中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030421

兩相異直線均分三角形與四邊形的面積

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳暘誼 國二 陳紀昀	蕭偉智

關鍵詞：Quadrisection Problem、四等分面積、共角定理

摘要

本研究推廣古老的數學問題「Quadrisection Problem」，2018 年 Carl Eberhart 曾針對此問題進行探討，給出兩條垂直線將任意 $\triangle ABC$ 的面積四等分的解。

我們沒有設定兩相異直線必須垂直。由於兩相異直線至少將任意三角形分割成三塊區域，至多分割成四塊區域，所以我們先探討兩直線三等分三角形，再繼續研究四等分三角形，最後給出完整分割的圖樣與方法，並且給出四等分面積的充要條件。第二，我們繼續推廣到任意凸四邊形與凹四邊形，證明了對於所有凸四邊形與凹四邊形必存在四等分面積的分割方法，這是本研究的亮點之處。本研究雖僅使用了初等幾何工具，但是簡潔地找出豐富的性質並且完整解決了兩相異直線均分任意三角形以及四等分任意凸四邊形與凹四邊形的面積之問題。

壹、 研究背景

2018 年，Carl Eberhart 發表了一篇文章〈Revisiting the Quadrisection Problem of Jacob Bernoulli〉[1]，該論文提及 Leonhard Euler 在 1779 年提出了兩相異垂直的直線將非等腰的 $\triangle ABC$ 的面積四等分的結果，這個問題又稱為「Quadrisection Problem」。

如下圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{CA} > \overline{BC} > \overline{AB}$，Euler 僅證明了在任意 $\triangle ABC$ 都有一種 Quadrisection，其中四等分中的 $\triangle PGE$ 落在 $\triangle ABC$ 的中間長度的邊 $\overline{BC}$ 上，Euler 證明了 Quadrisection 的存在性，但是沒有說明是否惟一。此外，Euler 也沒有說明 $\triangle PGE$ 必須要在中間長度的邊 $\overline{BC}$ 上。

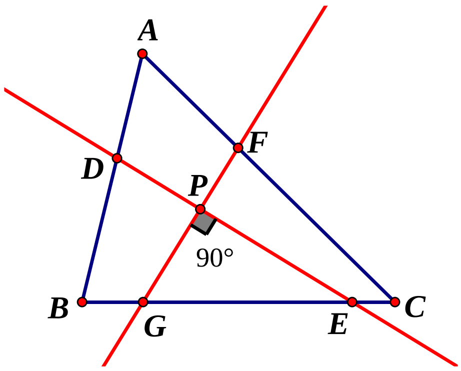


圖 1：Quadrisection Problem。

Carl Eberhart 利用直角坐標與反演變換，進一步將這個問題給出完整的說明，他證明 $\triangle PGE$ 可以在最短邊 $\overline{AB}$ 上，但是不可能在最長邊 $\overline{AC}$ 上。Carl Eberhart 將 $\triangle ABC$ 刻劃為三類：（1）恰有一種 Quadrisection 的三角形；（2）恰有兩種 Quadrisection 的三角形；（3）恰有三種 Quadrisection 的三角形[1]。

貳、 研究目的

本研究將「Quadrisection Problem」進行推廣，我們不限定兩相異直線必須垂直，我們完整探討兩相異直線「三等分」以及「四等分」任意三角形的面積的情形，最後推廣到兩相異直線「四等分」任意四邊形形的面積的方法。我們有以下目的：

研究目的一：刻劃兩相異直線三等分任意三角形的面積之圖樣。

研究目的二：刻劃兩相異直線四等分任意三角形的面積之圖樣。

研究目的三：推廣兩相異直線四等分任意凸四邊形的面積之方法。

研究目的四：推廣兩相異直線四等分任意凹四邊形的面積之方法。

本研究的亮點在於，我們僅使用了初等幾何工具：共角定理、孟氏定理，而完整解決了兩相異直線均分三角形的面積的劃分；此外，我們利用四等分三角形的面積的方法，推廣到兩相異直線四等分凸四邊形與凹四邊形的面積，並且進一步證明對於所有任意凸四邊形與凹四邊形皆存在此分割方法。

參、 研究設備及器材

一、 軟體：幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0

二、 網站：WolframAlpha

肆、 預備知識

一、 共角定理

平面上有 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$，若 $\angle A=\angle D$，則 $\triangle ABC:\triangle DEF=\overline{AB}\times\overline{AC}:\overline{DE}\times\overline{DF}$。

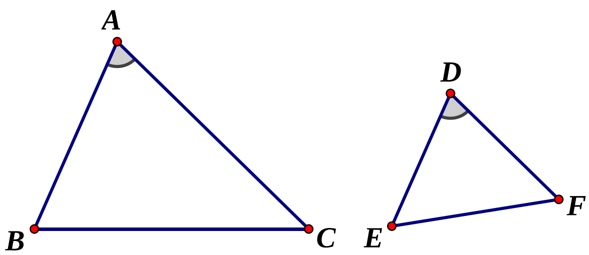


圖 2：共角三角形。

二、 孟氏定理（Menelaus' theorem）[2]

平面上 $\triangle ABC$ 中，點 P_A、P_B、P_C 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 邊上或延長線上的一點（兩點在延長線上且一點在邊上／三點都在延長線上）。若點 P_A、P_B、P_C 三點共線，若且唯若 $\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}}\times\frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}}=1$。

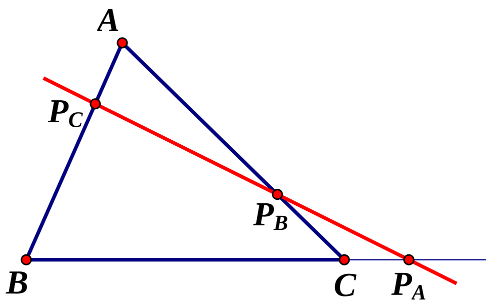


圖 3：孟氏定理。

伍、 研究過程與結果

本研究探討兩相異直線「三等分」以及「四等分」三角形的面積的情形。

以下我們先做初步分割圖樣之分類。

一、 兩條直線分割三角形成 3 個區域的所有圖樣

我們討論兩條直線分割 $\triangle ABC$ 為三塊區域的情形，我們利用直線 L 與 M 與三角形各邊（可通過頂點）的相交情形進行分類。假設直線 L 與 M 於 P 點，則

（1）如圖 4-1 到圖 4-3，當 P 點在三角形外部且直線 L 與 M 與邊的交點有 4 個交點時，可得出 3 種分割圖樣；

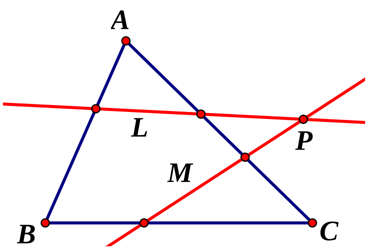


圖 4-1

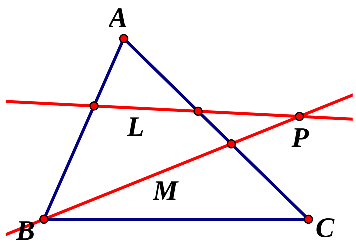


圖 4-2

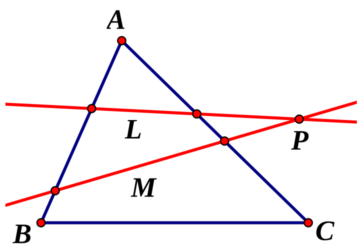


圖 4-3

（2）如圖 4-4 到圖 4-6，當 P 點在三角形邊上時且直線 L 與 M 與邊的交點有 3 個交點，可得出 3 種分割圖樣；

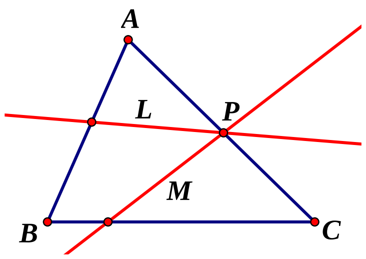


圖 4-4

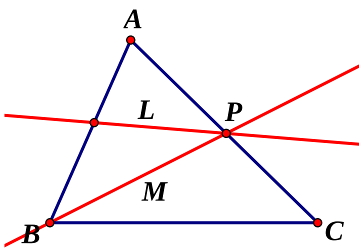


圖 4-5

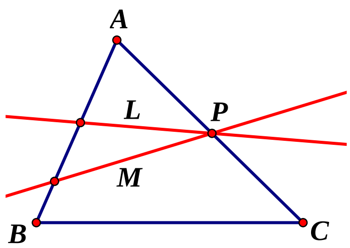


圖 4-6

（3）如圖 4-7，當 P 點在三角形頂點且直線 L 與 M 與邊的交點有 3 個交點，可得出 1 種分割圖樣；

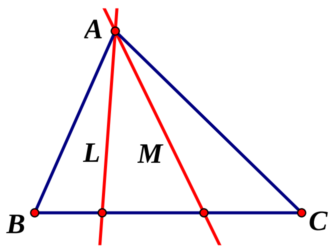


圖 4-7

（4）如圖 4-8 到圖 4-10，當直線 L 與 M 平行且直線 L 與 M 與邊的交點有 4 個交點時時，可得出 3 種分割圖樣。

這四類共計有 10 種，如下圖。

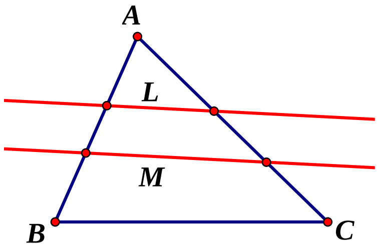


圖 4-8

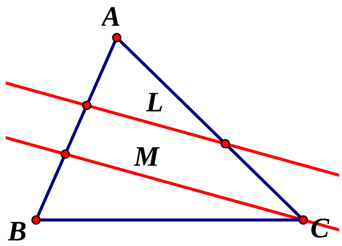


圖 4-9

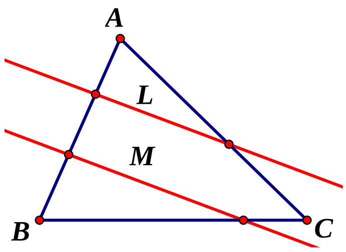


圖 4-10

二、 兩相異直線三等分三角形的面積之研究

我們進入兩相異直線「三等分」三角形的面積之研究，我們會利用到以下兩類工具。

第一類，直線通過三角形的頂點時，我們僅需取此直線與對邊的三分之一等分點（或三分之二等分點）。

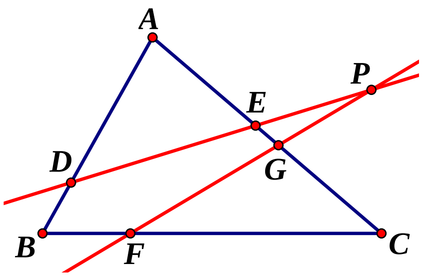
第二類，直線分別交三角形的兩邊有各一點時，我們可利用共角定理作出面積為原三角形三分之一的三角形。

我們證明圖 4-1 到圖 4-10 的十種分割圖樣且又滿足三等分面積是全部都可以做到。

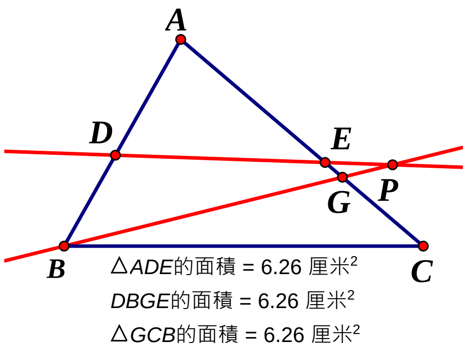
性質 1 兩相異直線的 10 種分割圖樣皆可滿足三等分三角形的面積。

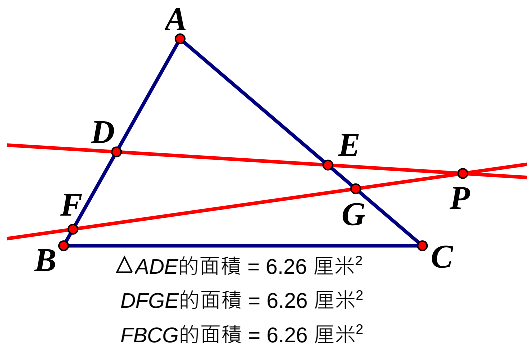
證明：

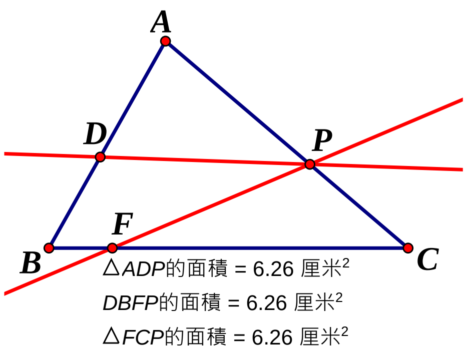
1. 我們將圖 2-1 到圖 2-10 的 10 種分割圖樣分成四類來討論，如何滿足三等分三角形的面積的作圖與證明，我們以下只描述較為困難的進行作圖步驟說明以及證明，其餘較直觀的作圖則記錄在研究日誌內。

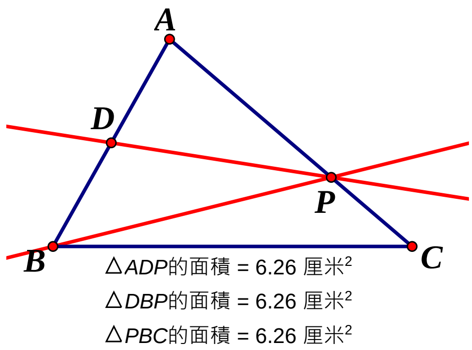
作圖與證明	圖例
(1) 在 $\overline{AB}$ 上任取一點 D，設 $\overline{AD}:\overline{AB}=t:1$，在 $\overline{AC}$ 上取一點 E 滿足 $\overline{AE}:\overline{AC}=\frac{1}{3t}:1$，則依據共角定理得知 $\triangle ADE=\frac{1}{3}\triangle ABC$。同理，相同作法可得 $\triangle CFG=\frac{1}{3}\triangle ABC$。	
(2) 注意到，點 D 落在 $\overline{AB}$ 上，可得 $t<1$；點 E 落在 $\overline{AC}$ 上，可得 $t>\frac{1}{3}$，因此 $\frac{1}{3}<t<1$。	

2. 當 $\overline{AE}+\overline{CG} \leq \overline{AC}$，其交點 P 才會在 $\triangle ABC$ 外部或邊上。我們用上述方法（共角定理）可得出圖 4-2 到圖 4-6 的三等分三角形的面積圖樣，依序如下。

