中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030422

公正無私-海盜分金幣的最佳平分解

學校名稱：嘉義市立民生國民中學

作者：	指導老師：
國二 林宥呈	蕭文彥
國二 蔡博丞	張仁澤

關鍵詞：梯形面積分割、遞迴數列

摘要

本作品從海盜分金幣的題目著手，探討金幣以 m、m+1、m+2、……、n 排列時，哪裡是使金幣均分的最佳分割位置。我們從文獻探討，第 58 屆中小學科學展覽國中組數學科第一名作品中出發，另外發展出以圖形化來找尋最佳分割位置的方式，完成了兩人、三人分金幣的最佳分割位置，並獲得更為簡潔、具推廣性的做法及結論。

此外，我們更從研究結果中獲得了一些令人訝異但尚未經證明的發現，期望能於未來有更多的深入研究。

壹、研究動機

有一天，我們在看科學研習月刊56-9期，發現了「海盜分金幣」這個問題。說明如下：

海盜頭目想要犒賞他兩位手下，頭目把總數分別是一塊金幣、兩塊金幣、三塊金幣、四塊金幣的四堆金幣放在同一條直線上的四個位置，相鄰的位置等距，兩位手下必須在討論後選擇四個位置中的兩個位置，兩人分別可以得到距離自己較近的金幣，離兩人一樣近的金幣就平分，若希望能夠分的最公平，兩人要站在哪裡？

我們做了文獻探討，發現在第58屆中小學科展博覽會國中組第一名也是以此當作他們研究的問題，在理解他們的方法後，我們不斷思考有沒有更簡單的方法能夠解決這個問題，因此開啟了這次的研究。

貳、研究目的

我們想深入探討兩名、三名、... 至k名海盜要如何分，才能使每人獲得的金幣數量最接近？並找出這個問題的一般性解法，我們要解決的問題如下：

一、 在金幣以1、2、3、4、...、n排列時，兩位手下要如何分，才能使兩人的金幣數量最接近？

二、 在金幣以m、m+1、m+2、……、n排列時，兩位手下要如何分，才能使兩人的金幣數量最接近？

三、 在金幣以m、m+1、m+2、……、n排列時，三位手下要如何分，才能使三人的金幣數量最接近？

參、研究設備及器材

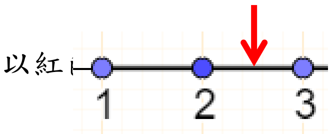
筆、紙、電腦、數學課本、Excel、GeoGebra、word

肆、研究過程與方法

研究一、在金幣以 1、2、3、4、...、n 排列時，兩位手下要如何分，才能使兩人的金幣數量最接近？

一、釐清問題、尋找規律、文獻探討：

1. n=3 的情形。

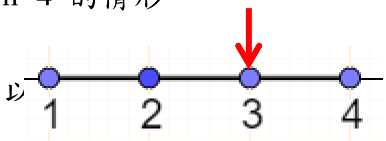


(圖 1)

兩人分別站在 3 和 2 差的會最少。

站在 3 的人可以拿到 3
站在 2 的人可以拿到 1+2=3，恰平分

2. n=4 的情形。



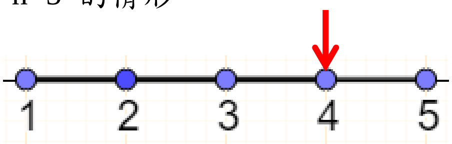
(圖 2)

兩人分別站在 4 和 2 差的會最少。

站在 4 的人可以拿到 $4+\frac{3}{2}=5.5$

站在 2 的人可以拿到 $1+2+\frac{3}{2}=4.5$

3. n=5 的情形。



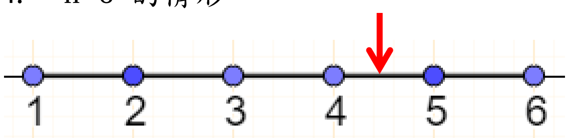
(圖 3)

兩人分別站在 5 和 3 差的會最少。

站在 5 的人可以拿到 $5+\frac{4}{2}=7$

站在 3 的人可以拿到 $1+2+3+\frac{4}{2}=8$

4. n=6 的情形。



(圖 4)

兩人分別站在 5 和 4；或是 6 和 3 差最少。

站在 5、6 的人可以拿到 5+6=11
站在 3、4 的人可以拿到 1+2+3+4=10

在找規律的過程中，會找到兩人的站位不同，但有相同分配結果的可能。
因此我們發現討論金幣的分割點(如上圖紅色箭頭)，比討論海盜的站位方式更具有效率。

定義E(n)為金幣以 1～n 堆排列時，兩人分得金幣差最小的實驗分割點。

則我們逐一將$n = 2$、$n = 3$ …、$n = 12$的實驗結果紀錄如下：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
實驗分割點	1.5	2.5	3	4	4.5	5.5	6	6.5	7.5	8	9
最小差	1	0	1	1	1	2	0	3	1	2	3

(表 1)

在苦思不著規律的時候，我們開始進行文獻探討，才發現原來這個題目已經是第 58 屆中小學科學展覽國中組的第一名作品：「金金」計較所研究的主題。

經過閱讀與探討，他們利用一元二次方程式的求解來解決這個問題，並在兩人分 m 堆金幣的狀況獲得了一些發現與結論，整理如下：

1. 有 m 堆金幣時(1~m 個)，可利用$e_0(m) = \frac{-1+\sqrt{1+8m(m+1)}}{4} = p + \alpha$，($p \in \mathbb{N}$，且$0 \leq \alpha < 1$)來判斷分割點：

$$\begin{cases} \alpha = 0 \text{ 時，將第}p\text{袋平分，或切在}p\text{與}p+1\text{ 之間} \\ 0 < \alpha < 0.5 \text{ 時，切在}p\text{與}p+1\text{ 之間} \\ \alpha = 0.5 \text{ 時，將第}p+1\text{ 袋平分，或切在}p\text{與}p+1\text{ 之間} \\ 0.5 < \alpha < 1 \text{ 時，將第}p+1\text{ 袋平分} \end{cases}$$ 。

2. (1) 可使兩人均分的堆數可以遞迴關係式表示：

$$\begin{cases} m_n = 2m_{n-1} + m_{n-2} + 1 \\ m_1 = 1, m_2 = 3 \end{cases}$$

(2) 存在兩種最佳解的堆數(即$\alpha = 0$或 0.5)可以遞迴關係式表示：

$$\begin{cases} m_n = 6m_{n-1} - m_{n-2} + 2 \\ m_1 = 2, m_2 = 14 \end{cases}$$

但我們並不滿足於使用一元二次方程式求解得到的結論，總覺得這麼有規律的排列應該能有更直觀的作法，而開啟了我們的研究。

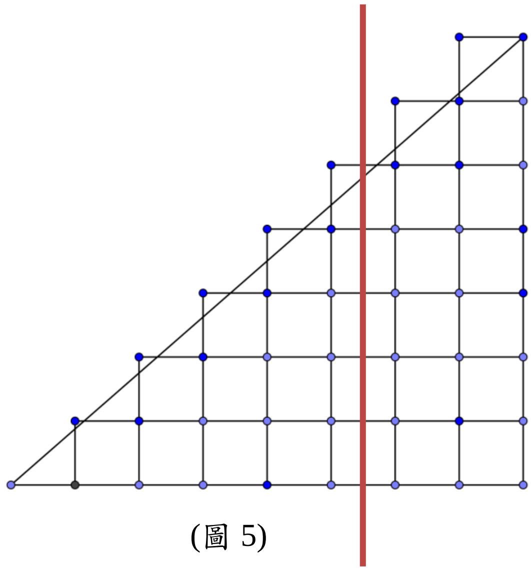
我們發展出了直角三角形平移法、上下界逼近法來解決這個問題，其研究過程說明如下：

二、直角三角形平移法：

我們把金幣的數量實際畫出來，發現若將圖形思考成連續性的數字，則看起來像是個直角三角形，而且這個直角三角形的面積恰好與金幣的數量相等。因此，我們若能找到直角三角形的面積分割線，便能有效率的找出分金幣較佳的分割點，從而知道所有可能的站位。

(圖 5)是以$\mathrm{n}=7$為例的示意圖，
此時我們以兩股分別為 7、8 的直角三角形來模擬，其面積分割線如(圖 5)紅線。

依此發展我們的等面積分割點公式，
其說明與證明如下：



(圖 5)

【公式 1】直角三角形等面積分割點：

設兩股分別為n、$n+1$的直角三角形面積為A，$\triangle$ADE=$\frac{1}{2}\triangle ABC$，

令$\overline{AD}=L_1(n)$，則$L_1(n)=\frac{n+1}{\sqrt{2}}$

【證明】:

如圖，因$\Delta ABC \sim \Delta ADE$，

(1) $\overline{DE}^2:\overline{BC}^2=1:2$

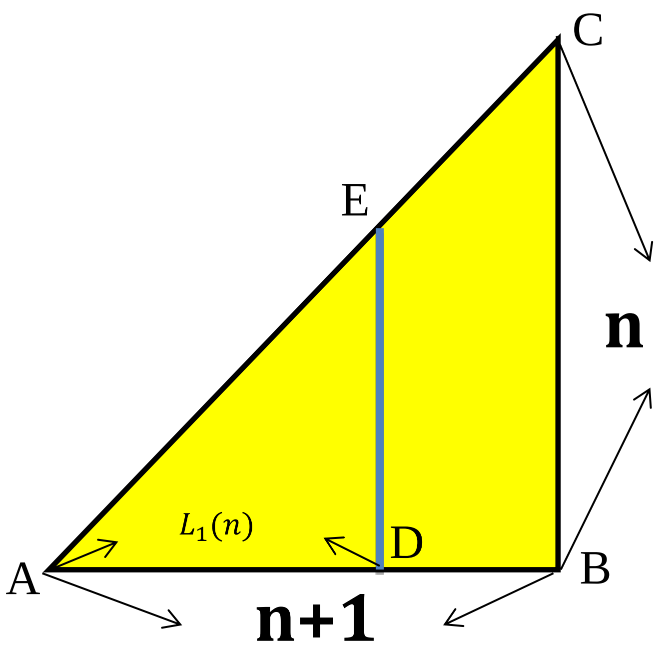
$\Rightarrow \overline{DE}^2:n^2=1:2$

$\Rightarrow \overline{DE}=\dfrac{n}{\sqrt{2}}$

(2) $\overline{AD}^2:\overline{AB}^2=1:2$

$\Rightarrow \overline{AD}^2:(n+1)^2=1:2$

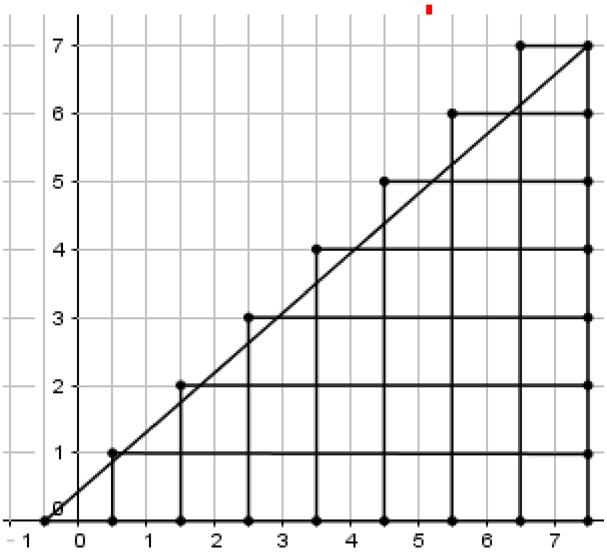
$\Rightarrow \overline{AD}=\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}=L_1(n)$



