④-⑩確認，⑤之節點⑤-④、⑤-⑥確認，⑤-⑩刪除。——規則一。	⑤-⑩

（五）、積木 4-2（凹面 4）

<table>
<tr><td colspan="2">積木-4-2（透視圖）</td><td colspan="2">積木 4-2（立體圖）</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>數字排列</td><td>迴路圖</td><td>解釋</td><td>刪去路線</td></tr>
<tr><td rowspan="3">①②③⑨⑩
⑥⑤④⑦⑧
或
①⑧⑦④⑤
⑥⑩⑨③②</td><td></td><td>1. 若①-⑨刪除，則①-②、①-⑧及⑨-③、⑨-⑩成立。——規則一。②-⑧刪除，因會在少於 10 個節點形成迴路。——規則二。</td><td>①-⑨
及
②-⑧</td></tr>
<tr><td></td><td>2. 若②-⑧刪除，則③之節點③-②、③-⑨確認，③-④刪除。若③-④刪除，則④之節點④-⑦、④-⑤確認。⑦之節點⑦-④、⑦-⑧確認，⑦-⑥刪除。——規則一。</td><td>③-④
及
⑥-⑦</td></tr>
<tr><td></td><td>3. 若⑥-⑦刪除，則⑥之節點⑥⑤⑥⑩確認。⑩之節點⑩⑥⑩⑨確認，⑩-⑤刪除。——規則一。</td><td>⑤-⑩</td></tr>
<tr><td rowspan="3">①②⑧⑦⑥
⑩⑤④③⑨
或
①⑨③④⑤
⑩⑥⑦⑧②</td><td></td><td>1. 若刪除①-⑧，則①-②、①-⑨、⑧-②、⑧-⑦成立。②之節點②-①、②-⑧確認，②-③刪除。若③-②刪除則③之節點③-④、③-⑨確認。——規則一。</td><td>①-⑧
及
①-③</td></tr>
<tr><td></td><td>2. ⑨之節點⑨-①、⑨-③確認，⑨-⑩刪除。——規則一。若⑨-⑩刪除則⑩之節點⑩-⑤、⑩-⑥確認，⑤-⑥刪除因會在少於 10 個節點形成迴路。——規則二。</td><td>⑤-⑥
及
⑨-⑩</td></tr>
<tr><td></td><td>3. 若⑤-⑥刪除，則⑤之節點⑤-④、⑤-⑩及⑥之節點⑥-⑦、⑥-⑩確認。④之節點④-③、④-⑤確認，④-⑦刪除。——規則一。</td><td>④-⑦</td></tr>
<tr><td rowspan="3">①⑧②③④
⑦⑥⑤⑩⑨
或
①⑩⑨⑤⑥
⑦④③②⑧</td><td></td><td>1. 若①-②刪除，則①之節點①-⑧、①-⑩及②之節點②-③、②-⑧存在。⑧之節點⑧-①、⑧-②確認，⑧-⑦刪除。⑦節點⑦-④、⑦-⑥確認。——規則一。</td><td>①-②
及
⑦-⑧</td></tr>
<tr><td></td><td>2. ③-⑨刪除，因會在少於 10 個節點形成迴路。——規則二。若③-⑨刪除，則③之節點③-②、③-④確認。④之節點④-③、④-⑦確認，④-⑤刪除。——規則一。</td><td>③-⑨
及
④-⑤</td></tr>
<tr><td></td><td>2. ③-⑨刪除，因會在少於 10 個節點形成迴路。——規則二。若③-⑨刪除，則③之節點③-②、③-④確認。④之節點④-③、④-⑦確認，④-⑤刪除。——規則一。</td><td>⑥-⑩</td></tr>
</table>

