中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

團隊合作獎

030423

二刀流十傑 — 從 S=A+B+C=定值的推推樂遊戲談起

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 劉　沁	張淑敏
國二 王文衍	林耀南
國二 張嘉心	

關鍵詞：倒數第二刀、推推樂、傑數

摘要

〝十傑〞指的是10個違反本文〝基本定理〞但仍能保持相似的△。二刀流指的是這十傑都產生在倒數第二條分角線上，在A, B, C三隊的〝推推樂〞團體遊戲活動過程中，本文發現從對應的輾轉相除法中可取得有用的P值、Q值、R值，用於推導演算規則預判遊戲結果。而在$S = 180$時，使用分角線幾何作圖，可用來重新發現△中的Bevan Point，又利用前述建立的演算規則可推導倒數第二刀交叉形成的△的三內角及其順逆時針偏向屬性，進而在整數內角角度中找到10個特殊的相似△(本文稱之為十傑)，這10個特殊的△的三內角有一定的特殊相關比例，利用這套比例關係式及S值的標準分解式可在任意S值遊戲中找到對應的〝傑數〞，非常有趣。

壹、研究動機

七年級有十班，學校舉辦數學科闖關遊戲，遊戲主題為推推樂分組活動，規則如下:

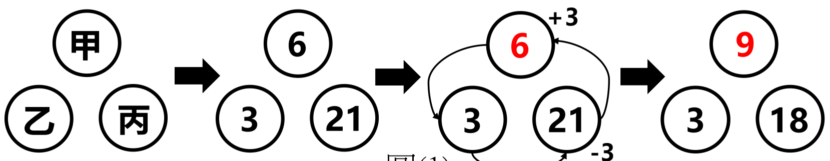
步驟一、將該班班級人數(統一 30 人)任意分成三組(甲、乙、丙)，如圖(1)。

步驟二、在圖(1)中，令$S = 甲 + 乙 + 丙 = 6 + 3 + 21 = 30$先以甲當關主，將另外兩組(乙、丙)中，由人數少的前往到人數多的組， 每人各去抓一人到關主處(甲)，接著自己返回原出發處。再比較一次(乙、丙)兩組人數，重複上述推動程序，如此連續操作直到(乙、丙)人數相同為止。

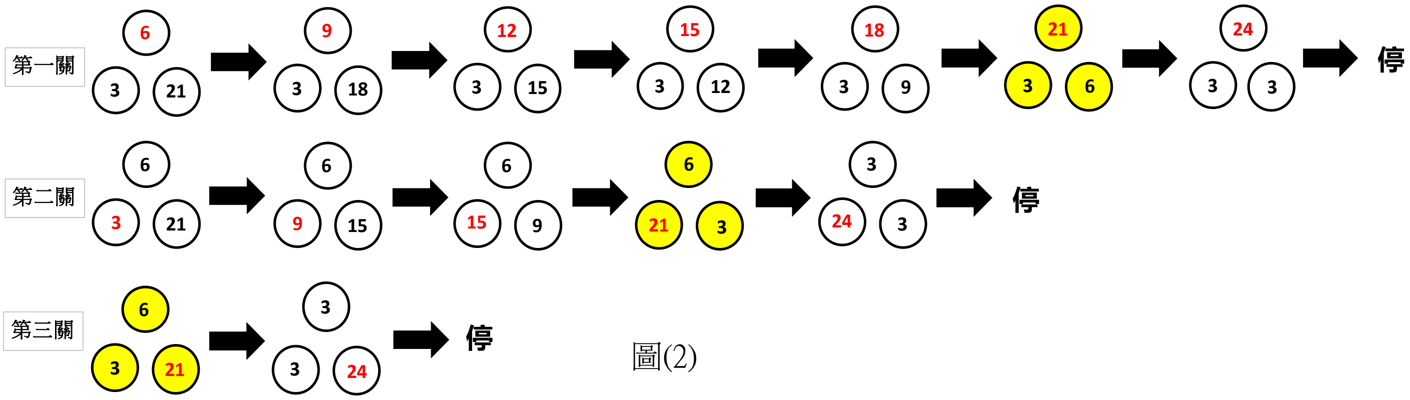
步驟三、恢復原狀排列後，改以乙當關主，重複步驟二。

步驟四、恢復原狀排列後，最後以丙當關主，一樣重複步驟二，完成圖如圖(2)。

步驟五、勝負判定，每一班三關都要跑完，最早能確認某種組合的班級獲勝



圖(1)



圖(2)

觀察這個遊戲，一開始的$S = 6 + 3 + 21 = 30$的組合是裁判老師給的，我們發現在第一關的流程中，出現一個和一開始給的組合三數字一模一樣的三數，這是湊巧嗎？還是某些組合才會出現？又題目中的數字若以由大到小的排列方向來看，在金黃色圖案中的三個數字的排列方向有順時針也有逆時針，這有何意義？在$S = 30$的所有三數組合中，是否存在順逆時針方向相同的組合？又共有多少個？以圖(2)這例子來說其中一定還隱藏著很多秘密。

貳、研究目的

一、觀察推推樂遊戲中，三關遊戲流程內容的相關性

二、探討$S=180$的推推樂代數性質和分角線作圖的幾何性質

三、探討$S=180$的倒數第二刀的代數演算法及〝傑數〞尋找法

四、推廣$S=A+B+C=$任意定值時，傑數的公式推導及傑數的尋找

參、使用設備及器材

電腦、GeoGebra繪圖軟體、紙筆、直尺圓規

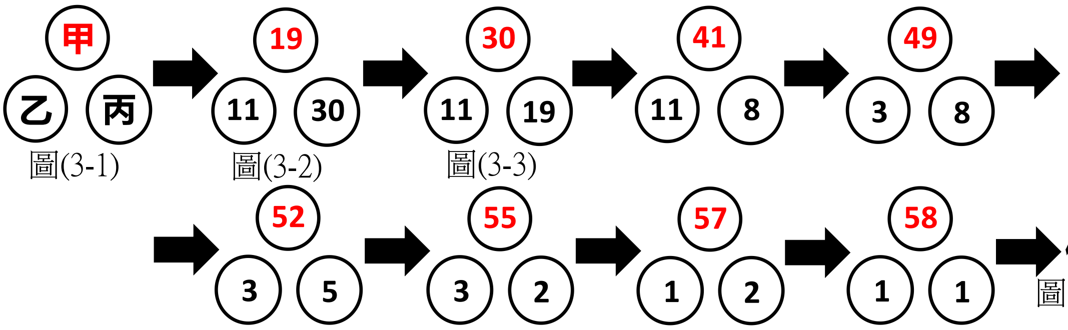
肆、研究過程與方法

一、名詞解釋

1. 推推樂遊戲

假設有一空間，共有 60 人在進行一場推推樂遊戲，空間共有三個角落，並分成甲、乙、丙區，如圖(3-1)，我們將 60 人分成三組，按照:乙人數<甲人數<丙人數的組合分別站在各三個角落，以(19-11-30)人為例，如圖 (3-2)。遊戲進行第一局，由甲區當關主，不參與競爭，乙、丙兩地比人數多寡，人數較少的一方要將另一方等同於自身的人數推向關主處，並自身返回到原位，以此循環，如圖(3-3)。

遊戲持續進行，直到兩方人數相同時，第一局結束，如圖(3-4)，第二局開始，換乙區作為關主，結束後，第三局換丙區當關主，三局進行完後，遊戲正式結束。

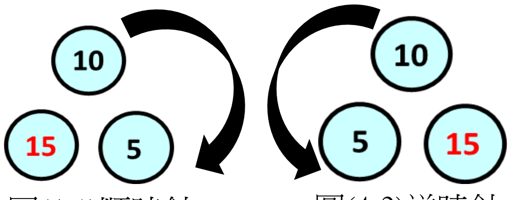


圖(3-1) 圖(3-2) 圖(3-3) 圖(3-4)

2. 推推樂順逆時針方向定義

逆時針:如圖(4-1)，數字由大到小順時針排列

順時針:如圖(4-2)，數字由大到小逆時針排列



圖(4-1)順時針 圖(4-2)逆時針

3. 以輾轉相除法表示a,b兩數的P、Q、R值

$P(a,b)$: a,b兩數的最大公因數

$Q(a,b)$: a,b兩數在輾轉相除法中左右的商數總和

$R(a,b)$: a,b兩數在輾轉相除中，除數的轉換次數

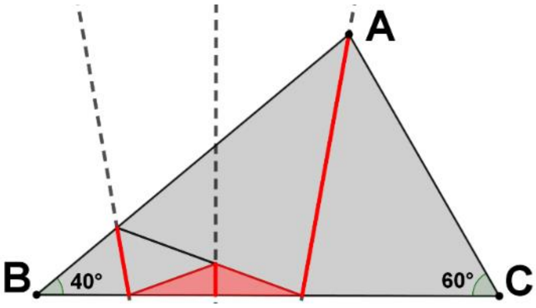
例如:$a=173,b=494$

$P(173,494)=1,Q(173,494)=22,R(173,494)=5$

	a	b	
1	173	494	2
	148	346	
1	25	148	5
	23	125	
2	2	23	11
	2	22	
	0	1	

4. 在$S=180$的P、Q、R值幾何定義

(1) 從A點作分角線，用幾刀可以把△ABC分割成最少且成對的全等△？又有幾對？如圖(5-1)



2	40	60	1
	40	40	
	0	20	

$P=20, Q=3, R=1$

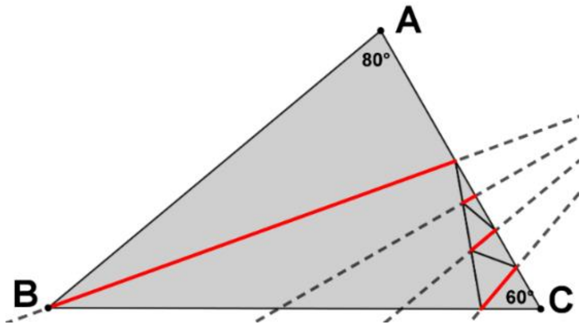
圖(5-1)

$P=20$表示最後的等腰△的底角為$20°$

$Q=3$表示共切3刀

$R=1$表示第一條分角線斜率正數轉換成第二條分角線時，斜率為負，而第三條分角線垂直$\overline{BC}$，停止，故正負轉換一次，即$R=1$

(2) 從B點作分角線，用幾刀可以把△ABC分割成最少且成對的全等△？又有幾對？如圖(5-2)

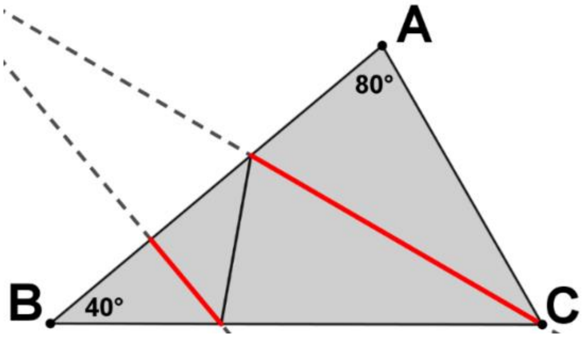


1	80	60	3
	60	60	
	20	0	

$P=20, Q=4, R=1$

圖(5-2)

(3) 從C點作分角線，用幾刀可以把△ABC分割成最少且成對的全等△？又有幾對？如圖(5-3)



2	80	40
	80	
	0	

$P=40, Q=2, R=0$

圖(5-3)

5. P、Q、R值在不同情況中的定義

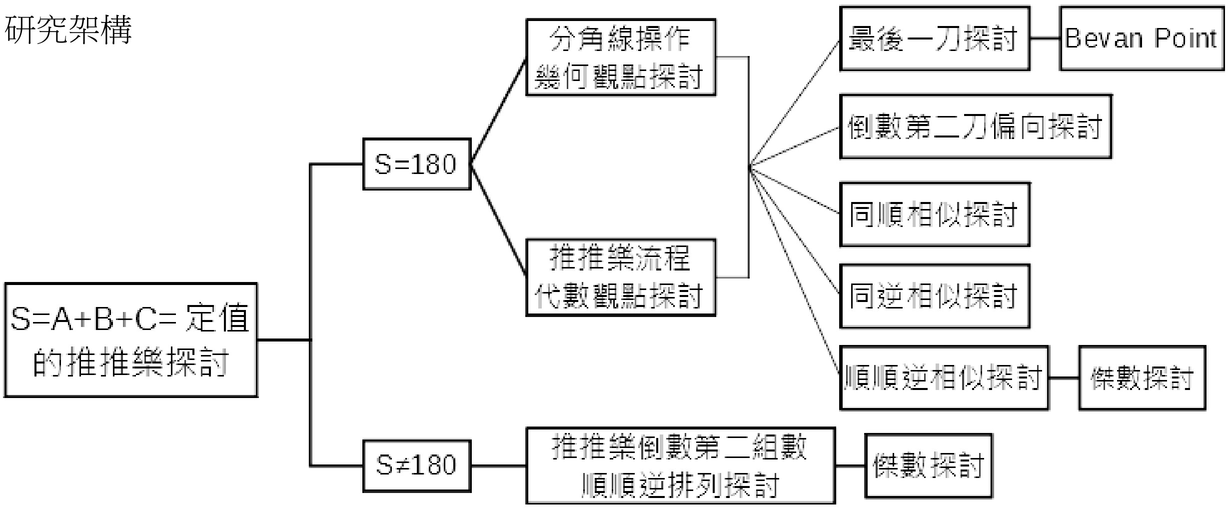
	推推樂遊戲	輾轉相除法	分角線幾何作圖
P	最後人數相同時的值	最大公因數	等腰▵底角角度
Q	遊戲運算步驟次數	左右商數總和	分角線條數(刀數)
R	兩數大小轉換次數	除數轉換次數	分角線偏角方向轉換次數

6. 傑數△－指推推樂遊戲中，各關主的倒數第二組數都相同且又和起始的那一組相同，則該組數即為一組傑數△，例如:圖(2)

7. N(S)－在$A+B+C=S$的推推樂遊戲中，滿足〝傑數△〞規則的數量

例如$N(30)=3$，$N(180)=10$(十傑)

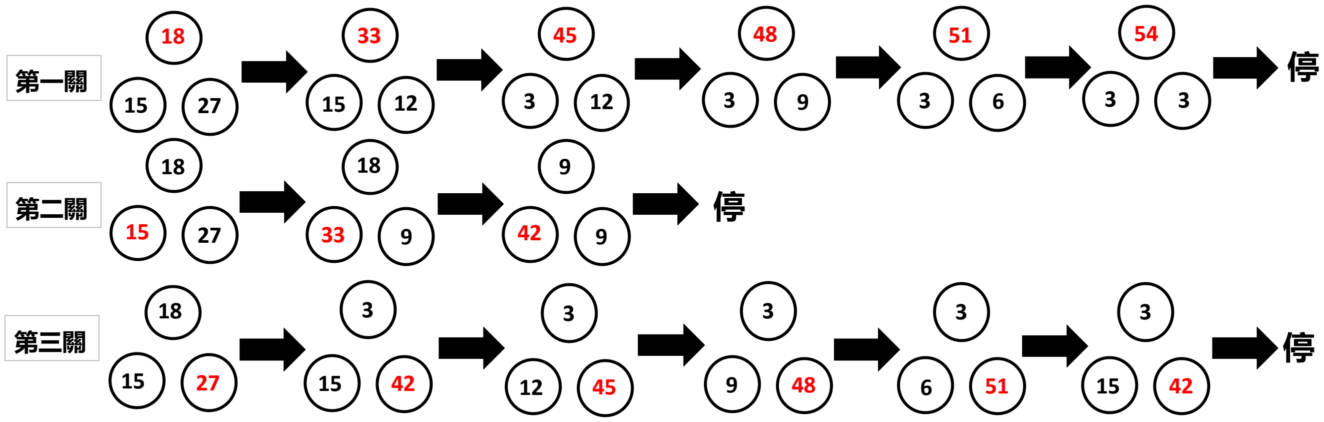
二、研究架構



伍、研究結果

一、推推樂遊戲舉例觀察

(一) $S = 60$

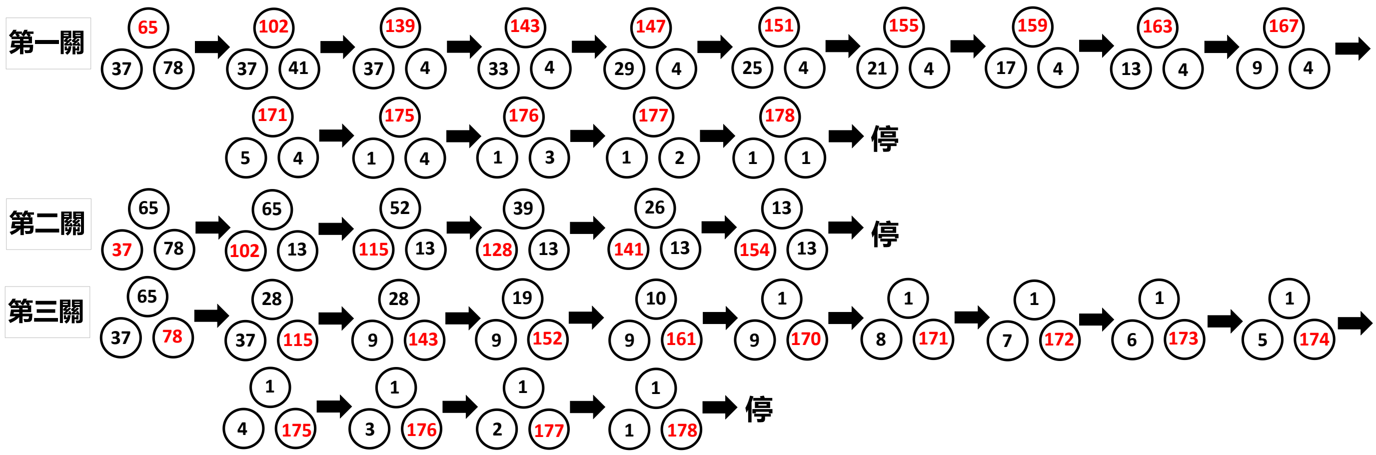


發現: 1. $\because P(15,18) = 3, P(15,27) = 3, P(18,27) = 9$，$\therefore$原三數不同P，各關最後一組不同

2. 各關流程的倒數第二組數都不相同

3. 整個流程中，都沒有出現一組和原給定的那組一模一樣的三個數。

(二) $S = 180$

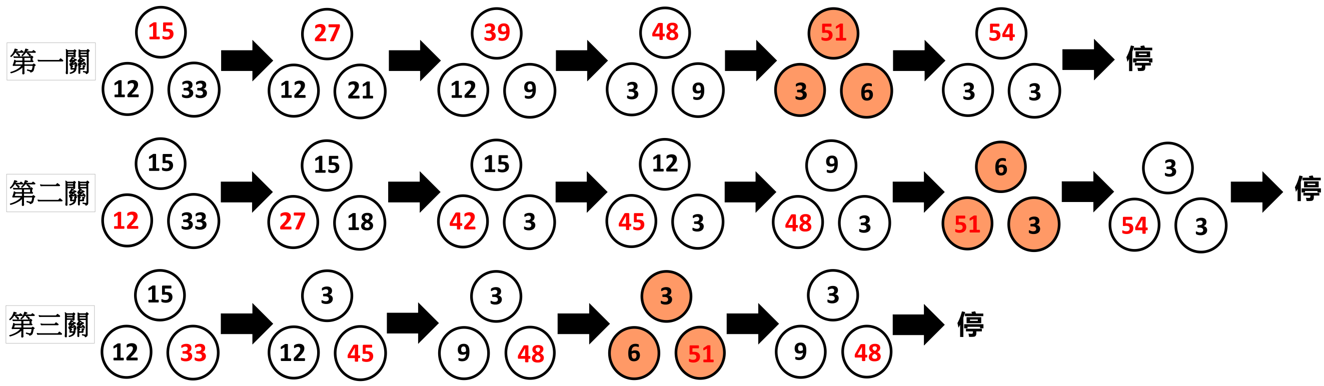


發現: 1. $\because P(65,37) = 1, P(37,78) = 1, P(78,65) = 13$，$\therefore$原三數不同P，第二關最後一

組和另兩關不同

2. 第二關的倒數第二組和另外兩關的倒數第二組不同
3. 整個流程中，都沒有出現一組和原給定的那組一模一樣的三個數。

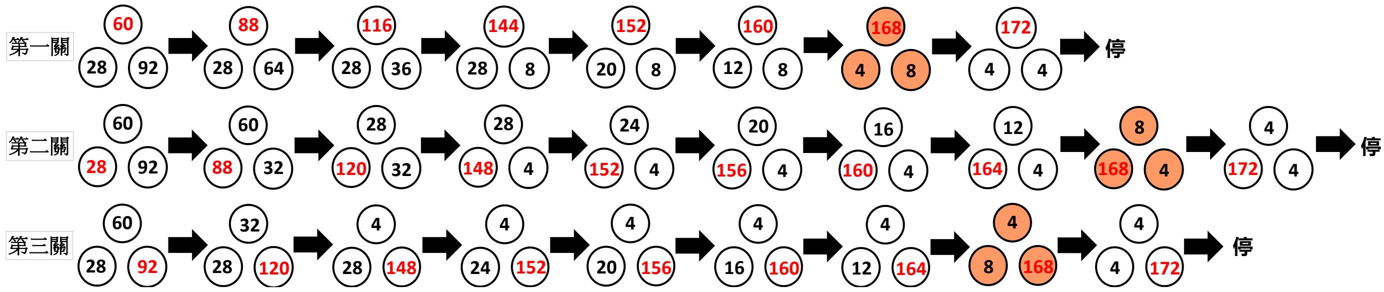
(三) $S = 60$



發現: 1. $\because P(12,33) = 3, P(15,33) = 3, P(12,15) = 3$，$\therefore$原三數同P，各關最後一組相同

2. 整個流程中，都沒有出現一組和原給定的那組一模一樣的三個數
3. 倒數第二組數三者都具有相同的三個數
4. 倒數第二組數三者都是同順排列

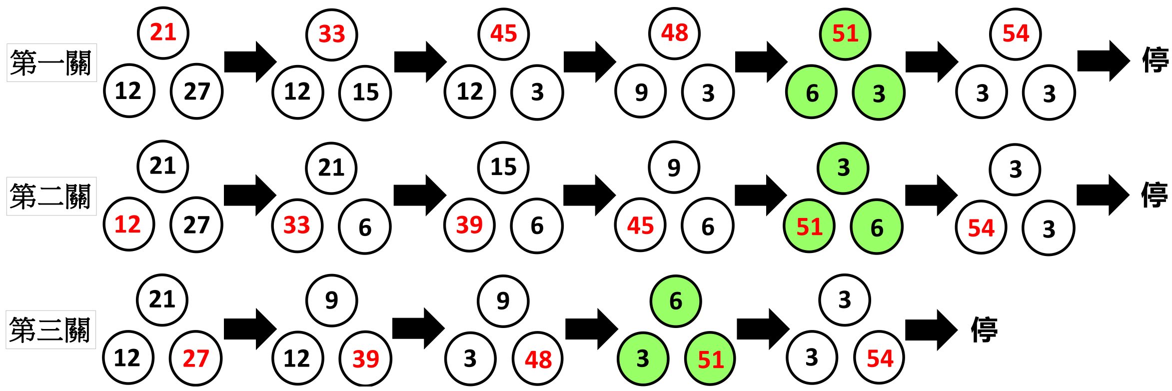
(四) $S = 180$



發現: 1. $\because P(60,28) = 4, P(28,92) = 4, P(60,92) = 4$，$\therefore$原三數同P，各關最後一組相同

