中華民國第61屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030424

角落生霧

學校名稱：臺中市立清水國民中學

作者：	指導老師：
國二 白舒羽 國二 李若暟 國二 白晴羽	林逸英 王永賢

關鍵詞：正多邊形、外切

摘要

我們由市售的角落生物椅凳，產生好奇心。原本想知道：若將正三角形內部沿著邊長有 n 個半徑為 r 的等圓與邊長相切時，邊長與面積與 r 的關係。後來進而探討正 m 多邊形每邊內側與 n 個半徑為 r 的等圓相切時，此時正多邊形周長 S(m,n)及面積 A(m,n)的通式。

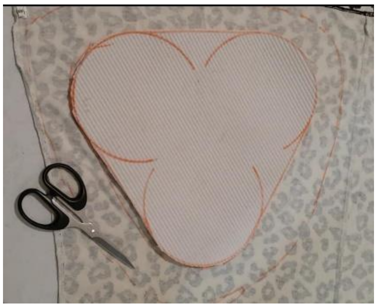
接著我們將正 m 邊形的角落削切成為圓弧，形成圓角多邊形，其周長 S’(m,n)與面積 A’(m,n)的之通式。以數學歸納法證明以上通式，也推導證明 S 與 S’的關係，A 與 A’的關係。

我們發現相對於變數 n 而言，S(m,n)與 S’(m,n)為兩平行直線；A(m,n)與 A’(m,n)為兩拋物線。

藉由給定m及n進行數值分析，針對以正三角形或正四邊形來製作不同半徑之圓角三角形，圓角四角形時，角落削切損失的面積為定值 2.05r^2與 0.86r^2等。對於圓角多邊形的削切給予建議。

壹、研究動機

家政課時，老師要我們利用環保素材製作出有用的東西，發揮廢物再利用的精神；這時，我突然想到之前在網路社團看到有人利用回收牛奶罐製作出小凳子，有的是用兩個牛奶罐、有的人用三個、甚至四個，而不同數量牛奶罐有不同之形狀及邊長，於是我好奇的想：不同個數的牛奶罐所圍成的多邊形，其長度及面積是否有是否有特定之公式呢？所以便深入探討這個問題。


照片來源：https://www.facebook.com/groups/our.storage.diary

貳、 研究目的

一、比較外切之圓角與尖角 m 邊形周長及面積之差異。

二、若改變邊長圓的個數，則其差值之改變如何。

三、觀察並比較正三角形、正四邊形、正五邊形、•••至正 m 邊形之間外切之圓角與尖角周長及面積之差異。

四、觀察上述之情況是否有規律。

參、研究設備及器材

電腦、圓規、直尺、微軟 WORD、微軟 EXCEL、VISIO 繪圖軟體、。

肆、 研究過程

一、 名詞定義

為方便推論研究，我們先將切於正 m 多邊形內部的所有圓的半徑都相等，並將半徑以 r 來表示。我們將正 m 邊形每邊內側外切 n 個圓時，此時正 m 邊形的**周長**定義為 S(m,n)，**面積**定義為 A(m,n)。

若將「正 m 邊形」每個角削去，以同時與兩夾邊相切的圓弧取代該角，此時我們暫且定義此形狀為「**圓角 m 邊形**」，內側外切 n 個圓時，「**圓角 m 邊形**」的**周長**定義為 S’(m,n)，「**圓角 m 邊形**」的**面積**定義為 A’(m,n)。

二、 探討正多邊形周長 S(m,n)及面積 A(m,n)與 r 的關係

首先我們要探討尖角正 m 邊形之周長及面積，試著找出其通式。

(一)正三角形(m=3 時)

1.每邊內部切 2 個圓(n=2)

如圖(一)，分別過圓心 J、K、L 作 $\overline{DJ}\perp\overline{JK}$、$\overline{EK}\perp\overline{JK}$、$\overline{FK}\perp\overline{KL}$、$\overline{GL}\perp\overline{KL}$、$\overline{HL}\perp\overline{JL}$、$\overline{IJ}\perp\overline{JL}$。連接 $\overline{AJ}$，則 $\angle JAD=30°$， 又 $\angle JDA=90°$，則 $\angle AJD=60° \Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{JD}}=\tan 60°$，

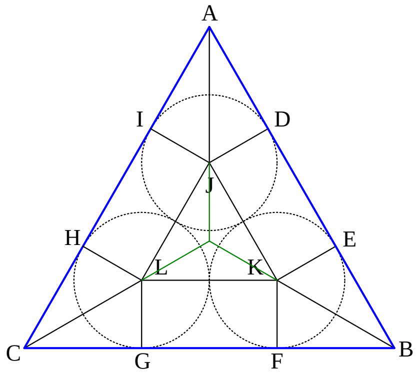
$\because \overline{JD}=r \quad \Rightarrow \overline{AD}=\overline{JD}\times\tan 60°=\sqrt{3}r$

同理，$\overline{EB}=\overline{BF}=\overline{GC}=\overline{CH}=\overline{IA}=\sqrt{3}r$

$\overline{AB}=(\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{BE})=\sqrt{3}r+2r+\sqrt{3}r=(2+2\sqrt{3})\,r$

所以，邊長 $\overline{AB}=(2+2tan60°)\cdot r$

S(3,2)=正 ΔABC 之周長=3 $\overline{AB}$ =$3(2+2tan60°)\cdot r$



圖(一)

A(3,2)=正 ΔABC 面積=正ΔJLK+3 個矩形 DEKJ+3 個箏形 ADJI

$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r\cot 60°+3\times 2r^2+3r^2\tan 60° = 3(\cot 60°+2+\tan 60°)\,r^2$

2.每邊內部切 3 個圓(n=3)

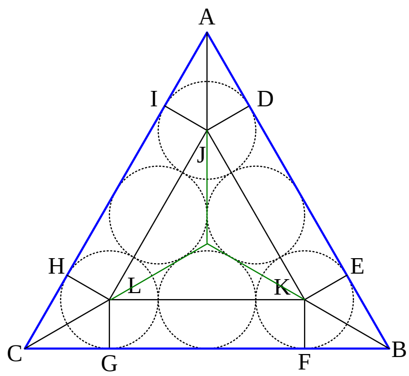
如圖(二)，同理可證

$\overline{AB}=(\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{BE})=\sqrt{3}r+4r+\sqrt{3}r=(4+2\sqrt{3})\,r$

所以 $\overline{AB}$ =$(4+2tan60°)\cdot r$

S(3,4)=正 ΔABC 之周長=3 $\overline{AB}$ =$3(4+2tan60°)\cdot r$

A(3,3)=正 ΔABC 面積=正ΔJLK+3 個矩形 DEKJ+3 個箏形 ADJI



圖(二)

$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 2r\cot 60°+3\times 4r^2+3r^2\tan 60°$

$=3(4\cot 60°+4+\tan 60°)\,r^2$

3. 每邊內部切 n 個圓時

依圖(一)及圖(二)，當 k 值增加為 k+1 時，會讓 3 個矩形的較長邊增加 2r，正ΔJLK邊長也是增加 2r，正ΔJLK面積則增加$3\cdot(2k-1)r^2\cot 60°$

因此我們推得 S(3,4) =$3(6+2tan60°)\cdot r$

A(3,4) =$3(9\cot 60°+6+\tan 60°)\,r^2$

我們猜想 S(3,n) =$3(2(n-1)+2\tan 60°)\cdot r$

$A(3,n) = 3((n-1)^2 \cot 60° + 2(n-1) + \tan 60°) \cdot r^2$

利用數學歸納法證明，假設 n=k 時，

$S(3,k) = 3(2(k-1) + 2\tan 60°) \cdot r$

$A(3,k) = 3((k-1)^2 \cot 60° + 2(k-1) + \tan 60°) \cdot r^2$ 皆成立

當 n=k+1 時，因為 3 個矩形的較長邊會增加 2r，S(3,k+1)相較於 S(3,k)增加 6r

$S(3,k+1) = S(3,k)+6r = 3(2(k-1) + 2\tan 60°) \cdot r + 6r$

$= 3(2k + 2\tan 60°) \cdot r$ 成立

因此證得 $S(3,n) = 3(2(n-1) + 2\tan 60°) \cdot r$

同理，A(3,k+1)相較於 A(3,k)，矩形面積增加$3 \cdot 2r^2$，

正ΔJLK邊長由(2k-2) r 增加 2r 為 2kr，

正ΔJLK面積增加$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2kr \cdot kr \cot 60° - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2k-2)r \cdot (k-1)r \cot 60°$

$= 3 \cdot (2k-1) r^2 \cot 60°$

所以，$A(3,k+1) = A(3,k) + 3 \cdot 2r^2 + 3 \cdot (2k-1) r^2 \cot 60°$

$= 3((k-1)^2 \cot 60° + 2(k-1) + \tan 60°) \cdot r^2 + 3 \cdot 2r^2 + 3 \cdot (2k-1) r^2 \cot 60°$

$= 3(k^2 \cot 60° + 2k + \tan 60°) \cdot r^2$

因此 $A(3,n) = 3((n-1)^2 \cot 60° + 2(n-1) + \tan 60°) \cdot r^2$ 得證

(二)正方形(m=4 時)

1.每邊內部切 2 個圓(n=2)

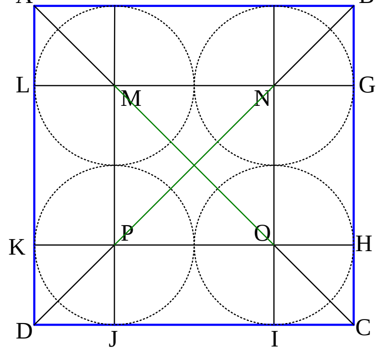
如圖(三)，分別過圓心 M、N、O、P

作 $\overline{EM \perp MN}$ 、 $\overline{FN \perp NM}$ 、 $\overline{GN \perp NO}$ 、

$\overline{HO \perp ON}$ 、 $\overline{IO \perp OP}$ 、 $\overline{JP \perp PO}$ 、 $\overline{KP \perp PM}$ 、 $\overline{LM \perp MP}$ 。

連接 $\overline{AM}$，則 $\angle MAE = 45°$，

又 $\angle MEA = 90°$，則 $\angle AME = 45° \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EM}} = \tan 45°$，

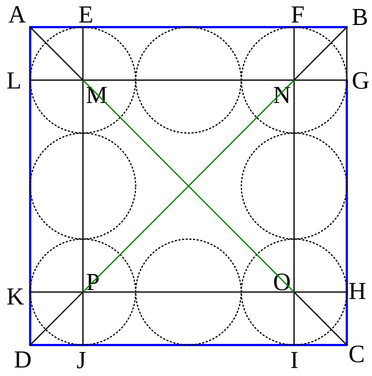


圖(三)

$\because \overline{ME} = r \quad \Rightarrow \overline{AE} = \overline{ME} \times \tan 45° = r$ 。

$\overline{EF} = \overline{MN} = 2r$ ，

正方形邊長 $\overline{AB} = (\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{BF}) = r+2r+r = 4r = (2 + 2tan45°) \cdot r$



圖（四）

S(4,2)=正方形 ABCD 周長=4 $\overline{AB}$ =$4(2 + 2tan45°) \cdot r$

正方形 MNOP 面積以切割成 4 個等腰直角三角形計算之，

A(4,2)=正方形 MNOP+4 個長方形 EFNM +4 個正方形 AEML

$=4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r \cot 45° + 4 \times 2r^2 + 4r^2 \tan 45°$

$=4(\cot 45° + 2 + \tan 45°) \cdot r^2$

2.每邊內部切 3 個圓(n=3)