(圖 6)

為了能夠直觀理解計算結果的面積分割點，我們利用平移，採用與前作不同的判斷方式：
當計算結果恰為整數p時，即表示第p袋被平分，
當計算結果的恰為p +0.5 時，即表示要切在第p袋與第$p+1$袋之間(不平分)。

下圖為我們將(圖 5)放在直角坐標平面上的示意圖(圖 7)：



(圖 7)　$L_2(n)$

定義$L_2(n)$為座標平面上直角三角形的等面積分割位置，如(圖 7)所示。
故以$L_1(n)$作對應之直角三角形的等面積分割點$L_2(n) = L_1(n) - 0.5$

於是我們以實驗分割點E(n)與面積分割點$L_2(n)$作比較，結果如下表：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
實驗分割點 E(n)	1.5	2.5	3	4	4.5	5.5	6	6.5	7.5	8	9
面積分割點 $L_2(n)$	1.62132	2.328427	3.035534	3.742641	4.449747	5.156854	5.863961	6.571068	7.278175	7.985281	8.692388

n	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
實驗分割點 E(n)	424.5	460	495.5	530.5	566	601.5	636.5	672	707.5
面積分割點 $L_2(n)$	424.4711	459.8265	495.1818	530.5371	565.8925	601.2478	636.6032	671.9585	707.3138

(表 2)

由(表 2)可知，面積分割點$L_2(n)$與實驗分割點相近，但並沒有如我們預想的隨著n變大而更加趨近實驗結果，因此無法幫助我們精準的判斷適當的分割點位置。

於是我們使用同時具有兩個最佳分割點的 n 來幫助我們作判斷。

Ex：

1. $n = 14$時，

$S_{10.5} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{14} k = 55 - 52.5 = 52.5 - 50 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{14} k - S_{10}$，

$E(14) = 10$ 或 10.5，此時$L_2(14) \approx 10.1066$

2. $n = 84$時，

$S_{60} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{84} k = 1800 - 1785 = 1785 - 1700 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{84} k - S_{59.5}$，

$E(84) = 59.5$ 或 60，此時$L_2(84) \approx 59.6041$

3. $n = 492$時，

$S_{348.5} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{492} k = 60726 - 60639 = 60639 - 60552 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{492} k - S_{348}$，

$E(492) = 348$ 或 348.5，此時$L_2(492) \approx 348.1036$

4. $n = 2870$時，

$S_{2030} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2870} k = 2060450 - 2059942.5$

$= 2059942.5 - 2059435 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2870} k - S_{2029.5}$，

$E(2087) = 2029.5$ 或 2030，此時$L_2(2870) \approx 2029.6037$

5. $n = 16730$時，

$E(16730) = 11830$ 或 11830.5，此時$L_2(16730) \approx 11830.10355$

6. $n = 97512$時，

$E(97512) = 68951.5$ 或 68952，此時$L_2(97512) \approx 68951.60356$

7. $n = 568344$時，

$E(568344) = 401880$ 或 401880.5，此時$L_2(568344) \approx 401880.10355$

8. $n = 3312554$時，

$E(3312554) = 2342329.5$ 或 2342330，此時$L_2(3312554) \approx 2342329.60355$

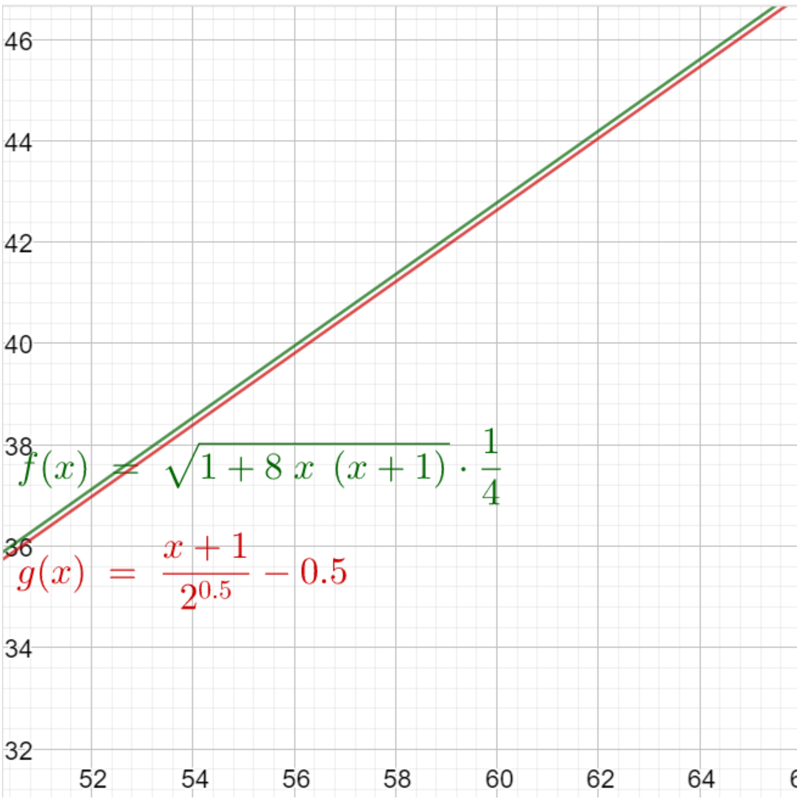
統整如下表：

n	14	84	492	2870	16730	97512	568344	3312554
實驗分割點E(n)	10 或 10.5	59.5 或 60	348 或 348.5	2029.5 或 2030	11830 或 11830.5	68951.5 或 68952	401880 或 401880.5	2342329.5 或 2342330
$L_2(n)$小數部分	0.1066	0.6041	0.1036	0.6037	0.10355	0.60356	0.10355	0.60355

(表 3)

我們發現，若 n 同時具有兩個最佳分割點，$L_2(n)$的小數部分趨近於某特定值$t_1 = 0.1035$ 與$t_2 = 0.6035$，其對應的理想值應為0.25與0.75，公式與理想具有約0.1465的誤差！

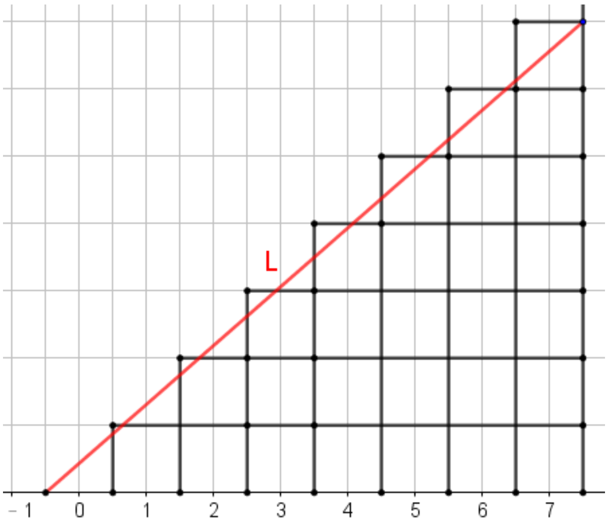
接著我們使用文獻探討所得到的公式與我們的公式函數繪出，也確實看到了誤差。如下圖。



(圖 8)

如上圖呈現，前作公式$e_0(n) = \frac{-1+\sqrt{1+8n(n+1)}}{4}$與我們所寫出的公式$L_2(n) = \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$存在些微的誤差，此誤差經過計算發現雖遞減，但卻始終存在。

經過探究，我們找到了誤差的原因在於我們所畫出的直角三角形與實際的階梯圖形中，產生了許多的小直角三角形，而我們高估了左側的面積、低估了右側的面積，導致最後的$L_2(n)$比理想值小。如下圖呈現：



(圖 9)

而我們也在前作的公式$e_0(n)$與$L_2(n)$的比較中獲得了印證，得證 0.1465 的誤差即為$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$的近似值，其說明與證明如下：

三角形面積分割點與前作公式$e_0(n)$的誤差

【公式二】

$$e_0(n)-L_2(n)\approx 0.1465\approx\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

【證明】

$$e_0(n)-L_2(n)=\frac{\sqrt{1+8n(n+1)}}{4}-\left(\frac{n+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1+8n(n+1)}}{4}-\frac{\sqrt{2}(n+1)-1}{2}=\frac{\sqrt{1+8n(n+1)}-2\sqrt{2}(n+1)}{4}+\frac{1}{2}$$

因此當n趨近於無窮大時，

$$\lim_{n\to\infty}\left(e_0(n)-L_2(n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+8n(n+1)}-2\sqrt{2}(n+1)}{4}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+8n(n+1)-\left(2\sqrt{2}(n+1)\right)^2}{4\left(\sqrt{1+8n(n+1)}+2\sqrt{2}(n+1)\right)}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(8n^2+8n+1)-(8n^2+16n+8)}{4(\sqrt{1+8n(n+1)}+(2\sqrt{2}(n+1))}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-8n-7}{4(\sqrt{1+8n(n+1)}+(2\sqrt{2}(n+1))}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{-8n}{n}-\frac{7}{n}}{4(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{8n(n+1)}{n^2}}+\frac{2\sqrt{2}(n+1)}{n})}+\frac{1}{2}\right)=\frac{-8}{4(\sqrt{8}+2\sqrt{2})}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$ 得證。

故取$e(n)=L_2(n)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{n+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{2n+1}{2\sqrt{2}}$，並令$e(n)=Z+\alpha$，$Z\in\mathrm{N},0\le\alpha<1$

因此，我們可以藉由$L_2(n)$的誤差調整得到$\boxed{e(n)}$，再利用$\boxed{e(n)}$所計算之$Z+\alpha$來判斷分割點$\boxed{E(n)}$：