2. 整個流程中，都沒有出現一組和原給定的那組一模一樣的三個數
3. 倒數第二組數三者都具有相同的三個數
4. 倒數第二組數三者都是同順排列

(五) $S = 60$

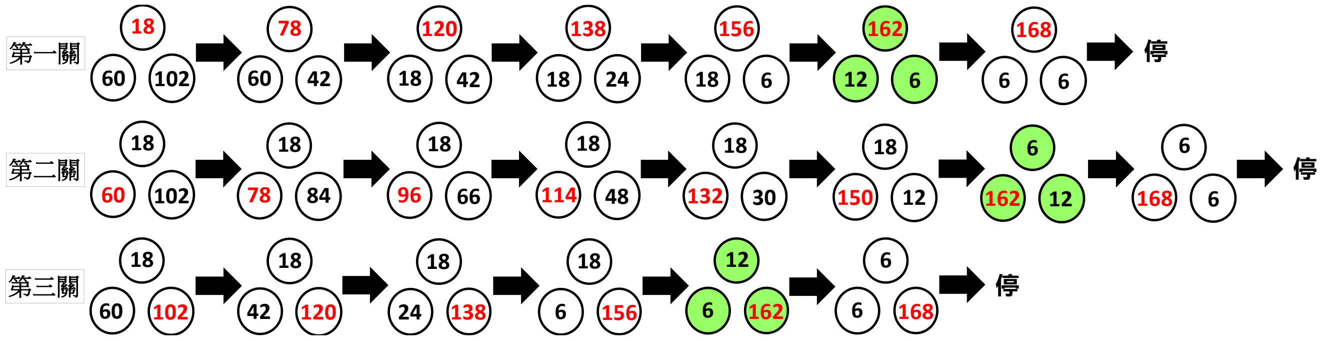


發現: 1. $\because P(12,27) = 3, P(21,27) = 3, P(12,21) = 3$，$\therefore$原三數同P

2. 整個流程中，沒有出現一組和原給定的那組一模一樣的三個數
3. 倒數第二組數三者都相同

4. 倒數第二組數三者都是同逆排列

(六) $S=180$



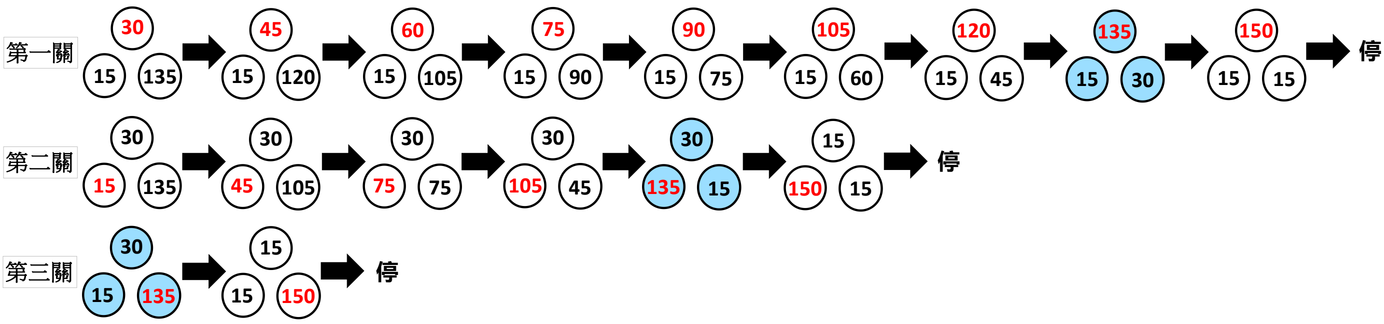
發現: 1. $\because P(18,60)=6, P(60,102)=6, P(18,102)=6$，$\therefore$原三數同P

2. 整個流程中，各在倒數第二組數處出現相同的三數

3. 倒數第二組數三者都相同

4. 倒數第二組數三者都是同逆排列

(七) $S=180$



發現: 1. $\because P(15,30)=15, P(15,135)=15, P(30,135)=15$，$\therefore$原三數同P

2. 整個流程中，各出現一個和原給定的那組一模一樣的三個數，

3. 倒數第二組數三者都相同

4. 倒數第二組數三者形成順順逆排列

總結:

定值S	S=60	S=180	S=60	S=180	S=60	S=180	S=180
三數組合	(18,15,27)	(65,37,78)	(15,12,33)	(60,28,92)	(21,12,27)	(18,60,102)	(30,15,135)
P值是否相同	×	×	V	V	V	V	V
每個倒數第二個△的三數是否相同	×	×	V (同順)	V (同順)	V (同逆)	V (同逆)	V (順順逆)
承上，又與原三數是否相同	×	×	×	×	×	×	V

猜想: 1. 推推樂遊戲走到停止前的最後一組數，恆含有兩數相等，這有特別的意義嗎？

2. 倒數第二組數有時三關都相同，有時甚至和原始一開始給定的那組數相同

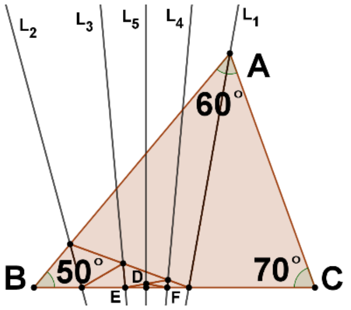
這些特性似乎含有特別的意義，我們是否可用$S=180$的△幾何圖形去觀察呢？

二、$S=180$的幾何探索

在上述推推樂遊戲 $S=A+B+C=$定值的使用範圍中，明顯的此S值要大於3以上，一般都取整數值，又由上面例子的發現中可看出有很多奇妙的性質躲藏其中，我們想要發掘出來，那到底要用甚麼方法去發掘他們呢？經過長時間的討論後，我們想到當$S=$

180時，不是剛好代表△的內角和嗎？也許利用整數的三內角的操作可以充分表達A, B, C三隊，又利用分角線操作恰好可以表達任兩內角角度的求最大公因數的輾轉相除法。我們迫不及待的想要去探索！

(一) 以三內角為50°、60°、70°的△ 為例，分別連續求作三內角的分角線，並觀察最後一條分角線和所對應的等腰△



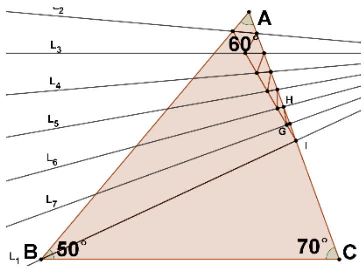
	∠C	∠B	
1	70	50	2
	50	40	
2	20	10	
	20		
	0		

$P(\angle B, \angle C) = 10$

$Q(\angle B, \angle C) = 5$

$R(\angle B, \angle C) = 2$

圖(6-1)



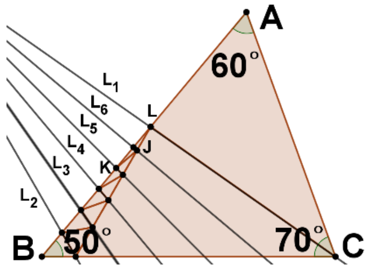
	∠C	∠A	
1	70	60	6
	60	60	
	10	0	

$P(\angle C, \angle A) = 10$

$Q(\angle C, \angle A) = 7$

$R(\angle C, \angle A) = 1$

圖(6-2)



	∠A	∠B	
1	60	50	5
	50	50	
	10	0	

$P(\angle A, \angle B) = 10$

$Q(\angle A, \angle B) = 6$

$R(\angle A, \angle B) = 1$

圖(6-3)

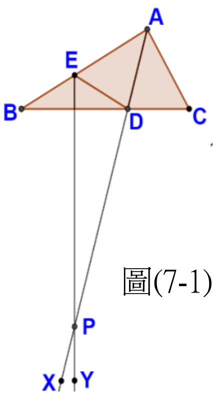
說明

1. 圖(6-1)、(6-2)、(6-3)中的直線L_1、L_2、L_3、L_4……代表從該圖中的某一內角(例如∠A)開始以分角線連續作圖所得的直線群。
2. △ DEF、△ GHI、△ JKL為各自依分角線連續作圖最後所得的等腰△，如上圖，而該等腰△上的頂角分角線都被稱為最後一刀。
3. 當得到上述三個等腰△之後，我們可用來觀察這三條最後一刀和前文推推樂遊戲中的各關主走到的最後那組數有何特別意義。

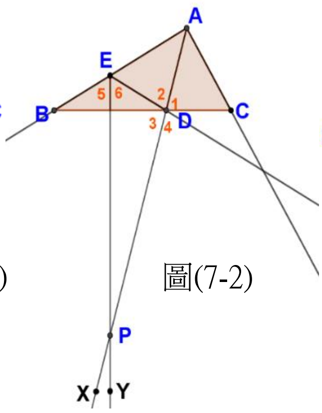
(二)$S = 180$的最後一刀的探討

已知 △ ABC中，$\overline{AB} > \overline{AC}$，$\overrightarrow{AX}$平分∠BAC，並交$\overline{BC}$於 D，再以$\overrightarrow{AX}$為對稱軸將△ ACD摺至△ AED上，其中E在$\overline{AB}$，如圖(7-1)，接著做∠BED的分角線$\overrightarrow{EY}$，交$\overrightarrow{AX}$於P。

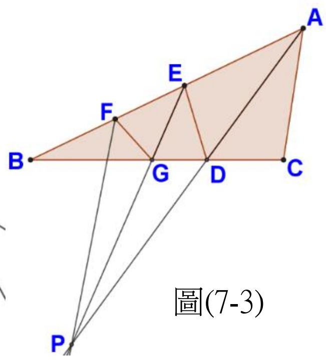
求證 P點為△ ABC的一個旁心



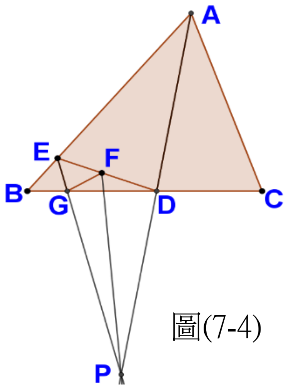
圖(7-1)



圖(7-2)



圖(7-3)



圖(7-4)

證明

(1) 承圖(7-1)，延長$\overleftrightarrow{ED},\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$，成圖(7-2)

(2) $\because \triangle ACD \cong \triangle AED$(摺疊)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

(3) 又$\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$

$\therefore \overrightarrow{DP}$為$\triangle$ EBD中$\angle$D的外角平分線

(4) 又$\overline{EP}$為$\triangle$ EBD中$\angle$E的內角平分線

$\therefore$ P點為$\triangle$ EBD的旁心

(5) $\because$ P點為$\triangle$ EBD的旁心

$\therefore$ P點到$\overleftrightarrow{EB},\overleftrightarrow{ED},\overleftrightarrow{BD}$等距離

(旁心性質)—①

而$\overleftrightarrow{EB} = \overleftrightarrow{AB}$又$\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{BC}$

(6) 又 P 在$\angle$A的分角線上

$\therefore$ P到$\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$等距離—②

(7) 由①、②知 P 到$\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$等距離

因此可推得 P 為$\triangle$ ABC的一個旁心

性質一、如圖(7-1)，若$\overline{AB} > \overline{AC}$，$\angle$A和$\angle$BED的內角分角線交於P，則$\triangle$ ABC和$\triangle$ EBD共用旁心P。

性質二、如圖(7-3)，承圖(7-2)，當下又若$\overline{EB} > \overline{ED}$，則$\triangle$ ABC、$\triangle$ EBD、$\triangle$ FBG共用旁心P。

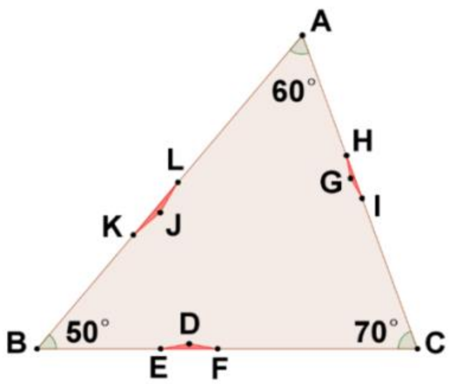
性質三、如圖(7-4)，承圖(7-2)，當下又若$\overline{EB} < \overline{ED}$，則$\triangle$ ABC、$\triangle$ EBD、$\triangle$ FGD共用旁心P。

性質四、在整數的三內角上，分別操作分角線再作此線的線對稱Δ，若剩餘的Δ兩腰未等長，就重複操作此剩餘Δ的頂角分角線，直到最後，則必可在三邊上各自得出一個等腰Δ。

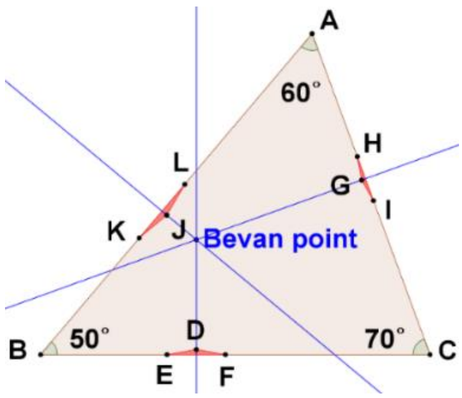
證明

如圖(6-1)，不失一般性以整數內角$50°, 60°, 70°$的Δ為例，從$\angle$A開始作分角線L_1，再以L_1為對稱軸作線對稱Δ，所剩餘的Δ的兩底角各為$50°, 20°$，這$20°$就是$\angle C = 70°, \angle B = 50°$做輾轉相除法的第一層餘數$20°$，而$20°$和$\angle B = 50°$比大小後作第二、三次分角線$L_2$、$L_3$，對應輾轉相除法$50° - 20° \times 2 = 10°$，剩餘的$\Delta$兩底角為$20°$和$10°$，同法再做分角線$L_4$，得最後的$\Delta$兩底角為$10°, 10°$為一個等腰$\Delta$。因為這種分角線作圖和該兩內角的輾轉相除法是完全對應，所以由輾轉相除法，最後必整除知在幾何上意為最後一刀必使兩Δ疊合，那表示倒數第二刀完成後，圖形上必剩餘一個等腰Δ，其餘兩邊也是。

性質五、在同一Δ中，依前文的分角線作圖法找到的 3 個等腰Δ的底邊中垂線(即各邊上的最後一刀) 必交於一點，此點即為 Bevan Point，如圖(7-5)、(7-6)。



圖(7-5)



圖(7-6)

討論: 這性質一到性質五的作用暗示對其他$S \neq 180$的最後一刀，以推推樂觀點來看是一盞明燈，它有助於去找到各自的類Bevan Point，這也是本文未來展望的一部份。

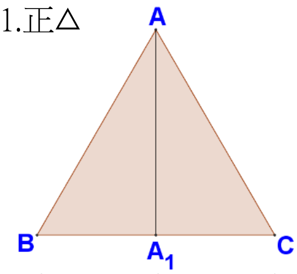
三、$S = 180$的倒數第二刀的幾何和代數的相關性探討

由上圖(7-5)、圖(7-6)，觀察知三邊上的小等腰△底邊上的中垂線是最後一刀且交於一點，很神奇，但我們更感興趣的是他們各自的倒數第二刀是否也會相交於一點，或是會交叉形成另一△且此△會和原△相似嗎？這和$S = 180$的推推樂遊戲有關嗎？我們是否能夠不經尺規作圖而能預判？

(一) 刀數(Q 值)的再說明

在這種分角線連續作圖中，如圖(8-1)、(8-2)、(8-3)，Q值代表的是分角線作圖的條數，例如圖(8-1)中，$Q(\angle B, \angle C) = 1$，這一條為$\overline{AA_1}$，圖(8-2)中，$Q(\angle B, \angle C) = 1$，這一條為$\overline{AA_1}$，圖(8-3)中，$Q(\angle B, \angle C) = 4$，那四條按照操作次序分別為$\overline{AA_1}$、$\overline{P_1A_2}$、$\overline{P_2A_3}$、$\overline{P_3A_4}$，其中，$\overline{P_3A_4} \perp \overline{BC}$視為最後一刀，$\overline{P_2A_3}$視為倒數第二刀，$\overline{P_1A_2}$視為倒數第三刀，餘此類推。又圖(8-1)及圖(8-2)中，從∠A只能做出一條分角線，此線即為最後一刀，因此正△和等腰△沒有倒數第二刀。

1.正△



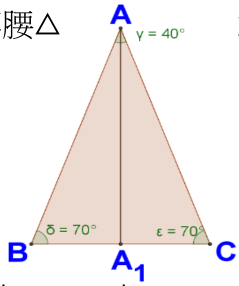
	∠B	∠C
1	60	60
	60	
	0	

$\angle B = \angle C = 60°$

$Q(\angle B, \angle C) = 1$

圖(8-1)

2.等腰△



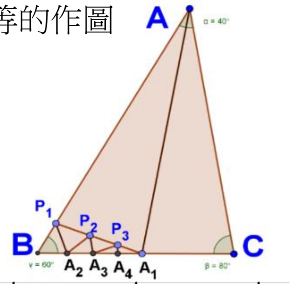
	∠B	∠C
1	70	70
	70	
	0	

$\angle B = \angle C = 70°$

$Q(\angle B, \angle C) = 1$

圖(8-2)

3.三內角不相等的作圖



	∠B	∠C	
3	60	80	1
	60	60	
	0	20	

$\angle B = 60°, \angle C = 80°$

$P(\angle B, \angle C) = 20°, Q(\angle B, \angle C) = 4$

圖(8-3)

(二) 探討三邊上各自的倒數第二刀交叉形成的△可能會與原△ABC 相似嗎？

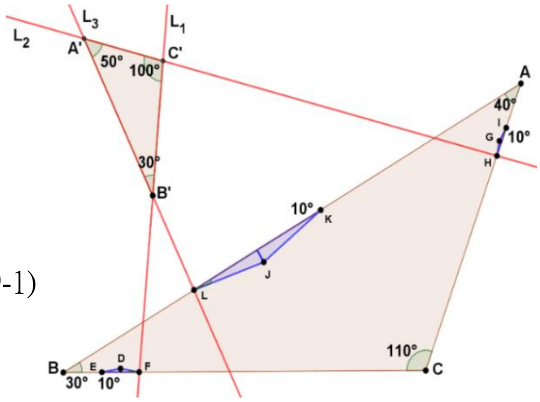
首先看圖(9-1)至圖(9-2):

1. 切∠A 得倒數第二刀為L_1(紅色那條)，如圖(9-1)
2. 切∠B 得倒數第二刀為L_2(紅色那條)，如圖(9-1)
3. 切∠C 得倒數第二刀為L_3(紅色那條)，如圖(9-1)

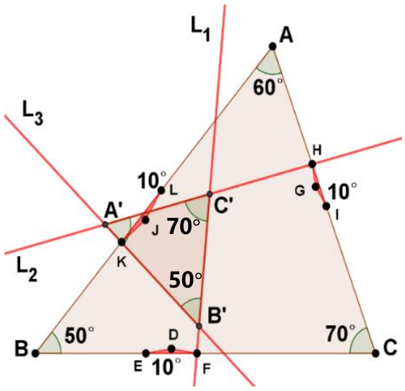
合併三條倒數第二刀形成$\triangle A'B'C'$，發現和△ ABC不相似，如圖(9-1)

在圖(9-2)中，△ ABC為$60° - 50° - 70°$的△，倒數第二刀$\triangle A'B'C'$和原△ ABC相似。

我們發現倒數第二刀△和原△有時相似，有時不相似，為甚麼會這樣呢？



圖(9-1)



圖(9-2)

(三) 接下來，我們的研究目標是希望能找出一套規則可以事先判斷任何△的倒數第二刀△是否能和原△相似。首先要說明下文中的基本定理

> 基本定理
>
> 若L_1、L_2、L_3分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的垂線，垂足點依次為D、E、F。經過D、E、F三點分別有三直線M_1、M_2、M_3，依相同的順時針或逆時針旋轉 x°，如圖(9-3)順時針，則M_1、M_2、M_3三直線交叉而成的△A′B′C′，必和原△ABC相似。

已知　設△DEF為△ABC的任意垂足△，垂足點各為 D，E，F，分別過 D，E，F 作x°的順時針偏角，令三條偏角線兩兩相交於 A′，B′，C′，如圖(9-3)

求證　△A′B′C′ ~ △ABC

證明　(1) 在△AEF和△FC′K 中，

$\because \angle A + \angle 1 = \angle C' + \angle 2$

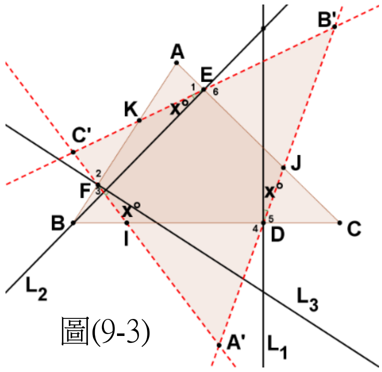
又$\angle 1 = \angle 2 = 90° - x°$

$\therefore \angle A = \angle C'$

(2) 同理可證$\angle B = \angle A'$，$\angle C = \angle B'$

故△ABC ~ △C′A′B′及同順偏角x°，必和原△相似

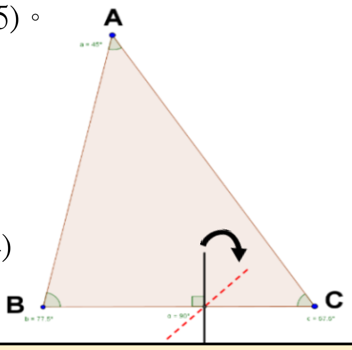
(3) 同理，同逆偏角y°, 必和原△相似



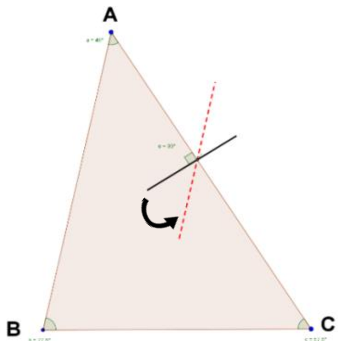
圖(9-3)

順時針偏角和逆時針偏角討論與定義

分角線連續作圖法操作到最後會出現一等腰△，如圖(8-3)的△$P_3A_1A_3$，該等腰△的底角角度是為P值(20°)，而倒數第二刀，如圖(8-3)的$\overleftrightarrow{P_2A_3}$，和最後一刀$\overleftrightarrow{P_3A_4}$的順時針偏轉角度(簡稱偏角)為$\frac{1}{2}P°$，(後文有證明)，現在將順時針偏角和逆時針偏角的判斷簡圖圖示在圖(9-4)、圖(9-5)。



順時針偏向圖(9-4)



逆時針偏向圖(9-5)

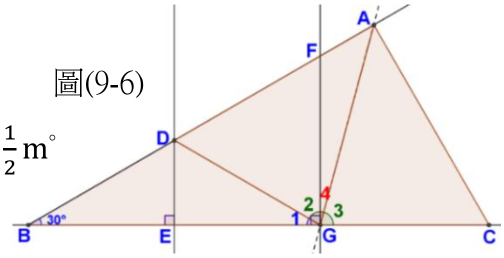
> 性質七、△ABC中，若P(∠B, ∠C) = m°，則對應的倒數第二刀的偏角角度為$\frac{1}{2}$m°。(註:偏角∠4指的是倒數第二刀和$\overline{BC}$的垂線的夾角)