如圖(四)，同理可證，

四邊形ABCD 之邊長 $\overline{AB} = (\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{BF}) = r+4r+r = 4r = (4 + 2tan45°) \cdot r$

S(4,2)=正方形 ABCD 周長=4 $\overline{AB}$ =$4(4 + 2tan45°) \cdot r$

正方形 MNOP 面積以切割成 4 個等腰直角三角形計算之，

A(4,2)=正方形 MNOP+4 個長方形 EFNM +4 個正方形 AEML

$=4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot 2r \cot 45° + 4 \times 4r^2 + 4r^2 \tan 45°$

$=4(4 \cot 45° + 4 + 4\tan 45°) \cdot r^2$

3.每邊內部切 n 個圓

依圖(三)及圖(四)，當 k 值增加為 k+1 時，會讓 4 個矩形的較長邊增加 2r，內部正方形 MNOP 邊長也是增加 2r，正方形 MNOP 面積則增加 $4 \cdot (2k - 1)r^2 \cot 45°$

因此我們推得 S(4,4) =$4(6 + 2tan45°) \cdot r$

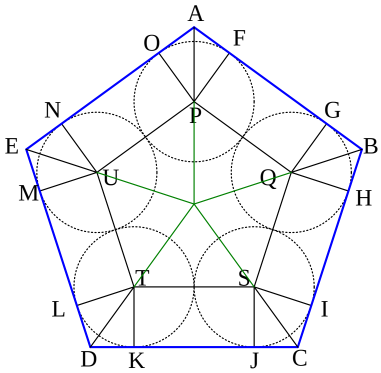
A(4,4) =$4(9 \cot 45° + 6 + \tan 45°)\, r^2$

根據數學歸納法，應可證得　S(4,n) =$4(2(n - 1) + 2tan45°) \cdot r$

A(4,n) =$4((n - 1)^2 \cot 45° + 2(n - 1) + tan45°) \cdot r^2$

(三)正五邊形(m=5 時)

1.每邊內部切 2 個圓(n=2)



圖(五)

如圖(五)，分別過圓心 P、Q、S、T、U 作 $\overline{FP}\perp\overline{PQ}$、$\overline{GQ}\perp\overline{QP}$、$\overline{HQ}\perp\overline{QS}$、$\overline{IS}\perp\overline{SQ}$、$\overline{JS}\perp\overline{ST}$、$\overline{KT}\perp\overline{TS}$、$\overline{LT}\perp\overline{TU}$、$\overline{MU}\perp\overline{UT}$、$\overline{NU}\perp\overline{UP}$、$\overline{OP}\perp\overline{PU}$。

連接 $\overline{AP}$，則 $\angle PAF=\frac{1}{2}\times\frac{(5-2)\times 180°}{5}=54°$，

又 $\angle AFP=90°$，則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FP}}=\tan 36°$，

$\because \overline{FP}=r \Rightarrow \overline{AF}=\overline{FP}\times\tan 36°=r\tan 36°$。

同理，$\overline{GB}=\overline{BH}=\overline{IC}=\overline{CJ}=\overline{KD}=\overline{DL}=\overline{ME}=\overline{EN}=\overline{OA}=r\tan 36°$，

故五邊形 ABCDE 邊長 $\overline{AB}=(\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{BG})=r\tan 36°+2r+r\tan 36°=(2+2\tan 36°)\cdot r$

S(5,2)=正五邊形 ABCDE 周長=5 $\overline{AB}$ =$5(2+2\tan 36°)\cdot r$

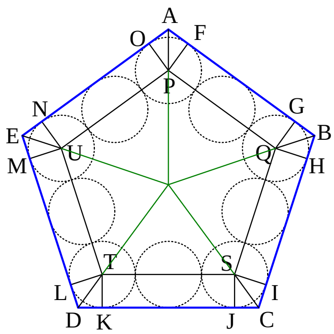
正五邊形 PQSTU 面積以切割成 5 個頂角為 36 度的等腰三角形計算之，

A(5,2)=正五邊形 PQSTU+5 個長方形 FGQP +5 個箏形 AFPO

$$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r\cot 36°+5\times 2r^2+5r^2\tan 36°$$

$$=5(\cot 36°+2+\tan 36°)\cdot r^2$$

2.每邊內部切 3 個圓(n=3)



圖(六)

如圖(六)，同理可證

正五邊形 ABCDE 邊長 $\overline{AB}=(4+2\tan 36°)\cdot r$

S(5,3)=正五邊形 ABCDE 周長=5 $\overline{AB}$ =$5(4+2\tan 36°)\cdot r$

正五邊形 PQSTU 面積以切割成 5 個頂角為 36 度的等腰三角形計算之，

A(5,3)= 正五邊形 PQSTU+5 個長方形 FGQP +5 個箏形 AFPO

$$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 2r\cot 36°+5\times 4r^2+5r^2\tan 36°$$

$=5(4\cot 36° + 4 + \tan 36°) \cdot r^2$

3.每邊內部切 n 個圓

依圖(五)及圖(六)，當 k 值增加為 k+1 時，會讓 5 個矩形的較長邊增加 2r，內部正五邊形

PQSTU 邊長也是增加 2r，則正五邊形 PQSTU 面積則增加 $5 \cdot (2k-1) r^2 \cot 36°$

因此我們推得 $S(5,4) = 5(6 + 2tan36°) \cdot r$

$A(5,4) = 5(9\cot 36° + 6 + \tan 36°) \cdot r^2$

根據數量規則推論　$S(5,n) = 5(2(n-1) + 2tan36°) \cdot r$

$A(5,n) = 5((n-1)^2 \cot 36° + 2(n-1) + tan36°) \cdot r^2$

我們可以以數學歸納法證明結果是正確的。

(三)正 m 邊形

對於任意大於或等於 3 的正整數 m，在正 m 邊形中，我們觀察上述方法所得結果，依相同方法來求 S(m,n)及 A(m,n)的通式。

1.每邊內部切 2 個圓(n=2)

由前面之推論及證明，發現：

$S(3,2) = 3(2 + 2tan60°) \cdot r$，$A(3,2) = 3(\cot 60° + 2 + \tan 60°)\, r^2$

$S(4,2) = 4(2 + 2tan45°) \cdot r$，$A(4,2) = 4(\cot 45° + 2 + \tan 45°) \cdot r^2$

$S(5,2) = 5(2 + 2tan36°) \cdot r$，$A(5,2) = 5(\cot 36° + 2 + \tan 36°) \cdot r^2$

由此可推得 $S(m,2) = \mathrm{m}\left(2 + 2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right) \cdot r$，

$A(m,2) = \mathrm{m}\left(\cot\frac{180^{\circ}}{m} + 2 + \tan\frac{180^{\circ}}{m}\right) \cdot r^2$

2.每邊內部切 3 個圓(n=3)

$S(3,3) = 3(4 + 2tan60°) \cdot r$，$A(3,3) = 3(4\cot 60° + 4 + \tan 60°)\, r^2$

$S(4,3)=4(4+2tan45°)\cdot r$，$A(4,3)=4(4\cot 45°+4+\tan 45°)\cdot r^2$

$S(5,3)=5(4+2tan36°)\cdot r$，$A(5,3)=5(4\cot 36°+4+\tan 36°)\cdot r^2$

由此可推得

$S(m,3)=\mathrm{m}\left(4+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$， $A(m,3)=\mathrm{m}\left(4\cot\frac{180^{\circ}}{m}+4+\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r^2$

3.**每邊內部切 n 個圓**

$S(3,n)=3(2(n-1)+2tan60°)\cdot r$，$A(3,n)=3((n-1)^2\cot 60°+2(n-1)+\tan 60°)\ r^2$

$S(4,n)=4(2(n-1)+2tan45°)\cdot r$，$A(4,n)=4((n-1)^2\cot 45°+2(n-1)+\tan 45°)r^2$

$S(5,n)=5(2(n-1)+2tan36°)\cdot r$，$A(5,n)=5((n-1)^2\cot 36°+2(n-1)+\tan 36°)r^2$

我們一樣可以運用數學歸納法證，得到以下通式：

$S(m,n)=\mathrm{m}\left(2(n-1)+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$，

$A(m,n)=\mathrm{m}\left((n-1)^2\cot\frac{180^{\circ}}{m}+2(n-1)+\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r^2$

將結果表列如下：

（表一）正 m 邊形邊長

正 m 邊形邊長					
		m=3	m=4	m=5	m
每一邊圓之個數	n=2	$(2+2tan60°)\cdot r$	$(2+2tan45°)\cdot r$	$(2+tan36°)\cdot r$	$\left(2+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
	n=3	$(4+2tan60°)\cdot r$	$(4+2tan45°)\cdot r$	$(4+tan36°)\cdot r$	$\left(4+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
	n=4	$(6+2tan60°)\cdot r$	$(6+2tan45°)\cdot r$	$(6+tan36°)\cdot r$	$\left(6+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
	n	$(2(n-1)+2tan60°)\cdot r$	$(2(n-1)+2tan45°)\cdot r$	$(2(n-1)+2tan36°)\cdot r$	$\left(2(n-1)+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$

（表二）正 m 邊形周長 S(m,n)

正 m 邊形周長 S(m,n)					
邊數		m=3	m=4	m=5	m
每一邊圓之個數	n=2	$3(2+2tan60°)\cdot r$	$4(2+2tan45°)\cdot r$	$5(2+tan36°)\cdot r$	$\mathrm{m}\left(2+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
	n=3	$3(4+2tan60°)\cdot r$	$4(4+2tan45°)\cdot r$	$5(4+tan36°)\cdot r$	$\mathrm{m}\left(4+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
	n=4	$3(6+2tan60°)\cdot r$	$4(6+2tan45°)\cdot r$	$5(6+tan36°)\cdot r$	$\mathrm{m}\left(6+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
	n	$3(2(n-1)+2tan60°)\cdot r$	$4(2(n-1)+2tan45°)\cdot r$	$5(2(n-1)+2tan36°)\cdot r$	$\mathrm{m}\left(2(n-1)+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$

（表三）正 m 邊形面積 A(m,n)

		正 m 邊形面積 A(m,n)			
		m=3	m=4	m=5	m
每一邊圓之個數	n=2	$3(1\cot 60°+2+\tan 60°)\,r^2$	$4(1\cot 45°+2+\tan 45°)\cdot r^2$	$5(1\cot 36°+2+\tan 36°)\cdot r^2$	$\mathrm{m}\left(1\cot\frac{180^{\circ}}{m}+2+\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r^2$
	n=3	$3(4\cot 60°+4+\tan 60°)\,r^2$	$4(4\cot 45°+4+\tan 45°)\cdot r^2$	$5(4\cot 36°+4+\tan 36°)\cdot r^2$	$\mathrm{m}\left(4\cot\frac{180^{\circ}}{m}+4+\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r^2$
	n=4	$3(9\cot 60°+6+\tan 60°)\,r^2$	$4(9\cot 45°+6+\tan 45°)\cdot r^2$	$5(9\cot 36°+6+\tan 36°)\cdot r^2$	$\mathrm{m}\left(9\cot\frac{180^{\circ}}{m}+6+\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r^2$
	n	$3((n-1)^2\cot 60°+2(n-1)+\tan 60°)\cdot r^2$	$4((n-1)^2\cot 45°+2(n-1)+\tan 45°)\cdot r^2$	$5((n-1)^2\cot 36°+2(n-1)+\tan 36°)\cdot r^2$	$\mathrm{m}\left((n-1)^2\cot\frac{180^{\circ}}{m}+2(n-1)+\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r^2$