$\boxed{\text{(1) 若}0\le\alpha\le 0.25\text{，}E(n)=Z}$

例如：兩人分 21 堆金幣，$e(21)\approx 15.2028$，故分割點在 15 上，其中一人拿$S_{14}+\frac{15}{2}=112.5$，另一人拿 118.5 差距最小。

$\boxed{\text{(2) 若}0.25\le\alpha\le 0.75\text{，}E(n)=Z+0.5}$

例如：兩人分 33 堆金幣，$e(33)\approx 23.6881$，故分割點在 23.5 上，其中一人拿$S_{23}=276$，另一人拿285差距最小。

$\boxed{\text{(3) 若}0.75\le\alpha<1\text{，}E(n)=Z+1}$

例如：兩人分 46 堆金幣，$e(46)\approx 32.8805$，故分割點在 33 上，其中一人拿$S_{32}+\frac{33}{2}=544.5$，另一人拿536.5差距最小。

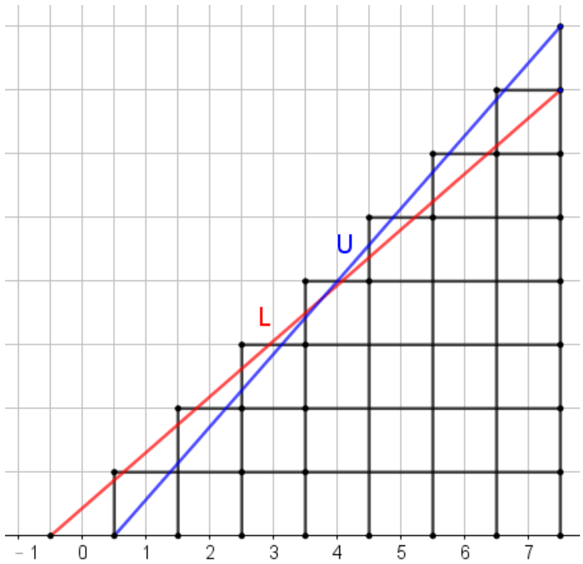
三、上下界逼近法：

當我們發現使用三角形面積切割法所算出的分割點低估了理想值$e(n)$位置後，接著就發展出了上下界逼近法來解決這個問題：

如右圖，以$n=7$為例，

(1) 若以線段 L(點$(-\frac{1}{2},0)$與點$(7\frac{1}{2},7)$)為斜邊所圍成之直角三角形計算其面積切割線，計算之結果將低估理想值$e(n)$。

(2) 若以線段 U(點$(\frac{1}{2},0)$與點$(7\frac{1}{2},8)$)為斜邊所圍成之直角三角形計算其面積切割線，計算之結果將高估理想值$e(n)$。



(圖 10)

故我們可知理想值$e(n)$必介於

$L_2(n)=\frac{n+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$、$U_2(n)=\frac{n}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$之間，

我們找出了理想值$e(n)$逼近法公式的另一種證明方式如下：

【公式三】

$$\lim_{n\to\infty} e(n) = \frac{2n+1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(U_2(n) + L_2(n)\right)$$

【證明】

$$U_2(n) - L_2(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 2(e(n) - L_2(n))$$

$$\Rightarrow\ e(n) - L_2(n) = U_2(n) - e(n) = \tfrac{1}{2}(U_2(n) - L_2(n)) = 1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

因此當n相當大時，$\lim_{n\to\infty} e(n) = \frac{1}{2}\left(U_2(n) + L_2(n)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n+1}{2\sqrt{2}}$得證。

實際計算驗證，我們也發現公式確實能夠幫助我們判斷實驗分割點的位置，統整如下表：

n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
理想值分割點 $e_2(n)$	35.709	71.064	106.420	141.775	177.130	212.486	247.841	283.196	318.552	353.907
實驗分割點 E(n)	35.5	71	106.5	142	177	212.5	248	283	318.5	354

(表 4)

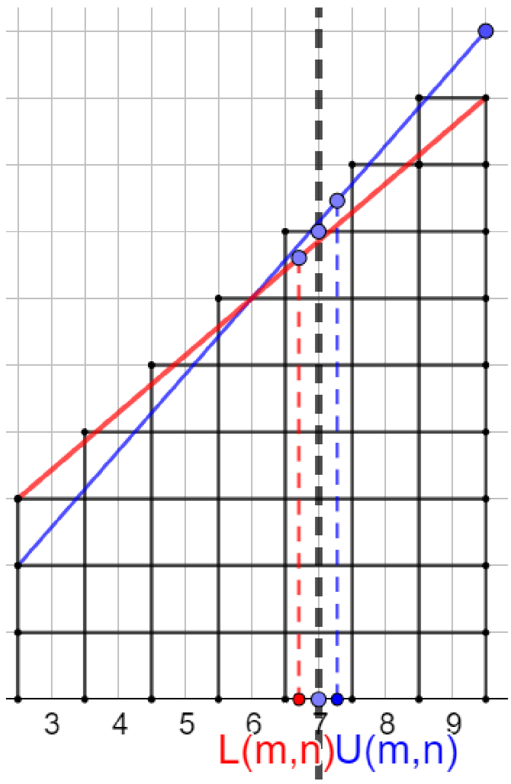
研究二、在金幣以 m、m+1、m+2、...、n 排列時，兩位手下要如何分，才能使兩人的金幣數量最接近？

在研究一時，確認我們將階梯以三角形來逼近的作法可行以後，我們開啟了第一堆金幣不為 1 的研究，並探討一般化的狀況，在金幣以m、$m+1$、$m+2$、...、n排列時，最佳的分割點所在位置：

首先，我們嘗試使用上下界逼近法來解決這個問題，我們畫出了 L、U 兩條線段，其圍成的梯形面積亦恰與所求的階梯面積相同，其示意圖如下：

顯然，L因高估左側面積、低估右側面積，故其面積切割線較實驗分割點偏左，$L(m,n) < E(m,n)$

同理，U因高估右側面積、低估左側面積，故其面積切割線較實驗分割點偏右，$U(m,n) > E(m,n)$



(圖 11)

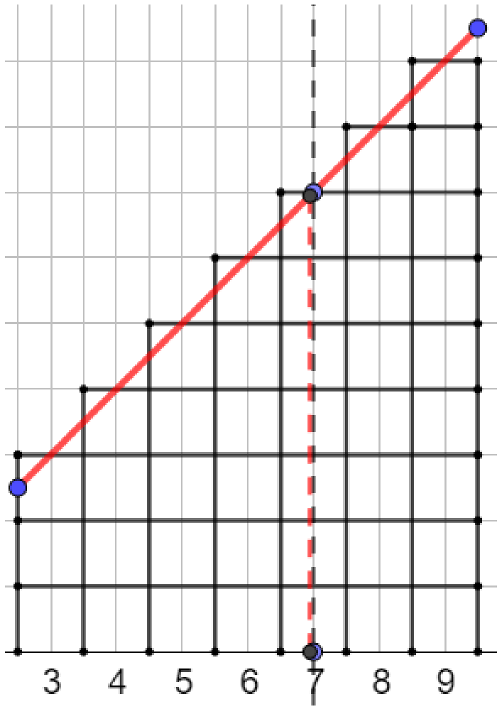
故我們可以利用$U(m,n)$、$L(m,n)$找到實驗分割點的可能範圍。

但我們經過觀察，從圖形中發現了更好的模擬方式，其圖形如右：

如此的面積模擬方式有以下優點：

1. 模擬的梯形面積依然與階梯的面積相同。
2. 可使斜線的斜率為 1，降低計算的複雜程度。
3. 能夠使面積分割點與實驗分割點有重疊的可能

因此我們發展了關於金幣以m、$m+1$、$m+2$、…、n排列時，兩人分金幣的公式。
其結果以及證明過程如下：



(圖 12)

【公式四】m、$m+1$、$m+2$、…、n排列時，

梯形面積切割線公式 $\mathrm{k}=\frac{1-2\mathrm{m}+\sqrt{2m^2-2m+2n+2n^2+1}}{2}$

【證明】

$$\frac{(m-0.5+n+0.5)\times(n-m+1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{[(m-0.5)+(k+m-0.5)]\times k}{2}$$

$$\Rightarrow\ (m+n)(n-m+1)=(2\mathrm{m}+\mathrm{k}-1)\times\mathrm{k}\times 2$$

$$\therefore \mathrm{k}=\frac{2\times(1-2\mathrm{m})+\sqrt{4\times(1-2m)^2-8\times(m^2-m-n-n^2)}}{4}$$

$$\therefore \mathrm{k}=\frac{1-2\mathrm{m}+\sqrt{2m^2-2m+2n+2n^2+1}}{2}$$

接著我們代入不同的值也驗證了我們的公式確實能精確的找到最佳分割點：

(1)m=2

m	2	2	2	2	2	2	2	2
n	9	55	131	360	642	1749	2293	3324
公式分割點	6.80073	39.25876	92.99059	254.9142	454.3173	1237.084	1621.749	2350.777
實驗分割點	7	39.5	93	255	454.5	1237	1621.5	2351

(表 5)

(2)m=3

m	3	3	3	3	3	3	3	3
n	15	91	218	713	1315	1748	2658	3542
公式 分割點	11.1018	64.7244	154.512	504.523	930.200	1236.37	1879.84	2504.92
實驗 分割點	11	64.5	154.5	504.5	930	1236.5	1880	2505

(表 6)

(3)m=4

m	4	4	4	4	4	4	4	4
n	47	343	549	1026	1428	2197	2738	3425
公式 分割點	33.6786	242.903	388.563	725.849	1010.10	1553.86	1936.41	2422.19
實驗 分割點	33.5	243	388.5	726	1010	1554	1936.5	2422

(表 7)

(4)m=5

m	5	5	5	5	5	5	5	5
n	75	243	969	1536	2036	2654	3409	5619
公式 分割點	53.4813	172.209	685.547	1086.47	1440.02	1877.01	2410.88	3973.58
實驗 分割點	53.5	172	685.5	1086.5	1440	1877	2411	3973.5

(表 8)

由上表可知，公式分割點$\mathrm{k}(m,n)$與實驗分割點相近，也驗證了我們確實可以利用公式分割點來判斷實驗分割點。我們將獲得的與結論整理如下：

有 n-m＋1 堆金幣時(m~n 個)，可利用$\mathrm{k}(m,n)=\frac{1-2\mathrm{m}+\sqrt{2m^2-2m+2n+2n^2+1}}{2}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\alpha}$，