證明　如圖(9-6)等腰△DBG的底角為∠1，$\overleftrightarrow{AG}$為倒數第二刀，偏角為∠4。

令$\angle 1 = m^\circ$，則$\angle 3 = \frac{(180^\circ - m^\circ)}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}m^\circ$

$\therefore$偏角$\angle 4 = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}m^\circ) = \frac{1}{2}m^\circ$

即偏角=等腰△底角的一半，得證



圖(9-6)

討論:

1. 當要使用基本定理判斷倒數第二刀△和原△是否相似時，要按下列步驟

步驟一、先觀察每一雙內角的最後等腰△的底角是否會相同? 即各自的P值是否相同？相同才有機會相似，否則必不相似。

步驟二、再觀察各邊上的倒數第二刀與各自對應垂線的偏向，是否同時為順時針如圖(9-4)或同時為逆時針如圖(9-5)？相同才有機會相似(不全相同時，除非在順順逆搭配下才會相似，非常稀少，後文會探討)

2. 有沒有P值相同而三邊上的倒數第二刀偏角方向不同但仍可相似的△？

答案是有的，但是非常稀少，這是特例。

例如 以$60°–30°–90°$ △ ABC為例，如圖(9-7)

$P(\angle B, \angle C) = 30°, R(\angle B, \angle C) = 0$(順)

$P(\angle A, \angle C) = 30°, R(\angle A, \angle C) = 1$(順)

$P(\angle A, \angle B) = 30°, R(\angle A, \angle B) = 0$(逆)

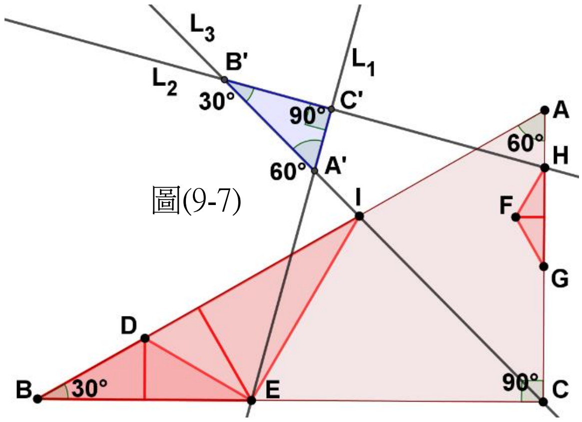
$\overline{BC}$邊上的等腰△為△ DBE

$\overline{AC}$邊上的等腰△為△ FGH

$\overline{AB}$邊上的等腰△為△ EIB

倒數第二刀依序為L_1、L_2、L_3

這三刀交叉而成的△為△ A′B′C′



圖(9-7)

明顯的和原△ ABC相似，但是，依序觀察這三刀的偏角方向，

L_1的偏角方向為順時針、L_2的偏角方向為順時針、L_3的偏角方向為逆時針

它們非同順或同逆，明顯的和基本定理條件不同，但仍會相似，順逆和R的對應關係是如何？又這種△到底有多少個呢？這就是我們接下來要探討的方向。

(四) 經過大量作圖後(見附件一)，我們有下列十項發現

發現一、如圖(9-1)，△ ABC三內角依序為$40° - 30° - 110°$，兩兩內角的P值皆為$10°$，即各邊上的等腰△底角皆為$10°$，在各等腰△底角旁的倒數第二刀L_1、L_2、L_3交叉而成的△ A′B′C′三內角依序為$50° - 30° - 100°$，明顯的，兩者不相似。

說明 原三內角按(中、小、大)排列，依據倒數第二刀偏角方向定義知，L_1、L_2、L_3的偏角方向依序為順、逆、順，非全順亦非全逆亦非特例，根據基本定理知兩者不相似。

發現二、如圖(9-2)，△ ABC三內角依序為$60° - 50° - 70°$，兩兩內角的P值皆為$10°$，即各邊上的等腰△底角皆為$10°$，在各等腰△底角旁的倒數第二刀L_1、L_2、L_3交叉而成的△ A′B′C′三內角依序為$60° - 50° - 70°$，明顯的，兩者相似。

說明 依據倒數第二刀偏角方向定義知，L_1、L_2、L_3的偏角方向依序為順、順、順，為全順，根據基本定理知相似。

發現三、如圖(9-7)，△ ABC三內角依序為$30° - 60° - 90°$，兩兩內角的P值皆為$30°$，即各邊上的等腰△底角皆為$30°$，在各等腰△底角旁的倒數第二刀L_1、L_2、L_3交叉而成的△ A′B′C′三內角依序為$30° - 60° - 90°$，明顯的，兩者相似。

說明 依據倒數第二刀偏角方向定義知，L_1、L_2、L_3的偏角方向依序為順、順、逆，非全順亦非全逆，是個特例，兩者相似，這特例可用附件總表證明。

發現四、當一個Δ，它的三雙搭配內角以連續分角線作圖切到的最後成等腰Δ而底角不相等(及P 值不同)則倒數第二刀所交叉而成的Δ必不相似，就算最後等腰Δ底角相等時，也未必相似，我們可用附件總表說明。

發現五、在兩兩內角的P值都相等(爾後都簡稱同P)且三內角的大小順序規定為(中、小、大)時，偏角方向不論是(順、逆、順)、(逆、逆、順)、(順、逆、逆)、(逆、順、順)、(逆、順、逆)，依據本報告的附件發現都不會相似。

發現六、在同P且三內角依序為(中、小、大)，當偏角方向是 (順、順、逆)時，依據附件總表，只有少許Δ會相似，絕大部分都不會相似，會相似時，原三內角有一定的比例。

(五) 直角Δ的倒數第二刀交叉形成的Δ偏角非同順或非同逆，但仍可相似的例外探討

1. 整數內角共有多少個？詳見下表(一)共有2700個 表(一)

最大內角	60	61	62	63	…	…	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	…	…	175	176	177	178
中	60				…	…												…	…				
小	60				…	…												…	…				
個數	1	2	4	5	…	…	37	38	40	41	43	44	45	44	44	43	43	…	…	2	2	1	1
合計共	2700個																						

2. 根據上表(一)，整數內角的直角Δ共有 45 個，非常特別的是，這 45 個直角Δ中，每一個直角Δ的兩兩內角都同 P 值 (實際上，一般Δ的三內角不一定同P值。

證明 給定直角Δ三內角為$(x°, y°, x° + y°)$

令$x = p \times s$，$y = p \times t$，最大公因數$(s, t) = 1$

則$(x, x + y) = (p \times s, p \times s + p \times t) = p(s, s + t) = p$

$\because s$，t互質，$\therefore s + t$不會有比s大的倍數，故$(s, s + t) = 1$，得證。

3. 以整數內角的直角Δ為例，列出所有同P的直角Δ，並觀察何者的倒數第二刀Δ能與原Δ保持相似。

步驟 1: 找出90的所有因數:1、2、3、5、6、10、15、18、30、45、90。

步驟 2: 設其他兩內角分別為a、b。其算式如下，$a + b + 90 = 180$。接著把要找的底角角度(90的因數之一)帶入，以底角10°為例:$a = 10x$、$b = 10y$、$90 = 9 \times 10$ 則$10x + 10y + 9 \times 10 = 180$，化簡後為$x + y = 9$。此時x、y、9要兩兩互質，滿足上述條件共可取得三組答案，分別為(1,8,9) (2,7,9) (4,5,9)。接著把底角角度10代入，得三組Δ (10,80,90) (20,70,90) (40,50,90)。所以底角P值為10的原直角Δ有3個。其餘底角角度以此類推，最後共有45個能同P的直角Δ。

步驟 3: 列出上文中的45個直角Δ，並用尺規作圖實作畫出各自的倒數第二刀Δ的三內角，並記錄在附表中，接著將彼此的三內角轉換關係列成圖並圖示如下:

$$P = 1 \begin{cases} (1,89,90) \rightarrow (2,88,90) \\ (7,83,90) \rightarrow (8,82,90) \\ (11,79,90) \rightarrow (12,78,90) \\ (13,77,90) \rightarrow (14,76,90) \\ (17,73,90) \rightarrow (16,74,90) \\ (19,71,90) \rightarrow (20,70,90) \\ (23,67,90) \rightarrow (22,68,90) \\ (29,61,90) \rightarrow (28,62,90) \\ (31,59,90) \rightarrow (30,60,90) \\ (37,53,90) \rightarrow (36,54,90) \\ (41,49,90) \rightarrow (42,48,90) \\ (43,47,90) \rightarrow (42,48,90) \end{cases} \quad P = 2 \begin{cases} (2,88,90) \rightarrow (4,86,90) \\ (4,86,90) \rightarrow (2,88,90) \\ (8,82,90) \rightarrow (6,84,90) \\ (14,76,90) \rightarrow (16,74,90) \\ (16,74,90) \rightarrow (18,72,90) \\ (22,68,90) \rightarrow (20,70,90) \\ (26,64,90) \rightarrow (28,62,90) \\ (28,62,90) \rightarrow (26,64,90) \\ (32,58,90) \rightarrow (30,60,90) \\ (34,56,90) \rightarrow (36,54,90) \\ (38,52,90) \rightarrow (40,50,90) \\ (44,46,90) \rightarrow (42,48,90) \end{cases}$$

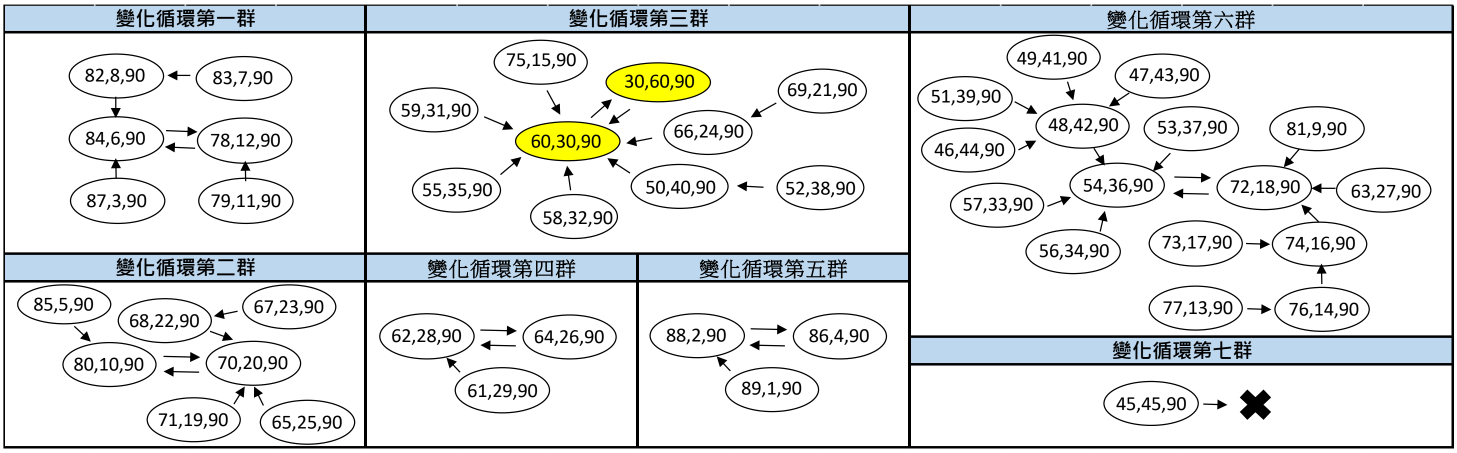
$$P = 3 \begin{cases} (3,87,90) \rightarrow (6,84,90) \\ (21,69,90) \rightarrow (24,66,90) \\ (33,57,90) \rightarrow (36,54,90) \\ (39,51,90) \rightarrow (42,48,90) \end{cases} \quad P = 5 \begin{cases} (5,85,90) \rightarrow (10,80,90) \\ (25,65,90) \rightarrow (20,70,90) \\ (35,55,90) \rightarrow (30,60,90) \end{cases} \quad P = 6 \begin{cases} (6,84,90) \rightarrow (12,78,90) \\ (12,78,90) \rightarrow (6,84,90) \\ (24,66,90) \rightarrow (30,60,90) \\ (42,48,90) \rightarrow (36,54,90) \end{cases}$$

$$P = 9 \begin{cases} (9,81,90) \rightarrow (18,72,90) \\ (27,63,90) \rightarrow (18,72,90) \end{cases} \quad P = 15 \ \{(15,75,90) \rightarrow (30,60,90) \quad P = 30 \ \{(30,60,90) \rightarrow (30,60,90) \quad P = 18 \begin{cases} (18,72,90) \rightarrow (36,54,90) \\ (36,54,90) \rightarrow (18,72,90) \end{cases}$$

$P = 45 \ \{(45,45,90) \rightarrow$ ✕，(等腰Δ沒有倒數第二刀)

上表中所對應操作出的這些倒數第二刀看似雜亂無章(最大角為 90°)，

但其實彼此之間有些可以循環轉換且內含諸多項性質，我們先整理並分成七群如下:



發現七、所有具整數內角的直角△，其倒數第二刀△的循環變化共可分成七群，同一群中的兩組三內角不一定同P。

發現八、除了第五群外，每一群內都有一對能互相轉換的核心三內角(指成可逆轉換的那對三內角)。

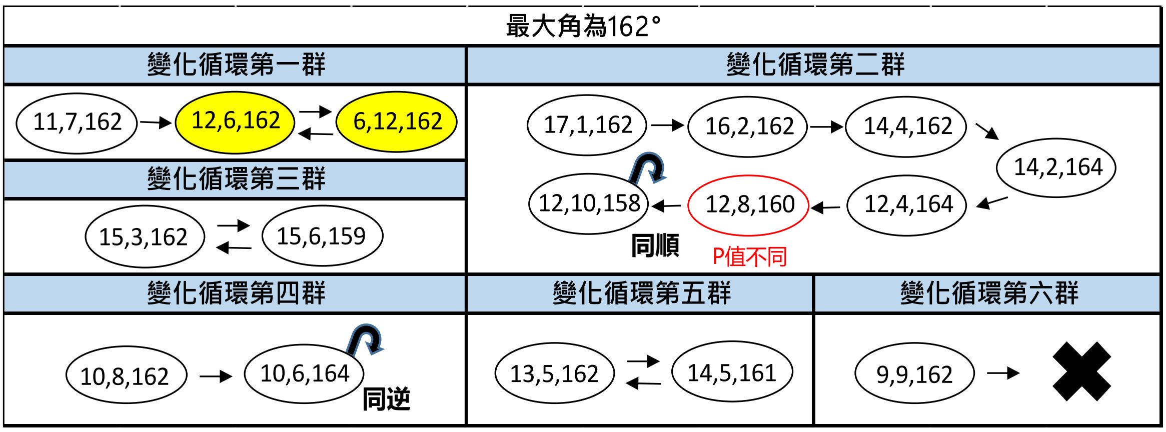
發現九、在發現八中的互相轉換的每對核心三內角(指成可逆轉換的那對三內角)兩者度數大部分都不同，其中最有特色的是第二群那對三內角的度數竟相同，可稱為黑洞數△或卡布列克常數△。

發現十、觀察這一對黑洞數$(60°, 30°, 90°) \leftrightarrow (30°, 60°, 90°)$，它們的倒數第二刀偏角方向依序為(順、順、逆)，非同順亦非同逆但仍可相似，稀有少見(這就是本報告的研究主題「十傑」的概念由來)。

性質八、在三內角皆為整數的直角△中，只有 30°-60°-90°的直角Δ能使倒數第二刀交叉而成的△與原△相似。

性質九、在三內角皆為整數的直角△中，倒數第二刀交叉而成的Δ必為直角 △且共分成七群相關的△，每一群都以兩個能互相轉換的直角△為核心，除 45°- 45° - 90°外。s

另外又以最大內角 162°為例，共分為六群(這可以和直角Δ做比較)



說明

(1)金黃色的橢圓代表非同順或非同逆，但仍相似的△，即黑洞數。

(2)有記號 的△代表同順或同逆，必然相似的△

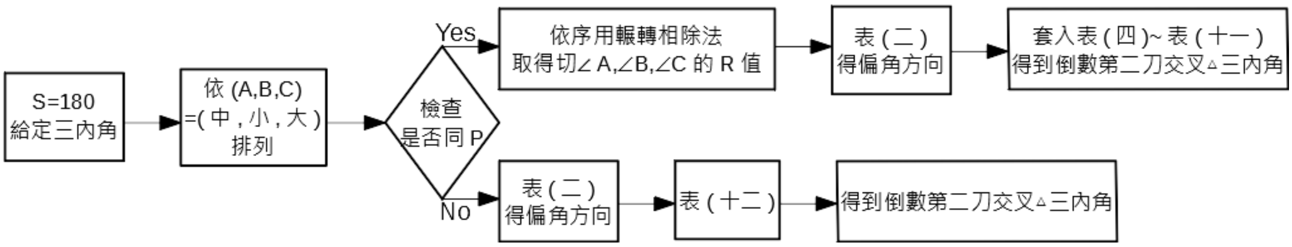
(3)有記號 ✖ 的△代表沒有倒數第二刀的等腰△

(4)有紅色字的△代表兩兩內角的 P 值不同，但再變化下去仍可回到同P狀態。

> 討論 以上文最大內角為90°及162°為例，要把任意整數內角Δ的倒數第二刀交叉Δ用尺作圖逐一畫出是一件累人的事，應該要另闢巧徑。

(六) 如何由給定的整數三內角，不必經過作圖而直接用輾轉相除法推算出倒數第二刀的Δ的三內角

因為在$S=180$推推樂流程的倒數的第二組數指的是幾何分角線作圖的倒數第二刀所在的Δ三內角，並非三邊上各倒數第二刀交叉成的Δ三內角，因此目前為止，無法直接用推推樂算出倒數第二刀交叉Δ的三內角，但當我們把兩者偏向在推推樂倒數第二組數讀出順序再定成由大→小時，兩者即一致。在此我們先給一個解決此問題的流程圖，再按流程圖的設計逐一探討:



1. 探討幾何作圖上倒數第二刀與各對應邊的垂線(即最後一刀)偏角方向的決定方法？

(1)規定Δ三內角的最小角為∠B，最大角為∠C，三內角擺放方式為(中、小、大)

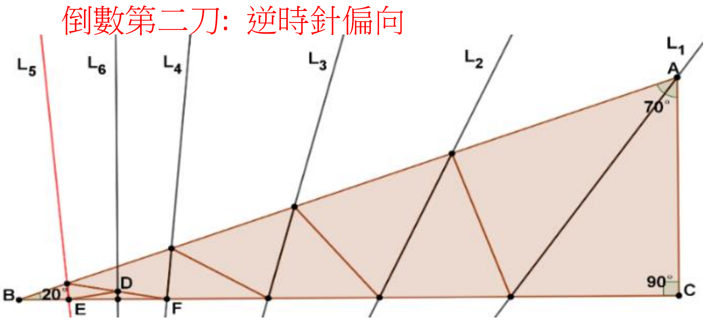
(2)∵ ∠A、∠B、∠C已於(1)中規定，∴由輾轉相除法的轉換次數R值的奇偶性，可經由下表(二)轉換成倒數第二刀的順逆偏向

	切∠A	切∠B	切∠C
相關的兩內角	R(∠B,∠C)	R(∠A,∠C)	R(∠A,∠B)
R的奇偶性	奇	奇	奇
偏角方向	逆	順	順
R的奇偶性	偶	偶	偶
偏角方向	順	逆	逆

表(二)

說明 例如圖(10-1)中，從∠A開始以分角線連續作圖，可知L_5為倒數第二刀，

∵ $\mathrm{R}(\angle\mathrm{B},\angle\mathrm{C})=1$為奇數，由表(一)知$L_5$的偏角方向為逆時針。同法可得其餘

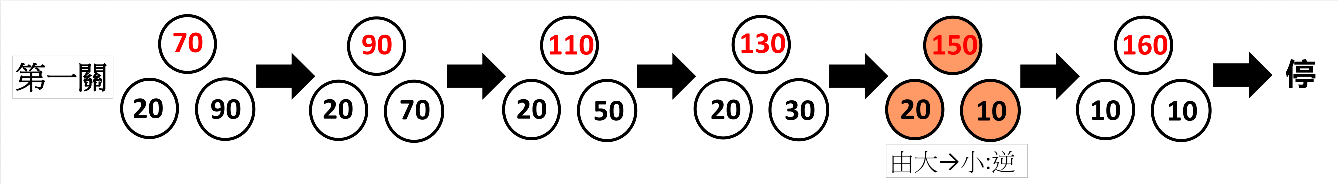


圖(10-1)

	∠C	∠B	
4	90	20	2
	80	20	
	10	0	

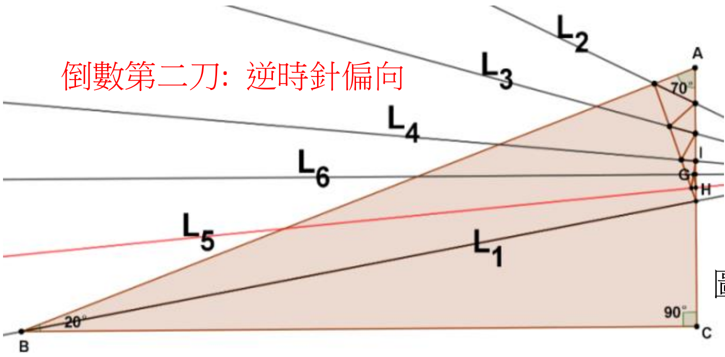
$\mathrm{R}(\angle\mathrm{B},\angle\mathrm{C})=1$

又當推推樂A當關主(如同幾何作圖上的切∠A)時:



例如圖(10-2)中，從∠B開始以分角線連續作圖，可知L_5為倒數第二刀，

∵ R(∠A, ∠C) = 2為偶數，由表(一)知L_5的偏角方向為逆時針。

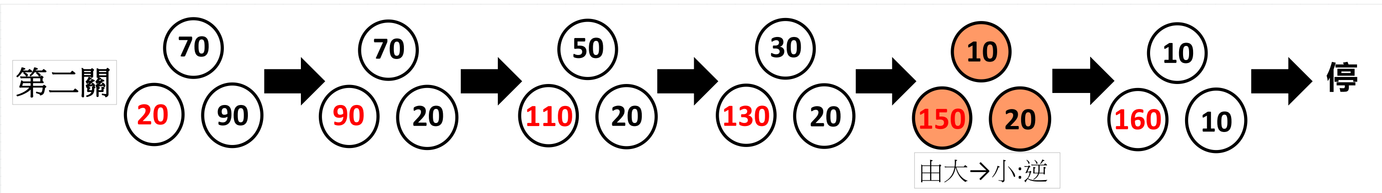


圖(10-2)

	∠C	∠A	
1	90	70	3
	70	60	
2	20	10	
	20		
	0		

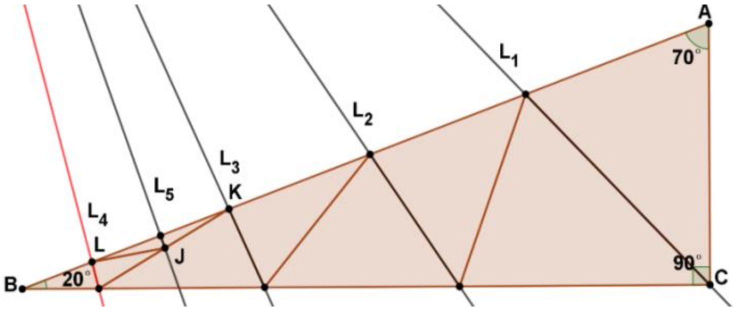
R(∠A, ∠C) = 2

當推推樂B當關主(如同幾何作圖上的切∠B)時:



例如圖(10-3)中，從∠C開始以分角線連續作圖，可知L_5為倒數第二刀，

倒數第二刀: 順時針偏向



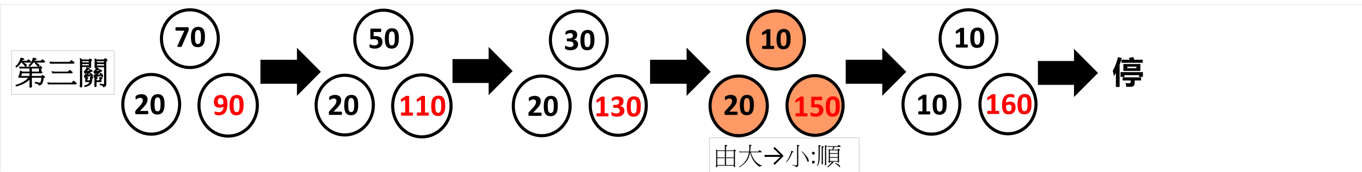
圖(10-3)

	∠A	∠B	
3	70	20	2
	60	20	
	10	0	

R(∠A, ∠B) = 1

∵ R(∠A, ∠B) = 1為奇數，由表(一)知L_5的偏角方向為順時針。

當推推樂C當關主(如同幾何作圖上的切∠C)時:

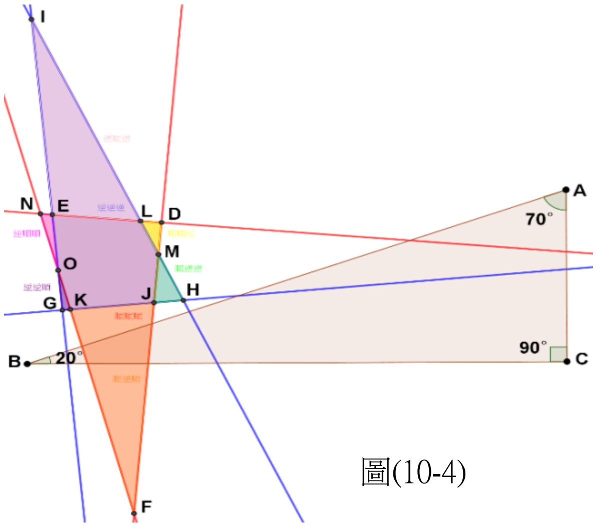


經過圖(10-1)到圖(10-3)的印證後，可得知利用輾轉相除法即可判斷出△ABC的倒數第二刀的偏角方向依序為(逆、逆、順)，同時我們使用由大到小的順序觀察推推樂倒數第二組數也可推知幾何分角線作圖的倒數第二刀的順逆偏向。同理利用上文方法，我們將△三內角所有倒數第二刀偏角方向組合敘述如下:

2. 建立倒數第二刀順逆偏角方向的八種搭配圖

在圖(10-4)中，△三邊上倒數第二刀的順時針逆時針偏向共交叉搭配出八種可能的△，列如下表(三):

	切∠A	切∠B	切∠C	表(三)	
一	順	順	順	△DNF	紅色
二	順	逆	順	△JKF	橙色
三	順	順	逆	△DLM	黃色
四	順	逆	逆	△JHM	綠色
五	逆	順	順	△ENO	桃紅
六	逆	逆	順	△OGK	紫色
七	逆	順	逆	△ELI	粉紅
八	逆	逆	逆	△GHI	藍色



圖(10-4)

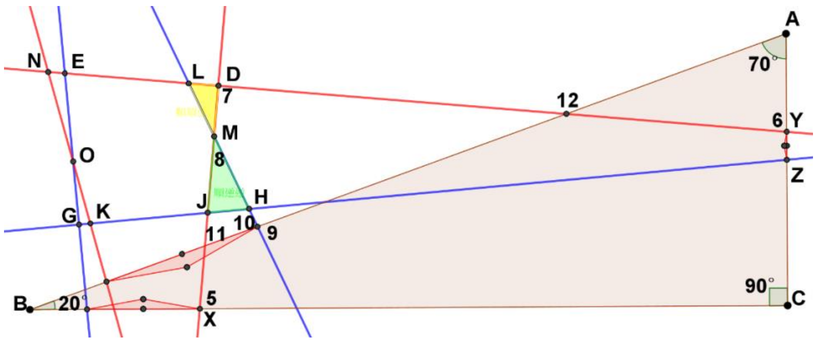
3. 在**同P**下，倒數第二刀交叉Δ的八種順逆組合的三內角計算公式及相似性對應規則探討

性質十、在同P交叉Δ三內角的計算，利用順逆轉換偏角搭配出+P或−P有如下的四條規則:

規則一、當全順時，直接相似，即得到與原三內角相等的三內角

規則二、當全逆時，直接相似，即得到與原三內角相等的三內角

規則三、當順比逆多，逆的位置角度不變，接著觀察若逆排在前面則小角−P°、大角 +P°、中角不變。若逆不排在前面則不變之角除外，較小角+P°、較大角−P°。



圖(10-5)

證明

不失一般性，以(70°, 20°, 90)為例

在圖(10-5)中，△ LMD為(順、順、逆)偏角方向△

根據性質六知，$\angle 5 = \angle 6 = \angle 9 = 90° - \frac{1}{2}\mathrm{P}°$

在四邊形DXCY中，$\because \angle 5 = \angle 6 = 90° - \frac{1}{2}\mathrm{P}°$

∴四邊形DXCY為圓內接四邊形

$\therefore \angle 7 = 180° - \angle C = 180° - 90° = 90°$，即$\angle \mathrm{LDM} = 90°$

$\therefore \angle 9 = \angle 10 = 90° - \frac{1}{2}\mathrm{p}°$，$\therefore \angle 11 = \angle 12 - \angle 7 = 70° + \angle 6 - \angle 7$

$$= 70° + 90° - \frac{1}{2}\mathrm{p}° - 90° = 70° - \frac{1}{2}\mathrm{P}°$$

$$\angle 8 = 180° - \angle 10 - \angle 11 = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}P°\right) - \left(70° - \frac{1}{2}P°\right) = 20° + P°$$

$\therefore \angle DML = \angle 8 = 20 + P°$，又$\angle DLM = \angle 7 - \angle DML = 70° - P°$ 得證

$$(順順逆) \to (+P, -P, 不變)$$

同理當△ ENO(逆順順)，逆排在前面則小角$-P°$、大角$+P°$、中角不變，而(順逆順)則小角不變，中角$+P$，大角$-P$，見△ JKF。

> 規則四、當逆比順多，順的位置角度不變，接著觀察若順排在前面則小角$+P°$、大角$-P°$、中角不變。若順不排在前面則不變之角除外較小角$-P°$、較大角$+P°$。

證明

在圖(10-5)中，△ HMJ為(順、逆、逆)偏角方向△

在規則三的證明中，$\angle HMJ = \angle 8 = 20° + P°$

根據性質十六知，$\angle DYZ = \angle JZY = 90° + \frac{1}{2}P°$

在四邊形DYZJ中，$\angle MJH = \angle DJZ = 360° - \angle DYZ - \angle JZY - \angle 7$

$$= 360 - \left(90° + \tfrac{1}{2}P°\right) - \left(90° + \tfrac{1}{2}P°\right) - 90° = 90° - P°$$

$\therefore \angle MHJ = 180° - \angle 8 - \angle DJZ = 180° - (20° + P°) - (90° - P°) = 70°$得證

$$(順逆逆) \to (不變, +P, -P)，如△ HMJ$$

同理當△ MIN(逆順逆) $\to (-P, 不變, +P)$，又當△ JOG(逆逆順) $\to (+P, -P, 不變)$

利用上述輾轉規則，我們將它拆解成八種組合，建立成八個表(表((四)~表(十一))，當使用者用R值的奇偶性，推得順逆偏向，可直接對應適當的表，進而算出三內角或斷定相不相似。

第一種可能對應			表(四)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	奇	奇
順逆	順	順	順
±P	不變	不變	不變
二刀△	N	F	D
三內角	$x°$	$y°$	$z°$
是否相似	相似		

第二種可能對應			表(五)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	偶	奇
順逆	順	逆	順
±P	$+P$	不變	$-P$
二刀△	K	F	J
三內角	$x° + P$	$y°$	$z° - p$
是否相似	不相似		

第三種可能對應			表(六)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	奇	偶
順逆	順	順	逆
±P	$-P$	$+P$	不變
二刀△	L	M	D
三內角	$x° - P$	$y° + P$	$z°$
是否相似	唯獨此處有機會出十傑		

第四種可能對應			表(七)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	偶	偶
順逆	順	逆	逆
±P	不變	$+P$	$-P$
二刀△	H	M	J
三內角	$x°$	$y° + P$	$z° - p$
是否相似	不相似		

第五種可能對應			表(八)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	奇	奇
順逆	逆	順	順
±P	不變	$-P$	$+P$
二刀△	N	O	E
三內角	$x°$	$y° - P$	$z° + P$
是否相似	不相似		

第六種可能對應			表(九)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	偶	奇
順逆	逆	逆	順
±P	$+P$	$-P$	不變
二刀△	K	O	G
三內角	$x° + P$	$y° - P$	$z°$
是否相似	不相似		

第七種可能對應			表(十)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	奇	偶
順逆	逆	順	逆
±P	$-P$	不變	$+P$
二刀△	L	I	E
三內角	$x° - P$	$y°$	$z° + P$
是否相似	不相似		

第八種可能對應			表(十一)
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	偶	偶
順逆	逆	逆	逆
±P	不變	不變	不變
二刀△	H	I	G
三內角	$x°$	$y°$	$z°$
是否相似	相似		

4. 使用方法:

由同P值的三內角，求出各自對應的R值，再依照 R 值的奇偶性，接著再在各對應邊上觀察其順逆方向，對應填入上述八種可能的對應表中，即可判定相不相似。

例如:

(1) 以$\angle A = 70°$，$\angle B = 30°$，$\angle C = 80°$為例，先求得P值$= 10°$，再求得R 值，依序為 2、1、1，奇偶性依序為偶、奇、奇，與原圖比對，轉換成順、順、順，由表(四)得知，必與原△相似。

(2) 以$\angle A = 63°$，$\angle B = 48°$，$\angle C = 69°$為例，先求得P值$= 3°$，再求得R 值，依序為 3、2、2，奇偶性依序為奇、偶、偶，與原圖比對，轉換成逆、逆、逆，由表(十一)得知，必與原△相似。

(3) 以$\angle A = 36°$，$\angle B = 18°$，$\angle C = 126°$為例，先求得P值$= 18°$，再求得R 值，依序為 0、1、0，奇偶性依序為偶、奇、偶，與原圖比對，轉換成順、順、逆，由表(六)得知，可能與原△相似。

5.**不同P**的整數內角△的倒數第二刀交叉△三內角的計算公式

當△兩兩內角P值不一定相同時，倒數第二刀△的三內角計算公式如下(表十二):

> 性質十、以分角線分別切完△ ABC三內角後，當各邊上的倒數第二刀偏角方向依序為(順順順)時，則三條倒數第二刀所交叉而成的△必與原△相似且三內角的計算公式分別為:$(\angle A + \frac{1}{2}P_c - \frac{1}{2}P_b, \angle B + \frac{1}{2}P_a - \frac{1}{2}P_c, \angle C + \frac{1}{2}P_b - \frac{1}{2}P_a)$

證明 如圖(10-6)，

$$\angle DEF = 180° - \angle B_2EA_2 \ (\text{為四邊形}B_2EA_2C\text{的一內角})$$
$$= 180° - [360° - \angle EA_2C - \angle C - \angle EB_2C]$$
$$= 180° - \left[360° - (90° - \frac{1}{2}P_a) - \angle C - (90° + \frac{1}{2}P_b)\right]$$
$$= 180° - \left[180° + \frac{1}{2}P_a - \angle C - \frac{1}{2}P_b\right]$$
$$= \angle C + \frac{1}{2}P_b - \frac{1}{2}P_a = 84° + 14° - 2° = 96° \quad \text{正確}$$

$$\angle DFE = 180° - \angle C_2FA_2 \ (\text{為四邊形}C_2FA_2B\text{的一內角})$$
$$= 180° - [360° - \angle FC_2B - \angle B - \angle FA_2B]$$
$$= 180° - \left[360° - (90° - \frac{1}{2}P_c) - \angle B - (90° + \frac{1}{2}P_a)\right]$$
$$= 180° - \left[180° + \frac{1}{2}P_c - \angle B - \frac{1}{2}P_a\right]$$
$$= \angle B + \frac{1}{2}P_a - \frac{1}{2}P_c = 40° + 2° - 4° = 38° \quad \text{正確}$$

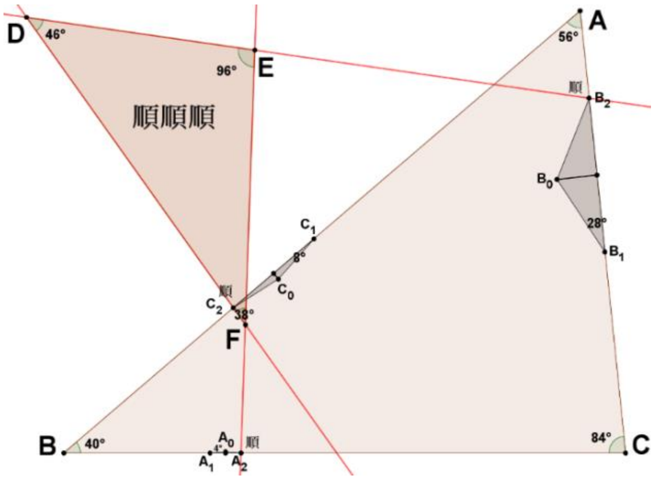
$\angle EDF = 180° - \angle DEF - \angle DFE$

$$= 180° - \left[\angle C + \frac{1}{2}P_b - \frac{1}{2}P_a\right] - \left[\angle B + \frac{1}{2}P_a - \frac{1}{2}P_c\right]$$

$$= 180° - \angle C - \angle B - \frac{1}{2}P_b + \frac{1}{2}P_c$$

$$= \angle A + \frac{1}{2}P_c - \frac{1}{2}P_b \;=\; 56° + 4° - 14° \;=\; 46° \quad \text{正確}$$

其他不同的順逆組合的證明都類似



圖(10-6)

表(十二)**不一定同P**的八種順逆排列倒數第二刀交叉Δ三內角計算總表　　表(十二)

	$\angle$A (中)	$\angle$B (小)	$\angle$C (大)	$\angle$A (中)	$\angle$B (小)	$\angle$C (大)
倒數第二刀三角形	①順(偶) $\angle A + (\frac{1}{2}P_c) - (\frac{1}{2}P_b)$	順(奇) $\angle B + (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_c)$	順(奇) $\angle C + (\frac{1}{2}P_b) - (\frac{1}{2}P_a)$	⑤逆(奇) $\angle A + (\frac{1}{2}P_c) - (\frac{1}{2}P_b)$	順(奇) $\angle B - (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_c)$	順(奇) $\angle C + (\frac{1}{2}P_a) + (\frac{1}{2}P_b)$
	②逆(奇) $\angle A + (\frac{1}{2}P_b) - (\frac{1}{2}P_c)$	逆(偶) $\angle B + (\frac{1}{2}P_c) - (\frac{1}{2}P_a)$	逆(偶) $\angle C + (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_b)$	⑥逆(奇) $\angle A + (\frac{1}{2}P_c) + (\frac{1}{2}P_b)$	逆(偶) $\angle B - (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_c)$	順(奇) $\angle C + (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_b)$
	③順(偶) $\angle A - (\frac{1}{2}P_b) - (\frac{1}{2}P_c)$	順(奇) $\angle B + (\frac{1}{2}P_a) + (\frac{1}{2}P_c)$	逆(偶) $\angle C + (\frac{1}{2}P_b) - (\frac{1}{2}P_a)$	⑦逆(奇) $\angle A - (\frac{1}{2}P_b) - (\frac{1}{2}P_c)$	順(奇) $\angle B + (\frac{1}{2}P_c) - (\frac{1}{2}P_a)$	逆(偶) $\angle C + (\frac{1}{2}P_a) + (\frac{1}{2}P_b)$
	④順(偶) $\angle A + (\frac{1}{2}P_b) + (\frac{1}{2}P_c)$	逆(偶) $\angle B + (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_c)$	順(奇) $\angle C - (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_b)$	⑧順(偶) $\angle A + (\frac{1}{2}P_b) - (\frac{1}{2}P_c)$	逆(偶) $\angle B + (\frac{1}{2}P_a) + (\frac{1}{2}P_c)$	逆(偶) $\angle C - (\frac{1}{2}P_a) - (\frac{1}{2}P_b)$

說明

(1) 無論Δ兩兩內角 P 值是否相等，都能利用此表計算出倒數第二刀交叉Δ的三內角角度

(2) 以$\angle A = 60^\circ$、$\angle B = 40^\circ$、$\angle C = 80^\circ$為例，$P_a = 40$、$P_b = 20$、$P_c = 20$。
$R_a = 0$、$R_b = 1$、$R_c = 1$轉換為順逆偏向後為順、順、順。對照上表:

$$\angle A_1 = \angle A + (\tfrac{1}{2}P_c) - (\tfrac{1}{2}P_b) = 60^\circ + \frac{1}{2} \times 20^\circ - \frac{1}{2} \times 20^\circ = 60^\circ$$

$$\angle B_1 = \angle B + (\tfrac{1}{2}P_a) - (\tfrac{1}{2}P_c) = 40^\circ + \frac{1}{2} \times 40^\circ - \frac{1}{2} \times 20^\circ = 50^\circ$$

$$\angle C_1 = \angle C + (\tfrac{1}{2}P_b) - (\tfrac{1}{2}P_a) = 80^\circ + \frac{1}{2} \times 20^\circ - \frac{1}{2} \times 40^\circ = 70^\circ$$ 兩Δ不相似

6. 在順順逆的搭配組合中，探討能與原△相似的特別案例條件並找出十傑。

依不同的最大內角(但同P)，做出該類△的倒數第二刀△會相似的統計總表(見研究日誌)我們將所有內角為整數的三角形一一列出，如表(一)，去除掉等腰三角形後，總共有 2700 個△，我們利用剛才報告中所提到的同P倒數第二刀轉換規則，將每一個倒數第二刀交叉△的角度運算出來，再統計如下

(1) 同順…(直接相似，共 307 個)

(2) 同逆…(直接相似，共 240 個)

(3) 十傑(偏角方向為順順逆且符合$b < a < c$，$a = 2b$，$c = kb$)，其中k為大於2的奇數…(可相似，共 10 個)

證明

由已知條件三內角兩兩同P，角度大小排列次序$(a, b, c) = (中, 小, 大)$，且$a = 2b, c = kb$，k為大於2的奇數，又對應到表(六)的順順逆排列，則根據規則三，順比逆多，逆的位置角度不變，逆不排在前面時，對應出來的倒數第二刀交叉之△的三內角計算方式為$(-p, +p, 不變)$，即$(a - p, b + p, c)$，因$b = p$，即$(2b - b, b + b, kb) \rightarrow (b, 2b, kb)$此三內角和原△三內角$(2b, b, kb)$相同，只是位置改變，根據AAA △相似定理知，此兩△相似。

(4) 偏角方向亦為順順逆，不符合$a = 2b$，$c = kb$的△…(不相似，共 185 個)並列於附件一

討論:

根據基本定理，同順相似、同逆相似，這是天經地義，但是像(順、順、逆)，本來應該是不相似的，但因合乎特殊條件竟然可以變成相似，這些是非常難得的△，共有十個，故我們稱它為十傑。

性質十二、若a, b, c為△ ABC的三內角角度，$b < a < c$，$a = 2b$，$c = kb$，$k > 2$，但k為奇數，又此三內角之P值皆為 b，則倒數第二刀△的偏角方向排列成(順、順、逆)，非同順逆但必和原△相似。

證明 ∵只有同P △才有機會相似，∴ 令 P值為$b°$

∴依順順逆±P的規則知，$(2b, b, c) \longrightarrow (b, 2b, c)$

∴ c值具有公因數b且不可為2的倍數，∴ $c = kb$, k 為大於 1 的奇數，

故$(2b, b, kb) \longrightarrow (b, 2b, kb)$，得證

性質十三、從$1°$到$179°$的所有整數度數中，Δ的三內角合乎性質十二中的關係式且呈(順順逆)排列條件，共有十組依序為$(2°, 1°, 177°)$、$(4°, 2°, 174°)$、$(6°, 3°, 171°)$、$(10°, 5°, 165°)$、$(12°, 6°, 162°)$、$(18°, 9°, 153°)$、$(20°, 10°, 150°)$、$(30°, 15°, 135°)$、$(36°, 18°, 126°)$、$(60°, 30°, 90°)$，**被稱為$S = 180$的十傑**。

(七) 有金黃色橢圓和  記號的△的倒數第二刀會相似，在其他△中我們也有發現某些△也會這樣，圖示如下:

∠A	∠B	∠C	十傑	其他同順或同逆相似
2	1	177	2,1,177 ⇄ 1,2,177	22,5,153　5,4,171
4	2	174	4,2,174 ⇄ 2,4,174	21,9,150　17,13,150
6	3	171	6,3,171 ⇄ 3,6,171	
10	5	165	10,5,165 ⇄ 5,10,165	23,22,135　32,13,135
12	6	162	11,7,162 → 12,6,162 ⇄ 6,12,162	↓　↓
18	9	153	18,9,153 ⇄ 9,18,153	24,22,134　32,14,134
20	10	150	23,7,150 → 22,8,150 → 20,10,150 ⇄ 10,20,150	↓　↓
30	15	135	29,16,135 → 30,15,135 ⇄ 15,30,135	26,20,134　31,14,135
36	18	126	36,18,126 ⇄ 18,36,126	⋮
60	30	90	75,15,90 → 60,30,90；60,30,90 ⇄ 30,60,90；59,31,90 → 60,30,90；69,21,90 → 66,24,90 → 60,30,90；55,35,90 → 60,30,90；58,32,90 → 60,30,90；52,38,90 → 50,40,90 → 60,30,90	

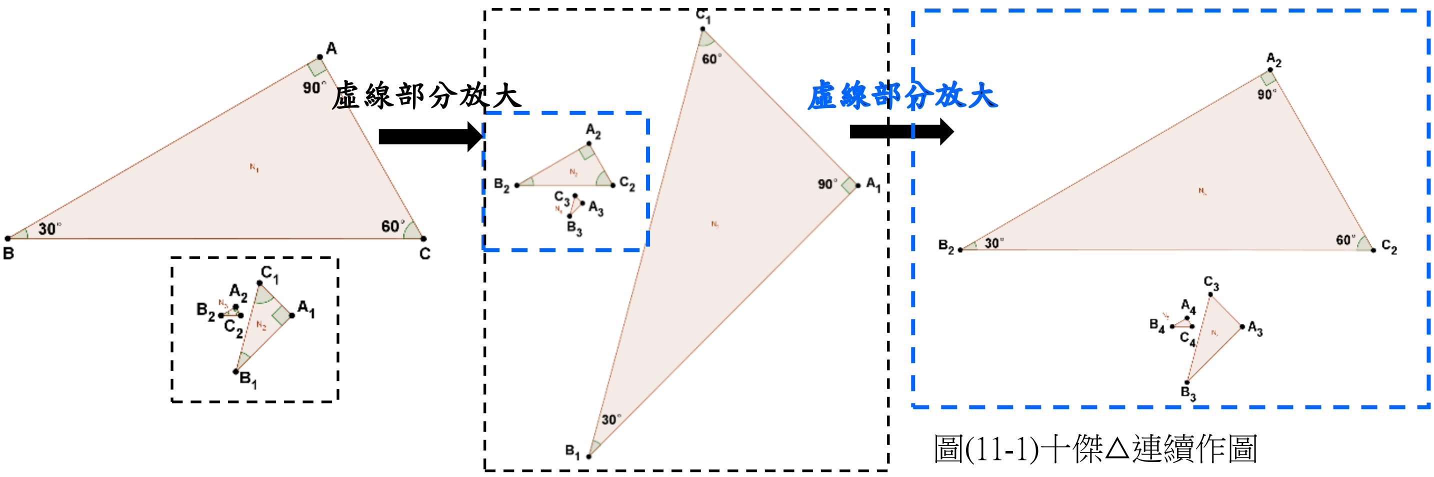
性質十二、在$S = \angle A + \angle B + \angle C = 180°$的幾何平面上