(四)討論：

1. 以正三角形為例，每邊內側相切的圓之個數增加 1 個，則周長增加 6r。

   若為正 m 角形，每一邊內側相切的圓之個數增加 1 個，則周長增加 2mr。

2. 當 n 固定時，則正三角形周長 S(3,n)通式中的角度為 360 度的 6 分之 1，即為 60 度。

也就是說，正 m 邊形周長通式中之角度為 180 度的 m 分之一。

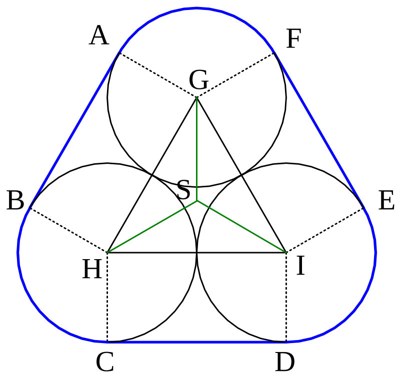
三、 探討「圓角 m 邊形」的周長 S’(m,n)及面積 A’(m,n)與 r 的關係

將「尖角正 m 邊形」的每一個內角兩邊與圓弧所圍區域截去不要，得到這些圓的外公切線段及圓弧所圍內部區域，我們定義為「圓角 m 邊形」，接著，我們探討圓角 m 邊形之周長 **S’(m,n)**及面積 **A’(m,n)**，並試著找出其通式。

(一)正三角形(m=3 時)

1. 每邊內部切 2 個圓(n=2)

如圖(七)，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 分別為圓 G 與圓 H、圓 H 與圓 I、圓 I 與圓 G 的外公切線段。故四邊形 ABHG、CDIH、EFGI 皆為長、寬分別為 2r 及 r 的長方形



圖(七)

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=2r$，$\angle AGH=\angle FGI=90^\circ$

ΔGHI 為邊長 2r 的正三角形$\Rightarrow \angle HGI=60^\circ$，

$\therefore \angle AGF=360^\circ-\angle AGH-\angle FGI-\angle HGI$

$=360^\circ-90^\circ-90^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\therefore$ 弧長 AF$=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times 2\pi r=\dfrac{2}{3}\pi r$

同理，弧長 BC＝弧長 DE＝$\dfrac{2}{3}\pi r$

則圓弧部分的長度和= 3×弧長 AF=2πr

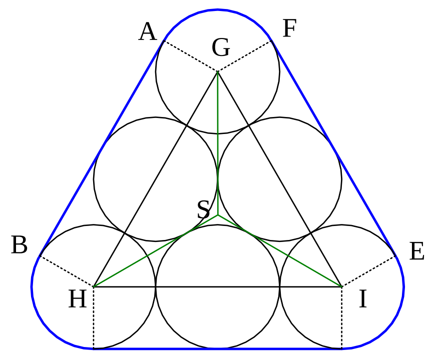
故其圓角三角形周長 S’(3,2)=$3\overline{AB}$＋3 弧長 AF ＝$3\times 2r+2\pi r$

面積部分，我們發現：扇形 AGF=扇形 BCH=扇形 DEI，面積和為πr^2

所以，面積 A’(3,2)=ΔGHI+3 個長方形 ABHG+扇形 AGF+扇形 BCH+扇形 DEI

$$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r\cot 60^\circ+3\cdot 2r^2+3\times\frac{\pi r^2}{3}=3\times r^2\cot 60^\circ+6r^2+\pi r^2$$

2. 每邊內部切 3 個圓(n=3)



圖(八)

如圖(八)，同理可得，若每邊內側外切 3 個圓時，

邊長的直線部分會增加 2r，圓弧部分則不會改變，

故 S’(3,3)＝$3\overline{AB}$＋3 弧長 AF $=3\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

且 S’(3,3)=S’(3,2)+6r

所圍內部區域面積 A’(3,3)=正ΔGHI+3 個長方形 ABHG＋πr^2

$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\mathrm{r}\cdot 2\mathrm{r}\cot 60°+3\cdot 4r^2+\pi r^2$ $=3\times 4r^2\cot 60°+12r^2+\pi r^2$

且 A’(3,3)=A’(3,2)+ $(6r^2+3\times 3r^2\cot 60°)$

3. 每邊內部切 n 個圓

依圖(七)及圖(八)，當 k 值增加為 k+1 時，會讓 3 個矩形的較長邊增加 2r，所以正ΔGHI 邊長也是增加 2r，則正ΔJLK面積則增加$3\cdot(2\mathrm{k}-1)r^2\cot 60°$

因此我們推得 S’(3,4) $=3\times 6\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

A’(3,4) $=3\times 9r^2\cot 60°+18r^2+\pi r^2$

我們觀察數量規則，猜想 S’(3,n) $=3\times 2(\mathrm{n}-1)\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

A’(3,n) $=3\times(\mathrm{n}-1)^2r^2\cot 60°+6(\mathrm{n}-1)r^2+\pi r^2$

利用「**數學歸納法**」證明，假設 n=k 時，

S’(3,k)= $3\times 2(\mathrm{k}-1)\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$ =

A’(3,k) $=3\times(\mathrm{k}-1)^2r^2\cot 60°+6(\mathrm{k}-1)r^2+\pi r^2$ 皆成立

當 n=k+1 時，因為 3 個矩形的較長邊會增加 2r，S’(3,k+1)相較於 S’(3,k)增加 6r

S’(3,k+1) = S’(3,k)+6r = $3\times 2(\mathrm{k}-1)\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}+6\mathrm{r}$

$=3\times 2\mathrm{k}\,\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$ 得證

因此證得 S’(3,n) $=3\times 2(\mathrm{n}-1)\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

同理，A'(3,k+1)相較於 A'(3,k)，矩形面積增加$3\cdot 2r^2$，

正ΔJLK邊長由(2k-2) r 增加 2r 為 2kr，

正ΔJLK面積增加$3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{kr}\cdot\mathrm{kr}\cot 60° - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\mathrm{k}-2)\mathrm{r}\cdot(\mathrm{k}-1)\mathrm{r}\cot 60°$

$$= 3\cdot(2\mathrm{k}-1)r^2\cot 60°$$

所以，$A'(3,k+1) = A'(3,k) + 3\cdot 2r^2 + 3\cdot(2\mathrm{k}-1)r^2\cot 60°$

$= 3\times(\mathrm{k}-1)^2 r^2\cot 60° + 6(\mathrm{k}-1)r^2 + \pi r^2 + 3\cdot 2r^2 + 3\cdot(2\mathrm{k}-1)r^2\cot 60°$

$= 3\times\mathrm{k}^2 r^2\cot 60° + 6\mathrm{k}r^2 + \pi r^2$

因此 $A'(3,n) = 3\times(\mathrm{n}-1)^2 r^2\cot 60° + 6(\mathrm{n}-1)r^2 + \pi r^2$ 得證

(二) 正方形(m=4 時)

1. 每邊內部切 2 個圓(n=2)

如圖(九)，$\overline{AH}$、$\overline{BC}$、$\overline{DE}$、$\overline{FG}$分別為圓 M 與圓 O、圓 M 與圓 N、圓 N 與圓 P、圓 P 與圓 O 之外公切線，四邊形 MNPO 為一邊長為 2r 之正方形

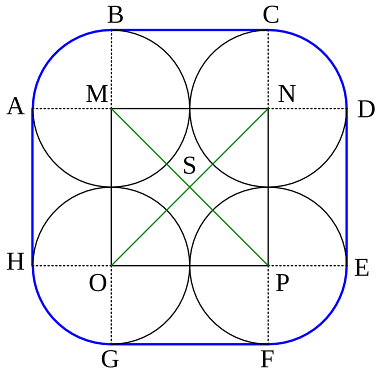
$\therefore \angle AMB = \angle CND = \angle EPF = \angle GOH = 90°$

$\Rightarrow$ 弧長$AB = \dfrac{90°}{360°}\times 2\pi r = \dfrac{1}{2}\pi r$

同理，弧長 CD＝弧長 EF＝弧長 GH＝$\dfrac{1}{2}\pi r$

4 個弧長的長度和=4 弧長 AB=$2\pi r$

故周長 S'(4,2)＝$3\overline{AB}$＋3 弧長 AF＝$4\times 2r + 2\pi r$



圖(九)

面積 A'(4,2)=正方形 MOPN+長方形 AHOM+長方形 BCNM+長方形 DEPN+長方形 FGOP
+扇形 AMB+扇形 CND+扇形 EPF+扇形 GOH

$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}\cot 45° + 4\cdot 2r^2 + 4\times\frac{\pi r^2}{4}$ $=4\times 1r^2\cot 45° + 8r^2 + \pi r^2$

2. 每邊內部切 3 個圓(n=3)

如圖(十)，同理可證，若每邊內側外切 3 個圓時，圓角四邊形之周長

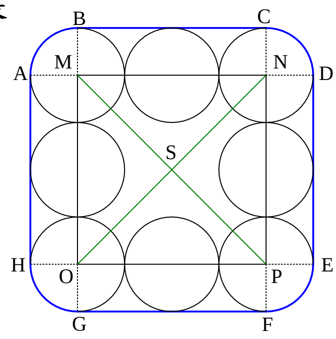
$S'(4,3) = \overline{AH} + \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FG}$ + 弧長AB + 弧長CD + 弧長EF + 弧長GH

$= 4\times 4r + 4\times \frac{1}{2}\pi r = 4\times 4r + 2\pi r$

面積 A'(4,3)＝正方形 MOPN

+長方形 AHOM+長方形 BCNM+長方形 DEPN+長方形 FGOP

+扇形 AMB+扇形 CND+扇形 EPF+扇形 GOH



圖(十)

$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 2r\cot 45° + 4\cdot 4r^2 + 4\times\frac{\pi r^2}{4} = 4\times 4r^2\cot 45° + 16r^2 + \pi r^2$

3. **每邊內部切 n 個圓**

同理可求出，每邊內側外切 n 個圓時，則圓角四邊形之

周長 $S'(4,n) = 4\times 2(n-1)r + 2\pi r$

面積 $A'(4,n) = 4\times (n-1)^2 r^2\cot 45° + 4\times 2(n-1)r^2 + \pi r^2$

(三)正五邊形(m=5 時)

1. 每邊內部切 2 個圓(n=2)

如圖(十一)，$\overline{AJ}$、$\overline{BC}$、$\overline{DE}$、$\overline{FG}$、$\overline{HI}$ 分別為圓 Q 與圓 M、圓 M 與圓 N、圓 N 與圓 O、圓 O 與圓 P、圓 P 與圓 Q 的公切線，故四邊形 AMJQ、BCNM、DEON、FGPO、HIQP 皆為長寬分別為 2r 與 r 的長方形，

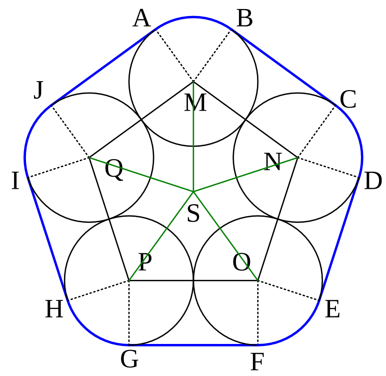
$\because$ MNOPQ 為正五邊形 故內角 $\angle QMN = 108°$，

又 $\angle AMQ = \angle BMN = 90°$

$\therefore \angle AMB = 360° - 108° - 90° - 90° = 72°$

$\Rightarrow$ 弧長$AB = \frac{72}{360}\times 2\pi r = \frac{2}{5}\pi r$

同理，弧長 CD＝弧長 EF＝弧長 GH＝弧長 IJ＝$\frac{2}{5}\pi r$



圖(十一)