($p\in\mathbb{N}$，且$0\leq\alpha<1$)來判斷分割點：

$$\begin{cases} 0\leq\alpha<0.25\text{ 時，將第}p\text{袋平分} \\ 0.25<\alpha<0.75\text{ 時，切在}p\text{與}p+1\text{ 之間} \\ 0.75<\alpha<1\text{ 時，將第}p+1\text{ 袋平分} \end{cases}$$

若$\alpha=0.25$，則”將第p袋平分” 與 “切在p與$p+1$之間” 均為最佳平分解

若$\alpha=0.75$，則“切在p與$p+1$之間” 與 ”將第$p+1$袋平分” 均為最佳平分解

其說明如下：

$\boxed{(1)\ 若0 \le \alpha \le 0.25，E(m,n) = p}$

例如：兩人分第 3 堆到第 1315 堆金幣，k(3,1315) ≈ 930.20065，

距離可分割點 930 最近，故判斷分割點$E(3,1315) = 930$，

其中一人拿$3+4+\cdots 929+\frac{930}{2}=431982$，另一人拿$\frac{930}{2}+931+932+\cdots+1315=432820$時，差距最小。

$\boxed{(2)\ 若0.25 \le \alpha \le 0.75，E(n) = Z+0.5}$

例如：兩人分第 2 堆到第 642 堆金幣，$k(2,642) \approx 454.3173$，

距離可分割點 454.5 最近，故判斷分割點$E(2,642) = 454.5$，

其中一人拿$1+2+\cdots+454=103284$，另一人拿$455+456+\cdots+642=103118$時，差距最小。

$\boxed{(3)\ 若0.75 \le \alpha < 1，E(n) = Z+1}$

例如：兩人分第 4 堆到第 343 堆金幣，$k(4,343) \approx 242.9038$，

距離可分割點 243 最近，故判斷分割點$E(4,343) = 243$，

其中一人拿$4+5+\cdots+242+\frac{243}{2}=29764.5$，另一人拿$\frac{243}{2}+244+245+\cdots 343=29471.5$時，差距最小。

接著，我們找到了 m、n 能被平分的點來做觀察，獲得了令人訝異的發現：

m	n	實驗切點
2	5	4
2	10	7.5
2	15	11
2	32	23
2	61	43.5
2	90	64
2	189	134
2	358	253.5
2	527	373
2	1104	781
2	2089	1477.5
2	3074	2174

(表 9)

m	n	實驗切點
3	12	9
3	17	12.5
3	22	16
3	73	52
3	102	72.5
3	131	93
3	428	303
3	597	422.5
3	766	542
3	2497	1766
3	3482	2462.5
3	4467	3159

(表 10)

m	n	實驗切點
4	8	6.5
4	11	8.5
4	19	14
4	24	17.5
4	29	21
4	51	36.5
4	68	48.5
4	114	81
4	143	101.5
4	172	122
4	300	212.5
4	399	282.5
4	667	472
4	836	591.5
4	1005	711
4	1751	1238.5
4	2328	1646.5
4	3890	2751
4	4875	3447.5
4	5860	4144

(表 11)

m	n	實驗切點
5	26	19
5	31	22.5
5	36	26
5	155	110
5	184	130.5
5	213	151
5	906	641
5	1075	760.5
5	1244	880
5	5283	3736
5	6268	4432.5
5	7253	5129

(表 12)

m	n	實驗切點
6	11	9
6	20	15
6	33	24
6	38	27.5
6	43	31
6	70	50
6	121	86
6	196	139
6	225	159.5
6	254	180
6	411	291
6	708	501
6	1145	810
6	1314	929.5
6	1483	1049
6	2398	1696
6	4129	2920
6	6676	4721
6	7661	5417.5
6	8646	6114

(表 13)

m	n	實驗切點
7	40	29
7	45	32.5
7	50	36
7	237	168
7	266	188.5
7	295	209
7	1384	979
7	1553	1098.5
7	1722	1218
7	8069	5706
7	9054	6402.5
7	10039	7099

(表 14)

m	n	實驗切點
8	47	34
8	52	37.5
8	57	41
8	278	197
8	307	217.5
8	336	238
8	1623	1148
8	1792	1267.5
8	1961	1387
8	9462	6691
8	10447	7387.5
8	11432	8084

(表 15)

m	n	實驗切點
9	15	12.5
9	22	17
9	25	19
9	36	26.5
9	54	39
9	59	42.5
9	64	46
9	96	68.5
9	135	96
9	152	108
9	215	152.5
9	319	226
9	348	246.5
9	377	267
9	563	398.5
9	790	559
9	889	629
9	1256	888.5
9	1862	1317
9	2031	1436.5
9	2200	1556

(表 16)

m	n	實驗切點
10	61	44
10	66	47.5
10	71	51
10	360	255
10	389	275.5
10	418	296
10	2101	1486
10	2270	1605.5
10	2439	1725
10	12248	8661
10	13233	9357.5
10	14218	10054

(表 17)

m	n	實驗切點
11	25	19.5
11	34	25.5
11	68	49
11	73	52.5
11	78	56
11	154	109.5
11	205	145.5
11	401	284
11	430	304.5
11	459	325
11	901	637.5
11	1198	847.5
11	2340	1655
11	2509	1774.5
11	2678	1894
11	5254	3715.5
11	6985	4939.5
11	13641	9646
11	14626	10342.5
11	15611	11039

(表 18)

在表 9～表 18 中，我們獲得了五個發現，部分尚無法獲得證明，分項條列如下：

【發現 1】：固定m，當可完全平分之n值呈等差數列時，實驗分割點恰有一組(某堆平分、某堆不平分、某堆平分)解亦成等差數列。

【說明】

(1)m=2 時，分別取 n 值為 5、10、15，其實驗分割點分別為 4、7.5、11，為一等差數列。

(2) m=3 時，分別取 n 值為 73、102、131，其實驗分割點分別為 52、72.5、93，為一等差數列。

(3) m=4 時，分別取 n 值為 667、836、1005，其實驗分割點分別為 472、591.5、711，為一等差數列。

(4) m=5 時，分別取 n 值為 906、1075、1244，其實驗分割點分別為 641、760.5、880，為一等差數列。

【發現 2】：對任意$m \geq 2$之正整數，均分別有一組 3 項之等差數列，公差滿足遞迴關係式

$\begin{cases} a_1 = 5、a_2 = 29 \\ a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$ 的可完全平分n值。（稱為等差組解）

【說明】

(1) 以$m = 2$為例，存在可平分之n值為 5、10、15，為公差 5 之等差數列

亦存在可平分之n值 32、61、90，為公差 29 之等差數列

亦存在可平分之n值 189、358、527，為公差 169 之等差數列

亦存在可平分之n值 1104、2089、3064，為公差 985 之等差數列

(2) 以$m = 3$為例，存在可平分之n值為 12、17、22，為公差 5 之等差數列

亦存在可平分之n值 73、102、131，為公差 29 之等差數列

亦存在可平分之n值 428、597、766，為公差 169 之等差數列

亦存在可平分之n值 2497、3482、4467，為公差 985 之等差數列

同樣的規律亦發生在任意$m \geq 2$之正整數。

且 5、29、169、985…為一滿足遞迴數列：$\begin{cases} a_1 = 5、a_2 = 29 \\ a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$。

亦即，以$m = 2$為例，接著能找到三項公差為$a_5 = 6 \times 985 - 169 = 5741$之等差數列($n = 6437$、$12178$、$17919$)。

【發現 3】：承發現 2，對任意$m \geq 2$之正整數，其等差組解的距離，亦滿足遞迴關係

$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$

【說明】

(1) 以$m = 2$為例，第一組等差組解為(5,10,15)、第二組等差組解為(32,61,90)、第三組等差組解為(189,358,527)、第四組等差組解為(1104,2089,3064)，

兩等差組之間的距離我們定義為（後組的首項）－（前組的末項）。

故$m = 2$時，等差組距形成的數列為$\{17, 99, 577, 3363, \ldots\}$，此數列滿足遞迴關係

$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$。（起始項為$a_1 = 17, a_2 = 99$）

(2) 同理，在m為其他≥ 2之正整數時，亦可藉由遞迴關係$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$找到下一組等差組解，僅僅起始項不同。

【發現 4】：對任意$m \geq 2$之正整數，其第一組等差組解中的每一項，分別對應為公差 7 的等差數列。其第二組等差組解中的每一項，分別對應為公差 41 的等差數列。其第三組等差組解中的每一項，分別對應為公差 239 的等差數列…。其公差數列$\{7,41,239,\ldots\}$亦滿足遞迴關係式$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$。

【說明】

(1) $m = 2$、3、4、5…之第一組等差組解的第一項分別為$\{5,12,19,26\ldots\}$，恰為等差數列，公差 7。

(2) $m = 2$、3、4、5…之第二組等差組解的第一項分別為$\{32,73,114,155\ldots\}$，恰為等差數列，公差 41。

(3) $m = 2$、3、4、5…之第三組等差組解的第一項分別為$\{189,428,667,906\ldots\}$，恰為等差數列，公差 239。

(4) 公差數列$\{7,41,239,\ldots\}$滿足遞迴關係式$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$。(起始項$a_1 = 7, a_2 = 41$)

【證明 4-1】

當 m 為已知數時，n=7m-9，實驗分割點 e(n)=5m-6

(1) 當 m=2 時⇒ $\mathrm{n} = 5$，$\mathrm{e(n)} = 4$

$2+3+\frac{4}{2} = 7 = \frac{4}{2} + 5, \Rightarrow$ 成立

(2) 設 m=k 時，n=7*k-9=7k-9，e(n)=5*k-6=5k-6，成立

則$\mathrm{k} + (k+1) + \cdots\cdots(5k-8) + (5k-7) + \frac{5k-6}{2} = \frac{5k-6}{2} + (5k-5) + \cdots + (7k-9)$

(3) 承(2)，則當 m=k+1 時⇒n=7× $(k+1)$-9=7k-2，e(n)=5× $(k+1)$-6=5k-1

$$(5k-5) + (5k-4) + \cdots\cdots + (7k-9) - k + (5k-6) + (5k-5) + \cdots\cdots(5k-2) + \frac{5k-1}{2}$$

$$=[(5k-5) + (5k-4) + \cdots\cdots + (5k-1)] + \left[5\mathrm{k} + \cdots\cdots + (7k-9) + \frac{5k-1}{2}\right] - k + [(5k-6) + \cdots\cdots + (5k-2)]$$

