中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030420

正 n 邊形上不連續頂點所構成內接多邊形之研究

學校名稱：高雄市立五福國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳芯言	蔡依玲
國二 黃示睿	歐志昌

關鍵詞：正 n 邊形、不連續頂點、內接多邊形

摘　要

從正n邊形的頂點、各邊中點的選取定義出「正n邊形上不連續頂點所構成內接k多邊形」。

一、k的範圍限制 $\left[\frac{n+1}{2}\right] \le k \le n$

二、數量遞迴關係式 $T_n(k) = T_{n-2}(k-1) + T_{n-1}(k-1)$

三、數量總和 $T_n = \sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n \cdot \frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!} \cdot \frac{1}{k}$ 且 $T_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \ge 5$

四、種類 $R_n(n) = 1$，$R_n(n-1) = 1$，$R_n(n-2) = \left[\frac{n-2}{2}\right]$，

$$R_n(n-3) = \left[\frac{n-4}{2}\right] + \left[\frac{n-7}{2}\right] + \left[\frac{n-10}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n-3m-1}{2}\right]$$

五、種類公式：取$(n-k, 2k-n) = d$ 且 d 的因數為 $d_1, d_2, \cdots, d_w$，

$\varphi(d_i)$表示不大於d_i且與d_i互質的正整數個數

(1) k為奇數

$$R_n(k) = \frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w} \varphi(d_i) \frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!} + k \cdot \frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{n-k}{2}\right]!\left[\frac{2k-n}{2}\right]!}\right)$$

(2) k為偶數，$n-k, 2k-n$為奇數

$$R_n(k) = \frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w} \varphi(d_i) \frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!} + k \cdot \frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-1}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-1}{2}\right)!}\right)$$

(3) k為偶數，$n-k, 2k-n$為偶數：

$$R_n(k) = \frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w} \varphi(d_i) \frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!} + \frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-2}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!} + \frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-2}{2}\right)!} + \frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}\right)\right)$$

六、T_n、R_n可能是新發現的數列。

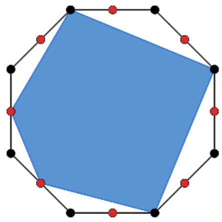
七、正n邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接k邊形

遞迴關係式 $T_{(n-2,m)}(k-1) + m \cdot T_{(n-1,m)}(k-1) = T_{(n,m)}(k)$

數量總和 $T_{(n,m)} = \sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n \cdot \frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!} \cdot \frac{1}{k} \cdot m^{2k-n}$

八、正n邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接多邊形，皆可由aa拼板、ab拼板、bb拼板組合而成，並找到各拼板的種類個數。

壹、研究動機



有一道有趣的數學問題：「在正八邊形上，從頂點及各邊中點中，每邊都選一個點所構成的內接多邊形，這樣的內接多邊形與原正八邊形無共同邊。請問有幾個？」起初感覺不難且有趣。但認真思考後，才發現很有挑戰性。因此，我們開始我們的研究，並推廣到正n邊形。

貳、研究目的與問題

一、探討正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的**數量**及規律性為何？

二、探討正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的**種類**及規律性為何？

三、探討組成正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的**三角形拼板類型**為何？

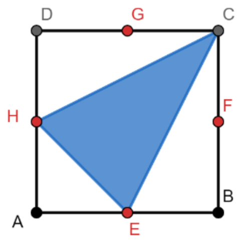
參、名詞與符號定義

一、 **正n邊形上不連續頂點內接多邊形：**

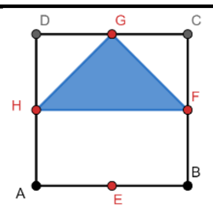
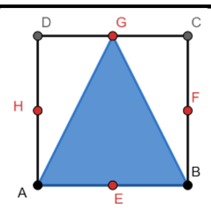
在正n邊形上，從頂點及各邊中點中，每邊都選一個點，所構成內接多邊形。

因此，這樣的內接多邊形與原正n邊形無共同邊，簡稱「**不連續頂點內接多邊形**」。

例如：正四邊形上不連續頂點內接三角形

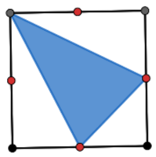
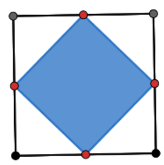
	在正四邊形 ABCD 中，四邊中點為 E、F、G、H（如圖）。 若在邊 AB 上取中點 E，則邊 AB 的頂點 A、B 都不能選。 若在邊 BC 上取頂點 C，則中點 F 不能選。 此時邊 CD 視為已選頂點 C，則中點 G、頂點 D 不能選。 最後，邊 AD 上頂點 A、D 都不能選，只能選 H。 因此，△CEH 為**正四邊形上不連續頂點內接三角形**。