(1) 記號 ↶ 的△共有 559 個 (2) **金黃色**橢圓的△共有 10 個，我們稱之為二刀流十傑

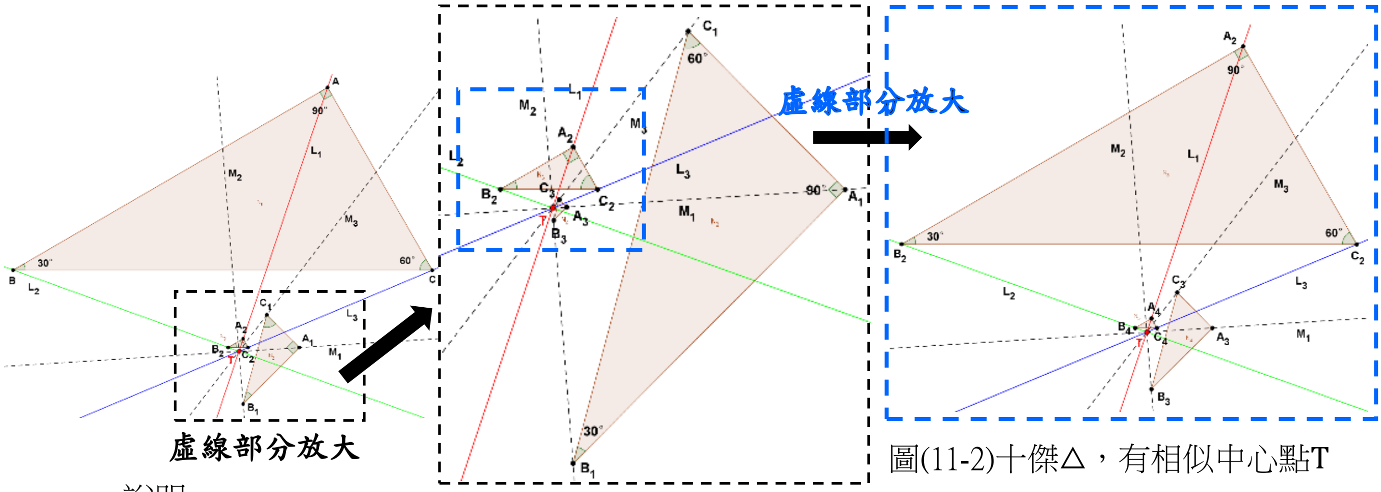
(八) 十傑的幾何性質探討

我們發現十傑三角形具有連續作圖仍能維持相似的特性，但我們又想知道這些相似△所處的位置之間是否有位似關係，因此實際做了例子試探。

以$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ △為例，連續操作如圖(11-1)到圖(11-2)。



圖(11-1)十傑△連續作圖



圖(11-2)十傑△，有相似中心點T

說明

我們從ΔABC 開始做倒數第二刀交叉的△ $A_1B_1C_1$，接著再從△ $A_1B_1C_1$做△ $A_2B_2C_2$，依同樣的方法連續做出△ $A_3B_3C_3$、△ $A_4B_4C_4$、△ $A_5B_5C_5$⋯如圖(11-1)、圖(11-2)、圖(11-3)，因為對應邊長呈等比數列縮小，故圖形很快速的集中成一坨，分辨不太出來，但具有下列性質。

性質十五、十傑Δ的任一△按倒數第二刀作圖法連續作圖所得出的△ $A_nB_nC_n$，

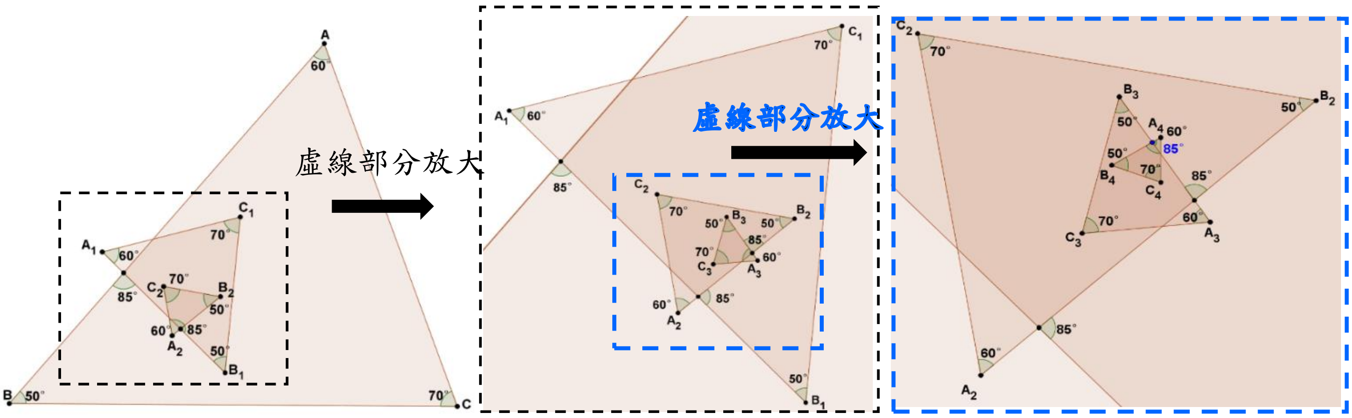
$n = 1$、2、3、4、5⋯。

則:(一)點$A_{(2k+1)}$共線，$k = 0$、1、2、3⋯，同理點$B_{(2k+1)}$共線、點$C_{(2k+1)}$共線，且三條共線交於同一點T，即△ $A_{(2k+1)}B_{(2k+1)}C_{(2k+1)}$ 具有相同的投影中心T。

(二)點A_{2k}共線，$k = 0$、1、2、3⋯，同理點B共線、點C_{2k}共線，且三條共線交於同一點 T，即△ $A_{2k}B_{2k}C_{2k}$和△ $A_{(2k+1)}B_{(2k+1)}C_{(2k+1)}$的投影中心共點。

(三)△ $A_kB_kC_k$，$k = 0$、1、2、3⋯，對應邊長呈等比數列。

性質十六、在五百五十九個同順和同逆的△中，按倒數第二刀作圖法連續作圖所得出的△ $A_nB_nC_n$，$n = 1$、2 、3、4、5⋯，如圖(11-2)，則每一個△ $A_iB_iC_i$ ，皆比前一個相似△ $A_{(i-1)}B_{(i-1)}C_{(i-1)}$呈螺旋線形偏轉$\frac{180°-p^{\circ}}{2}$，對應邊長呈等比數列縮小，最後趨近到螺旋中心點。



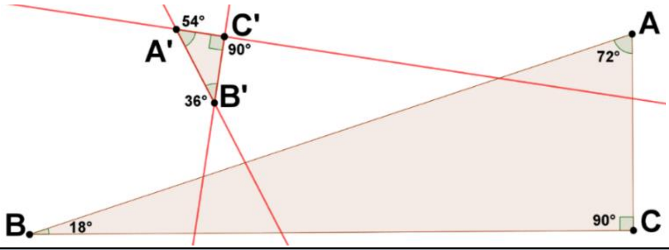
圖(11-3)同順相似△，呈螺旋排列，沒有相似中心點

四、對任意正整數A, B, C探討求算$N(s)$的規則，其中$S = A + B + C$，$S > 3$

因為接下來要探討$S = A + B + C =$任意正整數定值$(S > 3)$時的傑數求算法。而之前傑數的概念是建立在$S = 180$的幾何觀點上。雖然分角線作圖和推推樂運算兩者的P, Q, R值，本文已介紹清楚，但對於$S \neq 180$的情況，他們的傑數要如何推導計算呢？這部分仍要再給幾個例證，做確實的聯結。在$S = 180$時，一般人會誤以為推推樂流程的倒數第二組數即為分角線連續作圖的倒數第二刀交叉所成的Δ，這是錯誤的，推推樂倒數第二組數是分角線作圖倒數第二刀所在的Δ的三內角，在前文的表(二)中，將推推樂的倒數第二組數由大到小讀取順逆時針方向可恰巧吻合倒數第二刀的順逆偏向(傑數，太神奇了)，這就和分角線作圖的倒數第二刀的偏向聯結上了，接著再聯結表(六)就可以確定是否有機會是傑數的一員了。

(一) 利用$S = 180$時，觀察倒數第二刀的幾何作圖法和推推樂求算法的相關性

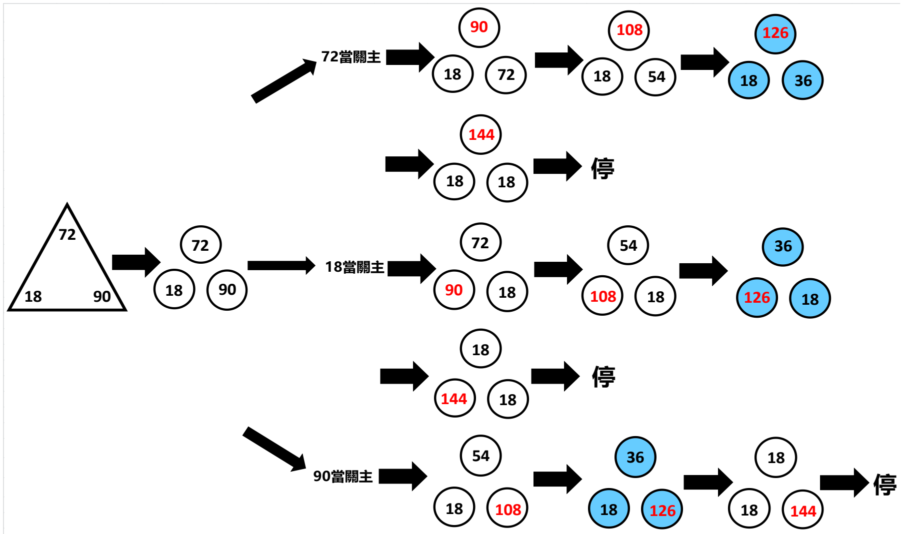
1. (1)分角線幾何作圖法:$(72°, 18°, 90°) \rightarrow (54°, 36°. 90°)$同P但不相似，倒數第二刀為順順逆



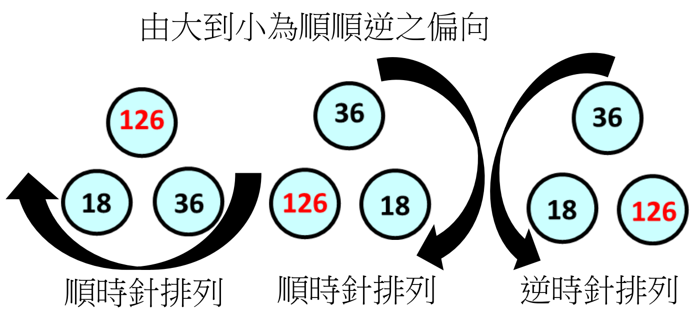
圖(12-1)

> 討論: 1. 不失一般性，給定$(72°, 18°, 90°)$，得倒數第二刀偏向為(順順逆)，又由推推樂得倒數第二組數由大到小的輪動偏向亦為(順順逆)，兩者都屬於表(六)吻合一致，表(六)雖然有機會相似，但因$72 : 18 : 90 \neq 2 : 1 : k(k > 2$的奇數)，故它們的倒數第二刀交叉$\Delta$與原$\Delta$不相似。
>
> 2. 倒數第二刀交叉Δ的三內角計算法是大角不變、中角$-P$、小角$+P$，即得$(54°, 36°, 90°)$，故僅依推推樂亦可算出倒數第二刀交叉Δ的三內角，進而判定兩者相不相似，如圖(12-4)。
>
> 3. 因為表(六)是出產傑數的唯一機會，所以若倒數第二組數為順順逆排列且原三數比為$2 : 1 : k$，$(k > 2$的奇數)，就能算是傑數之一了。

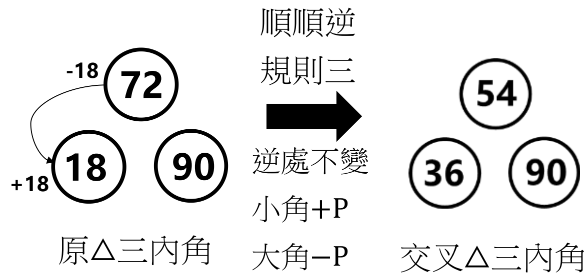
(2)推推樂求算法:$(72,18,90) \rightarrow$ 倒數第二組數的順逆排列: 順順逆 $\rightarrow (54,36.90)$同P但不相似



圖(12-2)



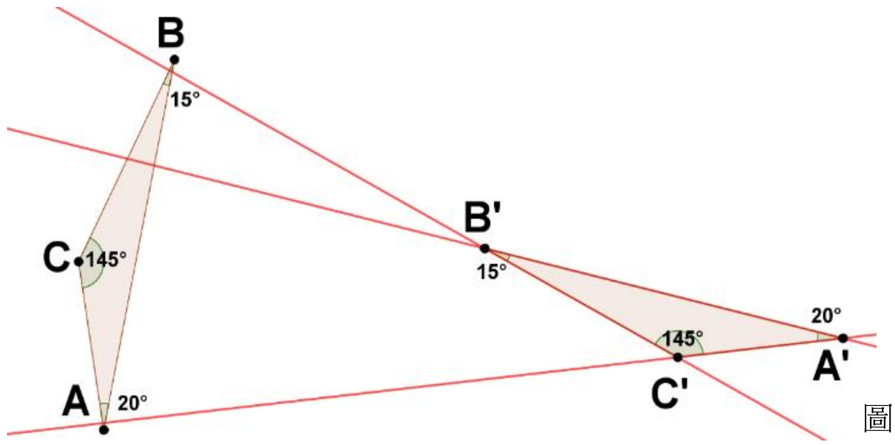
圖(12-3)



圖(12-4)

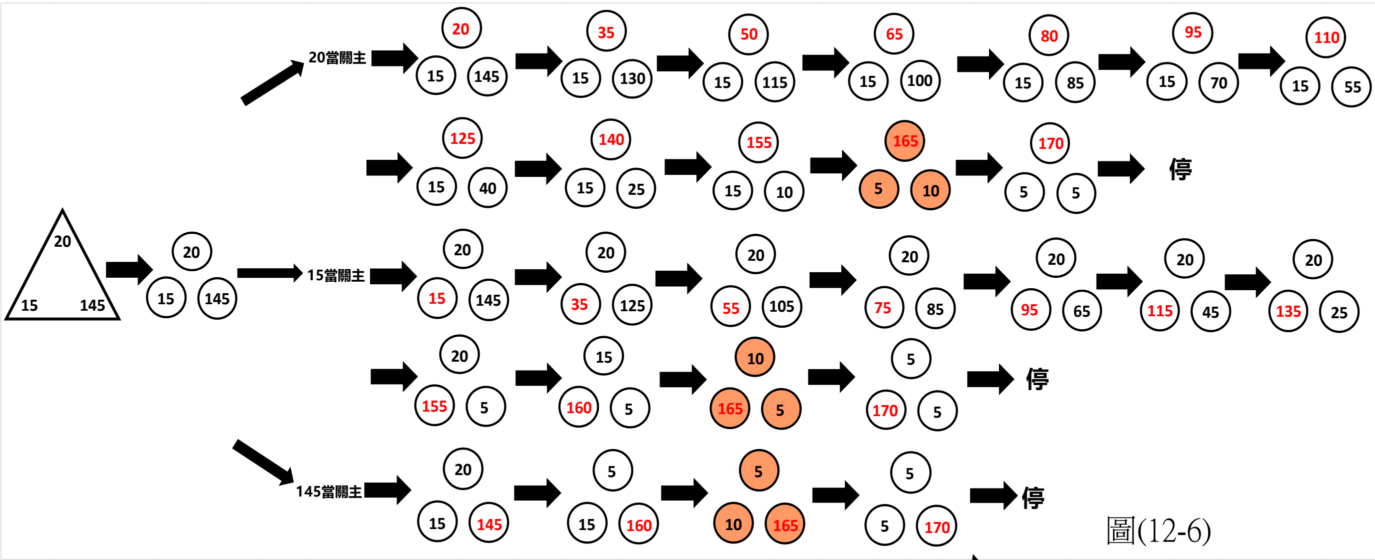
註: 由表(二)推得順順逆代入表(六)知可能相似也可能不相似，又因它非2：1：k故確定非十傑不相似。

2. (1)分角線幾何作圖法:(20°, 15°, 145°) → (20°, 15°. 145°)同P為(順順順)偏向排列相似



圖(12-5)

(2)推推樂求算法:(20,15,145) → 倒數第二組數的順逆排列: 順順順 → (20,15.145)同P、全順、相似

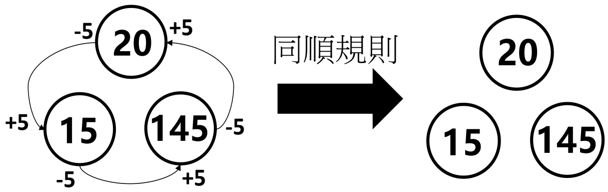


圖(12-6)

圖(12-7)

討論: 1.　不失一般性，給定$(20°, 15°, 145°)$，得倒數第二刀偏向為(順順順)，又由推推樂得倒數第二組數由大到小的輪動偏向亦為(順順順)，兩者都屬於表(四)吻合一致 2.　表(四)用幾何看倒數第二刀交叉Δ的三內角計算法為(不變,不變,不變)，用代數推推樂來看即是保持和原三內角不變的度數。 3.　這(順,順,順)偏向非傑數之一，同理全逆(逆逆逆)亦同。

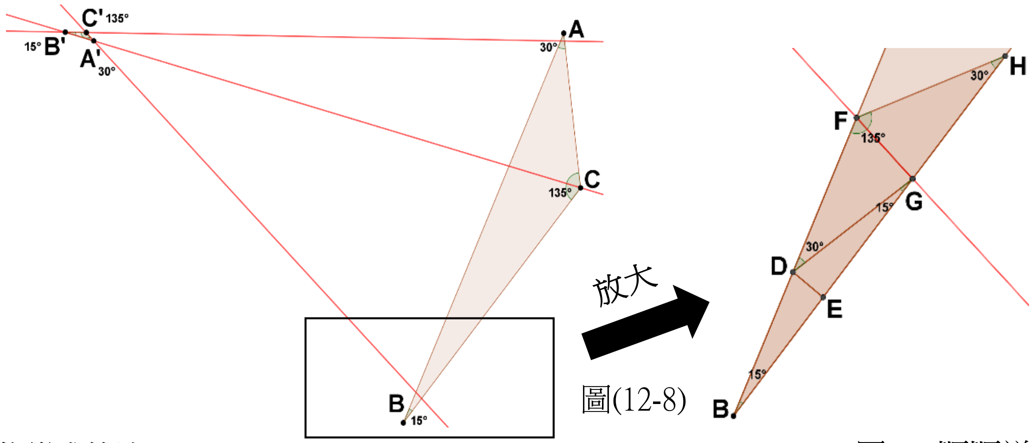
將原Δ的三內角



推得倒數第二刀交叉Δ的三內角

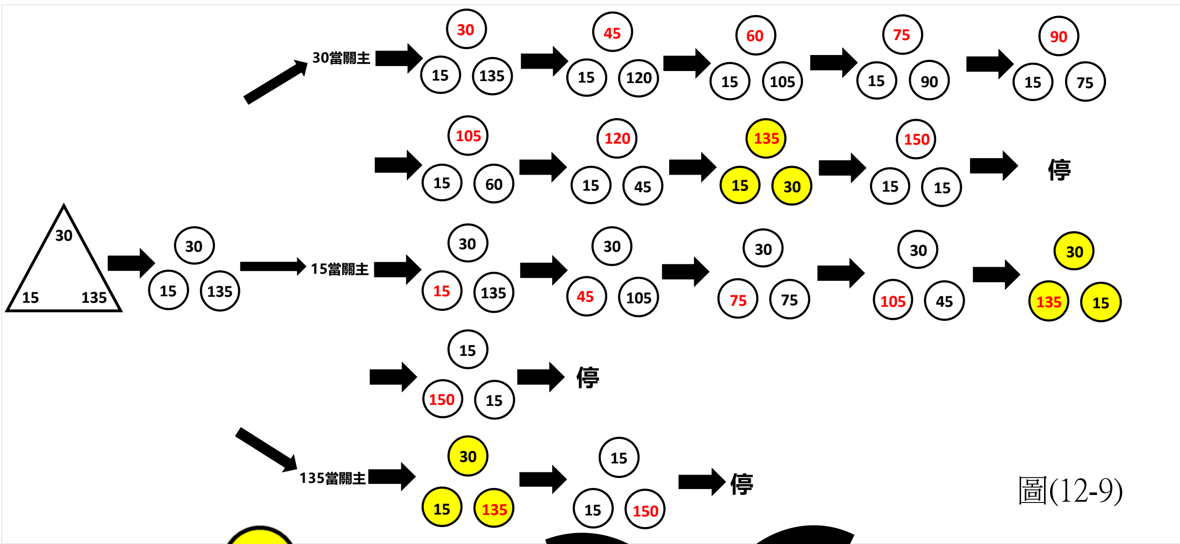
註: 根據表(四)，順順順輪動偏向會造成±p都抵銷，保持數值不變，這會相似，但不是傑數之一。

3. (1)分角線幾何作圖法:$(30°, 15°, 135°) \rightarrow (30°, 15°. 135°)$同P、$2:1:9$、相似，是傑數之一

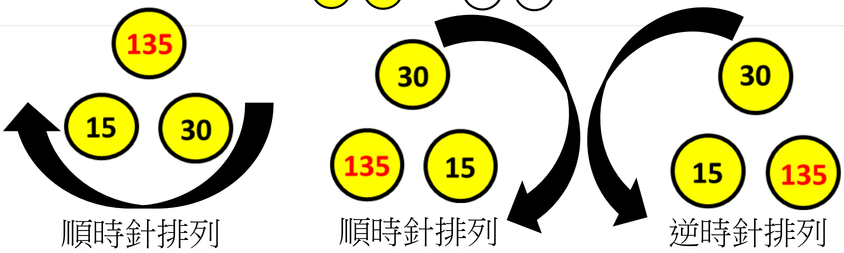


圖(12-8)

(2)推推樂求算法:(30,15,135) → 倒數第二組數的順逆排列: 順順逆 → (30,15.135)同P、順順逆、相似

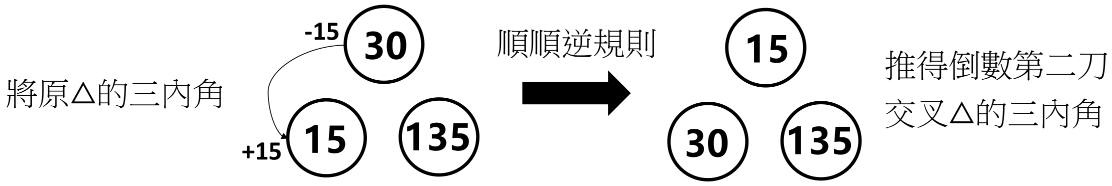


圖(12-9)