令$\left[5\mathrm{k} + \cdots\cdots + (7k-9) + \frac{5k-1}{2}\right] = a$

$=25\mathrm{k} - 15 + \mathrm{a} + 24\mathrm{k} - 20 = 49\mathrm{k} - 35 + \mathrm{b}\ldots$①

$$\frac{5k-1}{2} + 5k + (5k+1) + \cdots\cdots + (7k-2) = \left[\frac{5k-1}{2} + 5\mathrm{k} + (5k+1)\cdots\cdots + (7k-9)\right]$$

$$+[(7k-8) + (7k-7)\cdots\cdots + (7k-2)] = b + 49k - 35 = 49k - 35 + b\ldots②$$

∵①=② ∴ 得證

故當 m 為已知數時⇒ $\mathrm{n} = 7\mathrm{m} - 9$，實驗分割點 $\mathrm{e(n)} = 5\mathrm{m} - 6$ 成立

【證明 4-2】

當 m 為已知數時，$n=41m-50$，實驗分割點$e(n)=29m-35$

(1) 當$m=2$時$\Rightarrow n=41\times2-50=32$，$e(n)=29\times2-35=23$

$$2+3+\cdots\cdots+22+\frac{23}{2}=263.5=\frac{23}{2}+24+\cdots\cdots+32\Rightarrow \text{成立}$$

(2) 設 m=k 時，$n=41\times k-50=41k-50$，$e(n)=29\times k-35=29k-35$，成立

則 k+$(k+1)+\cdots\cdots(29k-37)+(29k-36)+\frac{29k-35}{2}=\frac{29k-35}{2}+(29k-34)+\cdots\cdots+(41k-50)$

(3) 承(2)，則當$m=k+1$時$\Rightarrow n=41\times(k+1)-50=41k-9$，$e(n)=29\times(k+1)-35=29k-6$

$(29k-34)+(29k-33)+\cdots\cdots+(41k-50)-k+(29k-35)+(29k-34)+\cdots\cdots+(29k-7)+\frac{29k-6}{2}$

$=[(29k-34)+(29k-33)+\cdots\cdots+(29k-6)]+\left[(29k-5)+\cdots\cdots+(41k-50)+\frac{29k-6}{2}\right]-k+[(29k-35)+(29k-34)+\cdots\cdots(29k-7)]$

令$\left[(29k-5)+\cdots\cdots+(41k-50)+\frac{29k-6}{2}\right]=a$

$=841k-580+a+840k-609=1681k-1189+a\ldots$①

$\frac{29k-6}{2}+(29k-5)+\cdots\cdots+(41k-9)$

$=\left[\frac{29k-6}{2}+(29k-5)\cdots\cdots+(41k-50)\right]$

$+[(41k-49)+(41k-48)\cdots\cdots+(41k-9)]=a+1681k-1189$

$=1681k-1189+a\ldots$②

∵①=② ∴ 得證

故當 m 為已知數時$\Rightarrow$ $n=41m-50$，實驗分割點 $e(n)=29m-35$ 成立

【證明 4-3】

當 m 為已知數時，$n=239m-289$，實驗分割點$e(n)=169m-204$

(1) 當 m=2 時$\Rightarrow n=239\times2-289=189$，$e(n)=169\times2-204=134$

$$2+3+\cdots\cdots+133+\frac{134}{2}=8977=\frac{134}{2}+135+\cdots\cdots+189\Rightarrow \text{成立}$$

(2) 設 m=k 時，n=239×k-289=239k-289，e(n)=169×k-204=169k-204，成立

則 k+$(k+1)+\cdots\cdots(169k-202)+(169k-203)+\frac{169k-204}{2}=\frac{169k-204}{2}+$

$(169k-205)+\cdots\cdots+(239k-289)$

(3) 承(2)，則當$\mathrm{m}=\mathrm{k}+1$時$\Rightarrow \mathrm{n}=239\times(\mathrm{k}+1)-289=239\mathrm{k}-50$，$\mathrm{e}(\mathrm{n})=169\times(\mathrm{k}+1)-204=169\mathrm{k}-35$

$$\begin{aligned}(169k-203)+(169k-202)+\cdots\cdots+(239k-289)-k+(169k-204)\\ +(169k-203)+\cdots\cdots+(169k-36)+\frac{169k-35}{2}\\ =[(169k-203)+(169k-202)+\cdots\cdots+(169k-35)]\\ +\left[(169k-34)+\cdots\cdots+(239k-289)+\frac{169k-35}{2}\right]-k\\ +[(169k-204)+(169k-203)+\cdots\cdots(169k-36)]\end{aligned}$$

令$\left[(169k-34)+\cdots\cdots+(239k-289)+\frac{169k-35}{2}\right]=a$

$=28561\mathrm{k}-20111+\mathrm{a}+28560\mathrm{k}-20280=57121\mathrm{k}-40391+\mathrm{a}\ldots$①

$$\frac{169k-35}{2}+(169k-34)+\cdots\cdots+(239k-50)$$

$$=\left[(169k-34)+\cdots\cdots+(239k-289)+\frac{169k-35}{2}\right]$$

$$+[(239k-288)+(239k-287)\cdots\cdots+(239k-50)]=a+57121k-40391$$

$$=57121\mathrm{k}-40391+\mathrm{a}\ldots②$$

∵①=② ∴ 得證

故當 m 為已知數時⇒ $\mathrm{n}=239\mathrm{m}-289$，實驗分割點$\mathrm{e}(\mathrm{n})=169\mathrm{m}-204$ 成立

【發現 5】：等差組解不一定為所有可平分之$\boldsymbol{n}$值，常有非等差組解交錯於其中，非等差組解存在滿足遞迴關係式$a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$之組內距離。

【說明】

(1) $m=4$時，存在非等差組解：第一組(8,11)、第二組(51,68)、第三組(300,399)、第四組(1751,2328)，其各組內距離所形成的數列{3,17,99,577 …}滿足遞迴關係式 $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$。(起始項$a_1=3,a_2=17$)

(2) $m=6$時，存在非等差組解：第一組11,20)、第二組(70,121)、第三組(411,708)、第四組(2398,4129)，其各組內距離所形成的數列{9,51,297,1731 …}滿足遞迴關係式 $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$。(起始項$a_1=9,a_2=51$)

研究三、在金幣以 m、m+1、m+2、...、n 排列時，三位手下要如何分，才能使三人的金幣數量最接近？

由研究二中，我們發展出較佳的面積模擬方式，如下圖，並依此方法進行研究三，討論三位手下分 m、m+1、m+2、⋯、n 等 n－m＋1 堆金幣的問題。

並推導了三人分金幣之公式如下：
定義$D_1(m,n)$為座標平面上梯形的三等分面積分割位置中的第一分割位置。
定義$D_2(m,n)$為座標平面上梯形的三等分面積分割位置中的第二分割位置。　如(圖 13)所示。

【公式五】：$D_1(m,n)=\frac{\sqrt{24m^2-24m+12n+12n^2+9}}{6}$

【證明】：

$$\frac{(m-0.5+n+0.5)\times(n-m+1)}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{[(m-0.5)+(r+m-0.5)]\times r}{2}$$

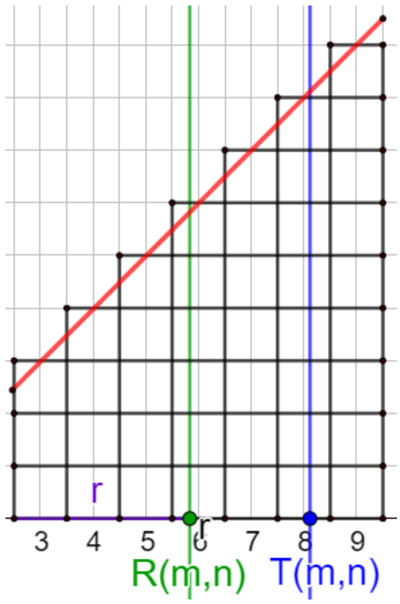
$$\Rightarrow\quad (m-0.5+n+0.5)\times(n-m+1)=3\mathrm{r}(2\mathrm{m}+\mathrm{r}-1)$$

$$\Rightarrow\quad 3r^2+3(2m-1)r-(m+n)\times(n-m+1)=0$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{r}=\frac{-3\times(2\mathrm{m}-1)+\sqrt{9\times(2m-1)^2-12\times(m^2-m-n-n^2)}}{2\times3}$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{r}=\frac{-6\mathrm{m}+3+\sqrt{24\mathrm{m}^2-24\mathrm{m}+12\mathrm{n}+12\mathrm{n}^2+9}}{6}$$

可知　$D_1(m,n)=r+m-0.5=\frac{\sqrt{24m^2-24m+12n+12n^2+9}}{6}$



(圖 13)

【公式六】：$D_2(m,n)=\frac{\sqrt{12m^2-12m+24n^2+24n+9}}{6}$

【證明】：

$$\frac{(m-0.5+n+0.5)\times(n-m+1)}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{[(m-0.5)+(t+m-0.5)]\times t}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 2(m-0.5+n+0.5)\times(n-m+1)=3\mathrm{t}(2\mathrm{m}+\mathrm{t}-1)$$

$$\Rightarrow\quad 3t^2+3(2m-1)t-2(m+n)\times(n-m+1)=0$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{t}=\frac{-(6\mathrm{m}-3)+\sqrt{(6\mathrm{m}-3)^2+24(-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+\mathrm{n}+\mathrm{n}^2)}}{6}$$

$\Rightarrow\quad \mathrm{t}=\frac{-6\mathrm{m}+3+\sqrt{12\mathrm{m}^2-12\mathrm{m}+24\mathrm{n}^2+24\mathrm{n}+9}}{6}$　　可知　$D_2(m,n)=t+m-0.5=\frac{\sqrt{12m^2-12m+24n^2+24n+9}}{6}$

接著我們代入不同的值也驗證了我們的公式確實能精確的找到最佳分割點：

(1)m=1

m	1	1	1	1	1	1	1	1
n	10	50	150	300	500	750	1000	1200
公式 第 1 分割點	6.075909	29.15905	86.89217	173.4942	288.9641	433.3016	577.6391	693.1091
實驗 第 1 分割點	6	29	87	173.5	289	433.5	577.5	693
公式 第 2 分割點	8.578073	41.23409	122.8831	245.3574	408.6566	612.7808	816.9049	980.2042
實驗 第 2 分割點	8.5	41	123	245.5	408.5	613	817	980

(表 19)

(2)m=3

m	3	3	3	3	3	3	3	3
n	10	50	150	300	500	750	1000	1200
公式 第 1 分割點	6.396614	29.22756	86.91519	173.5058	288.971	433.3062	577.6426	693.112
實驗 第 1 分割點	6.5	29	87	173.5	289	433.5	577.5	693
公式 第 2 分割點	8.693868	41.25833	122.8912	245.3615	408.6591	612.7824	816.9061	980.2052
實驗 第 2 分割點	8.5	41.5	123	245.5	408.5	613	817	980