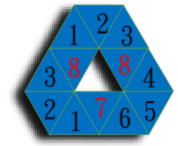
【評語】030425

本研究主要是探討滾動積木而衍生出來的問題，作者們發揮天馬行空的想像力，針對四面體接合所得出的奇特多面體結構來討論分析，想法頗具創意，值得鼓勵。前半部討論其實為圖形不同漢米爾頓路徑有多少個之問題，這是一個困難的問題，或許也因為問題有著一定的難度，作者們只能將討論的範圍限縮在接合的正四面體個數不超過四個的情況。就如同作者們所述，接合後的多面體所對應的圖形其實是比較特殊的 3 正則圖形，如果作者們真的將完整的圖形畫出來，應該會注意到圖形具有一些對於分析漢米爾頓路徑的個數有用的特徵，也應該可以給出一個系統化討論這個的方法。沒有注意到這一點，有點可惜。

後半部關於實際在平面上依選定的路徑滾動，要繞回出發點，路徑所需重複次數的討論比較像是透過實際操作得出的結論，而缺乏理論的分析。作者們其實有試圖藉助滾動偏移的角度來說明，但是並沒有給一個比較清楚的論述。如果可以針對路徑在平面所對應的樣貌，以及是否可以將若干個這樣圖像接成一圈做更進一步的分析，針對這一部份應該可以給出一個比較好的說明，作品整體看起來也會更好。

整體而言，本研究作品運用漢米爾頓迴路來尋找出各積木的迴路，將各積木依迴路連續在三角格紙上畫出軌跡、探討各軌跡是否能形成閉合圖形。可以見得作者寫作能力與研究精神之用心。