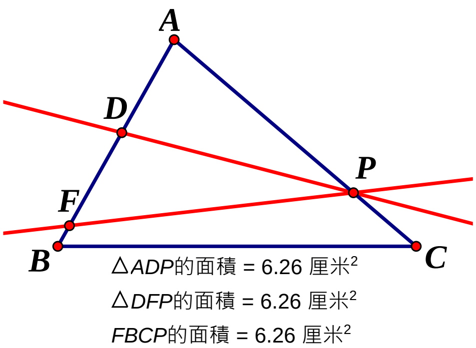




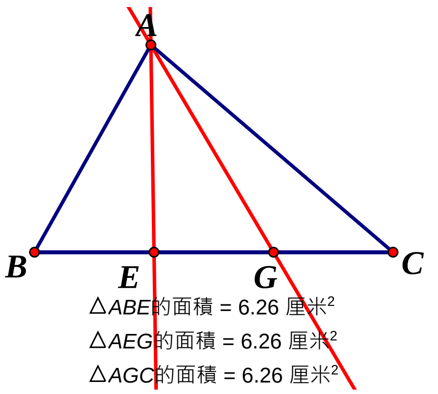




（唯一作圖，$2\overline{CP}=\overline{PA}$、$\overline{AD}=\overline{DB}$）

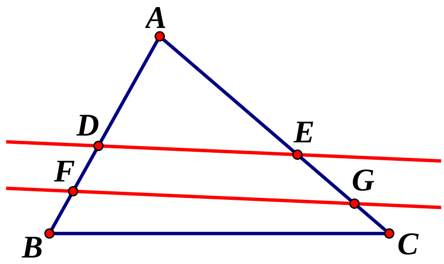


3. 圖 4-7 的分割圖樣，兩條直線都通過頂點 A，所以僅需在 $\overline{BC}$ 邊上取三等分點即可。

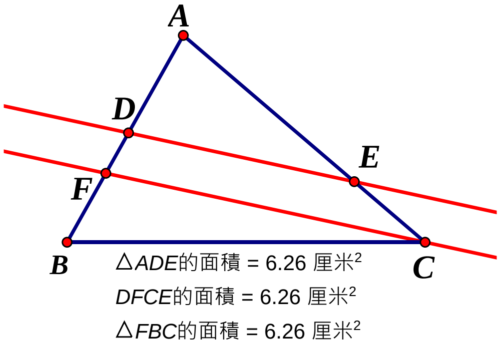


（唯一作圖）

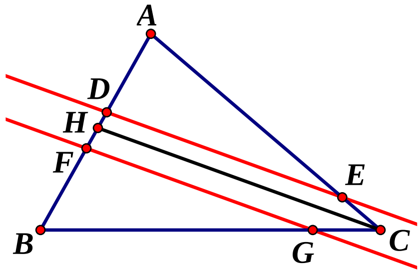
4. 圖 2-8 的分割圖樣（平行）

作圖與證明	圖例
作圖 (1) 在 $\overline{AB}$ 上任取一點 D ，設 $\overline{AD}:\overline{AB}=t:1$，在 $\overline{AC}$ 上取一點 E 滿足 $\overline{AE}:\overline{AC}=\frac{1}{3t}:1$。 (2) 在 $\overline{AB}$ 上取一點 F，滿足 $\overline{AF}:\overline{AB}=\sqrt{2}t:1$，在 $\overline{AC}$ 上取一點 G，滿足 $\overline{AG}:\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{3t}:1$。	
證明 (1) 依據共角定理得知 $\triangle ADE=\frac{1}{3}\triangle ABC$、$\triangle AFG=\frac{2}{3}\triangle ABC$。 (2) 再考慮 $\overline{AD}:\overline{AF}=t:\sqrt{2}t=1:\sqrt{2}$、$\overline{AE}:\overline{AG}=\frac{1}{3t}:\frac{\sqrt{2}}{3t}=1:\sqrt{2}$，所以 $\overline{AD}:\overline{AF}=\overline{AE}:\overline{AG}$，因此 $\overline{DE}\parallel\overline{FG}$。 (3) 注意到，點 D、F 落在 $\overline{AB}$ 上，可得 $t<\frac{1}{\sqrt{2}}$；點 E、G 落在 $\overline{AC}$ 上，可得 $t>\frac{\sqrt{2}}{3}$，因此 $\frac{\sqrt{2}}{3}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$。	

5. 我們用上述相同方法（共角定理與比例線段）可得出圖 4-9 的分割圖樣。



6. 圖 4-10 無法由圖 4-8 直接而得，稍微比較困難，所以我們給出詳細得作圖步驟與證明。

作圖與證明	圖例
作圖 (1) 在 $\overline{AB}$ 上任取一點 D ，設 $\overline{AD}:\overline{AB}=t:1$，在 $\overline{AC}$ 上取一點 E 滿足 $\overline{AE}:\overline{AC}=\frac{1}{3t}:1$。 (2) 在 $\overline{AB}$ 上取一點 F，滿足 $\overline{BF}:\overline{AB}=\sqrt{\frac{1}{3}-t^2}:1$，在 $\overline{BC}$ 上取一點 G，滿足 $\overline{BG}:\overline{BC}=\frac{1}{3\sqrt{\frac{1}{3}-t^2}}:1$，則依據共角定理得知 $\triangle BFG=\frac{1}{3}\triangle ABC$。	
證明 (1) 依據共角定理得知 $\triangle ADE=\frac{1}{3}\triangle ABC$、$\triangle BFG=\frac{1}{3}\triangle ABC$。 (2) 過 C 點作 $\overline{CH}\parallel\overline{DE}$，可得 $\overline{AD}:\overline{AH}=\overline{AE}:\overline{AC}$，$\overline{AD}:\overline{AH}=\frac{1}{3t}:1$，所以 $\overline{AD}:\overline{AH}=t:3t^2=1:3t$。再得 $\overline{BH}:\overline{BA}=(1-3t^2):1$。 (3) 再考慮 $\overline{BF}:\overline{BH}=\sqrt{\frac{1}{3}-t^2}:(1-3t^2)=\frac{\sqrt{3-9t^2}}{3}:(1-3t^2)$，又 $\overline{BG}:\overline{BC}=\frac{1}{3\sqrt{\frac{1}{3}-t^2}}:1=\frac{1}{\sqrt{3-9t^2}}:1=\frac{\sqrt{3-9t^2}}{3}:(1-3t^2)$，因此 $\overline{FG}\parallel\overline{CH}$。綜合可得，三線段 $\overline{DE}\parallel\overline{CH}\parallel\overline{FG}$。 (4) 注意到，點 E 落在 $\overline{AC}$ 上，可得 $t>\frac{1}{3}$；點 G 落在 $\overline{BC}$ 上，可得 $\frac{1}{3\sqrt{\frac{1}{3}-t^2}}<1$，即 $t<\frac{\sqrt{2}}{3}$，因此 $\frac{1}{3}<t<\frac{\sqrt{2}}{3}$。	

■

三、 兩相異直線分割三角形成 4 個區域的所有圖樣

我們再討論兩條直線分割 $\triangle ABC$ 為四塊區域的情形，顯然此時直線 L 與 M 相交一點 P 且 P 點在 $\triangle ABC$ 內部，共有 5 種分割圖樣，如下圖。

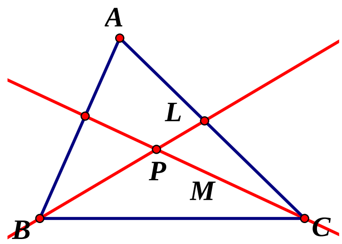


圖 5-1：交點在三角形內部(1)。

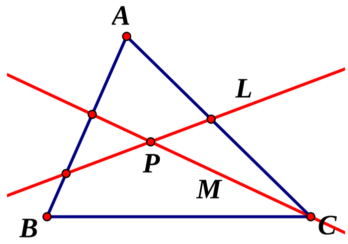


圖 5-2：交點在三角形內部(2)。

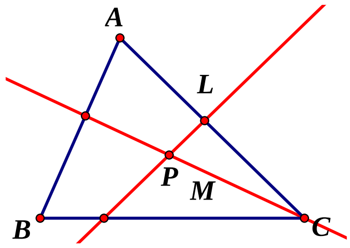


圖 5-3：交點在三角形內部(3)。

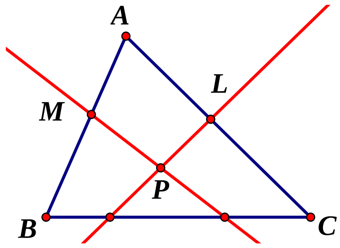


圖 5-4：交點在三角形內部(4)。

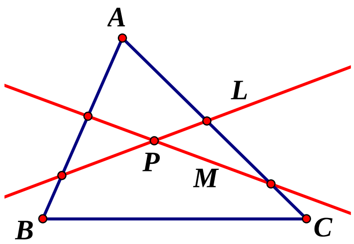


圖 5-5：交點在三角形內部(5)。

四、 兩相異直線四等分三角形的面積之研究

關於兩相異直線四等分三角形的面積，因為分割四個區域並非全部都是三角形，所以相較兩相異直線三等分三角形的面積困難許多，以下我們一一討論兩相異直線四等分三角形的面積的情形。

性質 2 下圖 6 中的兩直線無法四等分三角形的面積。

證明：

如下圖，直線 $\overleftrightarrow{BD}$ 與 $\overleftrightarrow{CE}$ 交於一點 P，令四邊形 $AEPD$ 面積為 x，$\triangle BPC$ 面積為 y，$\triangle BPE$ 面積為 z，$\triangle CPD$ 面積為 w。因為要四等分 $\triangle ABC$ 面積，$x+z=y+w$，所以取 D 為 $\overline{AC}$ 中點，同理取 E 為 $\overline{AB}$ 中點。此時，$\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 P 點，P 點即為 $\triangle ABC$ 的重心。因為 P 點為 $\triangle ABC$ 的重心，可得 $x=y=2w=2z$，因此通過兩頂點的直線無法四等分 $\triangle ABC$ 面積。

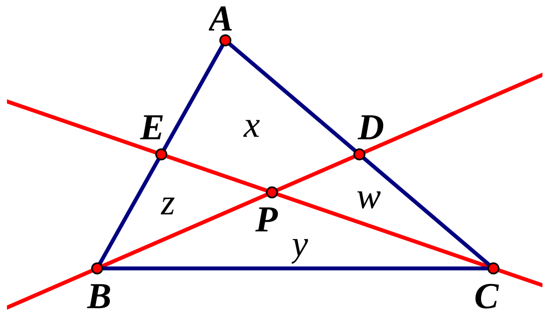


圖 6：無法四等分三角形的面積。

■

性質 3 下圖 7 中的兩直線無法四等分三角形的面積。

證明：

1. 如下圖，直線 $\overleftrightarrow{DC}$ 與 $\overleftrightarrow{EF}$ 交於一點 P，令四邊形 $AEPD$ 面積為 x，四邊形 $FBCP$ 面積為 y，$\triangle DFP$ 面積為 z，$\triangle CPE$ 面積為 w。因為要四等分 $\triangle ABC$ 面積，$x+w=y+z$，所以取 D 為 $\overline{AB}$ 中點。
2. $\triangle CAD$ 中，在 $\overline{AC}$ 上取一點 E，設 $\overline{CE}:\overline{CA}=t:1$，因為 $x=w$，根據共角定理，$\overline{CD}$ 上的點 P 滿足 $\overline{CP}:\overline{CD}=\frac{1}{2t}:1$。同理，$\triangle CAD$ 中，$\overline{DP}:\overline{CD}=\left(1-\frac{1}{2t}\right):1$，因為 $y=z$，根據共角定理，$\overline{AB}$ 上的點 F 滿足 $\overline{DF}:\overline{DB}=\frac{1}{2(1-\frac{1}{2t})}:1=\frac{t}{2t-1}:1$。
3. 因為點 E、P、F 三點共線，在 $\triangle CAD$ 中，根據孟氏定理有
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}\times\frac{\overline{DP}}{\overline{PC}}=1$$
代入可得
$$\frac{t}{1-t}\times\frac{1+\frac{t}{2t-1}}{\frac{t}{2t-1}}\times\frac{1-\frac{1}{2t}}{\frac{1}{2t}}=1$$
化簡可得
$$3t^2-2t=0$$
所以
$$t=\frac{2}{3}\text{ 或 }0\,(\text{不合})$$
4. 將 $t=\frac{2}{3}$ 代回檢驗，$\overline{CE}:\overline{CA}=\frac{2}{3}:1$、$\overline{CP}:\overline{CD}=\frac{3}{4}:1$、$\overline{DF}:\overline{DB}=2:1$。注意到，因為點

F 須在 $\overline{AB}$ 上，所以 $\overline{DF}:\overline{DB}=2:1$ 與假設矛盾，因此圖 6 中的兩直線無法四等分三角形的面積。

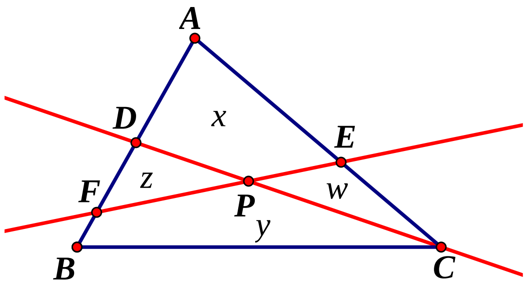


圖 7：無法四等分三角形的面積。

■

性質 4 下圖 8 中的兩直線可四等分三角形的面積。

證明：

1. 如下圖，直線 $\overleftrightarrow{DC}$ 與 $\overleftrightarrow{EF}$ 交於一點 P，令四邊形 $AEPD$ 面積為 x，四邊形 $FBDP$ 面積為 z，$\triangle CPE$ 面積為 w，$\triangle CPF$ 面積為 y。因為要四等分 $\triangle ABC$ 面積，$x+w=y+z$，所以取 D 為 $\overline{AB}$ 中點。
2. $\triangle CAD$ 中，在 $\overline{AC}$ 上取一點 E ，設 $\overline{CE}:\overline{CA}=t:1$，因為 $x=w$，根據共角定理，$\overline{CD}$ 上的點 P 滿足 $\overline{CP}:\overline{CD}=\frac{1}{2t}:1$。同理，$\triangle CAD$ 中，$\overline{CP}:\overline{CD}=\frac{1}{2t}:1$，因為 $y=z$，根據共角定理，$\overline{CB}$ 上的點 F 滿足 $\overline{CF}:\overline{CB}=t:1$，故 $\overline{CE}:\overline{CA}=t:1=\overline{CF}:\overline{CB}$，可得 $\overline{EF}\parallel\overline{AB}$。
3. 因為 $\overline{EF}\parallel\overline{AB}$ 且 $\triangle CEF=\frac{1}{2}\triangle ABC$，所以得 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$。注意到，此圖樣的作圖是唯一。

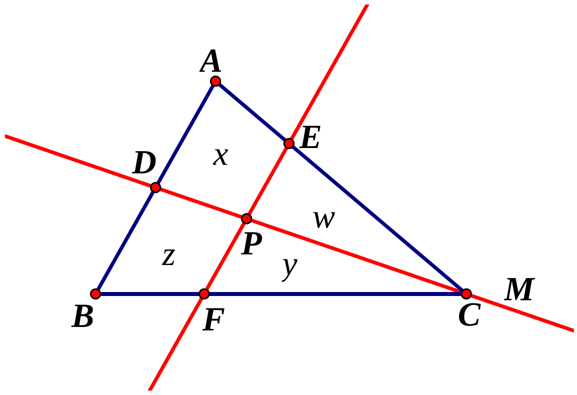


圖 8：兩直線四等分三角形的面積。

■

接下來是兩直線沒有通過 $\triangle ABC$ 的頂點的情形，因為直線沒有通過頂點，讓此圖樣的作圖難度也變高許多。

定理 5 下圖 9 中的兩直線可四等分三角形的面積的充要條件為

$$\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}=\frac{1}{4}$$

其中 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=t$、$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=s$，且 $\frac{1}{2}<s<\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$。

證明：

1. 在 $\triangle ABC$ 中，令 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=t$，因為 $\triangle BDE=\frac{1}{2}\triangle ABC$，所以依據共角定理得 $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=\frac{1}{2t}$。