(表 20)

(3)m=5

m	5	5	5	5	5	5	5	5
n	10	50	150	300	500	750	1000	1200
公式 第 1 分割點	7.088723	29.38679	86.96886	173.5327	288.9872	433.317	577.6506	693.1187
實驗 第 1 分割點	7	29.5	87	173.5	289	433.5	577.5	693
公式 第 2 分割點	8.958236	41.31485	122.9102	245.371	408.6648	612.7862	816.909	980.2076
實驗 第 2 分割點	9	41.5	123	245.5	408.5	613	817	980

(表 21)

(4) m=7

m	7	7	7	7	7	7	7	7
n	10	50	150	300	500	750	1000	1200
公式 第 1 分割點	8.057088	29.63528	87.05314	173.5749	289.0125	433.3339	577.6633	693.1293
實驗 第 1 分割點	8	29.5	87	173.5	289	433.5	577.5	693
公式 第 2 分割點	9.358597	41.4035	122.94	245.3859	408.6738	612.7922	816.9134	980.2113
實驗 第 2 分割點	9.5	41.5	123	245.5	408.5	613	817	980

(表 22)

(5) m=10

m	10	10	10	10	10	10	10	10
n	20	50	150	300	500	750	1000	1200
公式 第 1 分割點	14.15097	30.17035	87.23675	173.6671	289.0679	433.3708	577.691	693.1524
實驗 第 1 分割點	14	30	87	173.5	289	433.5	577.5	693
公式 第 2 分割點	17.61391	41.59627	123.0051	245.4185	408.6933	612.8052	816.9232	980.2195
實驗 第 2 分割點	17.5	41.5	123	245.5	408.5	613	817	980

(表 23)

(6) m=15

m	15	15	15	15	15	15	15	15
n	20	50	150	300	500	750	1000	1200
公式 第 1 分割點	16.74067	31.46824	87.69407	173.8972	289.2062	433.4631	577.7603	693.2101
實驗 第 1 分割點	16.5	31.5	87.5	174	289	433.5	578	693
公式 第 2 分割點	18.71497	42.07434	123.1676	245.5	408.7423	612.8379	816.9477	980.2399
實驗 第 2 分割點	18.5	42	123	245.5	408.5	613	817	980

(表 24)

由上表可知我們能使用

切點 1 公式：$D_1(m,n)=\frac{\sqrt{24m^2-24m+12n+12n^2+9}}{6}=p_1+\alpha_1$，$(p_1\in\mathbb{N}$，且$0\le\alpha_1<1)$

切點 2 公式：$D_2(m,n)=\frac{\sqrt{12m^2-12m+24n^2+24n+9}}{6}=p_2+\alpha_2$，$(p_2\in\mathbb{N}$，且$0\le\alpha_2<1)$

並驗證可使用α來判斷切點：$\begin{cases}0\le\alpha<0.25\text{ 時，將第}p\text{袋平分}\\0.25<\alpha<0.75\text{ 時，切在}p\text{與}p+1\text{ 之間}\\0.75<\alpha<1\text{ 時，將第}p+1\text{ 袋平分}\end{cases}$

若$\alpha=0.25$，則"將第p袋平分" 與 "切在p與$p+1$之間" 均為最佳平分解
若$\alpha=0.75$，則"切在p與$p+1$之間" 與 "將第$p+1$袋平分" 均為最佳平分解

此結論較前作討論標準差要簡單的多，也擁有能夠往 4 人以上金幣的最佳分割點的推廣與發展可能。

伍、研究結果與結論

一、我們使用三角形面積分割法完成兩人分1~n堆金幣分割點公式：

$e(n)=\frac{\boldsymbol{2n+1}}{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}=Z+\alpha$，$Z\in N,0\le\alpha<1$　　　並利用α來判斷分割點：

(1) 若$0\le\alpha\le0.25$，$E(n)=Z$
例如：兩人分 21 堆金幣，$e(21)\approx15.2028$，
故分割點在 15 上，其中一人拿$S_{14}+\frac{15}{2}=112.5$，另一人拿 118.5 差距最小。

(2) 若$0.25<\alpha<0.75$，$E(n)=Z+0.5$
例如：兩人分 33 堆金幣，$e(33)\approx23.6881$，
故分割點在 23.5 上，其中一人拿$S_{23}=276$，另一人拿285差距最小。

(3) 若$0.75\le\alpha<1$，$E(n)=Z+1$
例如：兩人分 46 堆金幣，$e(46)\approx32.8805$，
故分割點在 33 上，其中一人拿$S_{32}+\frac{33}{2}=544.5$，另一人拿536.5差距最小。

二、兩人分1~n堆金幣時，我們發現並證明$L(n)<e(n)<U(n)$，且

$e(n)=\frac{1}{2}(L(n)+U(n))=\frac{\boldsymbol{2n+1}}{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}$，從而獲得逼近$e(n)$的另一種方法。

三、在兩人分m~n堆金幣的狀況中，我們使用梯形模擬階梯面積，得到分割點公式：

$\mathrm{k}(m,n)=\frac{1-2\mathrm{m}+\sqrt{2m^2-2m+2n+2n^2+1}}{2}=p+\alpha$，($p\in\mathbb{N}$，且$0\leq\alpha<1$)

並驗證可使用α來判斷分割點：$\begin{cases}0\leq\alpha\ <0.25\text{ 時，將第}p\text{袋平分}\\0.25<\alpha<0.75\text{ 時，切在}p\text{與}p+1\text{ 之間}\\0.75<\alpha<1\text{ 時，將第}p+1\text{ 袋平分}\end{cases}$

若$\alpha=0.25$，則”將第p袋平分” 與 “切在p與$p+1$之間” 均為最佳平分解
若$\alpha=0.75$，則“切在p與$p+1$之間” 與 ”將第$p+1$袋平分” 均為最佳平分解

四、在兩人分m~n堆金幣的可完全平分的狀況中，我們獲得了 5 個發現，但部分仍尚待論證：

(1) 固定m，當可完全平分之n值呈等差數列時，實驗分割點恰有一組(某堆平分、某堆不平分、某堆平分)解亦成等差數列。

(2)對任意$m\geq2$之正整數，均分別有一組 3 項之等差數列，公差滿足遞迴關係式

$\begin{cases}a_1=5\text{、}a_2=29\\a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}\end{cases}$的可完全平分$n$值。（稱為等差組解）

(3)對任意$m\geq2$之正整數，其等差組解的距離，亦滿足遞迴關係$a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$

(4) 對任意$m\geq2$之正整數，其第一組等差組解中的每一項，分別對應為公差 7 的等差數列。其第二組等差組解中的每一項，分別對應為公差 41 的等差數列。其第三組等差組解中的每一項，分別對應為公差 239 的等差數列…。其公差數列$\{7,41,239,\ldots\}$亦滿足遞迴關係式$a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$。

(5) 等差組解不一定為所有可平分之n值，常有非等差組解交錯於其中，非等差組解存在滿足遞迴關係式$a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$之組內距離。

五、在三人分m~n堆金幣的狀況中，我們使用梯形模擬階梯面積，得到切點公式：

第一分割點公式：$\mathrm{D}_1(\mathrm{m},\mathrm{n})=\frac{\sqrt{24\mathrm{m}^2-24\mathrm{m}+12\mathrm{n}+12\mathrm{n}^2+9}}{6}=p_1+\alpha_1$，($p_1\in\mathbb{N}$，且$0\leq\alpha_1<1$)

第二分割點公式：$\mathrm{D}_2(\mathrm{m},\mathrm{n})=\frac{\sqrt{12\mathrm{m}^2-12\mathrm{m}+24\mathrm{n}^2+24\mathrm{n}+9}}{6}=p_2+\alpha_2$，($p_2\in\mathbb{N}$，且$0\leq\alpha_2<1$)

並驗證可使用α來判斷切點：$\begin{cases}0\leq\alpha\ <0.25\text{ 時，將第}p\text{袋平分}\\0.25<\alpha<0.75\text{ 時，切在}p\text{與}p+1\text{ 之間}\\0.75<\alpha<1\text{ 時，將第}p+1\text{ 袋平分}\end{cases}$

若$\alpha=0.25$，則”將第p袋平分” 與 “切在p與$p+1$之間” 均為最佳平分解
若$\alpha=0.75$，則“切在p與$p+1$之間” 與 ”將第$p+1$袋平分” 均為最佳平分解

陸、討論與未來展望

一、希望能在研究二的五個發現中獲得論證，並解開在可完全平分點中滿足遞迴關係式 $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$的秘密。

二、能在三人、四人...乃至於一般化 k 人分金幣找到最佳分割點的方式。

三、未來亦希望能發展公差≠1 的等差數列金幣數，分割點的調整與探討。甚至延伸至金幣數為其他數列的最佳分割點。

柒、參考文獻

1、游森棚(2017)森棚教官的數學題，科學研習月刊 56-9 期。

2、「金金計較」中華民國第五十八屆中小學科學展覽國中組數學科參展作品。

3、OEIS 數列網　https://oeis.org/A001541

A001541	$a_0 = 1$ 、$a_1 = 3$; for $n > 1$, $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$

【評語】030422

這是在數學月刊中所給出的一個問題。問題非常的有趣。在先前的科展中，也曾經有作品針對這個問題作了分析。在本作品中，作者們試圖透過更直觀的面積的等分的角度來處理這樣的一個問題，想法頗為有趣，值得嘉許。原始的問題當然可以藉由這樣的方式來想像，就如同我們可以把連續正整數的和跟梯形面積的計算做連結一樣，但是當所考慮的是離散的個數和時，用三角形或梯形的面積的觀點來看與真實的問題當然就會有著落差。作者們所給的較為精簡的、或是更進一步調整後所得出的分割點的位置的計算式其實是精確的式子取極限的結果。表示式確實比原本的式子精簡，但要說明當計算所得出的數字並非整數，此時該做怎麼樣的選擇這一部份可能就會有些困難。後半部關於各堆金幣的金額為 m，m+1，…，n，以及三人分金幣的討論大部分都是根據計算所觀察到的現象來說明，比較欠缺理論上的論述。如果能針對觀察到的一些可等分的條件為何為真，或是給出的計算式所得出的分割點為何可以保證是最佳的分割點這些問題，給出一些理論上的說明，作品就會更完整也更好。有點可惜了。