圓角五邊形周長 $S'(5,2) = 5\overline{BC}$ + 5 弧長 AB $= 5\times 2r + 2\pi r$

面積 A'(5,2)=正五邊形 MNOPQ＋5 個長方形 AJQM ＋5 個扇形 AMB

$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r\cot 36° + 5\cdot 2r^2 + 5\times\frac{\pi r^2}{5} = 5\times r^2\cot 36° + 10r^2 + \pi r^2$

2. 每邊內部切 3 個圓(n=3)

如圖(十二)，同理可證，圓角五邊形周長 S’(5,3) =$5\overline{BC}$＋5 弧長 AB

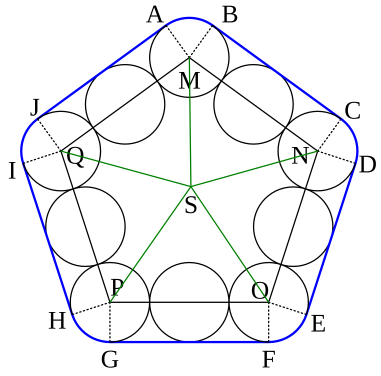
$$=5\times 4r+2\pi r$$

面積 A’(5,2)=正五邊形 MNOPQ＋5 個長方形 AJQM

＋5 個扇形 AMB

$$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 2r\cot 36°+5\cdot 4r^2+5\times\frac{\pi r^2}{5}$$

$$=5\times 4r^2\cot 36°+5\times 4r^2+\pi r^2$$



圖(十二)

3. 每邊內部切 n 個圓

以數學歸納法可以推論得，若每邊 n 個圓時

S’(5,3) =$5\overline{BC}$＋5 弧長 AB＝$5\times 2(n-1)r+2\pi r$

面積 A’(5,2)=正五邊形 MNOPQ＋5 個長方形 AJQM＋5 個扇形 AMB

$$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2(n-1)r\cdot(n-1)r\cot 36°+5\cdot 2(n-1)r^2+5\times\frac{\pi r^2}{5}$$

$$=5\times(n-1)^2r^2\cot 36°+5\times 2(n-1)r^2+\pi r^2$$

(四)正 m 邊形

1. **每邊內部切 2 個圓(n=2)**

由前面之證明可看出外切圓角之周長及面積

S’(3,2)＝$3\times 2r+2\pi r$ ， A’(3,2)＝$3\times 1r^2\cot 60°+6r^2+\pi r^2$

S’(4,2)＝$4\times 2r+2\pi r$ ， A’(4,2)＝$4\times 1r^2\cot 45°+8r^2+\pi r^2$

S’(5,2)＝$5\times 2r+2\pi r$ ， A’(5,2)＝$5\times 1r^2\cot 36°+10r^2+\pi r^2$

同理可以證明

S’(m,2)＝$m \times 2\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$ ，A’(m,2) ＝$m \times 1r^2 \cot\frac{180°}{m} + 2\mathrm{m}r^2 + \pi r^2$

2. **每邊內部切 3 個圓(n=3)**

由前面之證明可看出外切圓角之周長及面積

S’(3,3)＝$3 \times \mathbf{4}\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$ ， A’(3,3)＝$3 \times \mathbf{4}r^2\cot 60° + 3 \times \mathbf{4}r^2 + \pi r^2$

S’(4,3)＝$4 \times \mathbf{4}\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$ ， A’(4,3)＝$4 \times \mathbf{4}r^2\cot 45° + 4 \times \mathbf{4}r^2 + \pi r^2$

S’(5,3)＝$5 \times \mathbf{4}\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$ ， A’(5,3)＝$5 \times \mathbf{4}r^2\cot 36° + 5 \times \mathbf{4}r^2 + \pi r^2$

同理可以證明

S’(m,3)＝$m \times \mathbf{4}\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$ ，A’(m,3) ＝$m \times \mathbf{4}r^2 \cot\frac{180°}{m} + \mathrm{m} \times \mathbf{4}r^2 + \pi r^2$

3. **每邊內部切 n 個圓**

由前面之證明可看出外切圓角之周長及面積

S’(3,n)＝$3 \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$，A’(3,n)＝$3 \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})^2 r^2\cot 60° + 3 \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})r^2 + \pi r^2$

S’(4,n)＝$4 \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$，A’(4,n)＝$4 \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})^2 r^2\cot 45° + 4 \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})r^2 + \pi r^2$

S’(5,n)＝$5 \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$，A’(5,n)＝$5 \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})^2 r^2\cot 36° + 5 \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})r^2 + \pi r^2$

同理可以證明

S’(m,n)＝$\mathrm{m} \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathrm{r} + 2\pi\mathrm{r}$，

A’(m,n)＝$m \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})^2 r^2 \cot\frac{180°}{m} + \mathrm{m} \times \mathbf{2}(\mathbf{n} - \mathbf{1})r^2 + \pi r^2$

(五)、討論：

將上述所得到之結果，彙整表列如(表四)及(表五)：

1.以正三角形為例，圓角三角形之周長，隨著 n 增加 1，S’(3,n)會增加 6r。

推廣至圓角 m 邊形周長 S’(m,n)隨著 n 增加而等差的增加，其公差為 2mr。

2.以每一邊圓之個數 2 個為例，圓角三角形之周長，隨著 m 增加 1，S’(m,2)會增加 2r。

推廣至圓角 m 邊形周長 S’(m,n)隨著 m 增加而等差的增加，其公差為 2(n-1)r。

3.圓角 m 邊形，其轉角之圓弧長總和必為 2πr，即為一個圓之周長 2πr。

（表四）圓角 m 邊形周長 S’(m,n)

邊數		m=3	m=4	m=5	m
每一邊圓之個數	n=2	$3\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$4\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$5\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$m\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$
	n=3	$3\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$4\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$5\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$m\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$
	n=4	$3\times 6\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$4\times 6\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$5\times 6\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$\mathrm{m}\times 6\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$
	n	$3\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$4\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$5\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$\mathrm{m}\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

2mr

2mr

2(n-1)r　　2(n-1)r

（表五）圓角 m 邊形面積 A’(m,n)

邊數		m=3	m=4	m=5	m
每一邊圓之個數	n=2	$3\times 1r^2\cot 60°+3\times 2r^2+\pi r^2$	$4\times 1r^2\cot 45°+4\times 2r^2+\pi r^2$	$5\times 1r^2\cot 36°+5\times 2r^2+\pi r^2$	$m\times 1r^2\cot\frac{180°}{m}+\mathrm{m}\times 2r^2+\pi r^2$
	n=3	$3\times 4r^2\cot 60°+3\times 4r^2+\pi r^2$	$4\times 4r^2\cot 45°+4\times 4r^2+\pi r^2$	$5\times 4r^2\cot 36°+5\times 4r^2+\pi r^2$	$m\times 4r^2\cot\frac{180°}{m}+\mathrm{m}\times 4r^2+\pi r^2$
	n=4	$3\times 9r^2\cot 60°+3\times 6r^2+\pi r^2$	$4\times 9r^2\cot 45°+4\times 6r^2+\pi r^2$	$5\times 9r^2\cot 36°+5\times 6r^2+\pi r^2$	$m\times 9r^2\cot\frac{180°}{m}+\mathrm{m}\times 6r^2+\pi r^2$
	n	$3\times(n-1)^2r^2\cot 60°+3\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})r^2+\pi r^2$	$4\times(n-1)^2r^2\cot 45°+4\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})r^2+\pi r^2$	$5\times(n-1)^2r^2\cot 36°+5\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})r^2+\pi r^2$	$m\times(n-1)^2r^2\cot\frac{180°}{m}+\mathrm{m}\times 2(\mathbf{n}-\mathbf{1})r^2+\pi r^2$

4. 圓角 m 邊形，其轉角之 m 個扇形面積總和必為定值πr^2，即為一個圓之面積。

因此當 m 值與 n 值變大時，圓角部分的面積，占 A’(m,n)的比例就會相對變得比較小。

伍、綜合討論

前兩節中我們已經成功找出正 m 邊形的 S(m,n)及 A(m,n)，及圓角 m 邊形 S’(m,n)及 A’(m,n)。在本節中我們要比較 S(m,n)與 S’(m,n)的關係，A(m,n)與 A’(m,n)的關係。

一、 比較 S(m,n)與 S’(m,n) ，並進行數值分析：

(一)先比較 S(m,2)與 S’(m,2)：

（表六）S(m,2)與 S’(m,2)比較表

邊數	正三角形(m=3)	正四邊形(m=4)	正五邊形(m=5)	正 m 邊形
S(m,2)	$3(2+2tan60°)\cdot r$	$4(2+2tan45°)\cdot r$	$5(2+2tan36°)\cdot r$	$\mathrm{m}\left(2+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
S’(m,2)	$3\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$4\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$5\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$m\times 2\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

由表(六）中可看出：

S(m,2)為 2mr，再加上半徑 r 的圓外切正 m 邊形周長$2\mathrm{m}\left(\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$。

而 S’(m,2)為 2mr，再加上半徑 r 的圓周長$2\pi\mathrm{r}$，

(二)比較 S(m,3)與 S’(m,3)：

表(七）S(m,3)與 S’(m,3)比較表

邊數	正三角形(m=3)	正四邊形(m=4)	正五邊形(m=5)	正 m 邊形
S(m,3)	$3(4+2tan60°)\cdot r$	$4(4+2tan45°)\cdot r$	$5(4+tan36°)\cdot r$	$\mathrm{m}\left(4+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)\cdot r$
S’(m,3)	$3\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$4\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$5\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$	$m\times 4\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

經比較表(六）與表(七）後可發現，不論是外切圓角或是外切尖角，其周長皆多了 2mr。

由此可知每邊多一個圓，則每邊之邊長就增加 2r，而邊長就增加了 2mr。

(三)比較 S(m,n)與 S'(m,n)：

S(m,n)與 S'(m,n)分別由 $\mathrm{m}\times\mathbf{2(n-1)}\mathrm{r}$加上尖角部分$\mathrm{m}\times\left(2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$及圓角部分$2\pi\mathrm{r}$。

1. 正 m 多邊形不管 m 為多少，圓角部分皆固定為$2\pi\mathrm{r}$。
2. 因為多邊形邊數 m 越大，正多邊形的內角越越大，則尖角部分長度$\mathrm{m}\times\left(2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$會隨著 m 變大而變小。當 m 趨近於無窮大時，$\mathrm{m}\times\left(2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$會趨近於$2\pi\mathrm{r}$，如表(八)及表(九)。
3. 不管是尖角部分或是圓角部分其值都與 n 無關。

表(八) S(m,n)與 S'(m,n)比較表一

邊數 m	正 m 邊形
S(m,n)	$\mathrm{m}\times\left(2(n-1)+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$
S'(m,n)	$\mathrm{m}\times\mathbf{2(n-1)}\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}$

(表九) S(m,n)與 S'(m,n)比較表二

m 值	尖角部分 $\mathrm{m}\times\left(2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$	圓角部分 $2\pi\mathrm{r}$
3	10.392 r	6.283 r
4	8.000 r	6.283 r
5	7.265 r	6.283 r
6	6.928 r	6.283 r
10	6.498 r	6.283 r
20	6.335 r	6.283 r
30	6.306 r	6.283 r
60	6.289 r	6.283 r
100	6.285 r	6.283 r
200	6.284r	6.283r