   同理，令 $\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=s$，則 $\frac{\overline{CG}}{\overline{CB}}=\frac{1}{2s}$，為了求出 $\triangle PGE$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比值，在 $\triangle ABC$ 中，令 $\overleftrightarrow{DE}$ 交 $\overline{AC}$ 延長線於 B' 點，我們先利用孟氏定理求出 $\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}$。

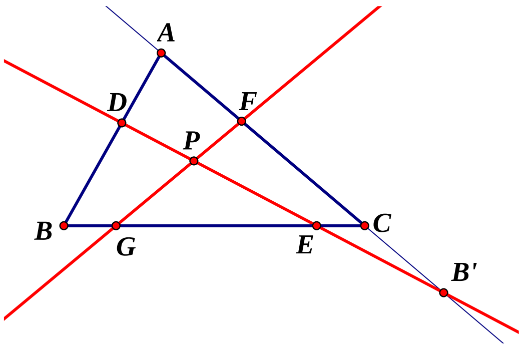


圖 9：兩直線各自平分 $\triangle ABC$ 面積。

   我們有

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=1$$

   代入可得

$$\frac{\frac{1}{2t}}{1-\frac{1}{2t}}\times\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\times\frac{1-t}{t}=1$$

   化簡可得 $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{2t^2-t}{1-t}$，再得出 $\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}=\frac{2t^2-t}{-2t^2+1}$。

2. 在 $\triangle GCF$ 中，根據孟氏定理我們有

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'F}}\times\frac{\overline{FP}}{\overline{PG}}=1$$

代入可得

$$\frac{\frac{1}{2t}+\frac{1}{2s}-1}{1-\frac{1}{2t}}\times\frac{\frac{2t^2-t}{-2t^2+1}}{s+\frac{2t^2-t}{-2t^2+1}}\times\frac{\overline{FP}}{\overline{PG}}=1$$

化簡可得 $\frac{\overline{FP}}{\overline{PG}}=\frac{s(2st^2-s-2t^2+t)}{t(2st-s-t)}$，再得出 $\frac{\overline{GP}}{\overline{GF}}=\frac{t(2st-s-t)}{2s^2t^2-s^2-t^2}$。

3. 再計算 $\triangle PGE$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比值。注意到，$\triangle CGF=\frac{1}{2}\times\triangle ABC$，根據共角定理有

$$\frac{\triangle PGE}{\triangle CGF}=\frac{\overline{GP}\times\overline{GE}}{\overline{GF}\times\overline{GC}}=\frac{t(2st-s-t)}{2s^2t^2-s^2-t^2}\times\frac{\frac{1}{2t}+\frac{1}{2s}-1}{\frac{1}{2s}}$$

化簡得出

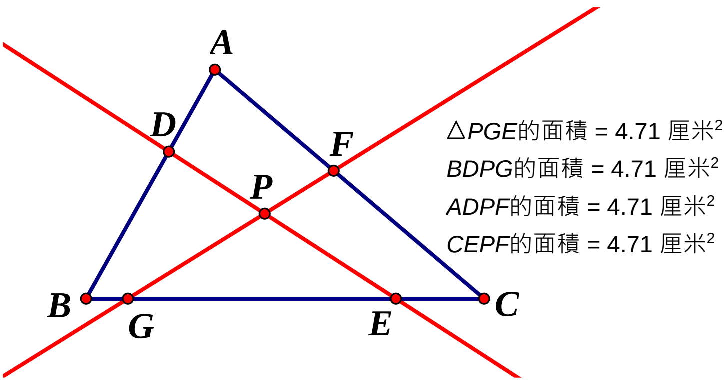
$$\frac{\triangle PGE}{\triangle CGF}=\frac{(-2st+s+t)^2}{-2s^2t^2+s^2+t^2}$$

所以

$$\frac{\triangle PGE}{\triangle ABC}=\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}$$

4. 因為 $\triangle PGE$ 面積等於四邊形 $ADPF$ 面積，且四邊形 $BDPG$ 面積等於四邊形 $CEPF$ 面積，所以 $\triangle PGE=\frac{1}{4}\times\triangle ABC$ 時，$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{FG}$ 即四等分 $\triangle ABC$ 面積，於是我們有兩相異直線四等分三角形的面積的充要條件為

$$\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}=\frac{1}{4} \qquad \text{式 (1)}$$



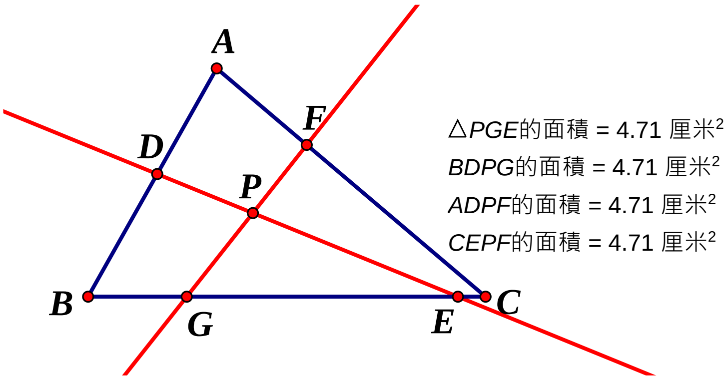


圖10：四等分三角形的面積。

5. 討論實數 t、s 的範圍，因為直線 $\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{FG}$ 平分 $\triangle ABC$ 面積，且四點都必須落在三角形邊上，所以我們可得 $t > \frac{1}{2}$、$s > \frac{1}{2}$。再利用 Wolfram Alpha 網站化簡式 (1) 可得

$$t = \frac{4s^2 - 2s - s\sqrt{6s^2 - 8s + 3}}{10s^2 - 8s + 1} \text{ 或 } s = \frac{4t^2 - 2t - t\sqrt{6t^2 - 8t + 3}}{10t^2 - 8t + 1}$$

注意到，$6s^2 - 8s + 3$ 恆大於 0 （ $6t^2 - 8t + 3$ 恆大於 0）

情形一：若 $10s^2 - 8s + 1 = 0$ 時，

我們有 $s = \frac{4+\sqrt{6}}{10} \fallingdotseq 0.645$，帶回式 (1) 可得 $t = \frac{2+\sqrt{6}}{8} \fallingdotseq 0.556$。

情形二：若 $10s^2 - 8s + 1 \neq 0$ 時，

將 $s = \frac{1}{2}$ 代回式 (1) 可得 $t = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.707$

綜合兩種情形，故我們可得出 $\frac{1}{2} < s < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$。

■

以上我們發現的定理 5 只考慮了比例，而不是實際長度，因此適用於任意 $\triangle ABC$ 的面積四等分，且其中的一小塊 $\triangle PEG$ 可位於 $\triangle ABC$ 的任何一個邊上。

性質 6 下圖 11 中的兩直線<u>無法</u>四等分三角形的面積。

證明：

1. 如下圖，直線 $\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{FG}$ 交於一點 P，令四邊形 $ADPF$ 面積為 x，$\triangle EPF$ 面積為 y，$\triangle DPG$ 面積為 z，五邊形 $BCEPG$ 面積為 w。因為要四等分 $\triangle ABC$ 面積，可得 $x + y = z + w$，所以令 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = t$，依據共角定理得 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2t}$，其中 $\frac{1}{2} < t < 1$。同理，令 $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = s$，依據共角定理得 $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2s}$，其中 $\frac{1}{2} < s < 1$。

2. 連接 $\overline{DF}$，注意到，$\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = s > \frac{1}{2}$，所以 $\triangle ADF > \triangle DFE$，考慮

$$\triangle ADF + \triangle DFP > \triangle DFE - \triangle DFP$$

即四邊形 $ADPF$ 面積 $>$ $\triangle EPF$ 面積，這與假設矛盾，因此下圖中的兩直線無法四等分三角形的面積。

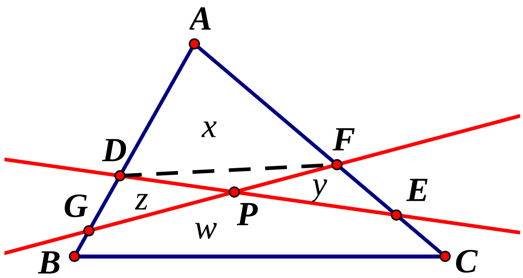
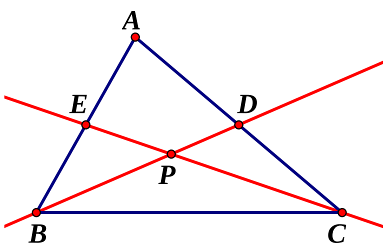
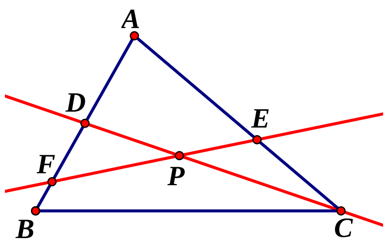
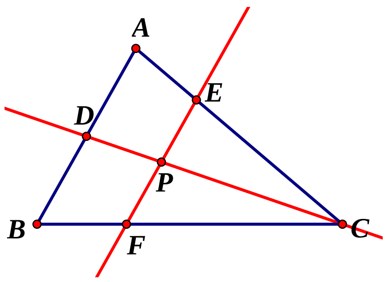
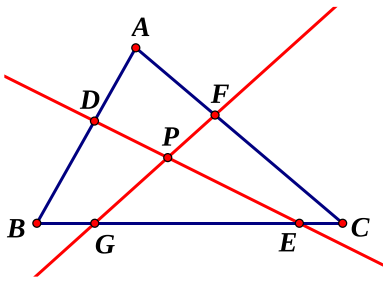
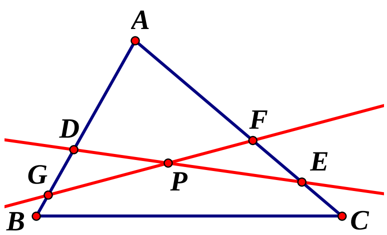


圖 11：無法四等分三角形的面積。

■

我們將兩相異直線是否能四等分三角形的面積的圖樣整理如下表。

表 1：可以與不可四等分三角形的面積的圖樣

✗	✗	✓
 無法四等分 $\triangle ABC$ 面積	 無法四等分 $\triangle ABC$ 面積	 可以四等分 $\triangle ABC$ 面積 這是唯一作圖
✓	✗	
 可以四等分 $\triangle ABC$ 面積 非唯一作圖	 無法四等分 $\triangle ABC$ 面積	

五、 四等分三角形的面積圖樣的性質

我們發現四等分三角形的面積中最有趣的是下圖形式，我們接下來深入探究其性質。

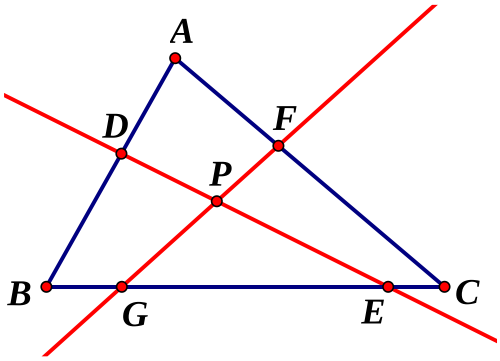


圖 12：四等分三角形的面積的圖樣。

根據性質 5，可知兩直線四等分三角形的面積的充要條件為 $\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}=\frac{1}{4}$，其中 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=t$、$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=s$。我們好奇 $t=s$，即 $\overline{DF}\parallel\overline{BC}$ 時，其圖樣是否有解呢？有多少解呢？

性質 7 當 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}$ 時，四等分三角形的面積的圖樣僅有唯一解。

證明： 將 $s=t$ 代入 $\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}=\frac{1}{4}$，可得 $\frac{\left(-s^2+s\right)^2}{-s^4+s^2}=\frac{1}{4}$，化簡再得 $5s^4-8s^3+3s^2=0$，又 $s^2\neq 0$，再得 $5s^2-8s+3=0$，所以 $s=\frac{3}{5}$ 或 1 (不合)。因此我們得知四等分三角形的面積的圖樣僅有唯一解。

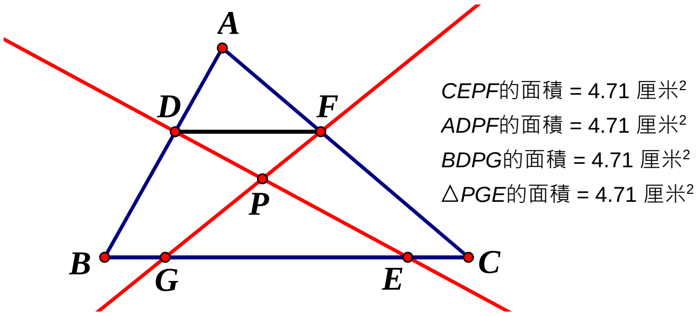
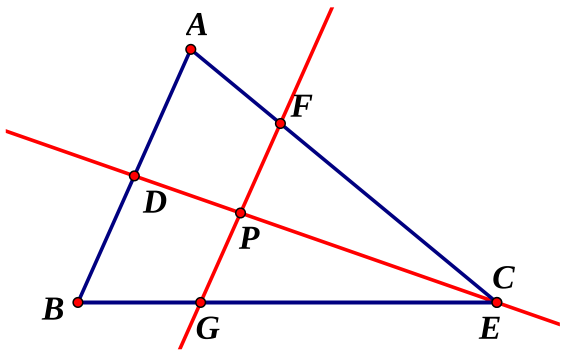


圖13：$t=s$ 時，四等分三角形的面積。

■

發現 8 兩直線四等分三角形的面積時，其交點 P 的軌跡不是線段。

證明： 利用幾何畫板 The Geometer's Sketchpad，設定 t 值從 $\frac{1}{2}$ 連續到 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 時，繪出交點 P 的軌跡，下圖可發現 P 的軌跡不是線段。



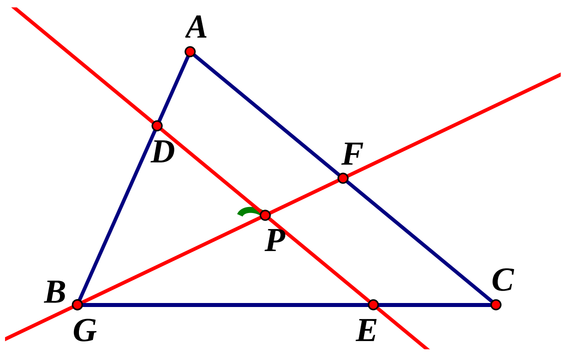


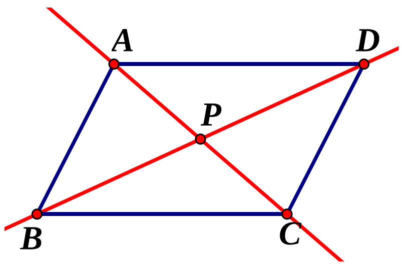
圖14：交點 P 的軌跡。

■

陸、 向任意凸四邊形與凹四邊形推廣

一、 從三角形推廣到任意凸四邊形

前面一節我們完整給出了兩相異直線均分三角形的面積的所有解。接下來我們要挑戰凸四邊形 $ABCD$，由於四等分平行四邊形的面積非常容易，兩條對角線即所求，也可以過兩條對角線交點 P 分別做平行兩鄰邊的直線即為所求，如下圖。