作品簡報



邊連邊，心連心，殊途或同歸
翻滾正四面體組成之積木探討

科別：數學科
組別：國中組
編號：030425

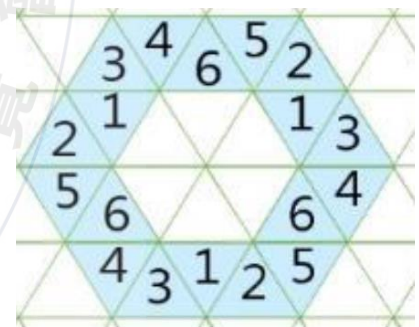
研究動機與目的

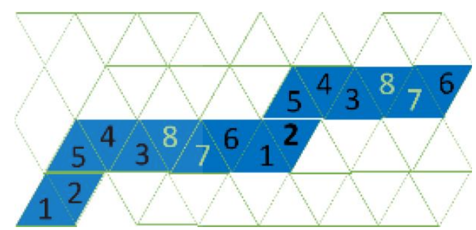
研究動機

- 三維立體圖形轉化到二維平面的問題。
- 以正四面體組合的積木在平面紙上翻滾會發生何種情形 。

研究目的

- 尋找能快速確認所有迴路之方法 。
- 依迴路順序於紙上實際操作並觀察其軌跡。
- 探討軌跡形成閉合圖形的原因。





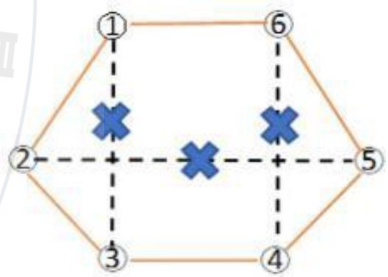
研究過程與方法

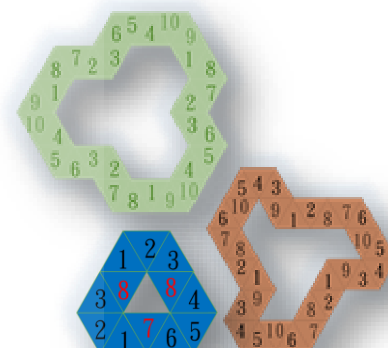
名詞解釋

- 積木：由1~4個正四面體緊密連接，共有6種積木。

- 迴路：以積木的其中一面為起點，每個面都要走到（不可重複）的前提下走回原點，其順序稱為迴路，亦是漢米爾頓迴路。

- 軌跡：按照迴路順序，將積木在三角格紙上實際翻轉，即為軌跡。



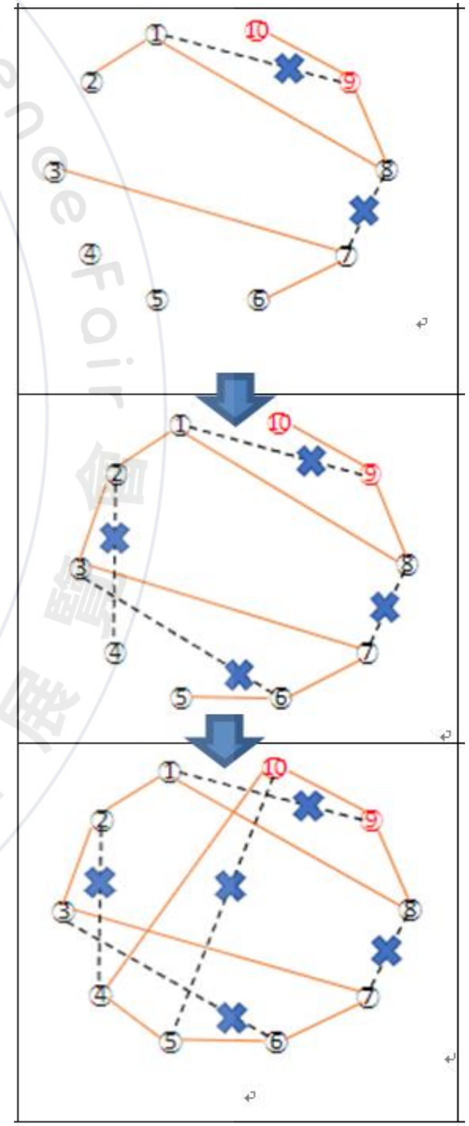


研究過程與方法

研究內容

1.找出各積木迴路的三個規則

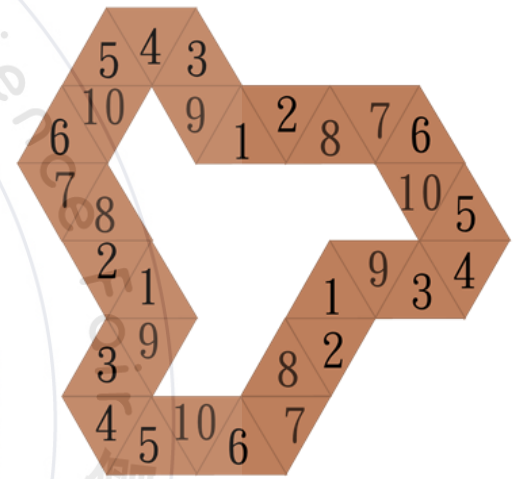
- 節點p為端點的兩條邊若成立，則第三邊需捨棄；節點p的一邊被捨棄，則其他兩邊必成立。
- n個節點的迴路中，不存在m個節點（m<n）的迴路。
- n個節點的迴路中，共成立n條邊捨棄n/2條，而捨棄邊的端點集合與原n個節點集合相同。



研究過程與方法

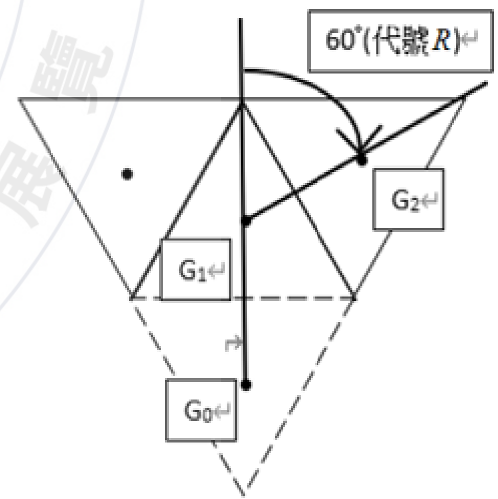
研究內容

2.依迴路連續在三角格紙上畫出軌跡



- 發現各軌跡有閉合與不閉合。
- 閉合圖形所需的迴路重複組數不同。

3.探討各軌跡是否能形成閉合圖形



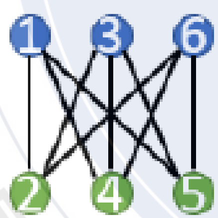
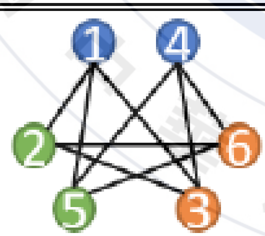
- 找出軌跡中三角形重心，計算轉向度數
- 閉合圖形的迴路度數有 120°、 240°及 360°。