作品簡報

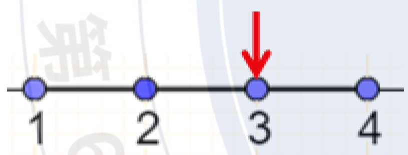
公正無私-
海盜分金幣的最佳平分解

第61屆全國中小學科學展覽 國中組 數學科

緣起：海盜分金幣問題

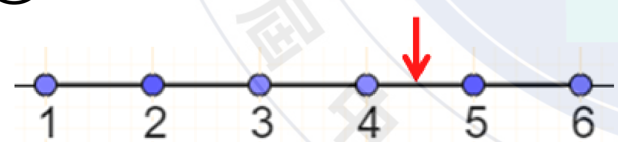
- 數量為1～n的n堆金幣等距排列，兩人選擇金幣位置站位，並分別可得到距離自己較近的金幣。若等距則平分，如何站位能使兩人分的最平均？

①



兩人分別站在4和2差的會最少。
站在4的人可以拿到4+1.5=5.5；
站在2的人可以拿到1+2+1.5=4.5

②



兩人分別站在5和4；或是6和3差最少
站在5、6的人可以拿到5+6=11
站在3、4的人可以拿到1+2+3+4=10

※ 討論分割點較有效率！

研究問題

- 在金幣以1、2、3、4、...、n排列時，兩位手下如何分，能使兩人的金幣數量最接近？
- 在金幣以m、$m+1$、$m+2$、...、n排列時，兩位手下如何分，能使兩人的金幣數量最接近？
- 在金幣以m、$m+1$、$m+2$、...、n排列時，三位手下如何分，能使三人的金幣數量最接近？
- 在金幣以m、$m+1$、$m+2$、...、n排列時，k位手下如何分，能使k人的金幣數量最接近？

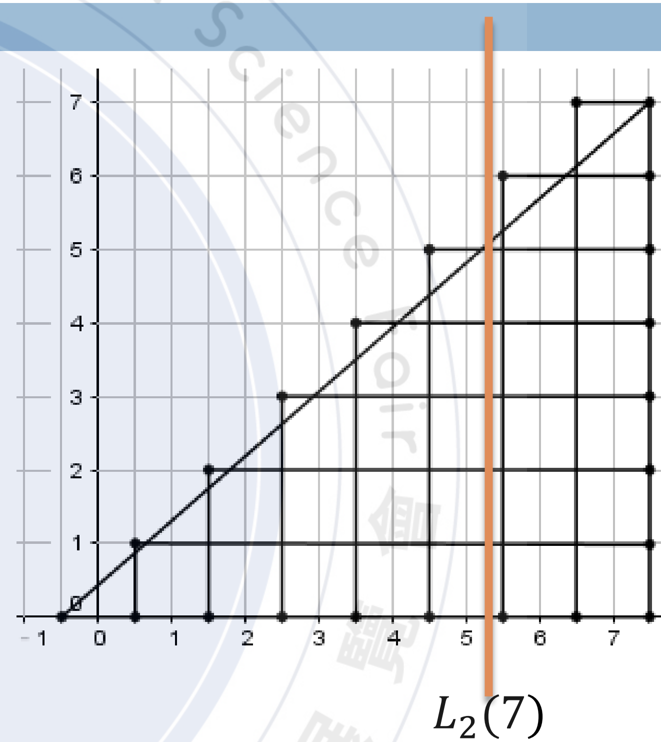
文獻探討

- 第58屆全國科展國中組數學科第一名「金金計較」
  - 解決方法：解一元二次方程式、佩爾方程。
  - 結果1：兩人分n堆金幣時(1~n個)，利用 $\boldsymbol{e_0(n)} = \frac{-1+\sqrt{1+8n(n+1)}}{4} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$，且$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}$) 判斷分割點
  - 結果2：找到使兩人均分的堆數之遞迴關係式。
  - 結果3：找到存在兩種最佳解的堆數之遞迴關係式。
  - 結果4：三人分n堆金幣時(1~n個)，討論平分與否分四種狀況討論，以標準差判斷最佳站位。

研究一--直角三角形平移法

- 把金幣排列成階梯狀圖形，使用直角三角形來模擬，找出面積分割線，置於座標平面上。
- 直角三角形面積分割點

$$L_2(n) = \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$



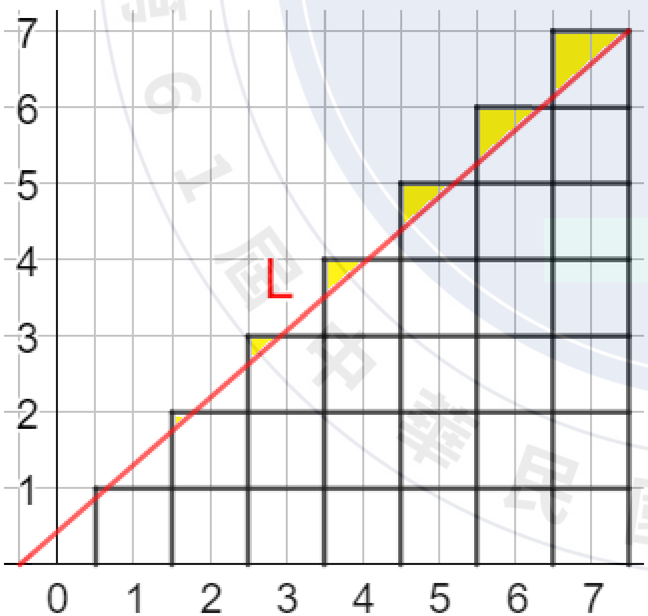
n	600	650	700	750	800	850	900
面積分割點 $L_2(n)$	424.47	459.82	**495.18**	530.53	565.89	**601.24**	636.60
實驗分割點 E(n)	424.5	460	**495.5**	530.5	566	**601.5**	636.5

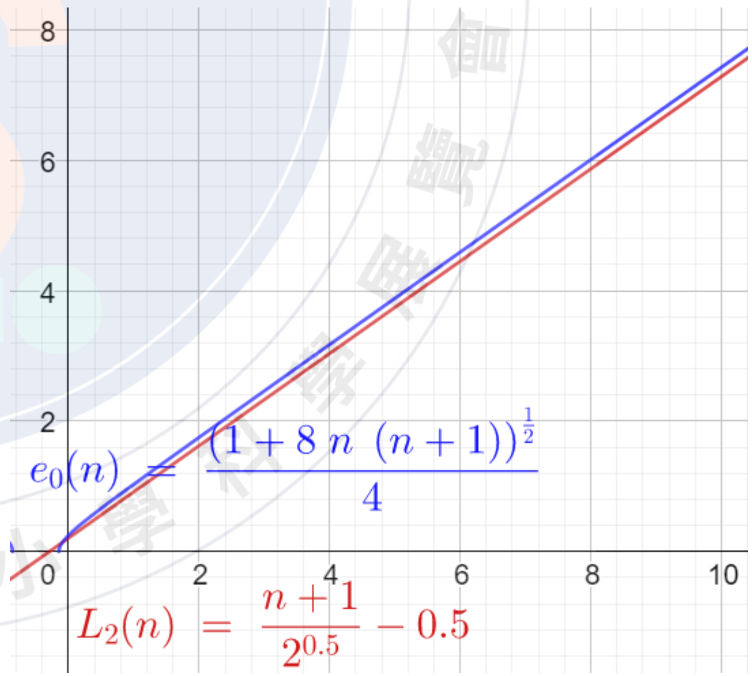
研究一--直角三角形平移法校正

- 使用具兩個最佳切割位置的n來確定誤差量。
  在理想值應為0.25與0.75的位置做計算，發現小數部分趨近於某特定值$t_1 = 0.1035$與$t_2 = 0.6035$，公式與理想具有約$0.1465 \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$的誤差。

$$e(n) = L_2(n) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2n+1}{2\sqrt{2}}$$

- 原因：

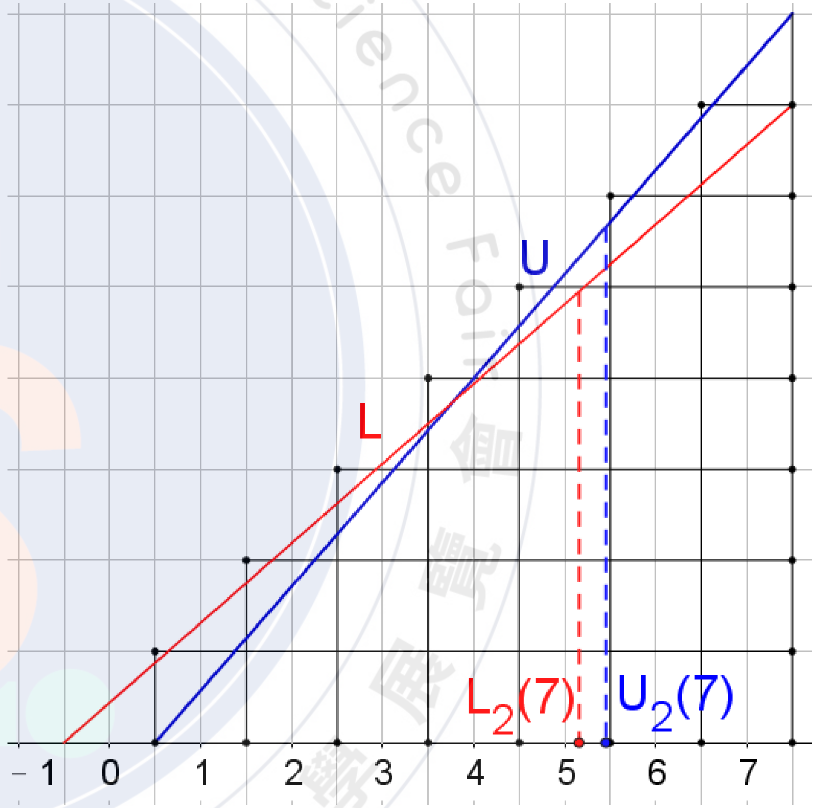




研究一-上下界逼近法

- 畫出U、L兩斜直線
  並作兩三角形之面積分割線，
  與x軸分別交於$U_2(n)$、$L_2(n)$
- U高估右面積；L高估左面積
  因此理想值$e(n)$滿足
  $U_2(n) > e(n) > L_2(n)$。
- 上下界逼近法公式：