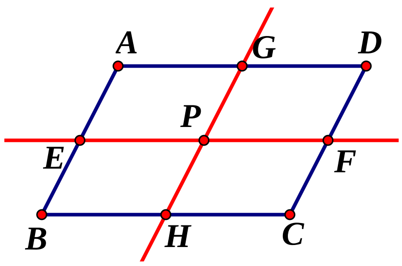


圖15：四等分平行四邊形的面積。

我們要討論的是難度較高的非平行四邊形的凸四邊形 $ABCD$，我們假設兩相異直線相交於凸四邊形 $ABCD$ 內部，兩直線將凸四邊形 $ABCD$ 分割為 1 個五邊形、2 個四邊形、1 個三角形的圖樣，且四個區域的面積相同，如下圖。

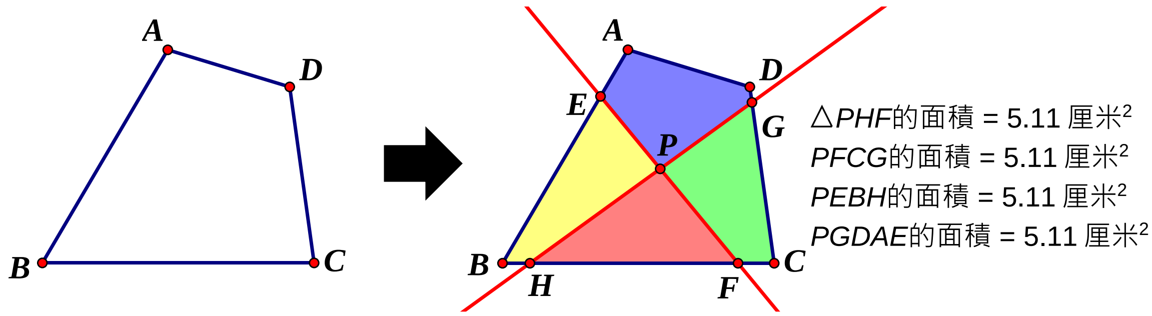


圖16：四等分凸四邊形的面積。

討論與分析

我們的想法是要利用三角形的結果來做推廣，這也是本研究的創意之處！

考慮將邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 延長交於 Y 點，如下圖。

不失一般性，令五邊形 $PGDAE$ 的面積=四邊形 $PEBH$ 的面積=四邊形 $PFCG$ 的面積=$\triangle PHF$ 的面積$=1$，$\triangle YAD$ 的面積$=\lambda$，其中 λ 為大於 0 的實數。

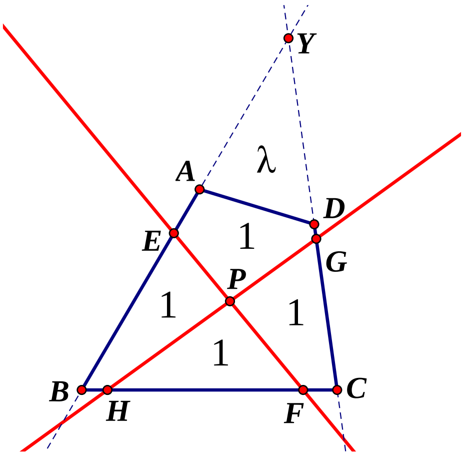


圖 17：將凸四邊形補成三角形。

我們的方法是，在 $\triangle YBC$ 中，

步驟一：$\overleftrightarrow{EF}$ 分割 $\triangle YBC$，使得 $\triangle BEF : \triangle YBC = 2 : (\lambda+4)$；

步驟二：$\overleftrightarrow{GH}$ 分割 $\triangle YBC$，使得 $\triangle CGH : \triangle YBC = 2 : (\lambda+4)$；

步驟三：令 $\overleftrightarrow{EF}$ 與 $\overleftrightarrow{GH}$ 交於 P 點，且 P 在凸四邊形 $ABCD$ 內部。

步驟四：最後再找出 $\triangle PHF : \triangle YBC = 1 : (\lambda+4)$ 的充要條件即可。

注意到，給定任意凸四邊形 $ABCD$ 之後，則 $\triangle YAD$ 的面積$=\lambda$ 是已知常數。所以關鍵之處是給出 $\triangle PHF : \triangle YBC = 1 : (\lambda+4)$ 的充要條件，以下是我們的證明。

如圖 18，給定非平行四邊形的凸四邊形 $ABCD$，其中將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 延長交於 Y 點。

定理 9 下圖 18 中的兩相異直線可四等分凸四邊形的面積的充要條件為

$$\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-(\lambda+4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$

其中 $\frac{\overline{BE}}{\overline{BY}}=t$、$\frac{\overline{CG}}{\overline{CY}}=s$、$\lambda=\frac{4\times\triangle YAD}{\text{凸四邊形 } ABCD}$。

證明：

1. 在 $\triangle YBC$ 中，令 $\frac{\overline{BE}}{\overline{BY}} = t$，因為 $\triangle BEF = \frac{2}{\lambda+4} \triangle YBC$，所以依據共角定理得 $\frac{\overline{BE}}{\overline{BY}} = \frac{1}{\frac{\lambda+4}{2}\times t}$。同理，令 $\frac{\overline{CG}}{\overline{CY}} = s$，則 $\frac{\overline{CH}}{\overline{CB}} = \frac{1}{\frac{\lambda+4}{2}\times s}$，為了求出 $\triangle PHF$ 與 $\triangle YBC$ 的面積比值，在 $\triangle YBC$ 中，令 $\overleftrightarrow{EF}$ 交 $\overline{CD}$ 延長線於 B' 點，我們先利用孟氏定理求出 $\frac{\overline{CB'}}{\overline{CY}}$。

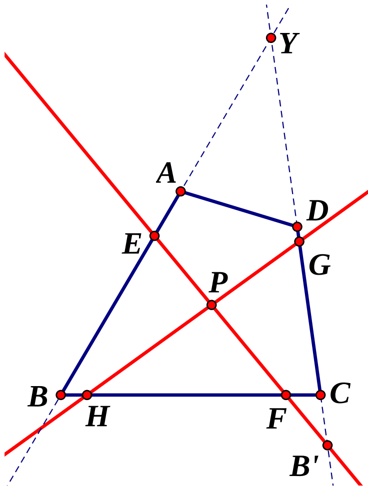


圖 18：兩相異直線分割 $\triangle YBC$。

我們有

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'Y}} \times \frac{\overline{YE}}{\overline{EB}} = 1$$

化簡可得 $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'Y}} = \frac{\frac{\lambda+4}{2}\times t^2 - t}{1-t}$，再得出 $\frac{\overline{CB'}}{\overline{CY}} = \frac{\frac{\lambda+4}{2}\times t^2 - t}{-\frac{\lambda+4}{2}\times t^2 + 1} = \frac{t(\lambda t + 4t - 2)}{-\lambda t^2 - 4t^2 + 2}$

2. 在 $\triangle GCH$ 中，根據孟氏定理我們有

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'G}} \times \frac{\overline{GP}}{\overline{PH}} = 1$$

化簡可得 $\frac{\overline{GP}}{\overline{PH}} = \frac{s(-(\lambda+4)st^2 + 2s + \lambda t^2 + 4t^2 - 2t)}{t(-(\lambda+4)st + 2s + 2t)}$，再得出 $\frac{\overline{HP}}{\overline{HG}} = \frac{t(-(\lambda+4)st + 2s + 2t)}{-(\lambda+4)s^2t^2 + 2s^2 + 2t^2}$

3. 再計算 $\triangle PHF$ 與 $\triangle YBC$ 的面積比值。注意到，$\triangle CGH = \frac{2}{\lambda+4} \times \triangle YBC$，根據共角定理有

$$\frac{\triangle PHF}{\triangle CGH} = \frac{\overline{HP} \times \overline{HF}}{\overline{HG} \times \overline{HC}} = \frac{t(-(\lambda+4)st + 2s + 2t)}{-(\lambda+4)s^2t^2 + 2s^2 + 2t^2} \times \frac{\frac{1}{\frac{\lambda+4}{2}\times t} + \frac{1}{\frac{\lambda+4}{2}\times s} - 1}{\frac{1}{\frac{\lambda+4}{2}\times s}}$$

化簡得出

$$\frac{\triangle PHF}{\triangle CGH}=\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{2(-(\lambda+4)s^2t^2+2s^2+2t^2)}$$

所以

$$\frac{\triangle PHF}{\triangle YBC}=\frac{\triangle PHF}{\triangle CGH}\times\frac{2}{\lambda+4}=\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-(\lambda+4)^2s^2t^2+2(\lambda+4)s^2+2(\lambda+4)t^2} \qquad \text{式 (2)}$$

4. 因為五邊形 $PGDAE$ 的面積=四邊形 $PEBH$ 的面積=四邊形 $PFCG$ 的面積=$\triangle PHF$ 的面積= 1，$\triangle YAD$ 的面積= λ，所以 $\triangle PHF=\frac{1}{\lambda+4}\times\triangle YBC$ 時，$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{GH}$ 即四等分凸四邊形 $ABCD$ 面積，於是我們有兩相異直線四等分凸四邊形的面積的充要條件為

$$\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-(\lambda+4)^2s^2t^2+2(\lambda+4)s^2+2(\lambda+4)t^2}=\frac{1}{\lambda+4}$$

化簡

$$\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-(\lambda+4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1 \qquad \text{式 (3)}$$

化簡再得

$$(\lambda^2+9\lambda+20)s^2t^2+(-4\lambda-16)\,s^2t+(-4\lambda-16)\,st^2+8st+2\,s^2+2\,t^2=0 \qquad \text{式 (4)}$$

我們利用 Wolfram Alpha 網站化簡式 (4) 可得

$$t=\frac{2(\lambda+4)s^2-4s-s\sqrt{2\left((\lambda^2+7\lambda+12)s^2-4(\lambda+4)s+6\right)}}{(\lambda^2+9\lambda+20)s^2-4(\lambda+4)s+2}$$

或

$$s=\frac{2(\lambda+4)t^2-4t-t\sqrt{2\left((\lambda^2+7\lambda+12)t^2-4(\lambda+4)t+6\right)}}{(\lambda^2+9\lambda+20)t^2-4(\lambda+4)t+2}$$

注意到，因為 t 與 s 為實數，所以 $(\lambda^2+7\lambda+12)s^2-4(\lambda+4)s+6$ 恆大於 0。

■

利用定理 9，我們模擬幾個不同的凸四邊形的四等分情形，如下圖。我們發現這四個圖形皆可成功，因此我們開始著手證明「對於所有非平行四邊形的凸四邊形

$ABCD$，存在兩相異直線將凸四邊形 $ABCD$ 分割為 1 個五邊形、2 個四邊形、1 個三角形的圖樣，且四個區域的面積相同」。

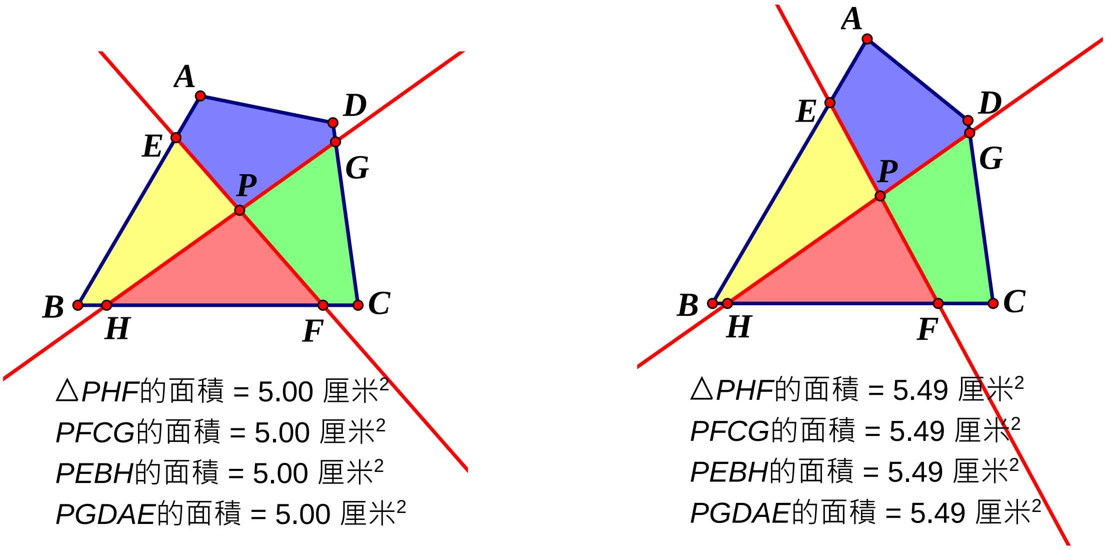


圖 19：不同的凸四邊形進行面積四等分。

二、 四等分四邊形的面積的方法適用於所有凸四邊形

前述均分任意凸四邊形 $ABCD$ 面積的原理方法如下：我們先在 $\overline{AB}$ 取一點 E，作出 $\overleftrightarrow{EF}$ 使得 $\triangle BEF$ 面積為凸四邊形 $ABCD$ 面積的一半，且 F 點必須落在 $\overline{BC}$ 上，即 $0 < \frac{2}{(\lambda+4)t} \le 1$，此時因為點 E 給定，所以 G 點亦被決定，但是 G 點必須要在 $\overline{CD}$ 上，同樣地，$\overleftrightarrow{GH}$ 使得 $\triangle CGH$ 面積為凸四邊形 $ABCD$ 面積的一半，且 H 點必須落在 $\overline{BC}$ 上，即 $0 < \frac{2}{(\lambda+4)s} \le 1$。最後才是考慮滿足 $\triangle PHF$ 為凸四邊形 $ABCD$ 面積的四分之一。

因此，對於任意凸四邊形 $ABCD$ 來說，我們必須確定至少存在一個點 E，使得 F 點和 H 點必須落在 $\overline{BC}$ 上，同時 G 點必須要在 $\overline{CD}$ 上。以下是我們將給出相關證明，這是本研究的亮點與重要貢獻。我們先需要引入常見對於凸四邊形的面積平分線的作法。

性質 10 給定任意凸四邊形 $ABCD$，分別通過對角頂點的面積平分線 $\overline{AK}$ 與 $\overline{CJ}$ 的作法為取對角線 $\overline{BD}$ 的中點 M，再過點 M 作 $\overline{AC}$ 的平行線，交凸四邊形 $ABCD$ 的邊於 J 點和 K 點，則 $\overline{AK}$ 與 $\overline{CJ}$ 即為所求。

證明：

因為 M 為中點，所以 $\triangle ABM = \triangle ADM$ 且 $\triangle CBM = \triangle CDM$，得 $\triangle ABM + \triangle CBM$ 的面積等於凸四邊形 $ABCD$ 面積的一半。又因為 $\overline{JK} \parallel \overline{AC}$，$\triangle AMK = \triangle CMK$（同底等高），因此 $\triangle ABK = \triangle ABM + \triangle CBM$，所以 $\overline{AK}$ 是任意凸四邊形 $ABCD$ 的面積平分線。同理，$\overline{CJ}$ 也是凸四邊形 $ABCD$ 的面積平分線。

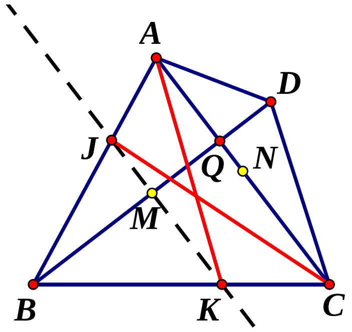


圖 20：面積平分線。

■

如下圖，若在 $\overline{AJ}$ 上任取一點 E，連接 $\overline{EK}$，再過 A 點作 $\overline{EK}$ 的平行線交 $\overline{BC}$ 於 F 點，因為 $\triangle FEK = \triangle AEK$（同底等高），所以 $\triangle ABK = \triangle EBF$，即 $\overline{EF}$ 也是凸四邊形 $ABCD$ 的面積平分線，同理也可得出另外一邊的面積平分線 $\overline{GH}$。