(四) S(m,n)與 S'(m,n)進行數值分析：

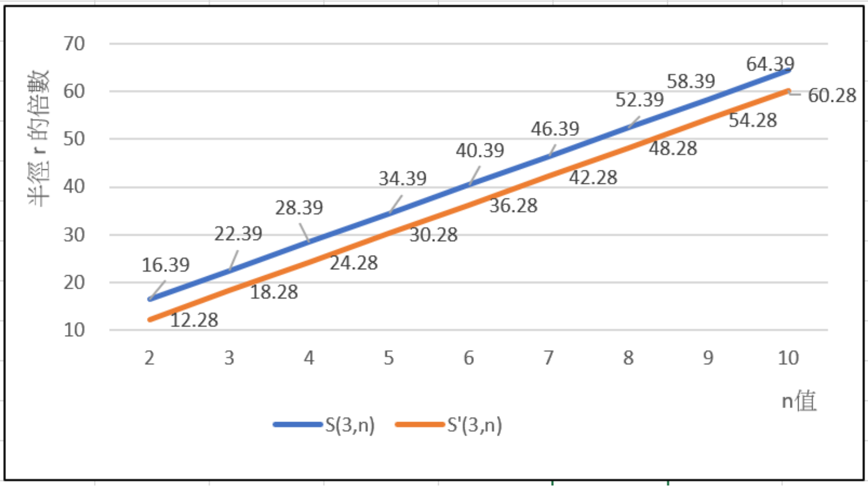
有了上述通式後，我們可以輕鬆的求出正 m 邊形每邊 n 個圓之周長。

接著我們以正三角形及正方形為例，將每邊 2～10 個圓的情況下將周長製成表(十)及表(十一)，並繪成圖（十九）及圖（廿），可發現所繪成折線圖其實為**直線**。

隨著 m 增加，S(m,n)與 S'(m,n)的差值會越來越趨近於 0，如表(十二)。

表(十）S(3,n)與 S’(3,n)比較表三

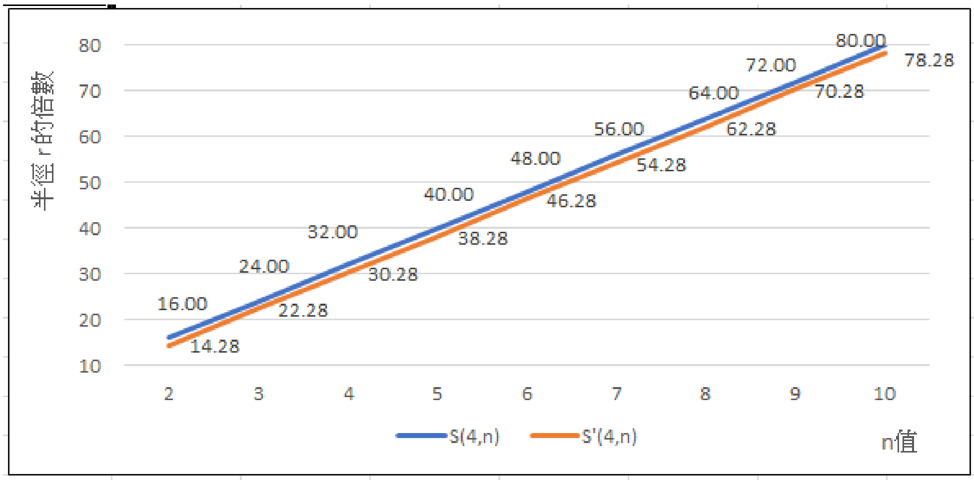
m 值	n 值	S(3,n)	S’(3,n)	S(3,n)- S’(3,n) 差值
3	2	16.39 r	12.28 r	4.11 r
3	3	22.39 r	18.28 r	4.11 r
3	4	28.39 r	24.28 r	4.11 r
3	5	34.39 r	30.28 r	4.11 r
3	6	40.39 r	36.28 r	4.11 r
3	7	46.39 r	42.28 r	4.11 r
3	8	52.39 r	48.28 r	4.11 r
3	9	58.39 r	54.28 r	4.11 r
3	10	64.39 r	60.28 r	4.11 r



圖（十九）不同 n 值之 S(3,n)與 S’(3,n)圖

表(十一）S(4,n)與 S’(4,n)比較表三

m 值	n 值	S(4,n)	S’(4,n)	S(4,n)- S’(4,n) 差值
4	2	16.00 r	14.28 r	1.72 r
4	3	24.00 r	22.28 r	1.72 r
4	4	32.00 r	30.28 r	1.72 r
4	5	40.00 r	38.28 r	1.72 r
4	6	48.00 r	46.28 r	1.72 r
4	7	56.00 r	54.28 r	1.72 r
4	8	64.00 r	62.28 r	1.72 r
4	9	72.00 r	70.28 r	1.72 r
4	10	80.00 r	78.28 r	1.72 r



圖(廿) 不同 n 值之 S(4,n)與 S’(4,n)圖

表(十二) S(m,n)與 S’(m,n)的差值比較

m 值	S(m,n)- S’(m,n) 差值
3	4.11 r
4	1.72 r
5	0.98 r
6	0.65 r
7	0.46 r
8	0.34 r
9	0.27 r
10	0.22 r

二、 比較 A(m,n)與 A’(m,n)，並進行數值分析：

(一) 將 A(m,n)與 A’(m,n)整理如表(十三)，發現 A(m,n)及 A’(m,n)的差別在於尖角部分的面積 $\mathrm{m} \times \tan\frac{180^\circ}{m} \cdot r^2$及圓角部分的面積$\pi r^2$。

(二) 尖角部分的面積會隨著 m 的變大，其值逐漸逼近於πr^2，與 n 無關。

(三) 圓角部分的面積πr^2，不管 m、n 值多少，都是固定值。

(四) 不管是尖角部分或是圓角部分其值都與 n 無關。

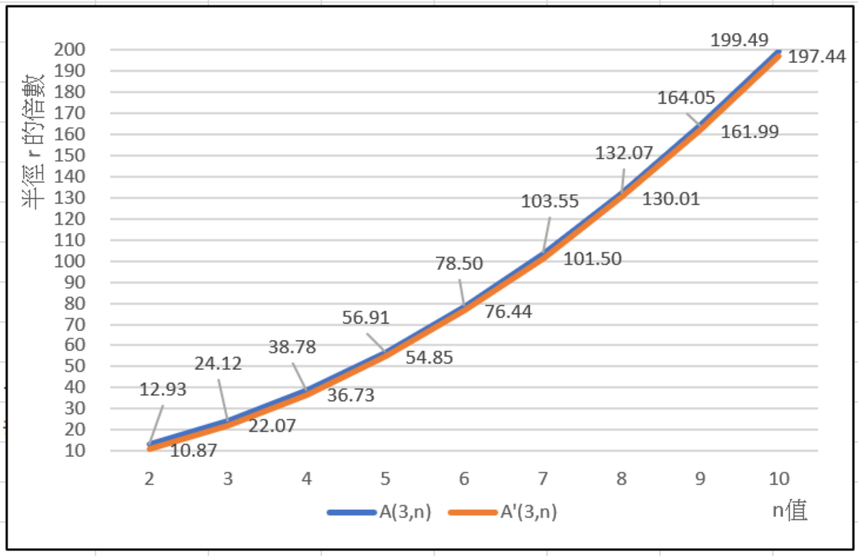
(五) m=3 為例，不管 n 值為多少，A(3,n)與 A’(3,n)的差約為 2.05r^2，如表(十四) 及圖(廿一)。m=4 為例，不管 n 值為多少，A(4,n)與 A’(4,n)的差約為 0.86r^2，如表(十五) 及圖(廿二)。隨著 m 增加，A(m,n)與 A’(m,n)的差值會趨近於 0，如表(十六)及圖(廿三)。

表(十三) A(m,n)與 A'(m,n)比較表

邊數 m	正 m 邊形
A(m,n)	$m\left((n-1)^2\cot\frac{180^\circ}{m}+2(n-1)+\tan\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot r^2$
A'(m,n)	$m\times(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^2r^2\cot\frac{180°}{m}+m\times\mathbf{2}(\mathbf{n}-\mathbf{1})r^2+\boldsymbol{\pi r^2}$

表(十四) A(3,n)與 A'(3,n)比較表一

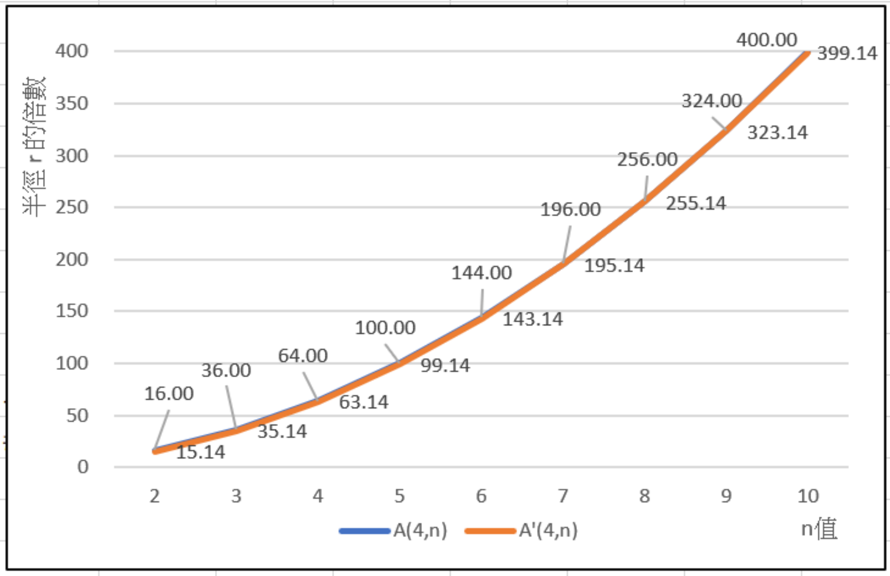
m 值	n 值	A(3,n)	A'(3,n)	A(3,n)-A'(3,n)差值	A(3,n)/A'(3,n)比值
3	2	$12.93\cdot r^2$	$10.87\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.19
3	3	$24.12\cdot r^2$	$22.07\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.09
3	4	$38.78\cdot r^2$	$36.73\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.06
3	5	$56.91\cdot r^2$	$54.85\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.04
3	6	$78.50\cdot r^2$	$76.44\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.03
3	7	$103.55\cdot r^2$	$101.50\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.02
3	8	$132.07\cdot r^2$	$130.01\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.02
3	9	$164.05\cdot r^2$	$161.99\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.01
3	10	$199.49\cdot r^2$	$197.44\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.01



圖(廿一) 不同 n 值之 A(3,n)與 A'(3,n)比較圖

（表十五）A(4,n)與 A’(4,n)比較表二

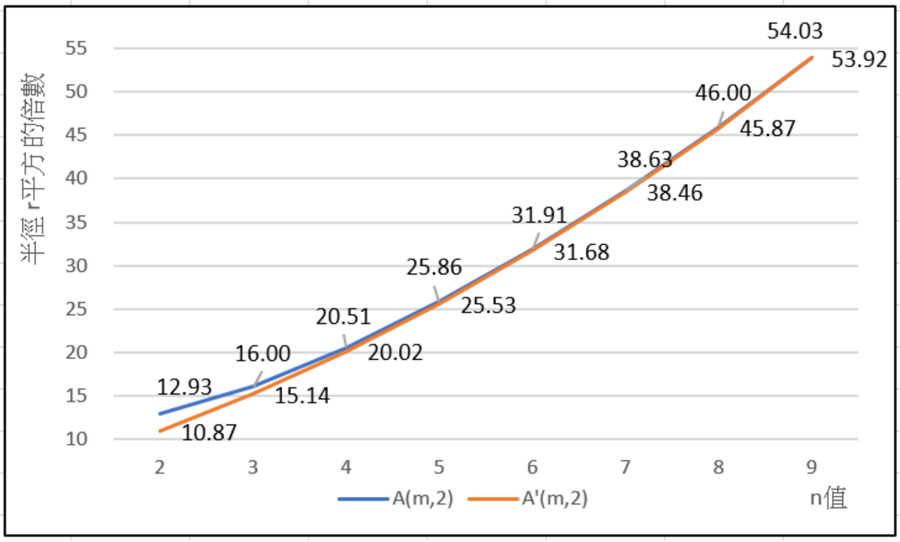
m 值	n 值	A(4,n)	A’(4,n)	A(4,n)-A’(4,n)差值	A(4,n)/A’(4,n)比值
4	2	$16.00\cdot r^2$	$15.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.06
4	3	$36.00\cdot r^2$	$35.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.02
4	4	$64.00\cdot r^2$	$63.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.01
4	5	$100.00\cdot r^2$	$99.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.01
4	6	$144.00\cdot r^2$	$143.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.01
4	7	$196.00\cdot r^2$	$195.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.00
4	8	$256.00\cdot r^2$	$255.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.00
4	9	$324.00\cdot r^2$	$323.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.00
4	10	$400.00\cdot r^2$	$399.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.00