$e(n) = \frac{1}{2}(U_2(n) + L_2(n)) = \frac{2n+1}{2\sqrt{2}}$　（在n相當大時）

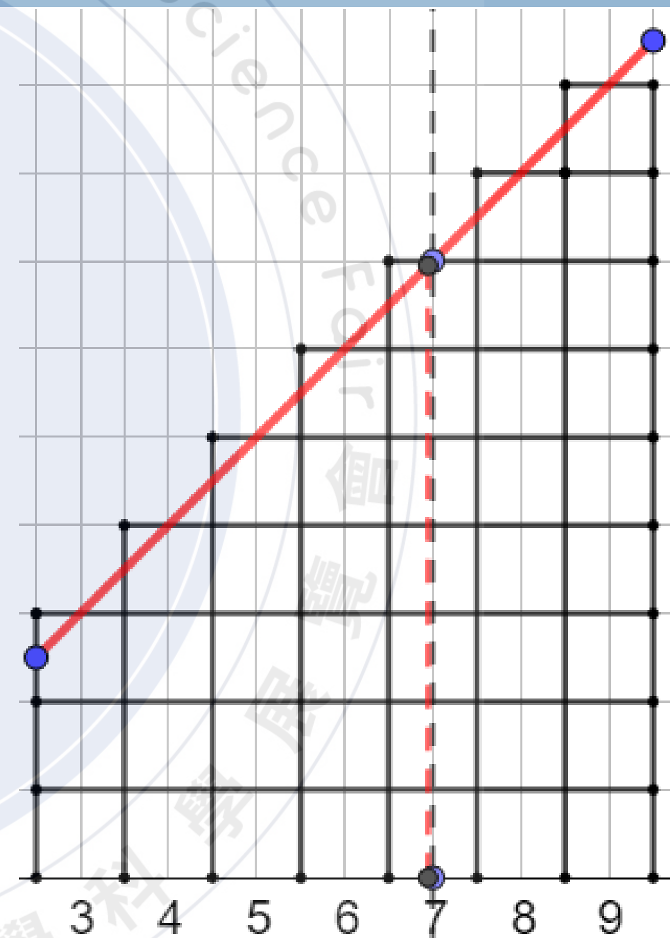


研究二-兩人分金幣(m~n)

- 更好的模擬方式(如右圖)
- 優點：
  (1) 面積仍相同
  (2) 計算更簡單
  (3) 與正確值有重疊的可能
- 結果：
- $\mathrm{k}(m,n)=\frac{1-2\mathrm{m}+\sqrt{2m^2-2m+2n+2n^2+1}}{2}=p+\alpha$

$(p\in\mathbb{N}$，且$0\le\alpha<1)$

$$\begin{cases} 0\le\alpha<0.25\text{時，將第}p\text{袋平分} \\ 0.25<\alpha<0.75\text{ 時，切在}p\text{與}p+1\text{之間} \\ 0.75<\alpha<1\text{ 時，將第}p+1\text{袋平分} \end{cases}$$



若$\alpha=0.25$，則"將第p袋平分" 與 "切在p與$p+1$之間"
若$\alpha=0.75$，則"切在p與$p+1$之間" 與 "將第$p+1$袋平分"　均為最佳平分解！

兩人分金幣恰平分解之五大發現

- 使用研究二結果，找出所有m、n能被平分的點

等差組解
公差5
公差29
公差169
公差985

m	n	實驗切點
2	5	4
2	10	7.5
2	15	11
2	32	23
2	61	43.5
2	90	64
2	189	134
2	358	253.5
2	527	373
2	1104	781
2	2089	1477.5
2	3074	2174

m	n	實驗切點
3	12	9
3	17	12.5
3	22	16
3	73	52
3	102	72.5
3	131	93
3	428	303
3	597	422.5
3	766	542
3	2497	1766
3	3482	2462.5
3	4467	3159

m	n	實驗切點
4	8	6.5
4	11	8.5
4	19	14
4	24	17.5
4	29	21
4	51	36.5
4	68	48.5
4	114	81
4	143	101.5
4	172	122
4	300	212.5
4	399	282.5
4	667	472
4	836	591.5
4	1005	711
4	1751	1238.5
4	2328	1646.5
4	3890	2751
4	4875	3447.5
4	5860	4144

m	n	實驗切點
5	26	19
5	31	22.5
5	36	26
5	155	110
5	184	130.5
5	213	151
5	906	641
5	1075	760.5
5	1244	880
5	5283	3736
5	6268	4432.5
5	7253	5129

m	n	實驗切點
6	11	9
6	20	15
6	33	24
6	38	27.5
6	43	31
6	70	50
6	121	86
6	196	139
6	225	159.5
6	254	180
6	411	291
6	708	501
6	1145	810
6	1314	929.5
6	1483	1049
6	2398	1696
6	4129	2920
6	6676	4721
6	7661	5417.5
6	8646	6114

公差3.5
公差20.5
公差119.5
公差696.5

① 固定m值，均存在三個一組之等差組解

② 公差數列均滿足遞迴關係式

$$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$$

兩人分金幣恰平分解之五大發現

m	n	實驗切點
2	5	4
2	10	7.5
2	15	11
2	32	23
2	61	43.5
2	90	64
2	189	134
2	358	253.5
2	527	373
2	1104	781
2	2089	1477.5
2	3074	2174

組間距17

組間距99

組間距577

m	n	實驗切點
3	12	9
3	17	12.5
3	22	16
3	73	52
3	102	72.5
3	131	93
3	428	303
3	597	422.5
3	766	542
3	2497	1766
3	3482	2462.5
3	4467	3159

m	n	實驗切點
4	8	6.5
4	11	8.5
4	19	14
4	24	17.5
4	29	21
4	51	36.5
4	68	48.5
4	114	81
4	143	101.5
4	172	122
4	300	212.5
4	399	282.5
4	667	472
4	836	591.5
4	1005	711
4	1751	1238.5
4	2328	1646.5
4	3890	2751
4	4875	3447.5
4	5860	4144

m	n	實驗切點
5	26	19
5	31	22.5
5	36	26
5	155	110
5	184	130.5
5	213	151
5	906	641
5	1075	760.5
5	1244	880
5	5283	3736
5	6268	4432.5
5	7253	5129

m	n	實驗切點
6	11	9
6	20	15
6	33	24
6	38	27.5
6	43	31
6	70	50
6	121	86
6	196	139
6	225	159.5
6	254	180
6	411	291
6	708	501
6	1145	810
6	1314	929.5
6	1483	1049
6	2398	1696
6	4129	2920
6	6676	4721
6	7661	5417.5
6	8646	6114

組間距108

組間距630

組間距3672

③ 固定m值，等差組解之間的距離滿足遞迴關係式$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$

兩人分金幣恰平分解之五大發現

m	n	實驗切點
2	5	4
2	10	7.5
2	15	11
2	32	23
2	61	43.5
2	90	64
2	189	134
2	358	253.5
2	527	373
2	1104	781
2	2089	1477.5
2	3074	2174

7

41

239

1393

m	n	實驗切點
3	12	9
3	17	12.5
3	22	16
3	73	52
3	102	72.5
3	131	93
3	428	303
3	597	422.5
3	766	542
3	2497	1766
3	3482	2462.5
3	4467	3159

7

41

239

1393

m	n	實驗切點
4	8	6.5
4	11	8.5
4	19	14
4	24	17.5
4	29	21
4	51	36.5
4	68	48.5
4	114	81
4	143	101.5
4	172	122
4	300	212.5
4	399	282.5
4	667	472
4	836	591.5
4	1005	711
4	1751	1238.5
4	2328	1646.5
4	3890	2751
4	4875	3447.5
4	5860	4144

7

41

239

1393

m	n	實驗切點
5	26	19
5	31	22.5
5	36	26
5	155	110
5	184	130.5
5	213	151
5	906	641
5	1075	760.5
5	1244	880
5	5283	3736
5	6268	4432.5
5	7253	5129

7

41

239

1393

m	n	實驗切點	
6	11	9	6
6	20	15	
6	33	24	
6	38	27.5	
6	43	31	
6	70	50	36
6	121	86	
6	196	139	
6	225	159.5	
6	254	180	
6	411	291	210
6	708	501	
6	1145	810	
6	1314	929.5	
6	1483	1049	
6	2398	1696	1224
6	4129	2920	
6	6676	4721	
6	7661	5417.5	
6	8646	6114	

④改變m值，各等差組解間距相同，此間距亦滿足關係式$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$

⑤有非等差組解交錯其中，其組內間距亦滿足關係式$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$

研究三-三人分金幣(m~n)

- 第一分割點公式：

$$D_1(m,n)=\frac{\sqrt{24m^2-24m+12n+12n^2+9}}{6}=p_1+\alpha_1$$

$(p_1\in\mathbb{N}$，且$0\le\alpha_1<1)$

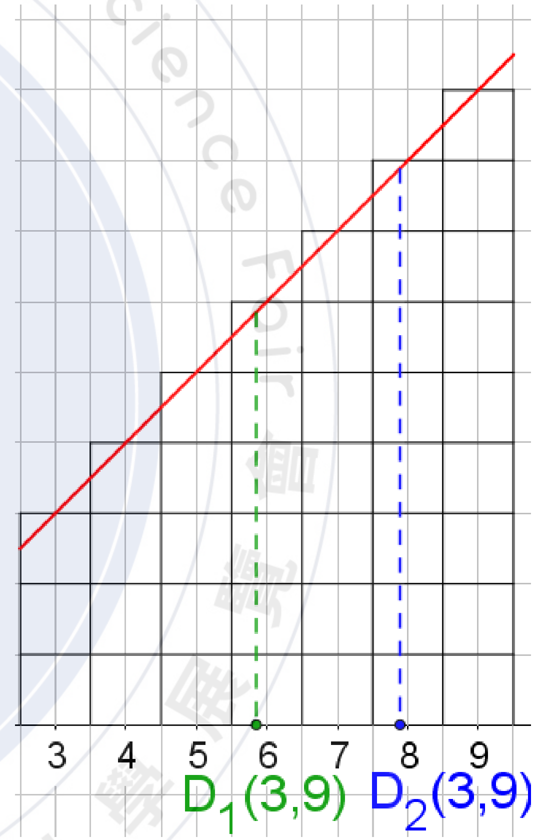
- 第二分割點公式：

$$D_2(m,n)=\frac{\sqrt{12m^2-12m+24n+24n^2+9}}{6}=p_2+\alpha_2$$

$(p_2\in\mathbb{N}$，且$0\le\alpha_2<1)$

- 使用α來判斷分割點：

$$\begin{cases}0\le\alpha<0.25\text{時，將第}p\text{袋平分}\\0.25<\alpha<0.75\text{ 時，切在}p\text{與}p+1\text{之間}\\0.75<\alpha<1\text{ 時，將第}p+1\text{袋平分}\end{cases}$$



若$\alpha=0.25$，

則"將第p袋平分" 與 "切在p與$p+1$之間"

若$\alpha=0.75$，

則"切在p與$p+1$之間" 與 "將第$p+1$袋平分" 均為最佳平分解！

◆ 參考資料：1. 游森棚(2017)森棚教官的數學題，科學研習月刊56-9期

2.「金金計較」第58屆全國中小學科學展覽國中組數學科參展作品