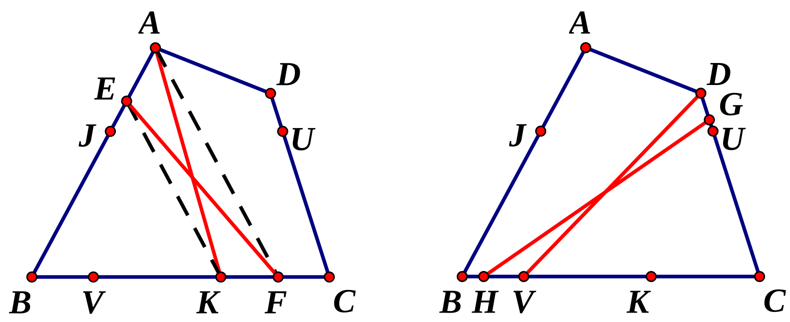


圖 21：面積平分線的作法。

我們可以發現對角線中點 M 和 N 是刻劃面積平分線的關鍵，因為凸四邊形 $ABCD$ 不是平行四邊形，所以 M、N 點和對角線交點 Q 三點皆不重合，我們可以得到定理 11。

定理 11 對於任意非平行四邊形的凸四邊形 $ABCD$，存在面積平分線段 $\overline{EF}$ 與 $\overline{GH}$ 的各自的一個端點恰好落在凸四邊形 $ABCD$ 的兩對邊上，另外的兩個端點同時落在凸四邊形 $ABCD$ 的另外一邊上。

證明：

如下圖，根據性質 10，我們可以刻畫出對於任意非平行四邊形的凸四邊形，存在凸四邊形 $ABCD$ 的面積平分線 $\overline{EF}$ 的端點 E 必定在 $\overline{AJ}$ 上、端點 F 必定在 $\overline{CK}$ 上；$\overline{GH}$ 的端點 G 必定在 $\overline{DU}$ 上、端點 H 必定在 $\overline{BV}$ 上。

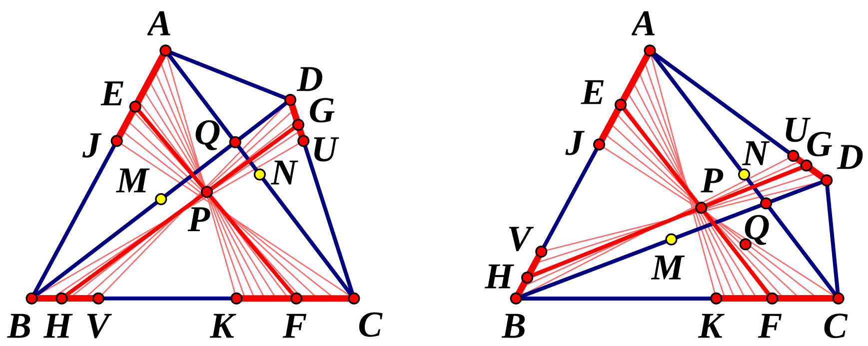


圖 22：凸四邊形的面積平分線的範圍。

■

根據定理 11，不失一般性，本研究接下來假定討論的任意非平行四邊形的凸四邊形 $ABCD$ 的面積平分線 $\overline{EF}$ 的端點 E 在 $\overline{AB}$ 上、端點 F 在 $\overline{BC}$ 上；$\overline{GH}$ 的端點 G 在 $\overline{CD}$ 上、端點 H 在 $\overline{BC}$ 上。

定理 12 對於任意非平行四邊形的凸四邊形 $ABCD$，存在兩條相異直線將凸四邊形的面積四等分，分割為 1 個五邊形、2 個四邊形、1 個三角形。

證明：

1. 根據定理 11，先考慮凸四邊形 $ABCD$ 的面積平分線 $\overline{BU}$、$\overline{CJ}$ 與 $\overline{BC}$ 所圍出的 $\triangle PBC$ 與凸四邊形 $ABCD$ 的面積比值，如圖 23，因為 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=1$，根據共角定理可得出 $\frac{\overline{BJ}}{\overline{BY}}=t=\frac{2}{\lambda+4}$，同理 $\frac{\overline{CU}}{\overline{CY}}=s=\frac{2}{\lambda+4}$，即 $\overline{JU}\parallel\overline{BC}$ 且 $\overline{JU}=\frac{\lambda+2}{\lambda+4}\times\overline{BC}$。再得出 $\overline{PU}=\frac{\lambda+2}{\lambda+4}\times\overline{PB}$。又因為 $\triangle BCJ$ 面積等於凸四邊形 $ABCD$ 的一半，又 $\overline{PB}>\overline{PU}$，所以 $\triangle PBC>\triangle PJB$，因此我們有

$$\frac{\triangle PBC}{\text{凸四邊形 } ABCD}>\frac{1}{4}$$

2. 再考慮凸四邊形 $ABCD$ 的面積平分線 $\overline{AK}$、$\overline{DV}$ 與 $\overline{BC}$ 所圍出的 $\triangle PVK$ 與凸四邊形 $ABCD$ 的面積比值。如圖 24，$\triangle PDA=\triangle PVK$，且 $\angle APD=\angle KPV$，根據共角定理可得 $\overline{PA}\times\overline{PD}=\overline{PK}\times\overline{PV}$，不失一般性，令 $\overline{PA}\geq\overline{PK}$，則 $\overline{PD}\leq\overline{PV}$。在 $\triangle AVK$ 中，

$\overline{PA} \geq \overline{PK}$，可得 $\triangle AVP \geq \triangle PVK$，$\triangle AVP + \triangle ABV > \triangle PVK$，即四邊形 $ABVP$ 面積大於 $\triangle PVK$，因此我們有

$$\frac{\triangle PVK}{\text{凸四邊形 } ABCD} < \frac{1}{4}$$

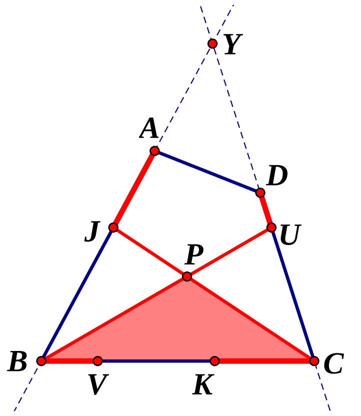


圖 23：凸四邊形的面積平分線（1）。

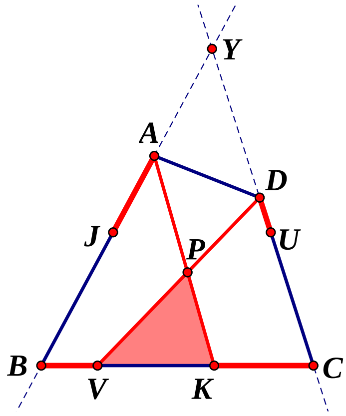


圖 24：凸四邊形的面積平分線（2）。

3. 根據定理 9 可得 $\frac{\triangle PHF}{\text{凸四邊形 } ABCD}$ 其面積比值函數為

$$f(s,t) = \frac{(-(\lambda+4)st + 2s + 2t)^2}{-4(\lambda+4)s^2t^2 + 8s^2 + 8t^2} \quad \text{式 (5)}$$

其中，$s \neq 0$、$t \neq 0$。

因為式 (5) 中，面積的變化是連續的，又我們知道當 $\overline{EF}$ 與 $\overline{CJ}$ 重合且可動的線段 $\overline{GH}$ 與 $\overline{BU}$ 重合時，$\frac{\triangle PBC}{\text{凸四邊形 } ABCD} > \frac{1}{4}$；當 $\overline{EF}$ 與 $\overline{AK}$ 重合且 $\overline{GH}$ 與 $\overline{DV}$ 重合時，$\frac{\triangle PVK}{\text{凸四邊形 } ABCD} < \frac{1}{4}$，所以必然存在 $\overline{EF}$、$\overline{GH}$ 與 $\overline{BC}$ 所圍出的 $\triangle PHF$ 與凸四邊形 $ABCD$ 的面積比值為 $\frac{1}{4}$。

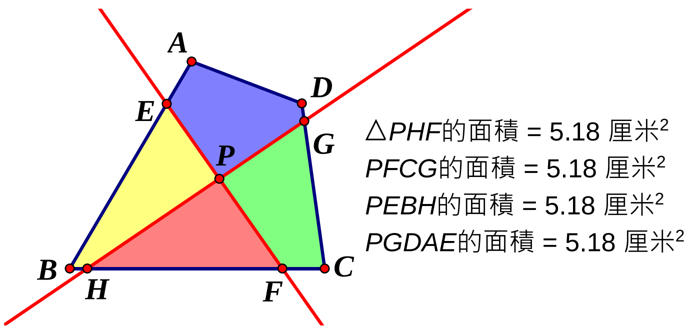


圖 25：四等分凹四邊形的面積。

■

三、 推廣到任意凹四邊形

我們繼續討論任意凹四邊形的情形，不失一般性，我們令凹四邊形 $ABCD$ 的內角 $\angle DAB > 180°$ 且 $\overline{AD} \leq \overline{AB}$。透過性質 10，如下圖，我們一樣可以利用相同的對角線 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點分別刻劃出凹四邊形 $ABCD$ 面積平分線 $\overline{EF}$ 的端點範圍為 $\overline{AJ}$ 與 $\overline{CK}$，另外一條面積平分線 $\overline{GH}$ 的端點範圍為 $\overline{DU}$ 與 $\overline{BV}$。

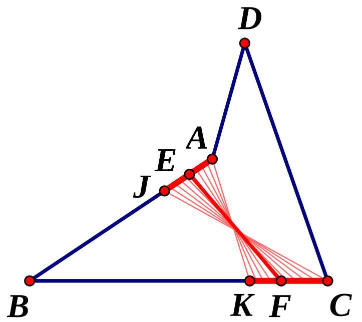


圖 26：凹四邊形的面積平分線的範圍(1)。

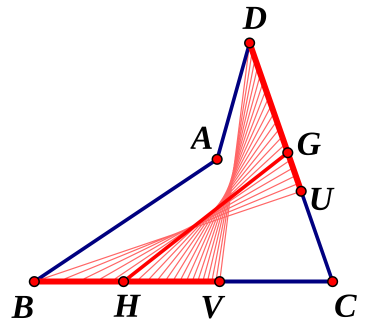


圖 27：凹四邊形的面積平分線的範圍(2)。

考慮將凹四邊形 $ABCD$ 的邊 $\overline{AB}$ 延長並交 $\overline{CD}$ 於 Y 點，如下圖。

不失一般性，令五邊形 $PGDAE$ 的面積=四邊形 $PEBH$ 的面積=四邊形 $PFCG$ 的面積=$\triangle PHF$ 的面積$=1$，$\triangle YAD$ 的面積$=\mu$，其中 μ 為大於 0 的實數。

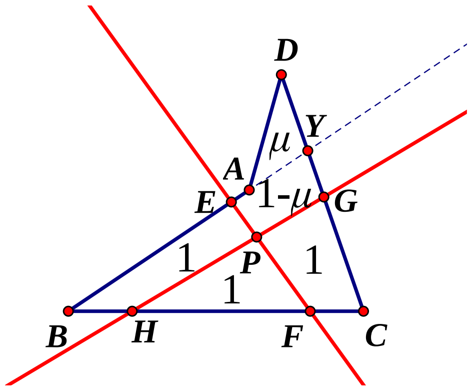


圖 28：將凹四邊形分割成三角形。

我們的方法是，在 $\triangle YBC$ 中，

步驟一：$\overleftrightarrow{EF}$ 分割 $\triangle YBC$，使得 $\triangle BEF : \triangle YBC = 2 : (4-\mu)$；

步驟二：$\overleftrightarrow{GH}$ 分割 $\triangle YBC$，使得 $\triangle CGH : \triangle YBC = 2 : (4-\mu)$；

步驟三：令 $\overleftrightarrow{EF}$ 與 $\overleftrightarrow{GH}$ 交於 P 點，且 P 在凹四邊形 $ABCD$ 內部。

步驟四：最後再找出 $\triangle PHF : \triangle YBC = 1 : (4-\mu)$ 的充要條件即可。

接著我們找出兩相異直線四等分凹四邊形的面積的充要條件。

定理 13 兩相異直線可四等分凹四邊形的面積的充要條件為

$$\frac{\left((\mu-4)st+2s+2t\right)^2}{(\mu-4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$

其中 $\frac{\overline{BE}}{\overline{BY}}=t$、$\frac{\overline{CG}}{\overline{CY}}=s$、$\mu=\frac{4\times\triangle YAD}{\text{凹四邊形 }ABCD}$。

證明：

討論的方法與定理 9 相仿，不過差別在於面積的比例常數的不同，即 $\triangle BEF=\triangle CGH=\frac{2}{4-\mu}\times\triangle YBC$，因此省略其過程，過程記錄在研究日誌中。

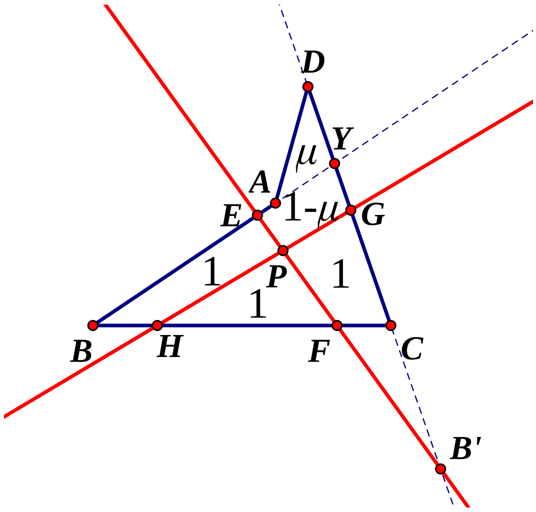


圖 29：兩相異直線分割 $\triangle YBC$。

利用孟氏定理與共角定理，我們最後可以得出 $\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{GH}$ 四等分凹四邊形 $ABCD$ 面積的充要條件為

$$\frac{\triangle PHF}{\text{凹四邊形 }ABCD}=\frac{(-(4-\mu)st+2s+2t)^2}{-(4-\mu)^2s^2t^2+2(4-\mu)s^2+2(4-\mu)t^2}=\frac{1}{4-\mu}$$

化簡可得

$$\frac{\left((\mu-4)st+2s+2t\right)^2}{(\mu-4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1 \qquad \text{式 (6)}$$

我們利用網站 WolframAlpha 化簡式 (6) 可得

$$t=\frac{2(4-\mu)s^2-4s-s\sqrt{2\left((\mu^2-7\mu+12)s^2-4(4-\mu)s+6\right)}}{(\mu^2-9\mu+20)s^2-4(4-\mu)s+2} \text{ 或 } s=\frac{2(4-\mu)t^2-4t-t\sqrt{2\left((\mu^2-7\mu+12)t^2-4(4-\mu)t+6\right)}}{(\mu^2-9\mu+20)t^2-4(4-\mu)t+2}$$