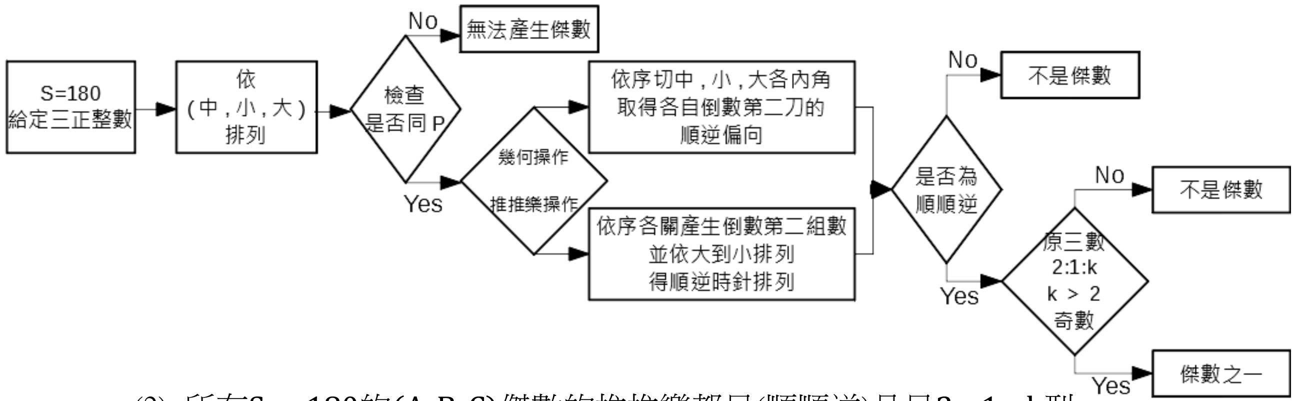
圖(12-10)

討論:	1. 不失一般性，給定$(30°, 15°, 135°)$，幾何上的倒數第二刀偏向為(順順逆)，另由推推樂倒數第二組數，由大到小的輪動偏向亦為(順順逆)，兩者都屬於表(六)吻合一致，又因$30:15:135=2:1:9$，故此三數是十傑之一。 2. 依性質十的規則三，倒數第二刀交叉△的三內角算法是大角不變、中角$-P$、小角$+P$，即得三內角為$(15°, 30°, 135°)$，和原△相似。 3. 這(順順逆)輪動排列是產生十傑的必要條件，加上三數呈$2:1:9$比例，故此三數是十傑之一。最特別的是倒數第二組數直接就和原給定的三數相同。



註: 由表(六)知兩者相似，且三數比為$2:1:k$，$k>2$的奇數型態，故為傑數之一

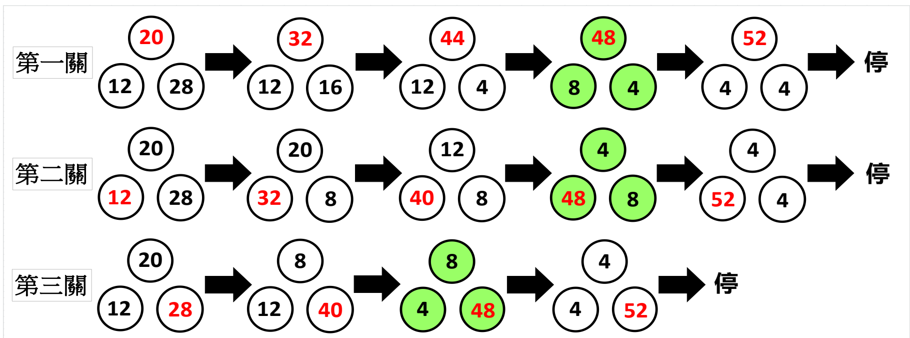
4. 結論(1) 由上述比較得知，推推樂求算法可完全替代分角線幾何作圖法，流程圖敘述如下:



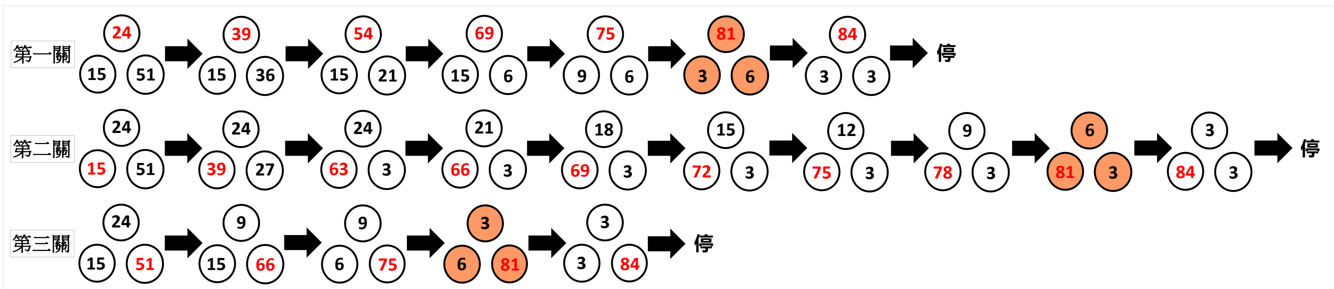
(2) 所有$S=180$的(A, B, C)傑數的推推樂都呈(順順逆)且呈$2:1:k$型

(二) 觀察$S \neq 180$的例子並探討藉推推樂尋找傑數的流程:

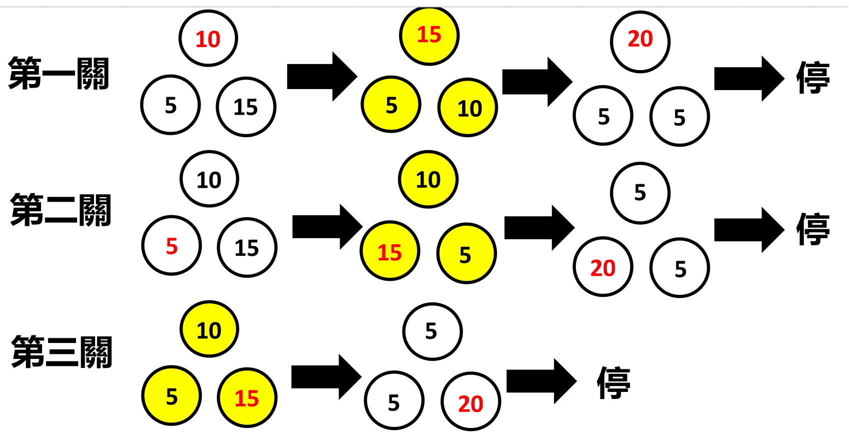
例 1.$S=60$(全逆)



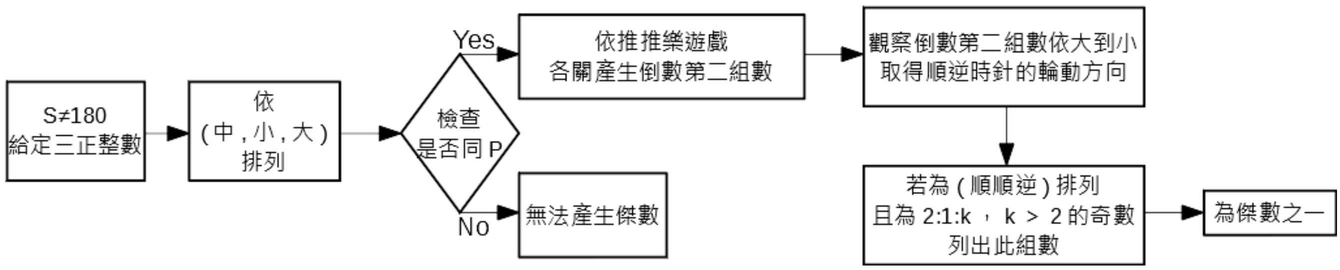
例 2.$S=90$(全順)



例 3. $S = 30$(順順逆)且為傑數



結論(1) 利用推推樂尋找$S \neq 180$傑數的流程:



(2) 所有$S \neq 180$的依(中,小,大)排列的(A, B, C)的倒數第二組數依大→小判讀都呈(順,順,逆)且呈$2:1:k$型，即可判定為傑數之一。

(二) 探討求$N(S)$的計算公式

根據前文的詳細說明，我們得知對型如$S = A + B + C$的推推樂遊戲已能完全取代分角線作圖法，故對任意的S值，都可以推算出它們的傑數，以下即是我們的傑數推算公式及證明。

> 性質七、令S的標準分解式為$S = 2^{a_0} \times p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \ldots \times p_n^{a_n}$，其中$p_1, p_2 \ldots$為奇質數
> 規則 1.若$a_0 = 0$，即沒有質因數 2，則傑數為 0
> 規則 2.若$a_0 = 1$，則傑數$= a_0 \times (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \ldots \times (a_n + 1) - 1$
> 規則 3.若$a_0 \geq 2$，則傑數$= a_0 \times (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \ldots \times (a_n + 1) - 2$

證明 由傑數規律$(2p, p, kp)$，k為> 2的奇數，p為S的因數

$S = 2p + p + kp = (3 + k)p$，$k = 3,5,7,9,11 \ldots$

$= 6p, 8p, 10p, 12p, 14p \ldots =$所有偶數p扣除0p、2p、4p

令S的標準分解式為$S = 2^{a_0} \times p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \ldots \times p_n^{a_n}$，其中$p_1, p_2 \ldots$為奇質數

若$a_0 = 0$，則傑數為0，$\because S = (3 + k)p$，k為> 2的奇數，∴有傑數的S必為偶數

若$a_0 = 1$，則$S = 2^1 \times p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \ldots \times p_n^{a_n}$，S的傑數共有:

$(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \ldots \times (a_n + 1) - 1$，扣除1個的原因是扣2p那一個，

若$a_0 \geq 2$，則傑數$= S = 2^{a_0} \times p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \ldots \times p_n^{a_n}$，S的傑數共有:

$(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \ldots \times (a_n + 1) - 2$，扣除1個2p和一個4p

例如 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 2^{a_0} \times 3^{a_1} \times 5^{a_2}$

傑數$= 2 \times 3 \times 2 - 2 = a_0 \times (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) - 2 = 10$個

$200 = 2^3 \times 5^2 = 2^{a_0} \times 5^{a_1}$

傑數$= 3 \times 3 - 2 = a_0 \times (a_1 + 1) - 2 = 7$個

$60 = 2^2 \times 3 \times 5 = 2^{a_0} \times 3^{a_1} \times 5^{a_2}$

傑數$= 2 \times 2 \times 2 - 2 = a_0 \times (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) - 2 = 6$個

(三) 當$S = 180$時，有十傑

證明

步驟一、列出180的因數(p)

1、2、3、4、5、6、9、10、12、15、18、20、30、36、45、90

步驟二、設a、b、c為2p、p、kp，而k為> 2的奇數，則$(2 + 1 + k)$必為> 5偶數，因此可排除步驟一中的1、2、3、4、5、9、15、45，而剩下的6、10、12、18、20、30、36、60、90、180即為$(2 + 1 + k)$，即可推論$k = 3$、7、9、15、17、27、33、42、87、177

步驟三、將k值帶入2p、p、kp中，再帶入適當的p值使三數總和為180，即可求得十傑用性質十七驗證計算，$\because 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$，由規則3知

$\therefore N(180) = 2 \times (2 + 1) \times (1 + 1) - 2 = 10$

(四) $S = 200$時，有七傑

證明:同上，推得七傑如下:

2,1,197 ⇄ 1,2,177　4,2,194 ⇄ 2,4,194　8,4,188 ⇄ 4,8,188　10,5,185 ⇄ 5,10,185

20,10,170 ⇄ 10,20,170　50,25,125 ⇄ 25,50,125　40,20,140 ⇄ 20,40,140

用性質十七驗證計算，$\because 200 = 2^3 \times 5^2$，由規則 3 知

$\therefore N(200) = 3 \times (2 + 1) - 2 = 7$

(五) 當$S = 60$時，有六傑，證明:同上，推得六傑如下:

2,1,57 ⇄ 1,2,57　4,2,54 ⇄ 2,4,54　6,3,51 ⇄ 3,6,51

10,5,45 ⇄ 5,10,45　12,6,42 ⇄ 6,12,42　20,10,30 ⇄ 10,20,30

用性質十七驗證計算，$\because 60 = 2^2 \times 3 \times 5$，由規則 3 知

$\therefore N(60) = 2 \times (1 + 1) \times (1 + 1) - 2 = 6$

(六) 當$S = 45$時，$N(45) = 0$，說明如下:

$\because 45 = 3^2 \times 5$，由性質十七的規則 1 知$a_0 = 0$，無傑數。

(七) 當$S = 30$時，$N(30) = 3$，說明如下:

$\because 30 = 2 \times 3 \times 5$，由性質十七的規則 2 知$a_0 = 1$，

$N(30) = 1 \times (1 + 1) \times (1 + 1) - 1 = 3$，又直接尋找如下:

2,1,27 ⇄ 1,2,27　6,3,21 ⇄ 3,6,21　10,5,15 ⇄ 5,10,15

性質六、在$S = A + B + C =$定值，依(中,小,大)排列好的同P推推樂遊戲中，當(A, B, C)為一組傑數，若且唯若，遊戲完成時的倒數第二組數中的三數與原三數相同。

證明: $\because$傑數呈(順順逆)排列且$A : B : C = 2 : 1 : k$，$k > 3$的奇數，$\therefore (A, B, C) \rightarrow (B, A, C)$反之亦然

陸、討論和未來展望

一、經本文詳細研究後發現不論$S = A + B + C =$定值是多少，只要依(中,小,大)排列再檢查是否同P，接著利用輾轉相除法依序求出三組數的R值，再代入表(二)取得順逆時針排列，若為順順逆排列，則最後檢查是否是$2:1:k$型，其中$k > 2$的奇數，就可以找到傑數了。這路徑時間效益最高，亦可寫成電腦程式，非常方便。

二、十傑是非常稀少的，

(一) 在整數內角△中，傑數的數量約佔0.37%。

(二) 在取至小數第一位的三內角△中傑數的數量約佔0.00926%。

(三) 在取至小數第二位的三內角△中傑數的數量約佔0.00017%。

三、未來希望能繼續:

(一) 探討$S \neq 180$的最後一刀的類Bevan Point。

(二) 探討$S = A + B + C + D =$定值的類似推推樂遊戲。

柒、結論

一、利用輾轉相除法表達推推樂各輪值關主(例如:甲)的流程中，

(一) P值表示另兩數(例如:乙,丙)的最大公因數，P值出現在整個流程的最後一組數內。

(二) Q值表示輾轉相除法左右出現的商數總和，Q值顯示推推樂流程的長度。

(三) R值表示輾轉相除法以小數去除大數左右轉換的次數，R值用於判定倒數第二刀的順逆偏向或倒數第二組數由大到小的順逆時針排列方向。

綜合P, Q, R值可找到任意推推樂S值的〝傑數〞。

二、在$S = 180$推推樂遊戲中，當各關主的流程都出現後，各流程倒數第二組數的順逆排列，可用於確定:

(一) **在同P且同順下**，兩者會相似，(二)**在同P且同逆下**，兩者會相似，(三)**在同P且給定的三數依(中,小,大)排列下**，三數的比例為$2:1:k$(k為大於2的奇數)又呈(順順逆)偏向排列，兩者會相似。

三、當$S = 180$轉化成△的三內角和時，在平面幾何上有下列特性：

(一) $S = 180$的推推樂流程可等價的轉換成對△各內角的一連串分角線作圖。

(二) 等同於推推樂上的輾轉相除法，在△的各內角連續操作分角線後，亦可得P, Q, R值，其中P表示切某一內角時，另兩內角的最大公因數，Q表示切該內角直到切完時的總刀數，R表示切該內角的一連串分角線和該公用邊垂線的偏角方向改變次數

(三) 在△切到最後一刀時，該最後一刀所在的△都是等腰△，且P值即為其底角角度。

(四) 不論同不同P，三邊上的最後一刀必共點，此點即為該△的Bevan Point。

(五) 三邊上的倒數第二刀交叉而成的△共有八種組合，每一種組合都可利用本報告的表(四)至表(十一)在同P時可計算出其三內角角度及偏角順逆方向及相似性。

(六) 在不同P時，利用表(十二)可計算出倒數第二刀∆的三內角(共八種組合)

(七) 在整數內角的直角∆中，只有$60° - 30° - 90°$直角∆的倒數第二刀∆和原∆相似

(八) 在同P的三內角中，倒數第二刀∆能和原∆相似的僅發生在下列三種情況:

1. 三條倒數第二刀偏角方向同為(順順順)
2. 三條倒數第二刀偏角方向同為(逆逆逆)
3. 三內角連比為$2:1:k$(k為大於2的奇數)且偏角方向為(順順逆)

(九) 在所有2700個整數三內角∆中，合乎上文(八)之 3 的條件而相似的∆共有10個，因為非常特殊且稀少，所以被稱為十傑，他們非同順亦非同逆，但仍能相似。

(十) 在座標平面上將上文(八)中的相似∆做連續尺規作圖操作，發現有明顯不同：

1. 同順或同逆而相似的∆串列，排列成螺旋線形縮小，偏角角度為$\frac{180°-p°}{2}$且沒有相似的中心點。
2. (順順逆)的十傑相似∆串列分成奇數串列和偶數串列，兩者都有相似中心點且共點

四、在$S = 180$的推推樂遊戲中，因為同順、同逆、十傑的倒數第二組數相當於分角線作圖時最後等腰∆的前一個∆的三內角。因為同P，所以最後的三個等腰∆的底角都相同，因此倒數第二組數一定三個都相同，接著利用這推推樂的倒數第二組數及其由大到小的順逆偏向，可直接計算出幾何上倒數第二刀交叉∆的三內角，敘述如下:

先將給定的三數依(中,小,大)排列，接著執行推推樂遊戲取得各關主的倒數第二組數，利用大數到小數的順逆時針排列經由表(二)得知各路徑的偏向，再帶入對應的表(四)至表(十一)，即可獲得倒數第二刀交叉∆的三內角判斷相似與否，並進而得知是否是傑數之一。

五、在型如$S = A + B + C =$定值的推推樂遊戲中，其中A, B, C皆為正整數，$S > 3$，

令S的標準分解式為$S = 2^{a_0} \times p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \ldots \times p_n^{a_n}$，其中$p_1, p_2 \ldots$為奇質數

若$a_0 = 0$，則$N(s) = 0$

若$a_0 = 1$，則$N(s) = a_0 \times (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \ldots \times (a_n + 1) - 1$

若$a_0 \geq 2$，則$N(s) = a_0 \times (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \ldots \times (a_n + 1) - 2$

捌、參考資料

一、楊維哲原著，楊維哲教授的數學講堂：簡單整數論，五南圖書出版社，2008 出版

二、黃家禮原著，幾何明珠，九章出版社，2000 年出版

三、H. S. M. 考克瑟特;S. L. 格雷策原著，幾何學的新探索，凡異文化出版社，1995 出版

四、國中數學課本第一、四、五冊，翰林出版

【評語】030423

作者們將 S=A+B+C 這個問題和在三角形連結再一起，透過連續作角平分線，並將三角形切割為兩兩全等的若干組三角形的問題，針對此問題作了一些詳細分析，且將此問題的過程利用輾轉相除法表示，進一步轉換成對三角形內角的連續操作分角線分割全等三角形。想法頗具創意，值得鼓勵。

作品簡報

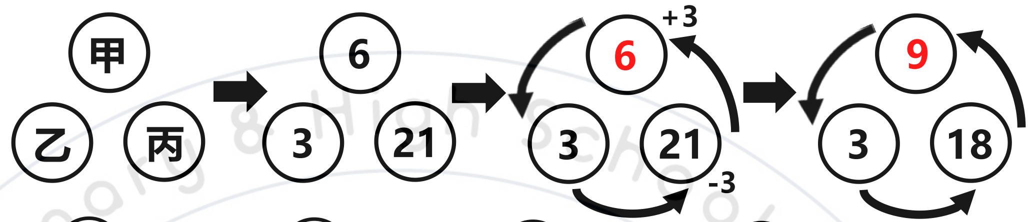
二刀流十傑—從$S = A + B + C$ =定值的推推樂遊戲談起

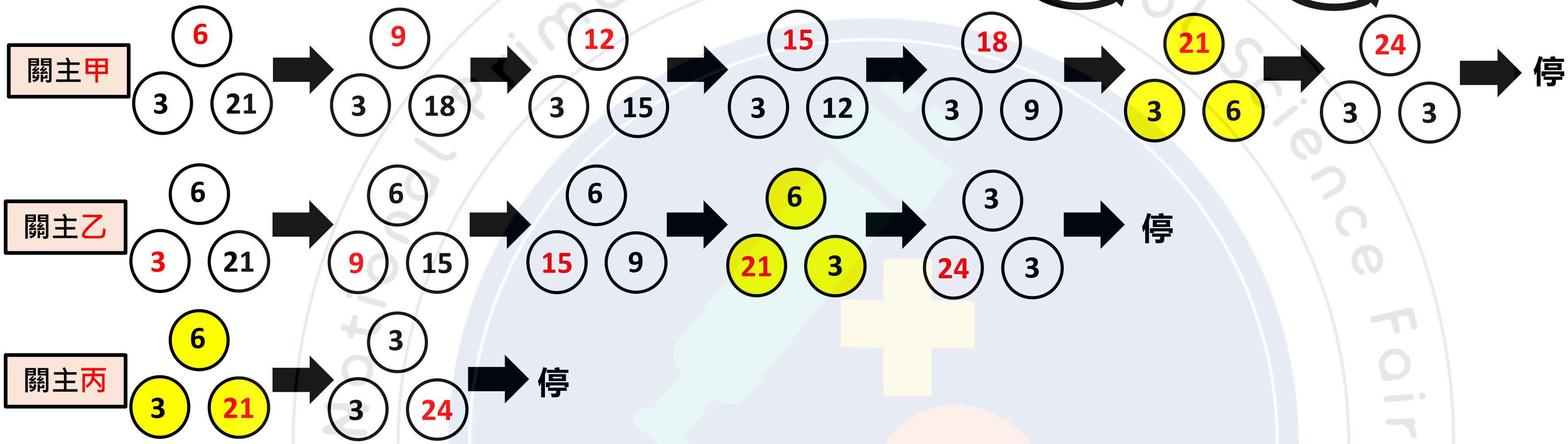
組別：國中組

科別：數學科

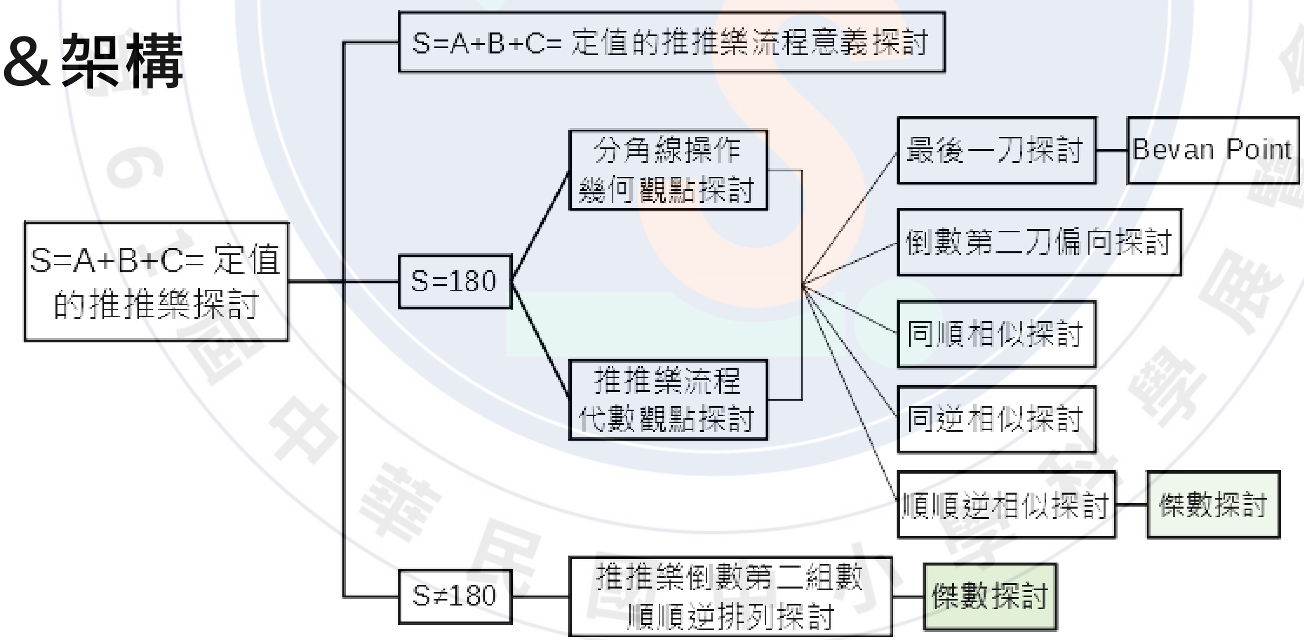
研究動機

推推樂遊戲($S = 30$):