圖(廿二) 不同 n 值之 A(4,n)與 A’(4,n)比較圖

表(十六）A(m,n)與 A’(m,n)比較表

m 值	n 值	A(m,2)	A’(m,2)	A(m,2)-A’(m,2)差值	A(m,2)/A’(m,2)比值
3	n	$12.93\cdot r^2$	$10.87\cdot r^2$	**$2.05\cdot r^2$**	1.19
4	n	$16.00\cdot r^2$	$15.14\cdot r^2$	**$0.86\cdot r^2$**	1.06
5	n	$20.51\cdot r^2$	$20.02\cdot r^2$	**$0.49\cdot r^2$**	1.02
6	n	$25.86\cdot r^2$	$25.53\cdot r^2$	**$0.32\cdot r^2$**	1.01
7	n	$31.91\cdot r^2$	$31.68\cdot r^2$	**$0.23\cdot r^2$**	1.01
8	n	$38.63\cdot r^2$	$38.46\cdot r^2$	**$0.17\cdot r^2$**	1.00
9	n	$46.00\cdot r^2$	$45.87\cdot r^2$	**$0.13\cdot r^2$**	1.00
10	n	$54.03\cdot r^2$	$53.92\cdot r^2$	**$0.11\cdot r^2$**	1.00



圖（廿三）不同 m 值之 A(m,n)與 A'(m,n)比較圖

三、 證明 S(m,n)、S'(m,n)的線性關係：

(一) 從表(八)，S(m,n)＝ $m\times\left(2(n-1)+2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$，若將先將 m 視為定值，重新整理函數關係式 S(m,n)＝$2mr\cdot n+(2mr\tan\frac{180^{\circ}}{m}-2mr)$，則發現 S(m,n)為 n 的一次函數，斜率為 2mr，常數項為$(2mr\tan\frac{180^{\circ}}{m}-2mr)$。

(二) 同理從表(八)，S'(m,n)＝ $m\times\mathbf{2(n-1)}r+2\pi r$，若先將 m 視為定值，重新整理函數關係式 S'(m,n)＝$2mr\cdot n+(2\pi r-2mr)$，則發現 S'(m,n)也是 n 的一次函數，斜率 2mr，常數項部分為$(2\pi r-2mr)$。

(三) 由上面關係式，我們證得 S(m,n)及 S'(m,n)是兩條斜率皆為 2mr 的平行直線。

(四) S(m,n)－S'(m,n)＝〔$2mr\cdot n+\left(2mr\tan\frac{180^{\circ}}{m}-2mr\right)$〕－〔$2mr\cdot n+(2\pi r-2mr)$〕

$$=2m\tan\frac{180^{\circ}}{m}\cdot r-2\pi r$$ 為一個常數，不過隨著m越大，$2m\tan\frac{180^{\circ}}{m}\cdot r$ 會逐漸逼近 $2\pi r$。

例如：當 m=3 代入時，S(3,n)－S'(3,n)＝$6\tan60^{\circ}\cdot r-2\pi r=(6\sqrt{3}-2\pi)r$

$$=(6\times1.732-2\times3.14)r=4.11\cdot r$$

當 m=4 代入時，S(4,n)－S'(4,n)＝$8\tan45^{\circ}\cdot r-2\pi r=(8-2\pi)r$

$$=(8-2\times3.14)r=1.72\cdot r$$

此處計算結果均與表(十)與表(十一)的數值分析結果一致。

四、 A(m,n)與 A'(m,n)的二次函數關係比較：

(一) 從表(十三)，A(m,n)＝$m\left((n-1)^2\cot\frac{180^\circ}{m}+2(n-1)+\tan\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot r^2$，重新整理關係式

$$A(m,n)=mr^2cot\frac{180^\circ}{m}(n^2-2n+1)+2mr^2(n-1)+mr^2\tan\frac{180^\circ}{m}$$

$$=mr^2cot\frac{180^\circ}{m}\cdot n^2+2mr^2\left(1-cot\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot n+mr^2(\tan\frac{180^\circ}{m}+cot\frac{180^\circ}{m}-2)$$

發現 A(m,n)與 n 的呈現二次函數關係。

(二) 同理從表(十三)，A'(m,n)＝$m\times(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^2r^2\cot\frac{180^\circ}{m}+m\times\mathbf{2}(\mathbf{n}-\mathbf{1})r^2+\boldsymbol{\pi r^2}$

$$=mr^2cot\frac{180^\circ}{m}(n^2-2n+1)+2mr^2(n-1)+\boldsymbol{\pi r^2}$$

$$=mr^2cot\frac{180^\circ}{m}\cdot n^2+2mr^2\left(1-cot\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot n+mr^2\left(cot\frac{180^\circ}{m}-2\right)+\boldsymbol{\pi r^2}$$

發現 A'(m,n)與 n 的也是二次函數關係。

(三) 相較於 n 而言，A(m,n)－A'(m,n)= $mr^2\tan\frac{180^\circ}{m}-\pi r^2$為常數。

例如: 當 m=3，A(m,n)－A'(m,n)= $3r^2\tan 60^\circ-\pi r^2$=$3\sqrt{3}r^2-\pi r^2$

$$=\left(3\sqrt{3}-\pi\right)r^2=2.05r^2$$

此計算結果與數值分析表(十六)的結果相同

(四) 由上述證明，即 A(m,n)及 A'(m,n)是兩個開口向上、開口大小相同的拋物線，A'(m,n)為 A(m,n)向上平移 $mr^2\tan\frac{180^\circ}{m}-\pi r^2$ 單位而得。

陸、結論

一、正 m 多邊形，無論尖角及圓角，每邊內側外切 n 個圓，皆求得其周長及面積計算公式，如表(十七)。

表(十七) 正 m 多邊形尖角、圓角之周長與面積計算通式

分類	尖角	圓角
周長	S(m,n)＝$m\times\left(2(n-1)+2\tan\frac{180^\circ}{m}\right)r$	S'(m,n)＝$m\left((n-1)^2\cot\frac{180^\circ}{m}+2(n-1)+\tan\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot r^2$
面積	A(m,n)＝$m\times\mathbf{2(n-1)}r+2\pi r$	A'(m,n)＝$m\times(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^2r^2\cot\frac{180^\circ}{m}+m\times\mathbf{2}(\mathbf{n}-\mathbf{1})r^2+\boldsymbol{\pi r^2}$

二、正 m 邊形尖角周長 S(m,n)隨著圓的個數 n 增加，其 S(m,1)、S(m,2)、…、S(m,n)為等差數列，公差為 2mr。

圓角 m 邊形周長 S'(m,n)隨著圓的個數 n 增加，其 S'(m,1)、S'(m,2)、…、S'(m,n)為等差數列，公差為 2mr。因此 S(m,n)及 S'(m,n)的圖形必為平行的直線。

三、正 m 邊形尖角周長 S(m,n)與圓角 m 邊形圓角周長 S'(m,n)，邊數 m 增加，則尖角周長 S(m,n)與圓角周長 S'(m,n)的差值趨近於 0，比值會越來越接近 1。

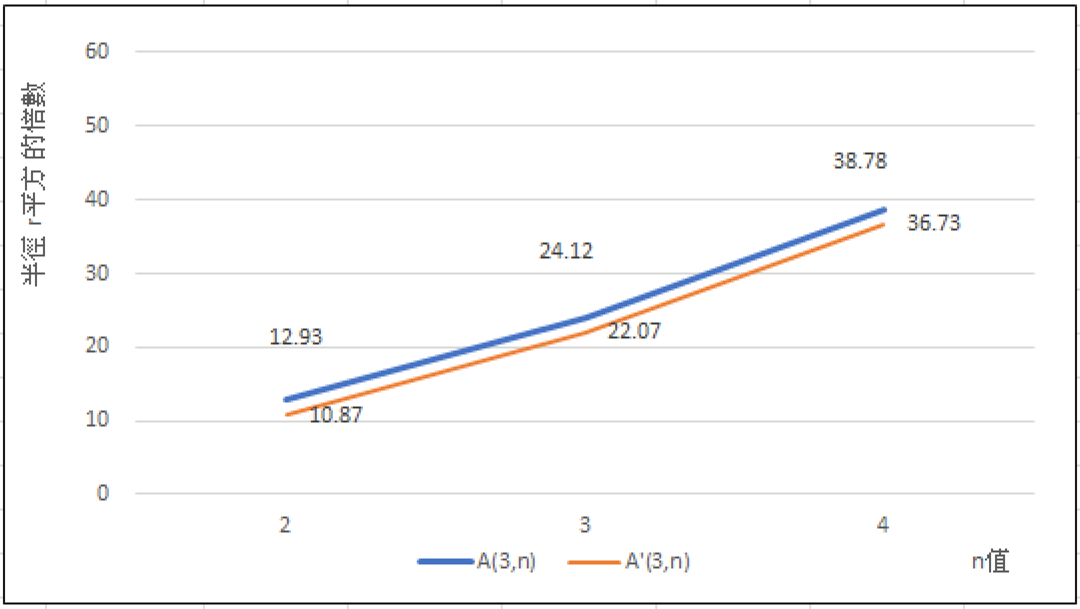
四、正 m 邊形尖角面積 A(m,n)及圓角 m 邊形圓角面積 A'(m,n)，隨著圓個數 n 增加，A(m,n)與 A'(m,n)為 n 的二次函數。n 值越大，兩者的差值趨近於 0，比值會越來越接近 1。

五、當 n 值固定，尖角面積及圓角面積的差值為定值。

例如：正三角形尖角面積為$12.93r^2$，每邊內側外切 n 個圓時，則圓角面積為$12.93r^2-2.05r^2=10.87r^2$，如圖(廿四)。

同理，若任意正方形面積為 $10r^2$，每邊內側外切 n 個圓時，則其圓角面積為

$10r^2-\mathbf{0.86}r^2=9.14r^2$，參考表(十五)。



圖(廿四) 利用 A(m,n)可推算 A’(m,n)

六、一般而言，市售的圓角四邊形、圓角六邊形、圓角八邊形的凳子，可由正方形、正六邊形正八邊形，加工截角為圓弧而成，依據本研究，就很清楚了解製作過程中損耗多少材料。例如：正方形木板裁切圓角時，所裁切圓角半徑若為 r，則損失面積為 A(4,n)－A’(4,n)＝$0.86 \cdot r^2$。