故我們得出兩相異直線可四等分凹四邊形的面積的充要條件關係式。

■

我們最後證明所有任意凹四邊形必存在四等分面積的分割方法。

定理 14 對於任意凹四邊形 $ABCD$，存在兩條相異直線將凹四邊形的面積四等分，分割為 1 個五邊形、2 個四邊形、1 個三角形。

證明：

1. 如圖 30，因為 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=1$，根據共角定理可得出 $\frac{\overline{BJ}}{\overline{BY}}=t=\frac{2}{4-\mu}$，同理 $\frac{\overline{CU}}{\overline{CY}}=s=\frac{2}{4-\mu}$，即 $\overline{JU}\parallel\overline{BC}$ 且 $\overline{JU}=\frac{2-\mu}{4-\mu}\times\overline{BC}$。再得出 $\overline{PU}=\frac{2-\mu}{4-\mu}\times\overline{PB}$，又因為 $\triangle BCJ$ 面積等於凹四邊形 $ABCD$ 的一半，又 $\overline{PB}>\overline{PU}$，所以 $\triangle PBC>\triangle PJB$，因此我們有

$$\frac{\triangle PBC}{\text{凹四邊形 } ABCD}>\frac{1}{4}$$

2. 如圖 31，$\triangle PDA=\triangle PVK$，且 $\angle APD=\angle KPV$，根據共角定理可得 $\overline{PA}\times\overline{PD}=\overline{PK}\times\overline{PV}$，不失一般性，令 $\overline{PA}\le\overline{PK}$，則 $\overline{PD}\ge\overline{PV}$。在 $\triangle DVK$ 中，$\overline{PD}\ge\overline{PV}$，可得 $\triangle DPK\le\triangle PVK$，$\triangle DPK+\triangle DKC>\triangle PVK$，即四邊形 $CDPK$ 面積大於 $\triangle PVK$，因此我們有

$$\frac{\triangle PVK}{\text{凹四邊形 } ABCD}<\frac{1}{4}$$

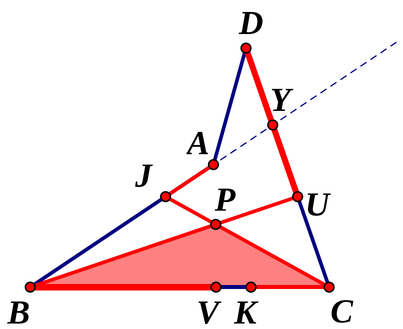


圖 30：凹四邊形的面積平分線（1）。

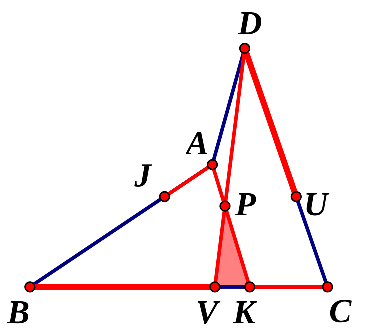


圖 31：凹四邊形的面積平分線（2）。

3. 根據定理 13 可得 $\frac{\triangle PHF}{\text{凹四邊形 } ABCD}$ 其面積比值函數為

$$g(s,t)=\frac{\left((\mu-4)st+2s+2t\right)^2}{4(\mu-4)s^2t^2+8s^2+8t^2} \qquad \text{式 (7)}$$

其中，$s\neq 0$、$t\neq 0$。

因為面積的變化是連續的，因此必然存在 $\overline{EF}$、$\overline{GH}$ 與 $\overline{BC}$ 所圍出的 $\triangle PHF$ 與凹四邊形 $ABCD$ 的面積比值為 $\frac{1}{4}$。

柒、 結論

本研究推廣古老的數學問題「Quadrisection Problem：兩條垂直的直線將 $\triangle ABC$ 的面積四等分」。然而，我們沒有設定兩相異直線必須垂直。考慮兩相異直線至少將任意三角形分割成三塊區域，至多分割成四塊區域，所以我們先探討兩直線三等分任意三角形的情形，再研究兩直線四等分任意三角形的情形，完整給出分割的圖樣。此外，我們繼續推廣到任意凸四邊形與凹四邊形，本研究證明了對於所有任意凸四邊形與凹四邊形必存在四等分面積的分割方法，這也是本研究的亮點之處。本研究是新的內容，雖僅使用了初等幾何工具——共角定理與孟氏定理，但是簡潔地找出豐富性質與好的刻畫，其研究結果如下。

一、 兩相異直線三等分任意三角形的面積之劃分

我們先討論兩條相異直線將任意三角形分割三塊區域的情形：當相異兩直線平行時，我們得到了 3 種分割圖樣；而當兩直線有交點時，我們利用交點的位置（三角形外部、三角形邊上、三角形頂點上）得出 7 種分割圖樣。

我們接著利用共角定理和等分點證明以上 10 種圖樣皆可達成三等分任意三角形，並且給出作圖步驟。

二、 兩相異直線四等分任意三角形的面積之劃分

我們先討論兩條相異直線將任意三角形分割四塊區域的共有 5 種情形，與三角形不同的是，其中只有 2 種圖樣皆可達成四等分任意三角形。

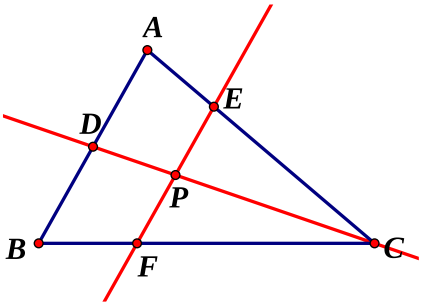


圖 32：四等分三角形的面積(1)。

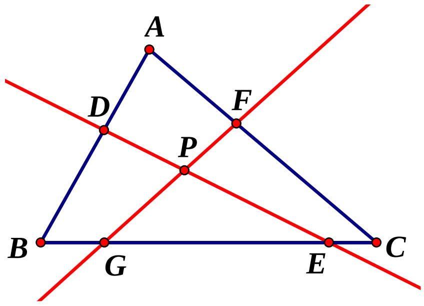


圖 33：四等分三角形的面積(2)。

如圖 32，此分割方法是唯一作圖，其中 D 為 $\overline{AB}$ 中點且 $\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

如圖 33，$\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 是 $\triangle ABC$ 的面積平分線，且滿足 $\triangle PGE=\frac{1}{4}\times\triangle ABC$ 時，$\overleftrightarrow{DE}$ 和 $\overleftrightarrow{FG}$ 及四等分三角形。我們給出兩相異直線四等分三角形的充要條件為：

$$\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}=\frac{1}{4}$$

其中 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=t$、$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=s$，且 $\frac{1}{2}<s<\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$。

注意到，我們僅需要給定 $\overline{AB}$ 上的 D 點，則可作出面積平分線 $\overline{DE}$，又因為充要條件我們可再得出 $\overline{AC}$ 上的 F 點，同樣再作出面積平分線 $\overline{FG}$，即為所求。

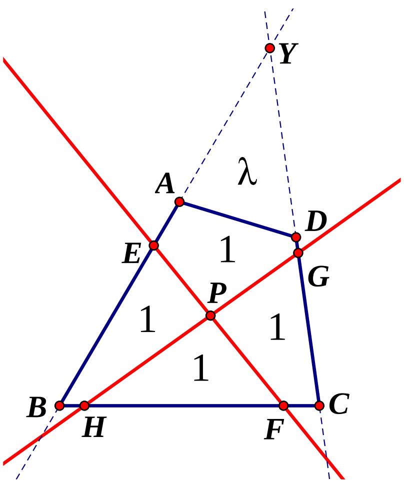
三、 兩相異直線四等分任意凸四邊形與凹四邊形的面積之劃分

前面我們完整給出兩相異直線均分任意三角形的面積的方法。接下來我們嘗試兩相異直線四等分凸四邊形與凹四邊形的面積，這個問題是困難的！這也是本研究重要的貢獻。

我們將任意凸四邊形 $ABCD$ 補成三角形 $\triangle YBC$。同樣地，將任意凹四邊形 $ABCD$ 切割成三角形 $\triangle YBC$，再利用三角形共角定理與孟氏定理進行討論。

關於四等分凸四邊形 $ABCD$ 的面積，不失一般性，如圖 34，可令凸四邊形 $ABCD$ 的面積$=4$、$\triangle YAD$ 的面積$=\lambda$，$\frac{\overline{BE}}{\overline{BY}}=t$、$\frac{\overline{CG}}{\overline{CY}}=s$，最後我們給出 $\overline{EF}$、$\overline{GH}$ 四等分凸四邊形 $ABCD$ 的面積充要條件如下：

$$\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-(\lambda+4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$



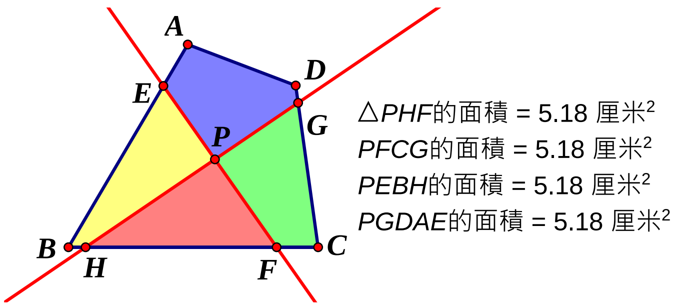
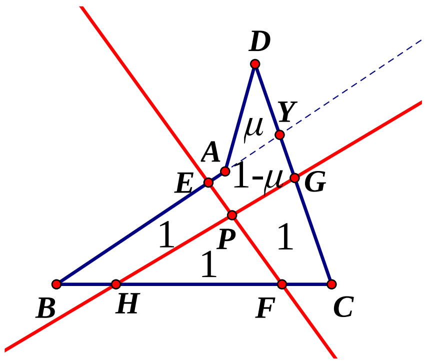


圖 34：四等分凸四邊形的面積。

關於四等分凹四邊形 $ABCD$ 的面積，不失一般性，如圖 35，可令凹四邊形 $ABCD$ 的面積$=4$、$\triangle YAD$ 的面積$=\mu$，$\frac{\overline{BE}}{\overline{BY}}=t$、$\frac{\overline{CG}}{\overline{CY}}=s$，最後我們給出 $\overline{EF}$、$\overline{GH}$ 四等分凹四邊形 $ABCD$ 的面積充要條件如下：

$$\frac{\left((\mu-4)st+2s+2t\right)^2}{(\mu-4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$



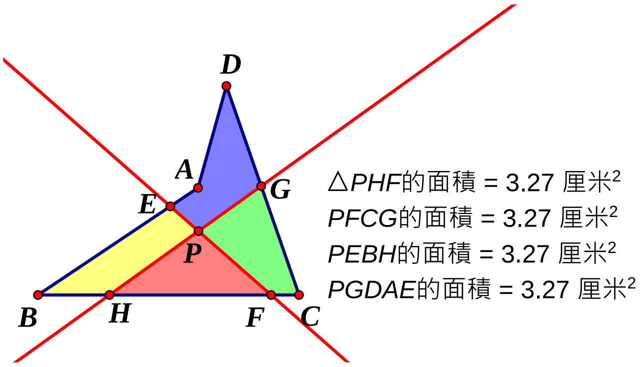


圖 35：四等分凹四邊形的面積。

值得一提的是，我們證明以上的分割方法適用於所有凸四邊形與凹四邊形！這也表示所有的凸四邊形與凹四邊形必存在四等分面積的分割方法，這是本研究的亮點之處。

至此，我們完整解決了兩相異直線均分任意三角形的面積（三等分與四等分），以及四等分任意凸四邊形與凹四邊形的面積（四等分）的幾何問題。

捌、 參考文獻

[1] Carl Eberhart (2018). Revisiting the Quadrisection Problem of Jacob Bernoulli. *Forum Geometricorum*, 18, 7–16.

[2]黃家禮（2000）。幾何明珠。臺北市：九章出版社。

【評語】030421

由 Euler 提出做兩條相互垂直的直線，把三角形的面積四等分的問題（Quadrisection Problem）出發，考慮在去除掉兩直線必須相互垂直的條件後，用兩直線把三角形的面積三等分、四等分是否可行的問題。作者們針對這樣的一個問題，將兩相異直線將任意三角形及四邊形分割成四塊區域的情形加以分類，分別給出分割方法，並且給出四等分面積的充要條件，值得肯定。內容可再針對放寬條件後，與原條件做比較，其特別及相異之處為何。

作品簡報

兩相異直線均分
三角形與四邊形的面積

組別：國中組

科別：數學科

編號：030421

壹、研究動機

Quadrisection (Euler, 1779)

討論兩相異**垂直**的直線如何將非等腰的 $\triangle ABC$ 面積四等分，並且給出結果：

若 $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$，則必然存在四等分 $\triangle ABC$ 面積的作圖。

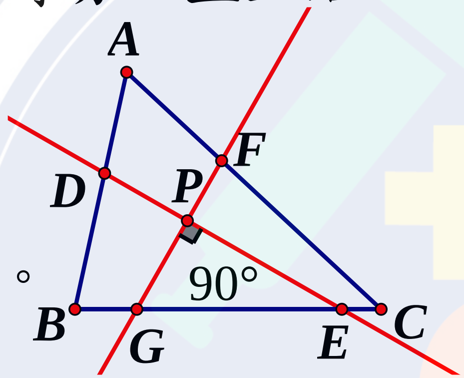


圖1：四等分三角形

Quadrisection (Eberhart, 2018)

Carl Eberhart 進一步證明：

1. 最短邊 $\overline{AB}$ 上，也會出現四等分 triangular portion 。
2. 最長邊 $\overline{AC}$ 上，不可能有四等分 triangular portion 。

我們的研究對象

放寬條件，兩直線不須垂直

探討三角形

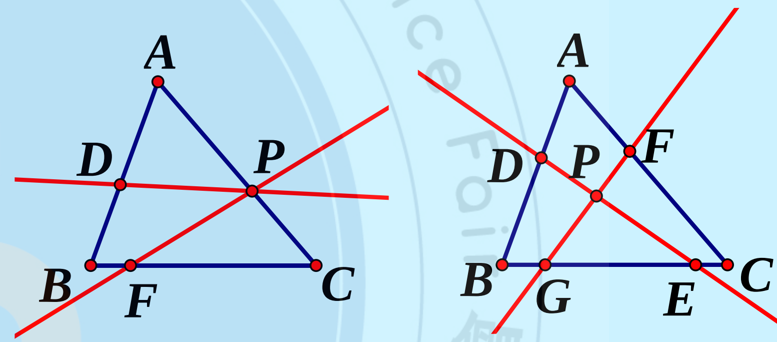


圖2：等分三角形

探討凸四邊形、凹四邊形

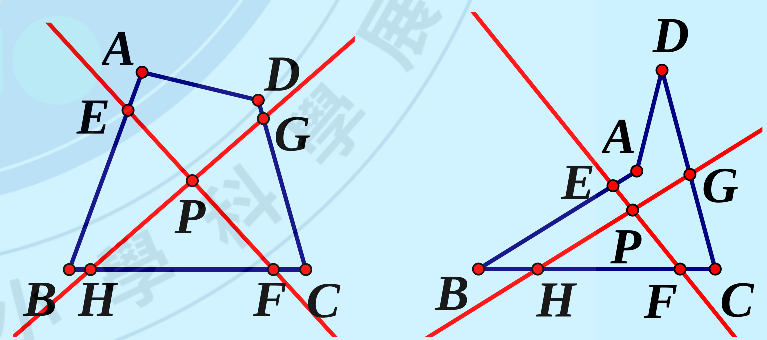


圖3：等分四邊形

貳、研究工具及預備知識

研究工具

- 軟體：幾何畫板 The Geometer’s Sketchpad 5.0
- 網站： Wolfram Alpha 計算網站

預備知識

- <u>共角定理</u>

  $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\angle A = \angle D$，則

  $\triangle ABC : \triangle DEF = (\overline{AB} \times \overline{AC}) : (\overline{DE} \times \overline{DF})$