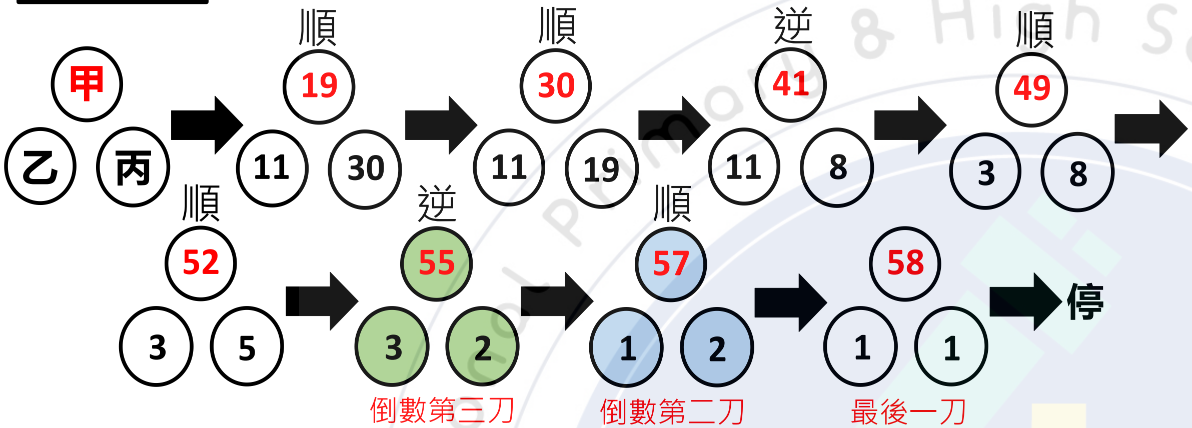


研究問題＆架構



名詞解釋＆符號定義

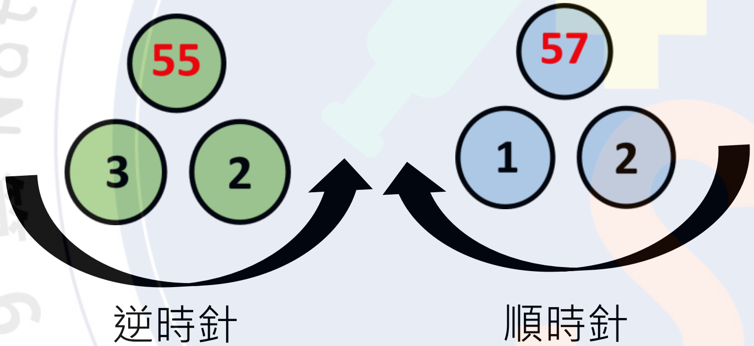
推推樂



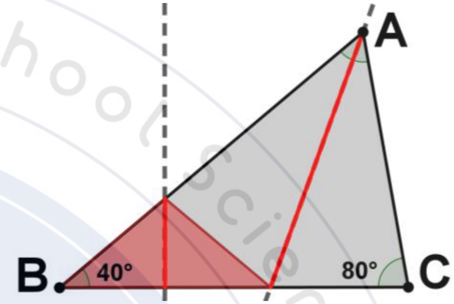
	乙	丙	
1	11	30	2
	8	22	
1	3	8	2
	2	6	
	1	2	2
		2	
		0	

$P = 1, Q = 8, R = 4$

圖(1-1)



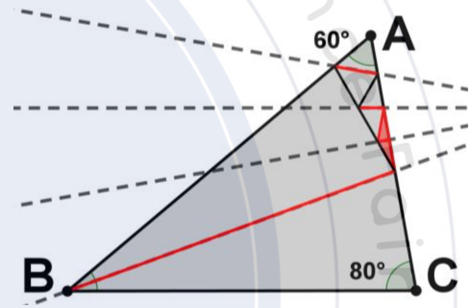
分角線作圖



2	80	40	
	80		
	0		

$P = 40, Q = 2, R = 0$

圖(1-2)



2	40	60	1
	40	40	
	0	20	

$P = 20, Q = 3, R = 1$

圖(1-3)

1	80	60	3
	60	60	
	20	0	

$P = 20, Q = 4, R = 1$

圖(1-4)

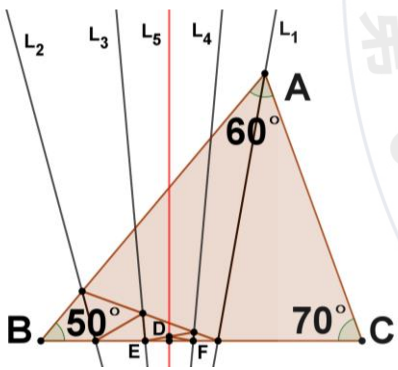
	推推樂遊戲	輾轉相除法	分角線幾何作圖
P	最後人數相同時的值	最大公因數	等腰▵底角角度
Q	遊戲運算步驟次數	左右商數總和	分角線條數(刀數)
R	兩數大小轉換次數	除數轉換次數	分角線偏角方向轉換次數

定值S	S=60	S=180	S=60	S=180	S=60	S=180	S=180	S=180
三數組合	(18,15,27)	(65,37,78)	(15,12,33)	(60,28,92)	(21,12,27)	(18,60,102)	(60,50,70)	(30,15,135)
P值是否相同	×	×	V	V	V	V	V	V
各流程倒數第二組數的三數是否相同	×	×	V(同順)	V(同順)	V(同逆)	V(同逆)	V(同順)	V(順順逆)
承上，又與原三數是否相同	×	×	×	×	×	×	×	V

猜想：

1. 推推樂遊戲走到停止前的最後一組數，恆含有兩數相等，這有特別的意義嗎？
2. 倒數第二組數有時三關都相同，有時甚至和原始一開始給定的那組數相同，這有何特別意義呢？

觀察最後一刀

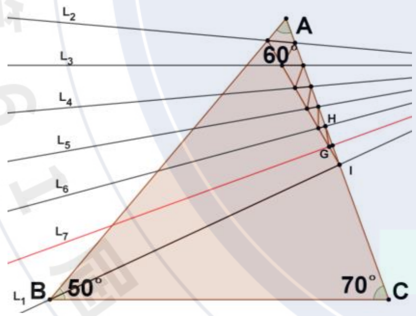


$P(\angle B, \angle C) = 10$

$Q(\angle B, \angle C) = 5$

$R(\angle B, \angle C) = 2$

圖(2-1)

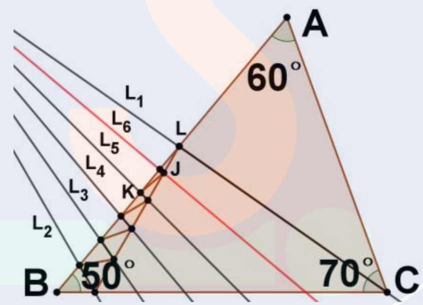


$P(\angle C, \angle A) = 10$

$Q(\angle C, \angle A) = 7$

$R(\angle C, \angle A) = 1$

圖(2-2)

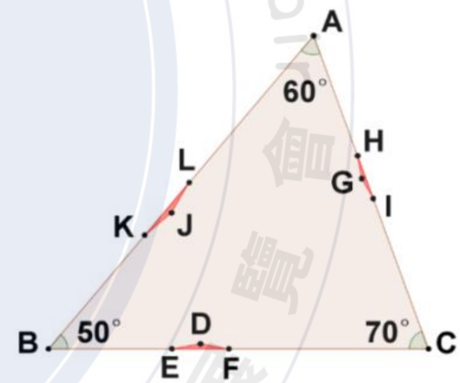


$P(\angle A, \angle B) = 10$

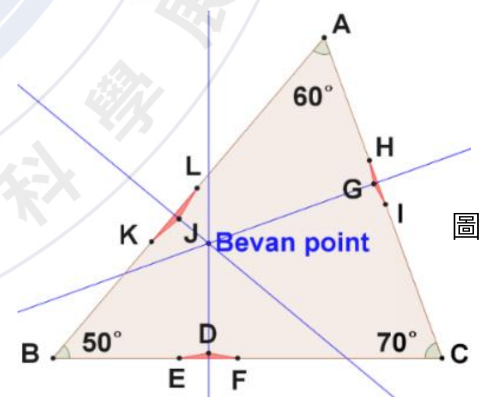
$Q(\angle A, \angle B) = 6$

$R(\angle A, \angle B) = 1$

圖(2-3)



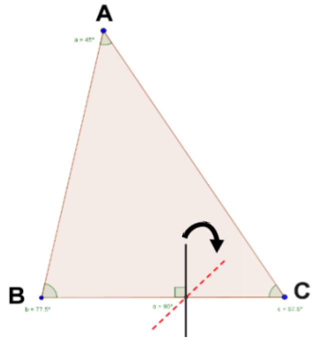
圖(2-4)



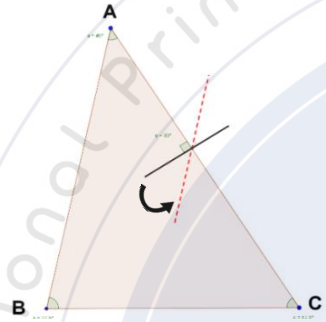
圖(2-5)

性質一、在同一△中，依前文的分角線作圖法找到的3個等腰△的底邊中垂線(即各邊上的最後一刀)必交於一點，此點即為Bevan Point，如圖(2-4)、(2-5)。

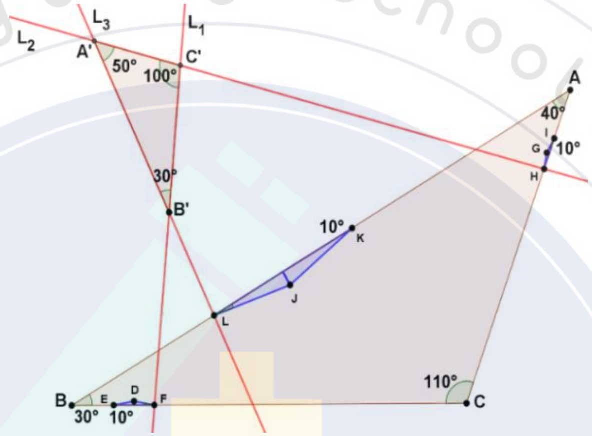
觀察倒數第二刀



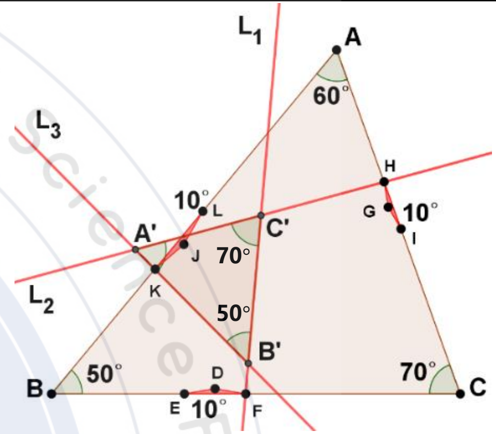
順時針偏向



逆時針偏向



圖(3-1)同P，順逆順，不相似

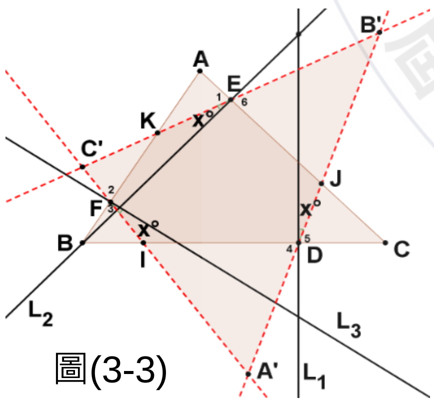


圖(3-2)同P，順順順，相似

基本定理

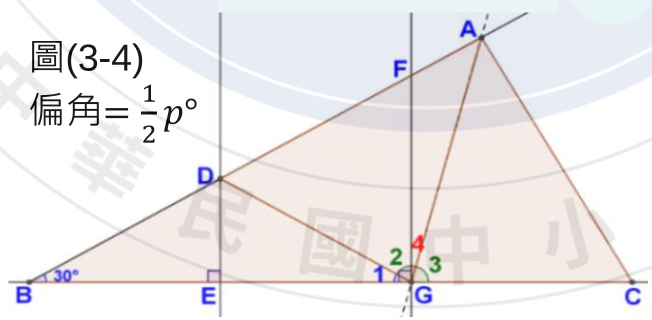
若L_1、L_2、L_3分別為$\overline{\mathrm{BC}}$、$\overline{\mathrm{AC}}$、$\overline{\mathrm{AB}}$的垂線，垂足點依次為D、E、F。經過D、E、F三點分別有三直線M_1、M_2、M_3，依相同的順時針或逆時針旋轉x°，如圖(3-3)順時針，則M_1、M_2、M_3三直線交叉而成的△ A′B′C′，必和原△ ABC相似。

Q：有沒有P值相同而三邊上的倒數第二刀偏角方向不同但仍可相似的△？
A：有的，但是非常稀少，例如$60°-30°-90°$△，如圖(3-5)

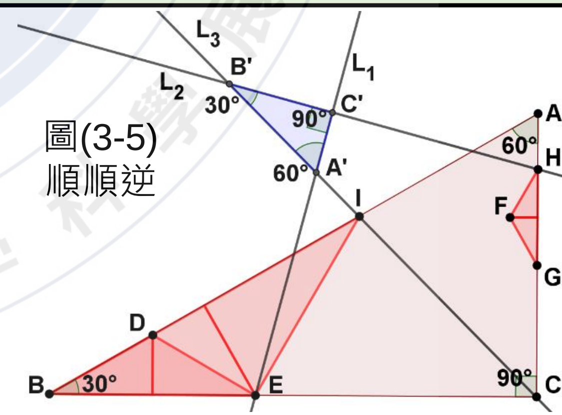


圖(3-3)

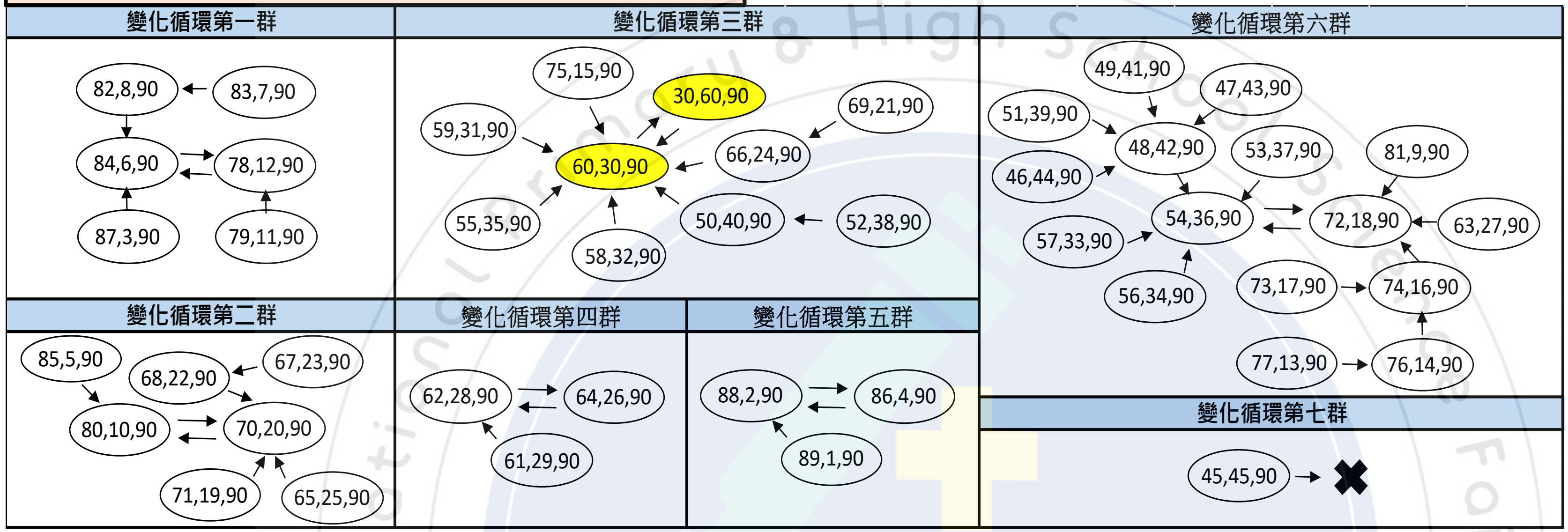
圖(3-4)
偏角$=\frac{1}{2}p°$

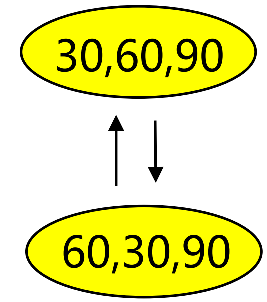


圖(3-5)
順順逆



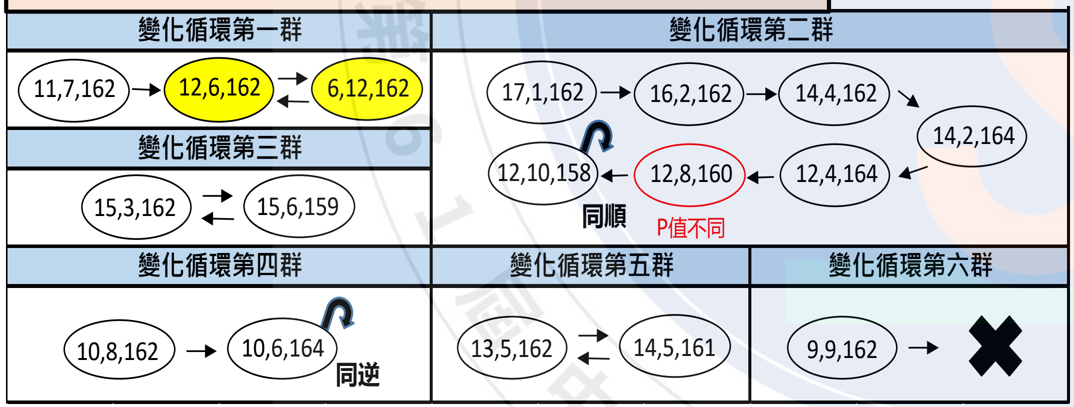
最大角為90°的整數內角直角△共有45個





黑洞數△ 或
卡布列克常數△

最大角為162°的整數內角△共有16個

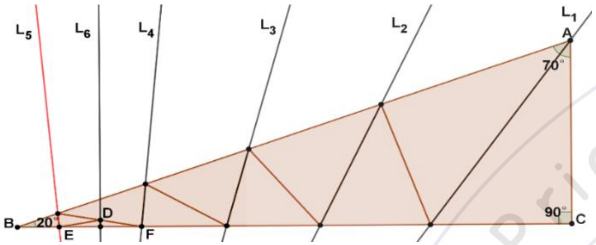


表(二)

	切∠A	切∠B	切∠C
相關的兩內角	R(∠B,∠C)	R(∠A,∠C)	R(∠A,∠B)
R的奇偶性	奇	奇	奇
偏角方向	逆	順	順
R的奇偶性	偶	偶	偶
偏角方向	順	逆	逆

Q: 如何由給定的整數三內角，不必經過作圖而直接用輾轉相除法推算出倒數第二刀的△的三內角？
A: 先將三內角擺放為(中、小、大)再由輾轉相除法的轉換次數R值的奇偶性，可經由表(二)轉換成倒數第二刀的順逆偏向

倒數第二刀: 逆時針偏向

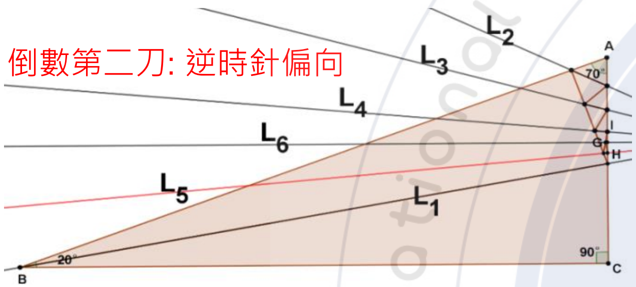


圖(4-1)

	∠C	∠B	
4	90	20	2
	80	20	
	10	0	

$R(\angle B, \angle C) = 1$

倒數第二刀: 逆時針偏向

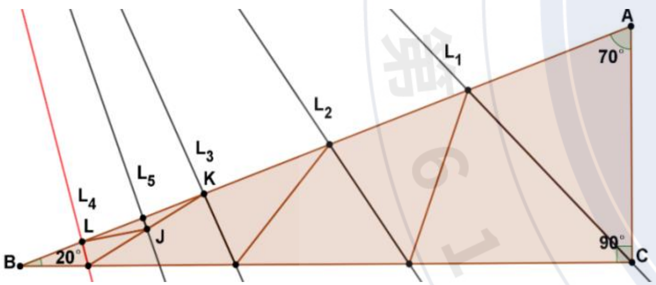


圖(4-2)

	∠C	∠A	
1	90	70	3
	70	60	
2	20	10	
	20		
	0		

$R(\angle A, \angle C) = 2$

倒數第二刀: 順時針偏向

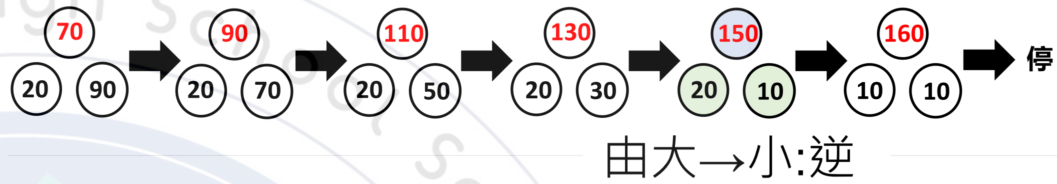


圖(4-3)