(一)當我們決定的半徑 r，損失的材料面積可以很快可以計算出來。

(二)如果 r 越大，其角落就會越圓，當然損失的面積也就越多。

七、未來研究方向：

(一)本研究的外切圓位置是在正多邊形內側邊緣上與多邊形的邊相切,若將圓心改為在正多邊形邊上，且正多邊形每個頂點上都放置一個圓，應可得到不同的結果。

(二) 若將正多邊形改為任意多邊形，給定多邊形的每個內角皆外切一個半徑為 r 的圓時，削去尖角改為圓角，稱之為圓角多邊形，改成探討圓角多邊形周長 S’與面積 A’與多邊形周長 S 及面積 A 的關係。我們有嘗試探討任意梯形，並將初步結果寫在研究日誌中。

柒、 參考資料

一、網路社群 Facebook「收納狂的日常」社團 https://www.facebook.com/groups/our.storage.diary

二、上垣涉•山本裕子，古古洛斯島圓形之謎，初版，國際村，2002。

三、羅浩源，生活的數學，一版，九章出版社，1997。

【評語】030424

由生活中實際看到的現象所衍生而出的一個有趣的問題。作者們把問題轉化為如下的數學問題：在正 m 邊形（或作者們所定義的『圓角正 m 邊形』）內部沿著邊放置 n 個與邊相切且前後兩圓兩兩相切的半徑相等的圓，所有這些圓的周長與面積的和與原本正多邊形（或『圓角正多邊形』）的周長與面積的比值會是多少？作者們針對一般化的問題給出了答案。能夠將數學概念活用於生活中，針對實際的問題作分析、討論並給出一般化的解答，十分難得，值得嘉許。比較美中不足的是，有部分的論述稍嫌繁複了些。如果作者們有注意到連接相鄰的圓的圓心所得出的圖形其實會與原正多邊形相似這個圖形的特性，很多的說明應該可以更為精簡。此外，在討論圓角正多邊形時，如果可以利用所有相對於原本頂點的這些扇形合併後會是一個圓這樣的特性，應該也可以讓某些論述變的更簡單。後半部關於正多邊形與對應的圓角正多邊形的關連性的討論其實不需要佔太多的篇幅（兩者的關連性其實由給出的表示式就可以明顯的看出了），可以將討論的重點放在一些延伸的問題上（例如：考慮每個內角都大於 60 度的菱形或鳶形）。如果能對更一般化的問題給出一些好的結論，會是一個更好的作品。沒有針對這個部分在多做發揮，有點可惜了。

作品簡報

中華民國第61屆中小學科學展覽會

角落生霧

科　　別：數學科

組　　別：國中組

研究動機

因圓柱形罐子做成的不同形狀椅凳，引發我們的好奇。

名詞定義

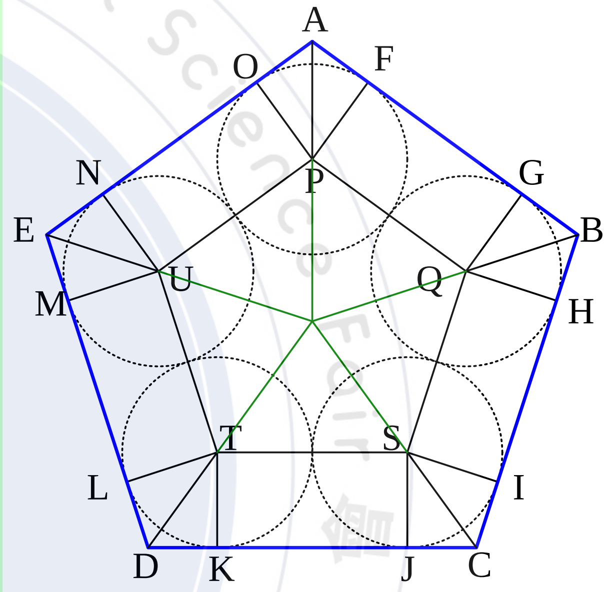
- 正m邊形每邊內側外切n個圓時：
  周長定義為S(m, n)
  面積定義為A(m, n)
- 正m邊形每個角削去，以同時與兩夾邊相切的圓弧取代該角，定義此圖形為「**圓角m邊形**」
- 「**圓角m邊形**」每邊內側外切n個圓時：
  周長定義為S′(m, n)
  面積定義為A′(m, n)

以正五邊形為例 求S(5, 2)及A(5, 2)

S(5,2)=正五邊形 ABCDE 周長

$$=5\overline{AB}$$

$$=5(2+2tan36°)\cdot r$$



A(5,2)=正五邊形 PQSTU+5 個長方形 FGQP+5 個箏形 AFPO

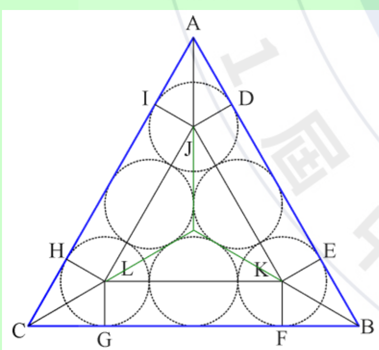
$$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r\cot 36°+5\times 2r^2+5r^2\tan 36°$$

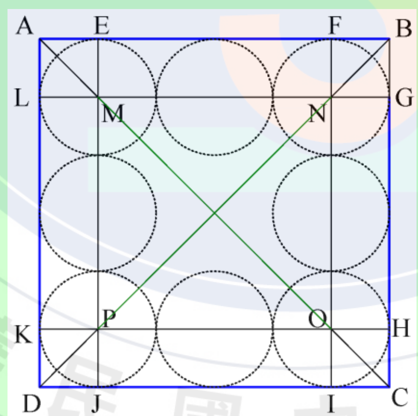
$$=5(\cot 36°+2+\tan 36°)\cdot r^2$$

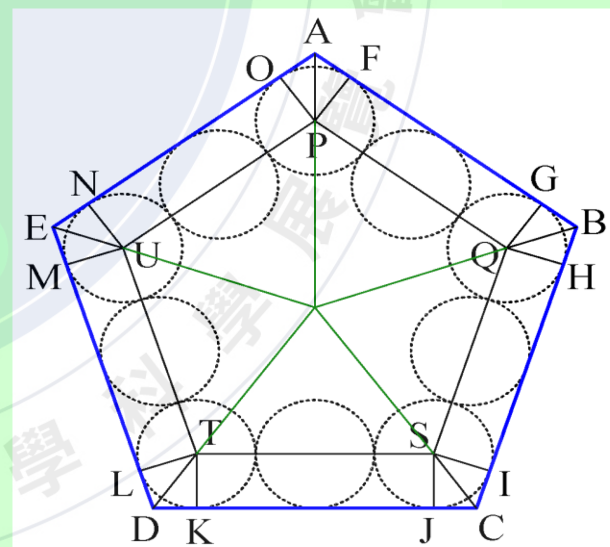
正m邊形周長S(m, n)及面積A(m, n)

$$S(m,\mathrm{n}) = \mathrm{m}\left(2(n-1) + 2\tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r$$

$$A(m,\mathrm{n}) = \mathrm{m}\left((n-1)^{2}\cot\frac{180^{\circ}}{m} + 2(n-1) + \tan\frac{180^{\circ}}{m}\right)r^{2}$$



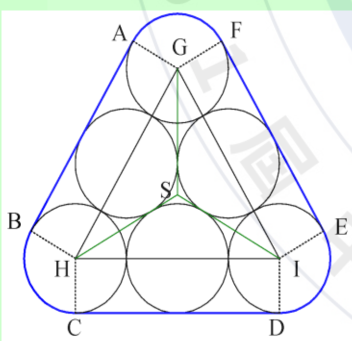


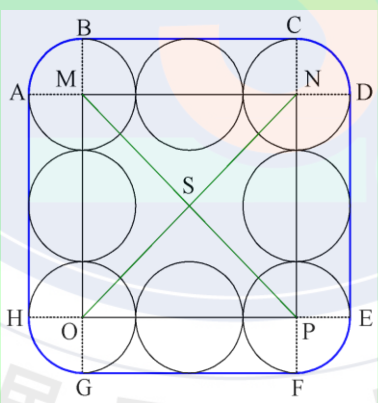


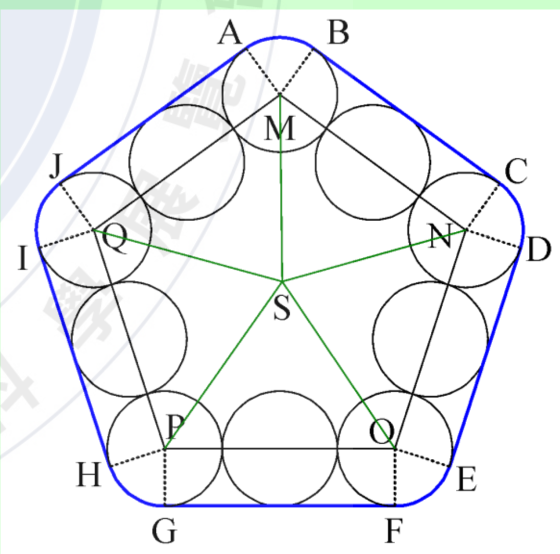
圓角m邊形S'(m, n)及A'(m, n)

$$S'(m,n) = m \times \mathbf{2(n-1)}r + 2\pi r$$

$$A'(m,n) = m \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})^2 r^2 \cot\frac{180^\circ}{m} + m \times \mathbf{2(n-1)}r^2 + \pi r^2$$