研究討論與結論

研究討論

1.具「任一節點與其它三點相連」特性之節點圖。

- 3-正則圖的迴路數量從著色問題角度探討。
- 6個節點僅有二分圖及三分圖兩種類型。

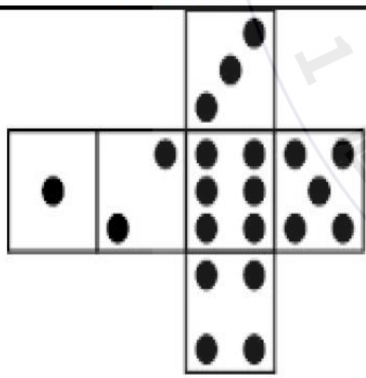
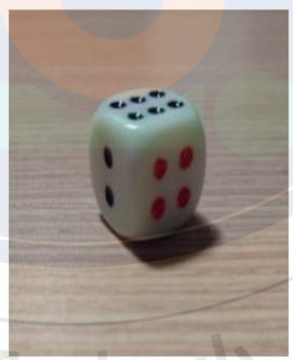
6 個節點			
	迴路圖	迴路順序	迴路個數
二分圖		①④③②⑥⑤ ①④⑥②③⑤ ①②③④⑥⑤ ①②⑥④③⑤ ①②③⑤⑥④ ①②⑥⑤③④	6
三分圖		①③②⑥④⑤ ①③④⑤⑥② ①⑤⑥④③②	3