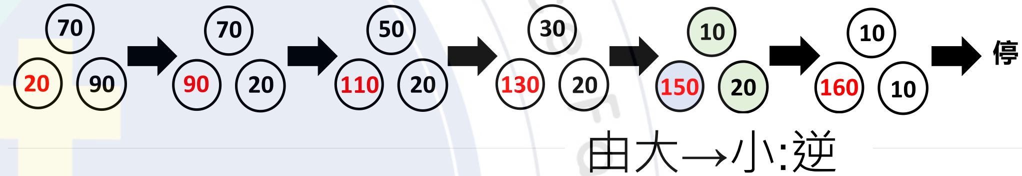
	∠A	∠B	
3	70	20	2
	60	20	
	10	0	

$R(\angle A, \angle B) = 1$

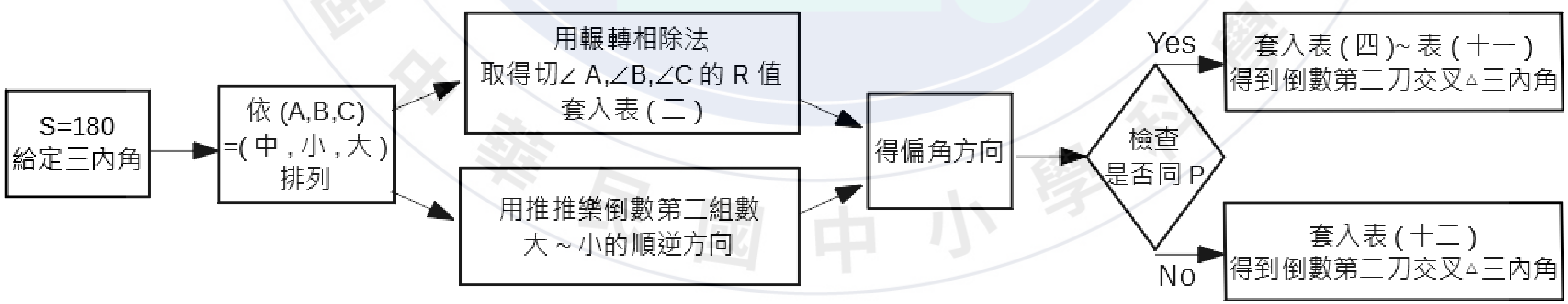
第一關



第二關



第三關



Q: 在**同*P***下，如何計算八種順逆組合的倒數第二刀交叉△的三內角？
A: 如性質十。

性質二、在同P交叉△三內角的計算，利用順逆轉換偏角搭配出+P或−P有如下的四條規則:
規則(一)、當全順時，直接相似，即得到與原三內角相等的三內角
規則(二)、當全逆時，直接相似，即得到與原三內角相等的三內角
規則(三)、當順比逆多，逆的位置角度不變，接著觀察若逆排在前面則小角−P°、大角+P°、中角不變。
若逆不排在前面則不變之角除外，較小角+P°、較大角−P°。
規則(四)、當逆比順多，順的位置角度不變，接著觀察若順排在前面則小角+P°、大角−P°、中角不變。
若順不排在前面則不變之角除外較小角−P°、較大角+P°。

	切∠A	切∠B	切∠C	表(三)	
一	順	順	順	△DNF	紅色
二	順	逆	順	△JKF	橙色
三	順	順	逆	△DLM	黃色
四	順	逆	逆	△JHM	綠色
五	逆	順	順	△ENO	桃紅
六	逆	逆	順	△OGK	紫色
七	逆	順	逆	△ELI	粉紅
八	逆	逆	逆	△GHI	藍色

第一種可能對應　表(四)

原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	奇	奇
順逆	順	順	順
±P	不變	不變	不變
二刀△	N	F	D
三內角	x°	y°	z°
是否相似	相似		

第二種可能對應　表(五)

原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	偶	奇
順逆	順	逆	順
±P	$+P$	不變	$-P$
二刀△	K	F	J
三內角	$x°+P$	y°	$z°-p$
是否相似	不相似		

第三種可能對應　表(六)

原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	奇	偶
順逆	順	順	逆
±P	$-P$	$+P$	不變
二刀△	L	M	D
三內角	$x°-P$	$y°+P$	z°
是否相似	唯獨此處有機會出十傑		

第四種可能對應　表(七)

原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	偶	偶	偶
順逆	順	逆	逆
±P	不變	$+P$	$-P$
二刀△	H	M	J
三內角	x°	$y°+P$	$z°-p$
是否相似	不相似		

第五種可能對應　表(八)

原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	奇	奇
順逆	逆	順	順
±P	不變	$-P$	$+P$
二刀△	N	O	E
三內角	x°	$y°-P$	$z°+P$
是否相似	不相似		

第六種可能對應　表(九)

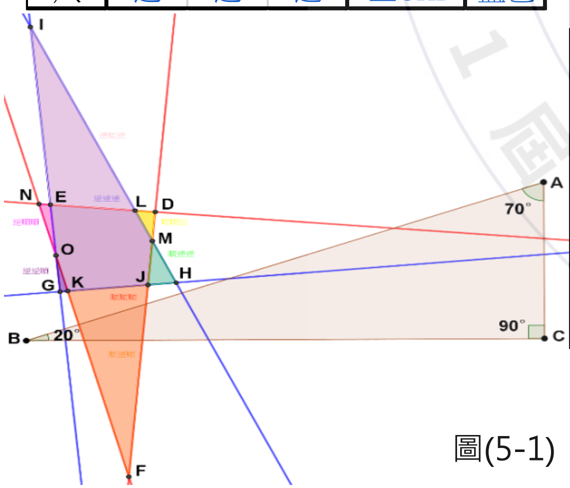
原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	偶	奇
順逆	逆	逆	順
±P	$+P$	$-P$	不變
二刀△	K	O	G
三內角	$x°+P$	$y°-P$	z°
是否相似	不相似		

第七種可能對應　表(十)

原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	奇	偶
順逆	逆	順	逆
±P	$-P$	不變	$+P$
二刀△	L	I	E
三內角	$x°-P$	y°	$z°+P$
是否相似	不相似		

第八種可能對應　表(十一)

原△	x°(中)	y°(小)	z°(大)
R值			
奇偶	奇	偶	偶
順逆	逆	逆	逆
±P	不變	不變	不變
二刀△	H	I	G
三內角	x°	y°	z°
是否相似	相似		



圖(5-1)

Q: 在不同P下，如何計算八種順逆組合的倒數第二刀交叉△的三內角？
A: 如下表。

表(十二)

倒數第二刀三角形	∠A (中)	∠B (小)	∠C (大)	∠A (中)	∠B (小)	∠C (大)
	1. 順(偶)	順(奇)	順(奇)	5. 逆(奇)	順(奇)	順(奇)
	$\angle A+\frac{P_c}{2}-\frac{P_b}{2}$	$\angle B+\frac{P_a}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle C+\frac{P_b}{2}-\frac{P_a}{2}$	$\angle A+\frac{P_c}{2}-\frac{P_b}{2}$	$\angle B-\frac{P_a}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle C+\frac{P_a}{2}+\frac{P_b}{2}$
	2. 逆(奇)	逆(偶)	逆(偶)	6. 逆(奇)	逆(偶)	順(奇)
	$\angle A+\frac{P_b}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle B+\frac{P_c}{2}-\frac{P_a}{2}$	$\angle C+\frac{P_a}{2}-\frac{P_b}{2}$	$\angle A+\frac{P_c}{2}+\frac{P_b}{2}$	$\angle B-\frac{P_a}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle C+\frac{P_a}{2}-\frac{P_b}{2}$
	3.順(偶)	順(奇)	逆(偶)	7. 逆(奇)	順(奇)	逆(偶)
	$\angle A-\frac{P_b}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle B+\frac{P_a}{2}+\frac{P_c}{2}$	$\angle C+\frac{P_b}{2}-\frac{P_a}{2}$	$\angle A-\frac{P_b}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle B+\frac{P_c}{2}-\frac{P_a}{2}$	$\angle C+\frac{P_a}{2}+\frac{P_b}{2}$
	4. 順(偶)	逆(偶)	順(奇)	8. 順(偶)	逆(偶)	逆(偶)
	$\angle A+\frac{P_b}{2}+\frac{P_c}{2}$	$\angle B+\frac{P_a}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle C-\frac{P_a}{2}-\frac{P_b}{2}$	$\angle A+\frac{P_b}{2}-\frac{P_c}{2}$	$\angle B+\frac{P_a}{2}+\frac{P_c}{2}$	$\angle C-\frac{P_a}{2}-\frac{P_b}{2}$

討論:

根據基本定理，同順相似、同逆相似，這是天經地義，但是像(順、順、逆)，本來應該是不相似的但因合乎特殊條件竟然可以變成相似，這些是非常難得的△，共有十個，故我們稱它為十傑。

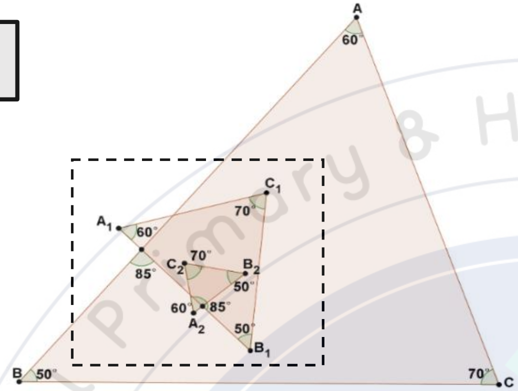
性質三、若a, b, c為△ ABC的三內角角度，$b < a < c$，$a = 2b$，$c = kb$，$k > 2$，但k為奇數，又此三內角之P值皆為 b，則倒數第二刀△的偏角方向排列成(順、順、逆)，非同順逆但必和原△相似。

性質四、從1°到179°的所有整數度數中，Δ的三內角合乎性質十二中的關係式且呈(順順逆)排列條件，共有十組依序為$(2°, 1°, 177°)$、$(4°, 2°, 174°)$、$(6°, 3°, 171°)$、$(10°, 5°, 165°)$、$(12°, 6°, 162°)$ $(18°, 9°, 153°)$、$(20°, 10°, 150°)$、$(30°, 15°, 135°)$、 $(36°, 18°, 126°)$、$(60°, 30°, 90°)$，被稱為**$S = 180$的十傑**，記為$N(180) = 10$。

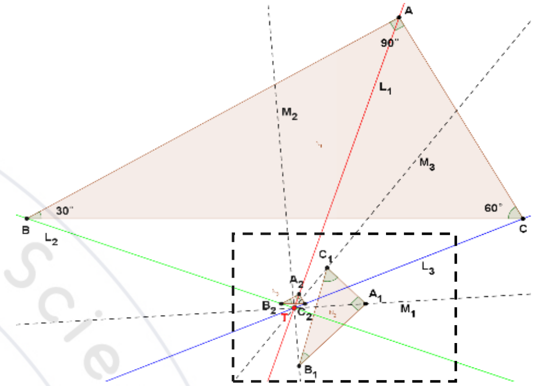
性質五、在$S = \angle A + \angle B + \angle C = 180°$的幾何平面上
(1) 記號的△共有559個 (2) 金黃色橢圓的△共有10個，我們稱之為二刀流十傑

十傑的幾何性質探討

圖(6-1)同順相似△
呈螺旋排列
沒有相似中心點

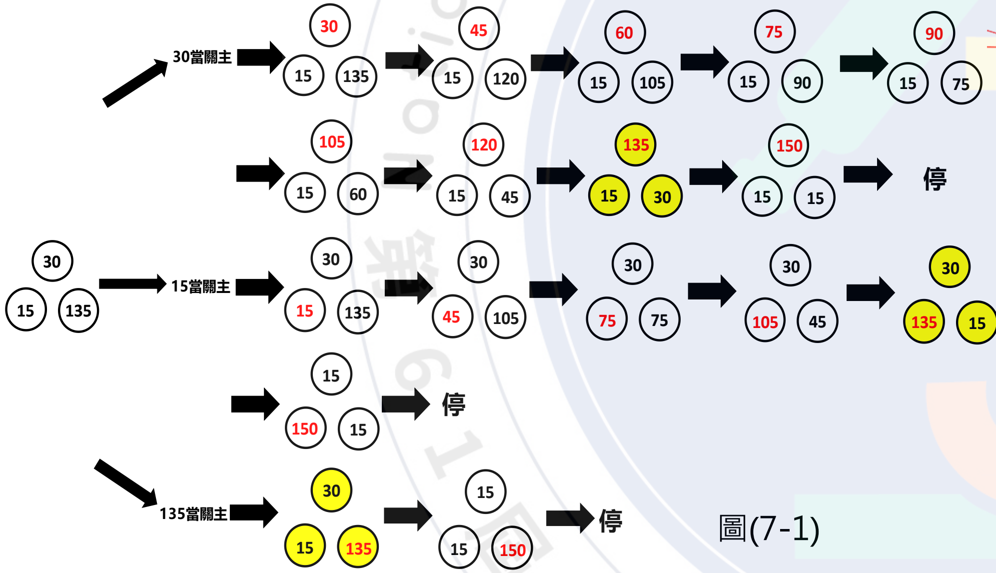


圖(6-2)十傑△
有相似中心點T

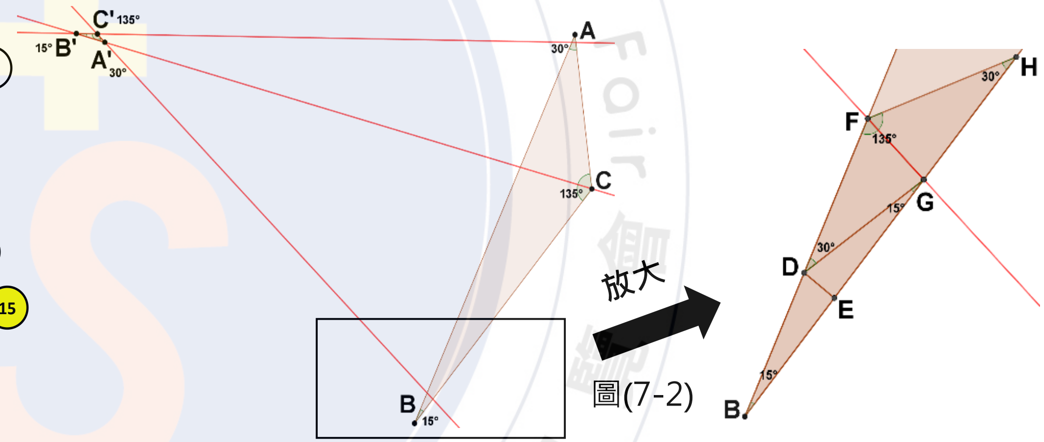


(1)分角線幾何作圖法:(30°, 15°, 135°) → (30°, 15°. 135°)同P、2: 1: 9、相似，是傑數之一，如圖(7-2)

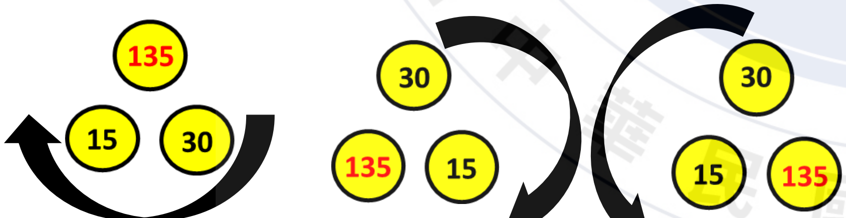
(2)推推樂求算法:(30,15,135) → 倒數第二組數的順逆排列: 順順逆 → (30,15.135)同P、順順逆、相似



圖(7-1)

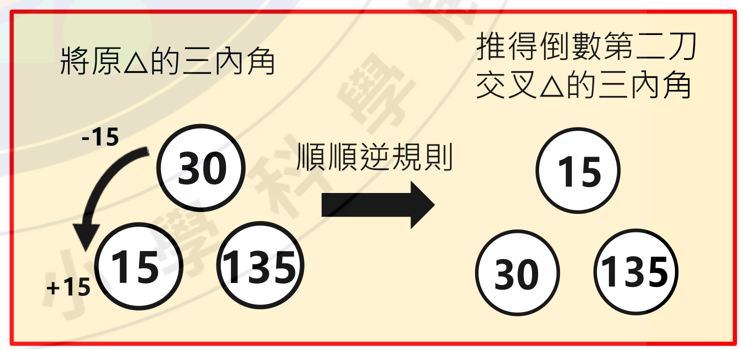


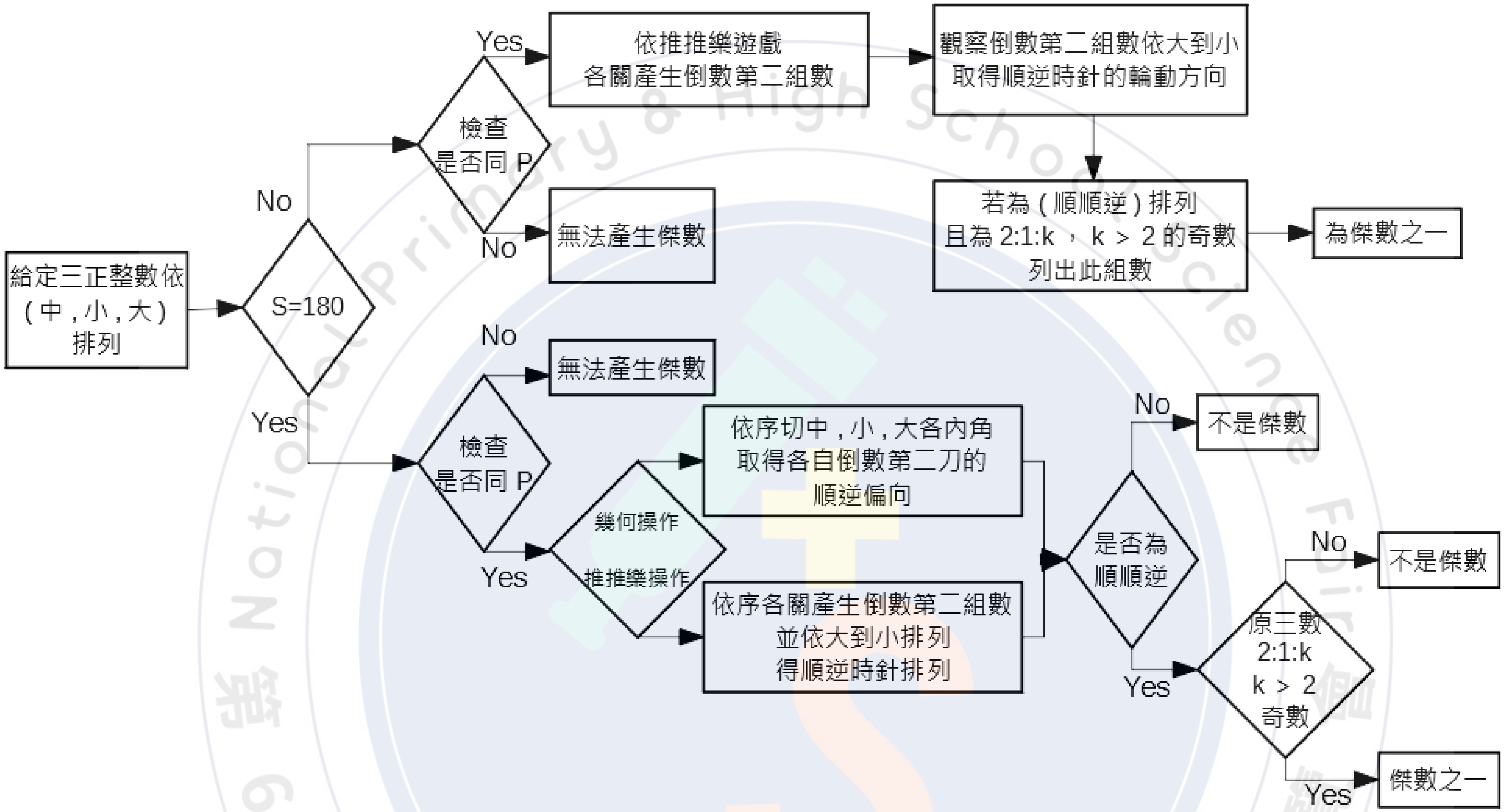
圖(7-2)



順時針排列　　順時針排列　　逆時針排列

圖(7-3)





性質六、令S的標準分解式為$S=2^{a_0}\times p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\ldots\times p_n^{a_n}$，其中$p_1,p_2\ldots$為奇質數

規則1.若$a_0=0$，即沒有質因數2，則傑數為0

規則2.若$a_0=1$，則傑數$=a_0\times(a_1+1)\times(a_2+1)\times\cdots\times(a_n+1)-1$

規則3.若$a_0\geq 2$，則傑數$=a_0\times(a_1+1)\times(a_2+1)\times\cdots\times(a_n+1)-2$

討論和未來展望

一、十傑是非常稀少的， 在整數內角△中，傑數的數量約佔0.37%，取至小數第一位的傑數佔0.00926%。取至小數第二位傑數佔0.00017%。

二、未來希望能繼續探討$S\neq 180$的最後一刀的類Bevan Point及推廣至$S=A+B+C+D=$定值

結論

一、利用輾轉相除法表達分角線作圖或推推樂流程時:

(一) P值表示等腰△的底角角度或推推樂流程最後一組數中的相等兩數。

(二) Q值表示刀數總和或推推樂流程的長度。

(三) R值表示分角線順逆轉換次數或推推樂流程中，數字由大到小轉換的次數。

綜合P, Q, R值可找到任意推推樂S值的〝傑數〞。

二、在S = 180推推樂遊戲中，當各關主的流程都出現後，各流程倒數第二組數的順逆排列，可用於確定:

(一) **同P同順**相似，(二)**同P同逆**相似，(三)**同P 順順逆且三數呈2：1：k(k為大於2的奇數)** 相似。

三、當S = 180轉化成△的三內角和時，在平面幾何上有下列特性：

(一) S = 180的推推樂流程可等價的轉換成對△各內角的一連串分角線作圖。

(二) 不論同不同P，三邊上的最後一刀必共點，此點即為該△的Bevan Point。

(三) 三邊上的倒數第二刀交叉而成的△共有八種組合，每一種組合都可利用本報告的表(四)至表(十一)在同P時可計算出其交叉△三內角角度及偏角順逆方向及相似性。

(四) 在不同P時，利用表(十二)可計算出倒數第二刀△的三內角(共八種組合)

(五) 幾何上依然 **1.同P同順**相似 **2.同P同逆**相似 **3.同P 順順逆且三數呈2：1：k(k為大於2的奇數)** 相似

(六) 在所有2700個整數三內角△中，合乎上文(八)之3的條件而相似的△共有10個，稱為十傑

(七) 在座標平面上將上文(八)中的相似△做連續尺規作圖操作，發現有明顯不同：

1. 同順或同逆而相似的△串列，排列成螺旋線形縮小，偏角角度為$\frac{180°-p°}{2}$且沒有相似的中心點。

2. (順順逆)的十傑相似△串列分成奇數串列和偶數串列，兩者都有相似中心點且共點

四、在S = 180的推推樂遊戲中，先將給定的三數依(中,小,大)排列，接著執行推推樂遊戲取得各關主的倒數第二組數，利用大數到小數的順逆時針排列經由表(二)得知各路徑的偏向，再帶入對應的表(四)至表(十一)，即可獲得倒數第二刀交叉△的三內角判斷相似與否，並進而得知是否是傑數之一。

五、求算當S為任意正整數時的傑數方法，見性質十七

參考資料

一、楊維哲原著，楊維哲教授的數學講堂：簡單整數論，五南圖書出版社，2008出版

二、黃家禮原著，幾何明珠，九章出版社，2000年出版