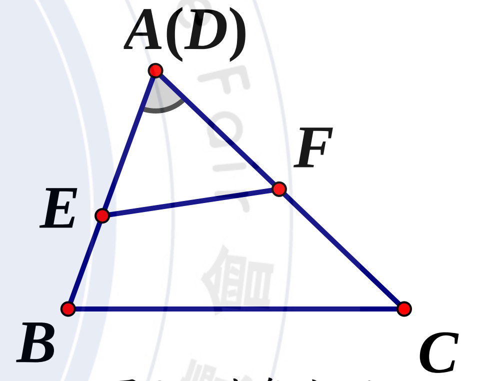


圖4：共角定理

- <u>孟氏定理</u>

  若點 P_A、P_B、P_C 三點共線，若且唯若

  $$\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}} \times \frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AC}} \times \frac{\overline{CP_B}}{\overline{P_BA}} = 1$$

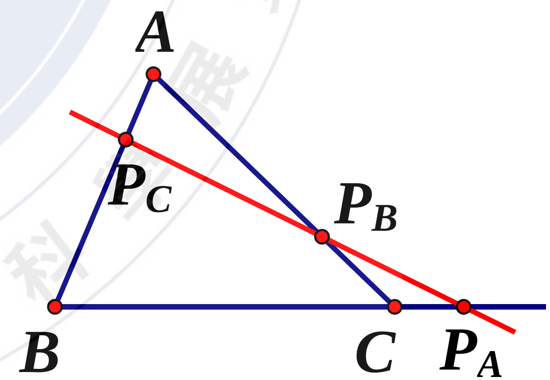


圖5：孟氏定理

參、研究結果

一、兩相異直線三等分三角形面積的劃分

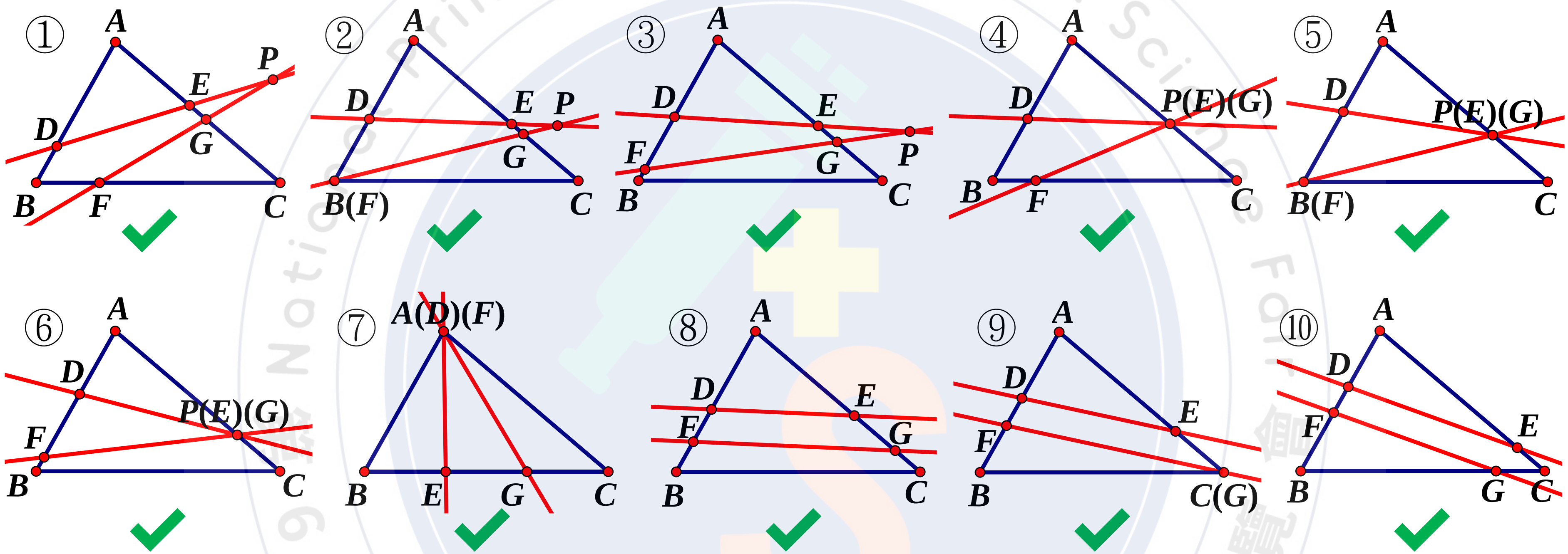


圖6：兩相異直線將三角形切割的圖案

性質1. 兩相異直線的 10 種分割圖樣皆可滿足三等分三角形的面積。

①到⑥作圖與證明：

在 $\overline{AB}$ 上取點 D，設 $\overline{AD}:\overline{AB}=t:1$；在 $\overline{AC}$ 上取點 E 滿足 $\overline{AE}:\overline{AC}=\frac{1}{3t}:1$

依據共角定理得 $\triangle ADE=\frac{1}{3}\triangle ABC$。同理可再三等分 $\triangle ABC$ 的面積

⑧ 到 ⑨ 的作圖：

1. 在 $\overline{AB}$ 上取點 D，設 $\overline{AD}:\overline{AB}=t:1$
2. 在 $\overline{AC}$ 上取點 E 滿足 $\overline{AE}:\overline{AC}=\frac{1}{3t}:1$
3. 在 $\overline{AB}$ 上取點 F，滿足 $\overline{AF}:\overline{AB}=\sqrt{2}t:1$
4. 在 $\overline{AC}$ 上取點 G，滿足 $\overline{AG}:\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{3t}:1$

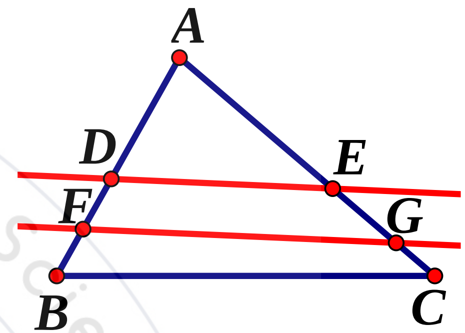


圖7：平行線三等分三角形(1)

⑧ 到 ⑨ 的證明： 由共角定理證明面積；由比例線段證明 $\overline{DE}\parallel\overline{FG}$ 。

⑩ 的作圖：

1. 在 $\overline{AB}$ 上取點 D ，設 $\overline{AD}:\overline{AB}=t:1$
2. 在 $\overline{AC}$ 上取點 E 滿足 $\overline{AE}:\overline{AC}=\frac{1}{3t}:1$
3. 在 $\overline{AB}$ 上取點 F，滿足 $\overline{BF}:\overline{AB}=\sqrt{\frac{1}{3}-t^2}:1$
4. 在 $\overline{BC}$ 上取一點 G，滿足 $\overline{BG}:\overline{BC}=\frac{1}{3\sqrt{\frac{1}{3}-t^2}}:1$

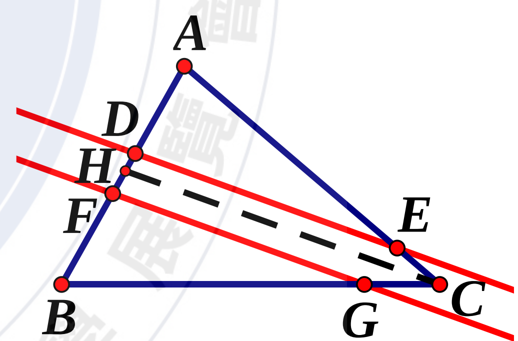


圖8：平行線三等分三角形(2)

⑩ 的證明： 由共角定理證明面積；
作 $\overline{CH}\parallel\overline{DE}$，再透過比例線段證明 $\overline{FG}\parallel\overline{CH}$ 。

二、兩相異直線四等分三角形面積的劃分

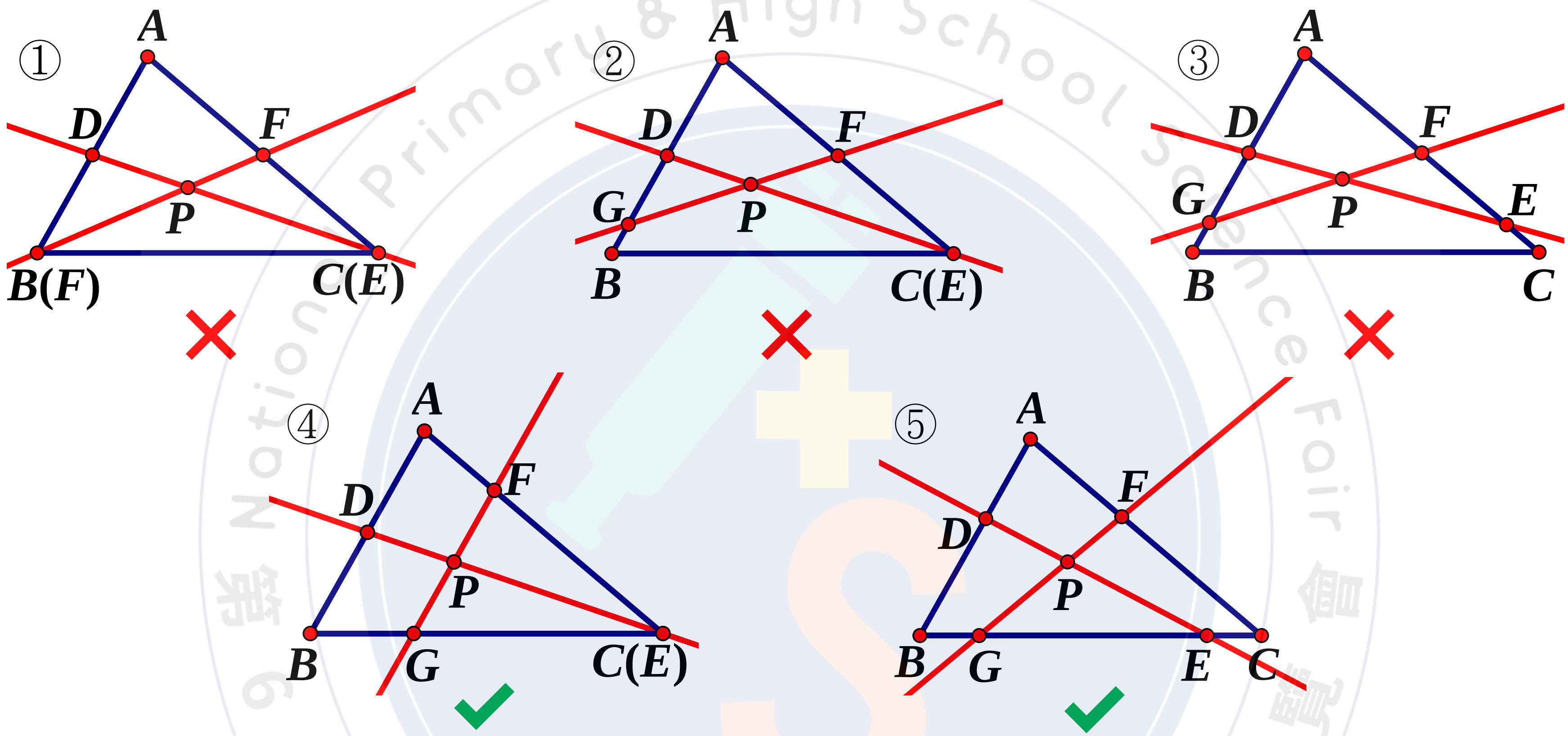


圖9：兩相異直線將三角形切割的圖案

性質2. 兩相異直線的分割圖樣 ④ 可滿足三等分三角形的面積。

④ 的作圖：

在 $\overline{AB}$ 上取中點 D

在 $\overline{AC}$ 上取一點 F ，在 $\overline{BC}$ 上取一點 G，滿足 $\overline{CF}:\overline{CA}=\overline{CG}:\overline{CB}=\frac{1}{\sqrt{2}}:1$

利用孟氏定理與共角定理可得以下定理

定理3. 兩相異直線的分割圖樣⑤可滿足三等分三角形的面積，其充要條件為

$$\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}=\frac{1}{4}$$

其中 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=t$、$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=s$

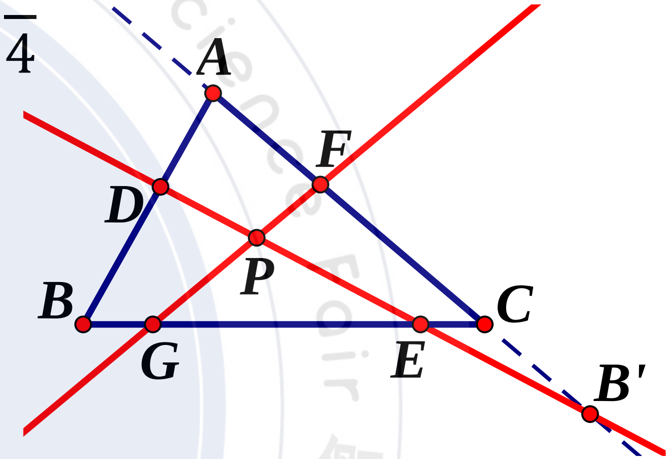


圖10：兩相異直線四等分面積

性質4. 當 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=\frac{3}{5}$ 時，$\overline{DF}\parallel\overline{BC}$ 。

三、向凸四邊形推廣

切割成一個三角形、兩個凸四邊形
一個凸五邊形

- 如何進行作圖切割？
- 對所有凸四邊形都適用嗎？

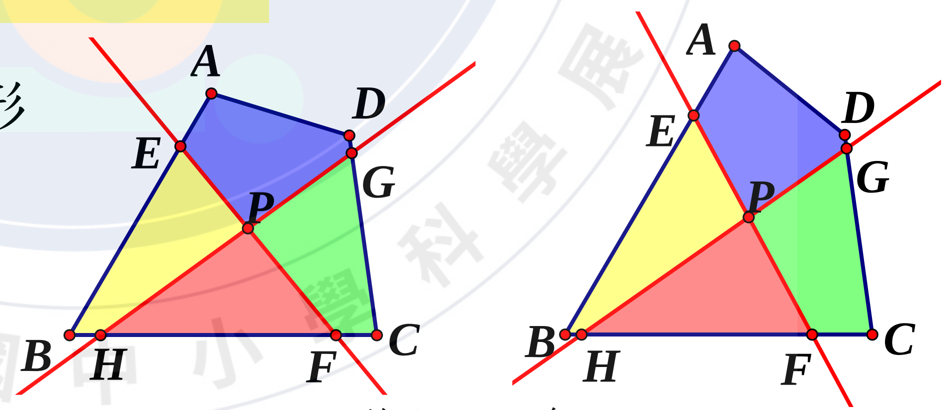


圖11：四等分凸四邊形的面積

主要想法

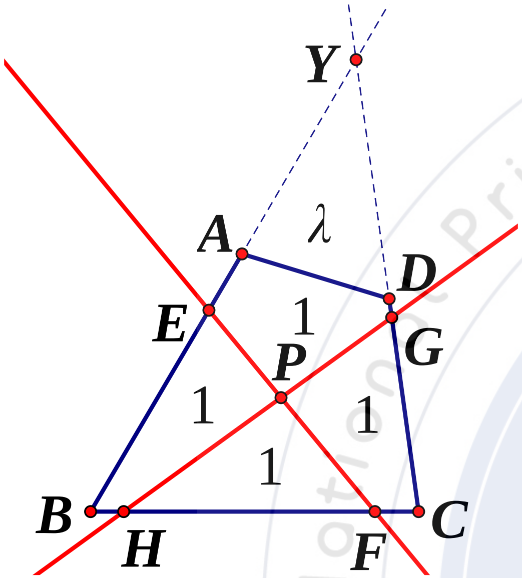


圖12：補成三角形

證明

定理5. 兩相異直線可四等分凸四邊形的面積的充要條件為

$$\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-(\lambda+4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$