研究討論與結論

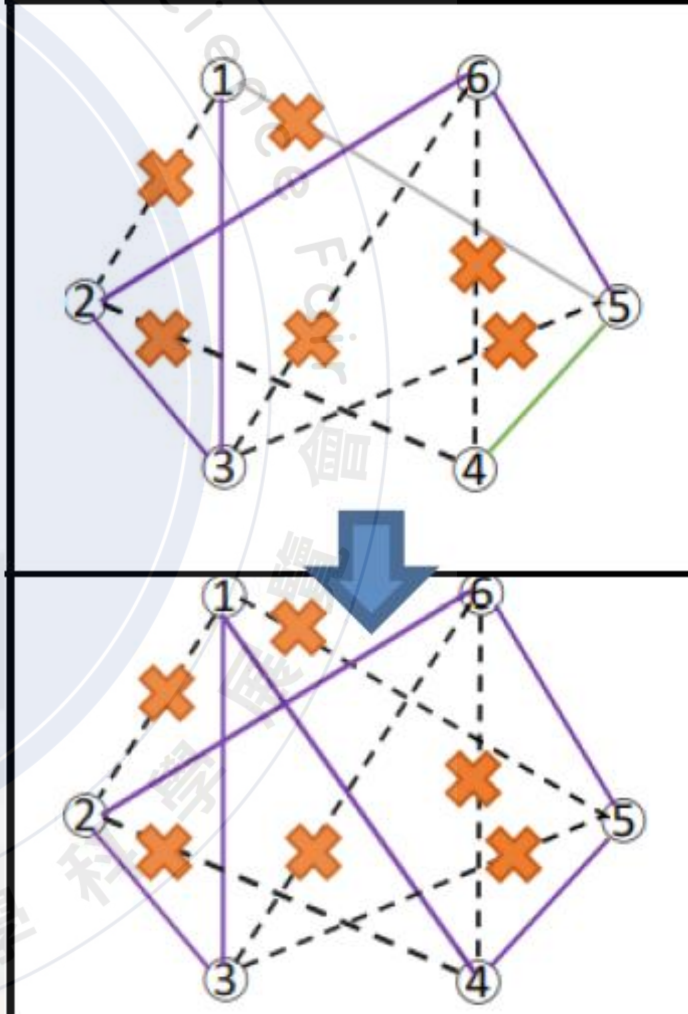
研究討論

2.將三個規則套用到正六面體的骰子

- 三個規則修正後可以適用。
- 正六面體的骰子隱藏著更多規則。

展開圖	立體圖
	

迴路圖



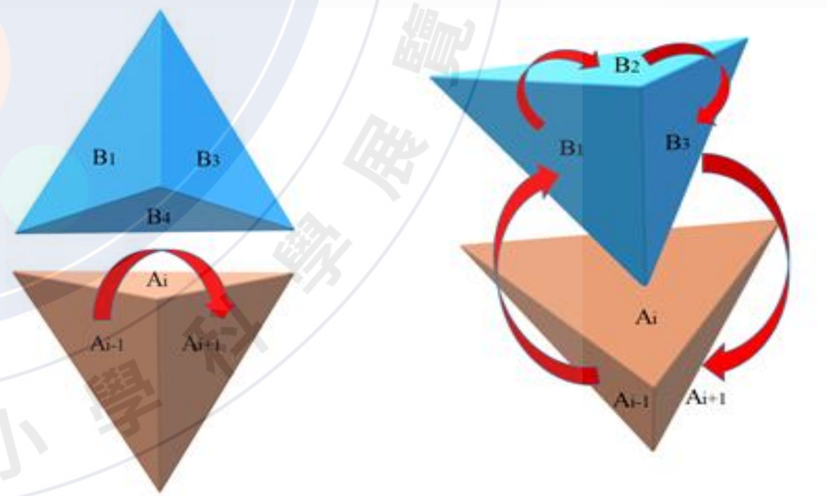
研究討論與結論

3.探討閉合圖形單組轉向度數

- n個正四面體組成的積木，一組迴路轉向度數為120的倍數。
- 若度數為 0，圖形為不閉合。

4.迴路的擴增性

- 在n個正四面體積木的任一面新增一個正四面體，迴路順序可被確認。
- 本研究之所有迴路存在脈絡關係。
- n個正四面體組成的積木，能依擴增性質得到3個漢米爾頓迴路。