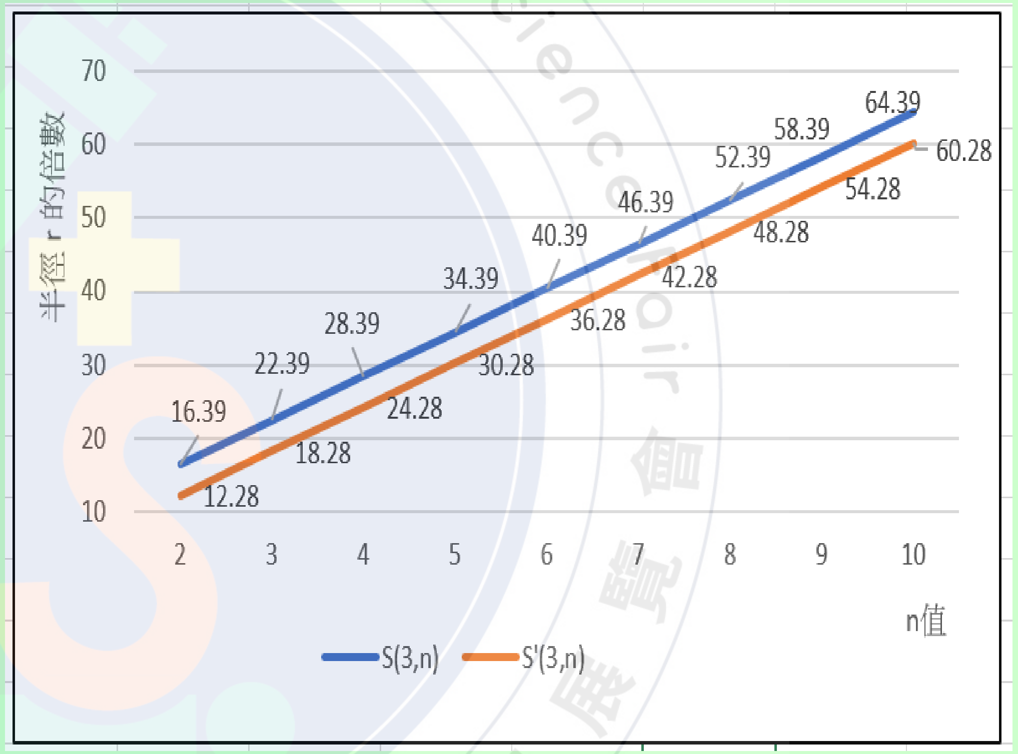




並以**數學歸納法**證明我們推論的公式

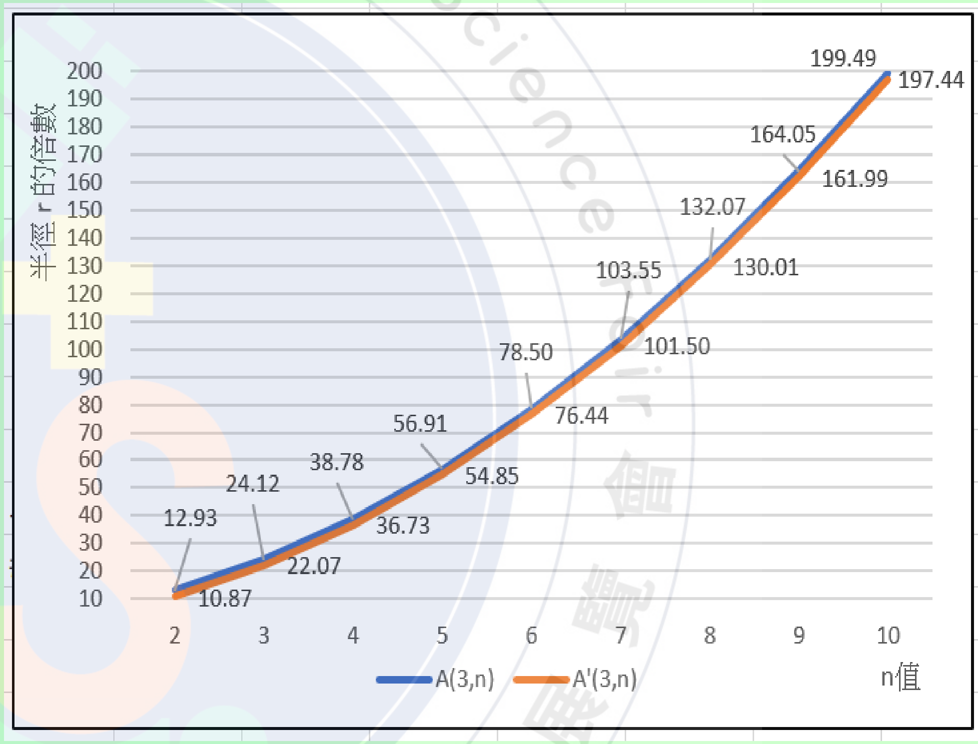
數值分析－S(3,n)與S'(3,n)比較

m 值	n 值	S(3,n)	S'(3,n)	S(3,n)- S'(3,n) 差值
3	2	16.39 r	12.28 r	4.11 r
3	3	22.39 r	18.28 r	4.11 r
3	4	28.39 r	24.28 r	4.11 r
3	5	34.39 r	30.28 r	4.11 r
3	6	40.39 r	36.28 r	4.11 r
3	7	46.39 r	42.28 r	4.11 r
3	8	52.39 r	48.28 r	4.11 r
3	9	58.39 r	54.28 r	4.11 r
3	10	64.39 r	60.28 r	4.11 r



數值分析－A(3,n)與A'(3,n)比較

m 值	n 值	A(3,n)	A'(3,n)	A(3,n)-A'(3,n) 差值	A(3,n)/A'(3,n) 比值
3	2	$12.93 \cdot r^2$	$10.87 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.19
3	3	$24.12 \cdot r^2$	$22.07 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.09
3	4	$38.78 \cdot r^2$	$36.73 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.06
3	5	$56.91 \cdot r^2$	$54.85 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.04
3	6	$78.50 \cdot r^2$	$76.44 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.03
3	7	$103.55 \cdot r^2$	$101.50 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.02
3	8	$132.07 \cdot r^2$	$130.01 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.02
3	9	$164.05 \cdot r^2$	$161.99 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.01
3	10	$199.49 \cdot r^2$	$197.44 \cdot r^2$	$2.05 \cdot r^2$	1.01



數值分析－S(m,n)與S’(m,n)比較

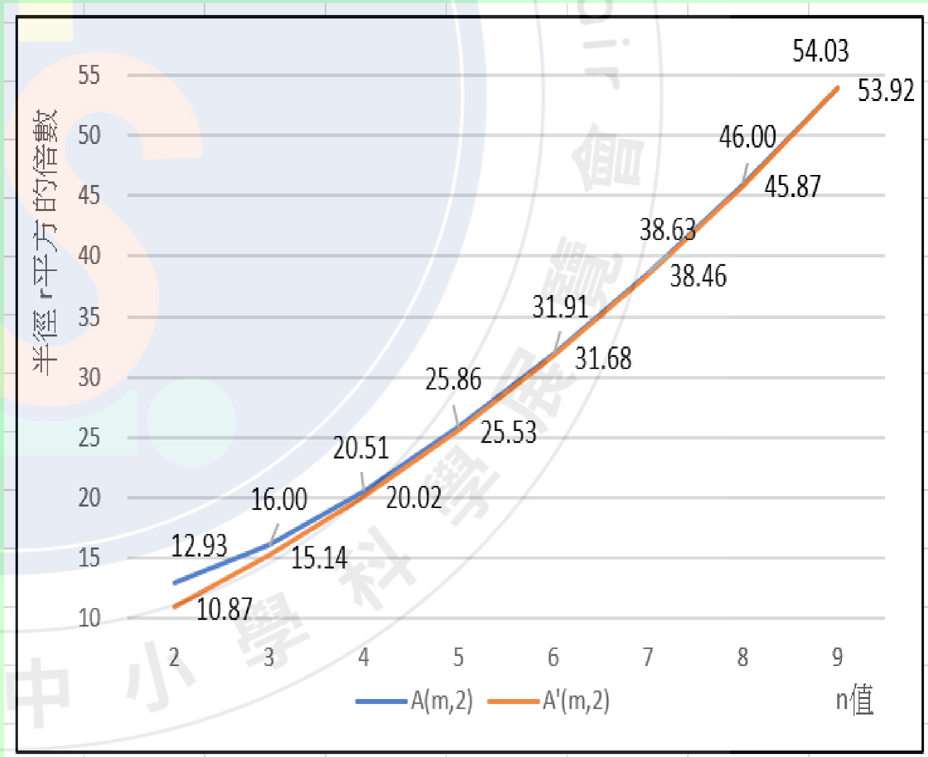
邊數 m	正 m 邊形
S(m,n)	$m \times \left(2(n-1) + 2\tan\frac{180^\circ}{m}\right) r$
S’(m,n)	$m \times \mathbf{2}(\mathbf{n}-\mathbf{1})r + 2\pi r$

m 值	尖角部分 $m \times \left(2\tan\frac{180^\circ}{m}\right) r$	圓角部分 $2\pi r$
3	10.392 r	6.283 r
4	8.000 r	6.283 r
5	7.265 r	6.283 r
6	6.928 r	6.283 r
10	6.498 r	6.283 r
20	6.335 r	6.283 r
30	6.306 r	6.283 r
60	6.289 r	6.283 r
100	6.285 r	6.283 r
200	6.284r	6.283r

數值分析－A(m, n)與A’(m, n)比較

邊數 m	正 m 邊形
A(m,n)	$m\left((n-1)^2\cot\frac{180^\circ}{m}+2(n-1)+\tan\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot r^2$
A’(m,n)	$m\times(n-1)^2r^2\cot\frac{180^\circ}{m}+m\times 2(n-1)r^2+\pi r^2$

m 值	n 值	A(m,2)	A’(m,2)	A(m,2)-A’(m,2)差值	A(m,2)/A’(m,2)比值
3	n	$12.93\cdot r^2$	$10.87\cdot r^2$	$2.05\cdot r^2$	1.19
4	n	$16.00\cdot r^2$	$15.14\cdot r^2$	$0.86\cdot r^2$	1.06
5	n	$20.51\cdot r^2$	$20.02\cdot r^2$	$0.49\cdot r^2$	1.02
6	n	$25.86\cdot r^2$	$25.53\cdot r^2$	$0.32\cdot r^2$	1.01
7	n	$31.91\cdot r^2$	$31.68\cdot r^2$	$0.23\cdot r^2$	1.01
8	n	$38.63\cdot r^2$	$38.46\cdot r^2$	$0.17\cdot r^2$	1.00
9	n	$46.00\cdot r^2$	$45.87\cdot r^2$	$0.13\cdot r^2$	1.00
10	n	$54.03\cdot r^2$	$53.92\cdot r^2$	$0.11\cdot r^2$	1.00



S(m, n)、S’（m, n)為n的一次函數

- S(m, n)與 S’（m, n)皆為n的一次函數

$$S(m,n)=2mr\cdot n+\left(2mr\tan\frac{180^\circ}{m}-2mr\right)$$

$$S'(m,n)=2mr\cdot n+(2\pi r-2mr)$$

- $S(m,n)-S'(m,n)=2m\tan\frac{180^\circ}{m}\cdot r-2\pi r$ 為常數
- 隨著m越大，$2m\tan\frac{180^\circ}{m}\cdot r$ 會逐漸逼近 $2\pi r$

A(m, n)與A’（m, n)為n的二次函數

- A(m, n)＝$mr^2 cot\frac{180^\circ}{m} \cdot n^2 + 2mr^2\left(1 - cot\frac{180^\circ}{m}\right) \cdot n +$
  $mr^2(\tan\frac{180^\circ}{m} + cot\frac{180^\circ}{m} - 2)$
- A’（m, n)=$mr^2 cot\frac{180^\circ}{m} \cdot n^2 + 2mr^2\left(1 - cot\frac{180^\circ}{m}\right) \cdot n +$
  $mr^2\left(cot\frac{180^\circ}{m} - 2\right) + \pi r^2$
- 相較於n而言，
  A(m, n)－A’（m, n)＝ $mr^2\tan\frac{180^\circ}{m} - \pi r^2$為常數
- A(m, n)及A’（m, n)是兩個開口方向大小相同的**拋物線**
- A’（m, n)為A(m, n)向上平移 $mr^2\tan\frac{180^\circ}{m} - \pi r^2$ 而得

結論

- S(m, 1)、S(m, 2)、…、S(m, n)為等差數列，公差為2mr。
  S’(m, 1)、S’(m, 2)、…、S’(m, n)為等差數列，公差為2mr。
  S(m, n)及S’(m, n)的圖形為平行的直線。
- m增加，S(m, n)與S’(m, n)的差值趨近於0，比值接近1。

- A(m, n)及A’(m, n)為n的二次函數，開口方向及大小一樣。
  n值越大，兩者的差值趨近於0，比值會越來越接近1。

- 當n值固定，尖角面積及圓角面積的差值為定值。
  例如：正三角形尖角面積為$12.93r^2$，每邊內側外切n個圓時，則圓角面積為$12.93r^2-2.05r^2=10.87r^2$。
  同理，若任意正方形面積為$10r^2$，每邊內側外切n個圓時，則其圓角面積為$10r^2-\mathbf{0.86}r^2=9.14r^2$。

- 未來研究建議：
  將正多邊形改為任意多邊形，給定多邊形的每個內角皆外切一個半徑為r的圓時，削去尖角改為圓角，稱之為圓角多邊形，改成探討圓角多邊形周長S’與面積A’與多邊形周長S及面積A的關係。我們有嘗試探討長方形及等腰梯形，並將初步結果寫在研究日誌中。