其中 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BY}}=t$、$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{CY}}=s$、$\lambda=\dfrac{4\times\triangle YAD}{\text{凸四邊形 }ABCD}$

對所有凸四邊形都適用嗎？

構造四邊形的面積平分線

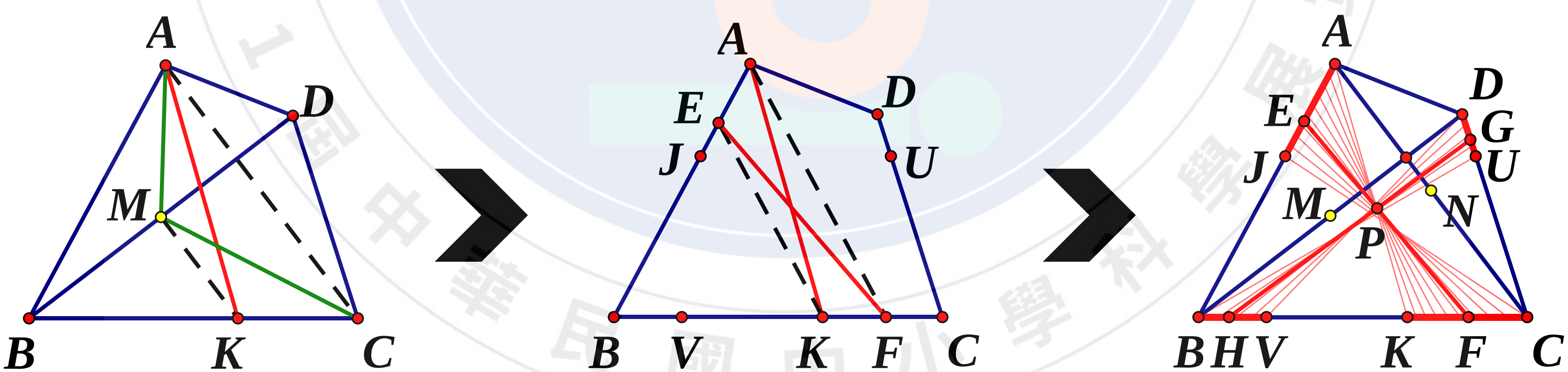
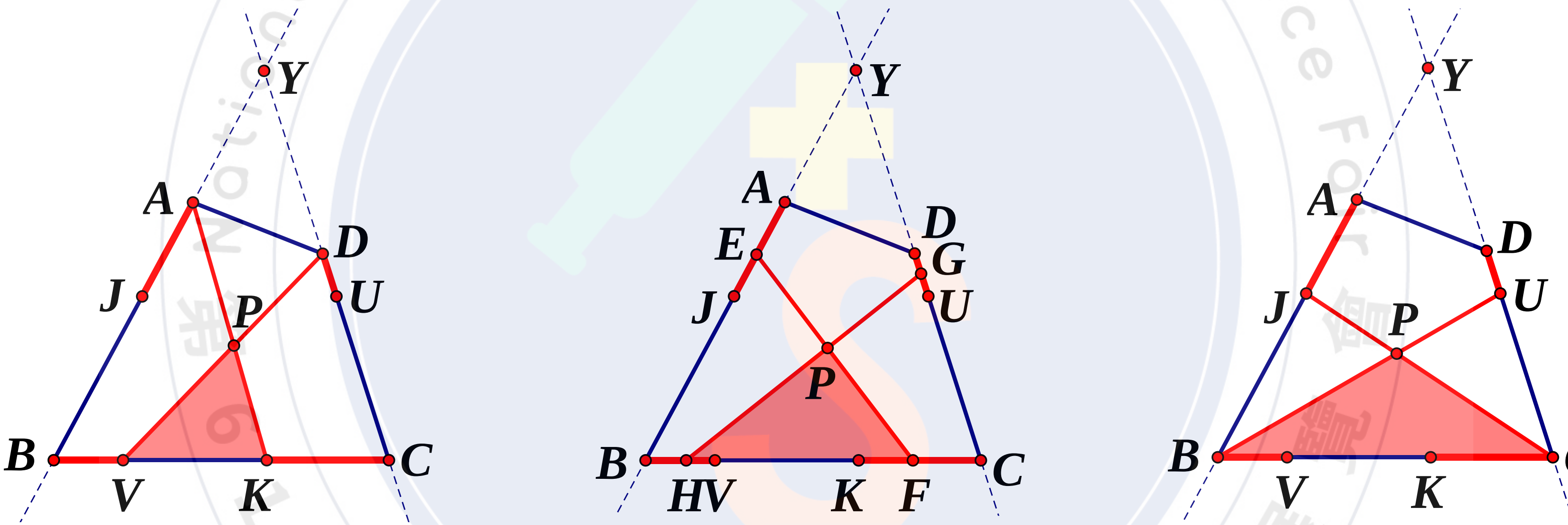


圖13：面積平分線

定理6. 對於任意非平行四邊形的凸四邊形 $ABCD$，必存在兩條直線將凸四邊形的面積四等分，分割為一個三角形、兩個凸四邊形、一個凸五邊形。



$$\frac{\triangle PVK}{\text{凸四邊形 } ABCD} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{\triangle PHF}{\text{凸四邊形 } ABCD} = \frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-4(\lambda+4)s^2t^2+8s^2+8t^2}$$

$$\frac{\triangle PBC}{\text{凸四邊形 } ABCD} > \frac{1}{4}$$

圖14：四等分面積切割法的存在性

四、向凹四邊形推廣

主要想法

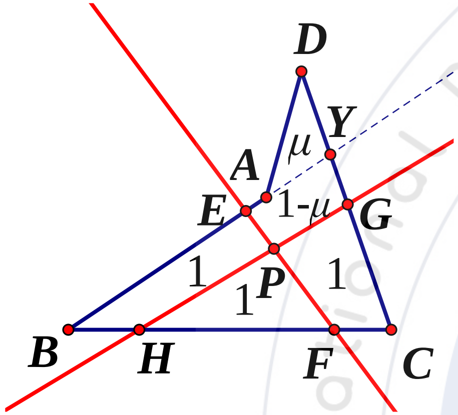


圖15：切成三角形

證明

定理7. 兩相異直線可四等分凹四邊形的面積的充要條件為

$$\frac{\left((\mu-4)st+2s+2t\right)^2}{(\mu-4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$

其中 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BY}}=t$、$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{CY}}=s$、$\mu=\dfrac{4\times\triangle YAD}{\text{凹四邊形 }ABCD}$

定理8. 對於任意凹四邊形 $ABCD$，必存在兩條直線將凹四邊形的面積四等分，分割為一個三角形、兩個凸四邊形、一個凹五邊形。

$$\frac{\triangle PVK}{\text{凹四邊形 }ABCD}<\frac{1}{4}$$

$$\frac{\triangle PBC}{\text{凹四邊形 }ABCD}>\frac{1}{4}$$

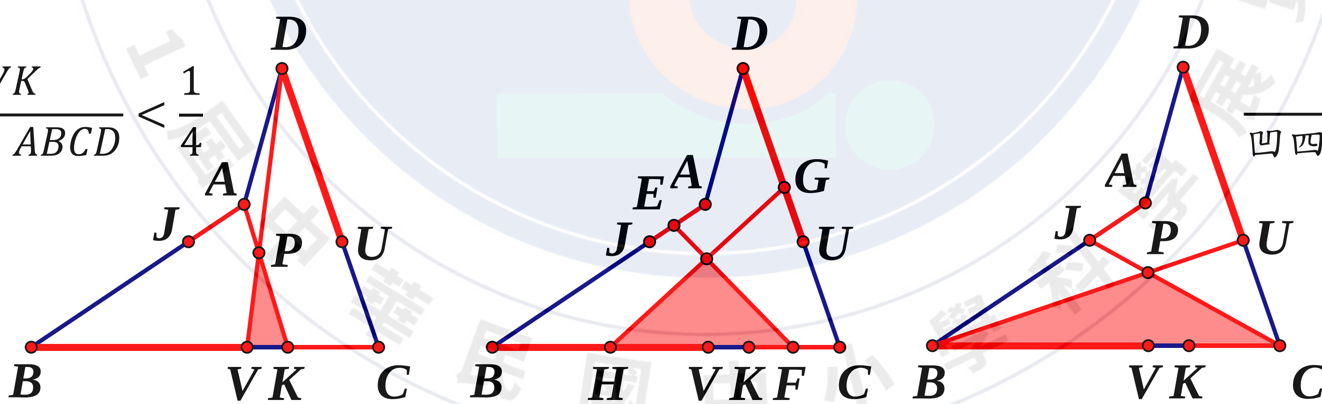
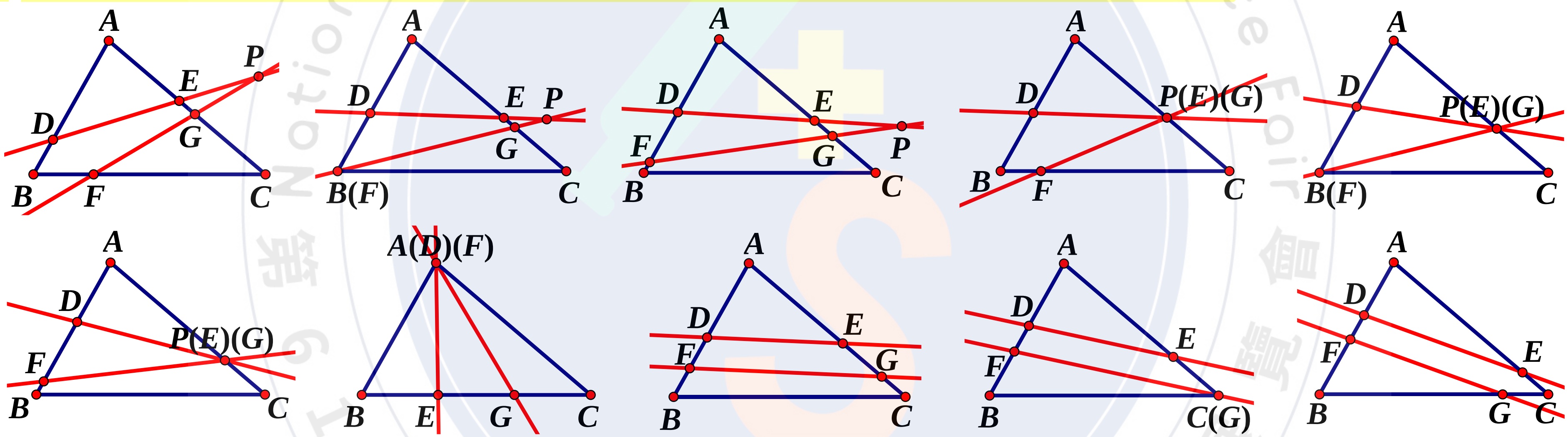


圖16：四等分面積切割法的存在性

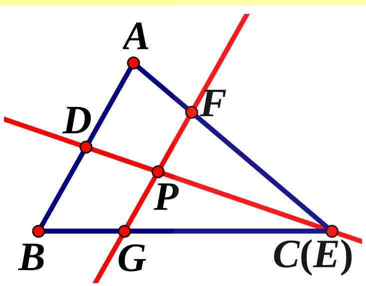
肆、結論

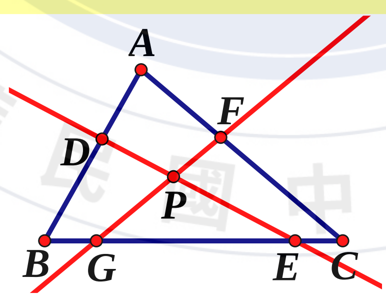
本研究源自經典的三角形問題 Quadrisection Problem，我們放寬了兩直線垂直的條件。討論三角形的所有情形。接著，推廣到凸四邊形與凹四邊形的四等分問題，並且給出完整的作圖與證明。

一、兩相異直線三等分三角形面積的劃分



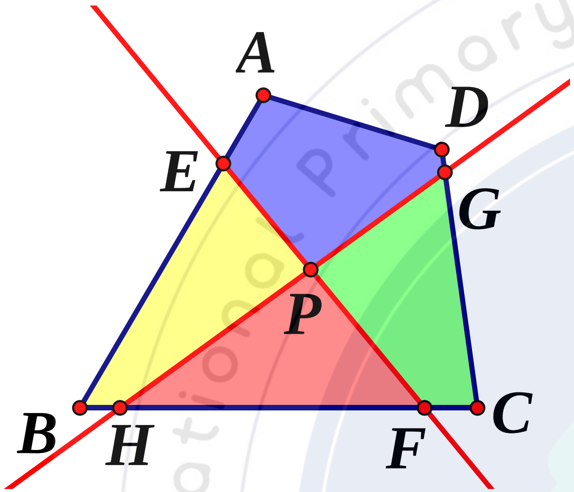
二、兩相異直線四等分三角形面積的劃分





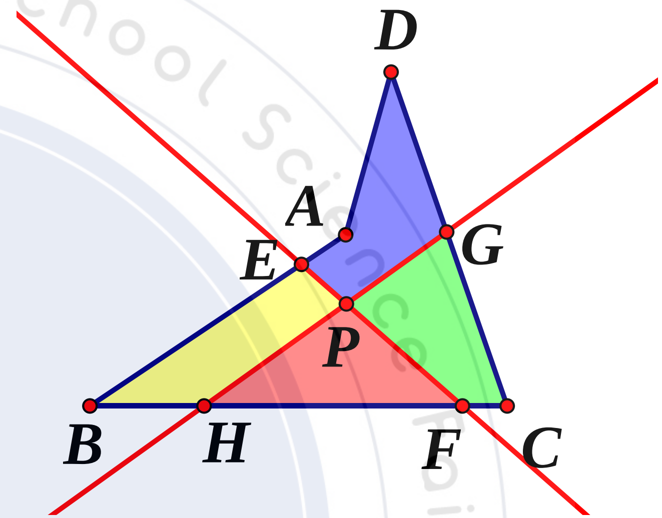
$$\frac{(-2st+s+t)^2}{-4s^2t^2+2s^2+2t^2}=\frac{1}{4}$$

三、四等分凸四邊形面積



$$\frac{(-(\lambda+4)st+2s+2t)^2}{-(\lambda+4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$

四、四等分凹四邊形面積



$$\frac{\left((\mu-4)st+2s+2t\right)^2}{(\mu-4)s^2t^2+2s^2+2t^2}=1$$

伍、參考資料

[1] Carl Eberhart (2018). Revisiting the Quadrisection Problem of Jacob Bernoulli. *Forum Geometricorum*, 18, 7–16.

[2]黃家禮（2000）。**幾何明珠**。臺北市：九章出版社