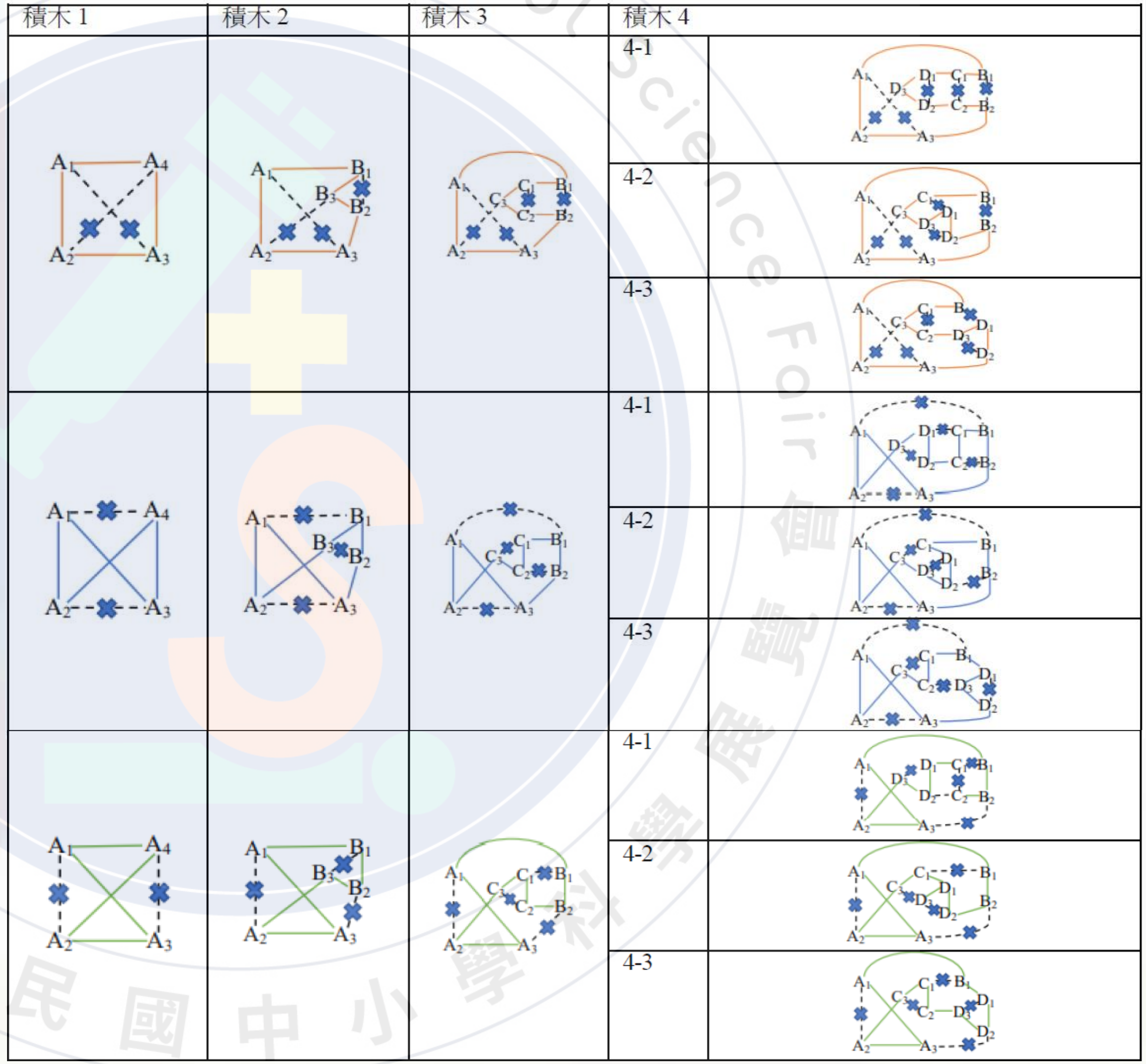


研究討論與結論

研究結論

1. 迴路尋找與關係

- 三個規則可找出所有迴路。
- 迴路因擴增性具有脈絡關係。
- 證明n個正四面體組成的積木，至少有3個漢米爾頓迴路。



研究討論與結論

研究結論：

2.軌跡圖形

- 圖形分為閉合與不閉合。
- 積木的軌跡圖形脈絡如右。

3.閉合原因

- n個正四面體積木一組迴路度數為120°的倍數。

積木 1	積木 2	積木 3	積木 4	
①②③④	①②③④⑤⑥	①②③⑧④⑤⑥⑦	4-1	①②③④⑩⑤⑥⑦⑧⑨
			4-2	①②⑧⑦⑥⑩⑤④③⑨
			4-3	①②④⑩⑤⑥③⑦⑧⑨
①②④③	①②⑤⑥④③	①⑥⑤②③④⑧⑦	4-1	①⑧⑦②③⑥⑤④⑩⑨
			4-2	①②③⑨⑩⑥⑤④⑦⑧
			4-3	①⑨⑩⑤④②③⑥⑦⑧
①③②④	①③②⑤④⑥	①②⑤④③⑧⑦⑥	4-1	①②⑦⑥③④⑤⑩⑨⑧
			4-2	①⑧②③④⑦⑥⑤⑩⑨
			4-3	① ②③⑦⑥⑤④⑩⑨⑧

研究建議及參考文獻

研究建議

- 3 - 正則圖中，節點數與迴路數量及著色問題的關聯。
- 正六面體的骰子迴路的篩選規則。
- 當n>4時，n個正四面體積木是否「僅」有3個漢米爾頓迴路的證明。

參考文獻

- 游復廷、蔣沁珊、吳書磊，滾積木遊戲探討，中華民國第55屆中小學科展
- 江振瑞，樹搜尋與回溯 -歧路亡羊與追本溯源
- 羅驥韡，舊的塗色問題，新的計算方法

誠摯感謝

敬請評審指導