反例：

	邊 AB 沒有選到任何一點，所以不符合正n邊形不連續頂點內接多邊形之定義。		邊 AB 選到 A、B 兩點，所以不符合正n邊形不連續頂點內接多邊形之定義。

二、***xayb*型：**

正n邊形上**選取x個頂點、y個中點**所構成不連續頂點內接多邊形，記作$xayb$型。例如：

$1a2b$型 	正四邊形上不連續頂點內接三角形，選取了正四邊形上 1 個頂點，2 個中點，記作$1a2b$ 。	$4b$型 	正四邊形上不連續頂點內接四邊形，選取了正四邊形上的 4 個中點，記作$4b$ 。

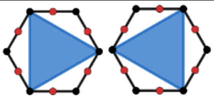
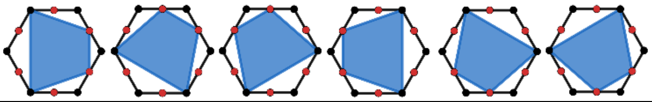
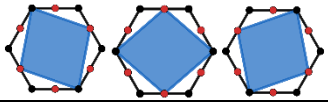
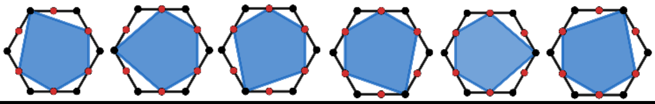
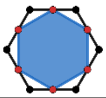
三、$\boldsymbol{T_n(k)}$：正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的**數量**，記作$T_n(k)$。

$\boldsymbol{T_n}$：正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的**數量總和**，記作T_n。

$\boldsymbol{R_n(k)}$：正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的**種類**，記作$R_n(k)$ 。

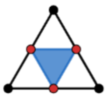
[註] 內接多邊形，若經過旋轉或翻轉相同者則視為同種類。

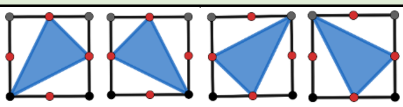
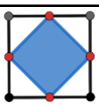
$\boldsymbol{R_n}$：正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的**種類數和**，記作R_n。

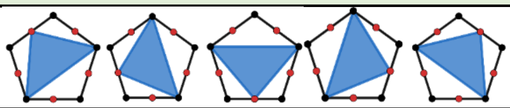
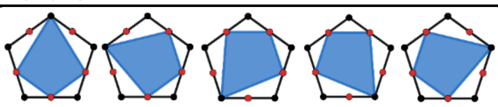
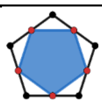
例如：正六邊形上不連續頂點所構成內接多邊形		$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接三角形（$\boldsymbol{3a}$）		$T_6(3)=2$	$R_6(3)=1$
不連續頂點內接四邊形（$\boldsymbol{2a2b}$） (1) $aabb$：6 個 	(2) $abab$：3 個 	$T_6(4)=9$	$R_6(4)=2$
不連續頂點內接五邊形（$\boldsymbol{1a4b}$）		$T_6(5)=6$	$R_6(5)=1$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{6b}$）		$T_6(6)=1$	$R_6(6)=1$
總　　和		$\boldsymbol{T_6=18}$	$\boldsymbol{R_6=5}$

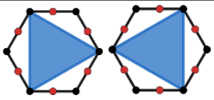
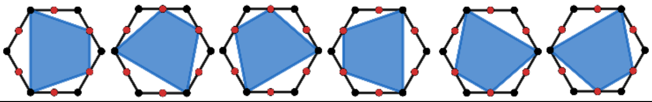
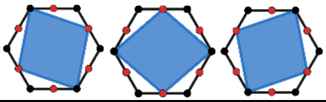
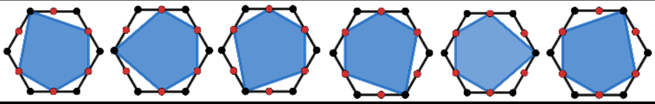
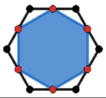
肆、研究過程

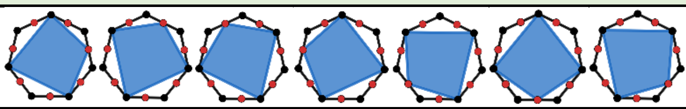
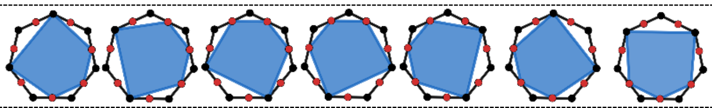
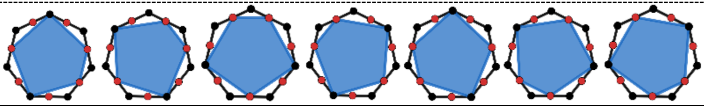
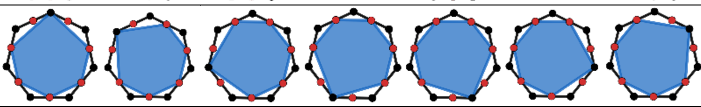
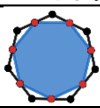
一、 討論正$\boldsymbol{n}$邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的數量與種類。

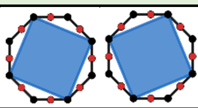
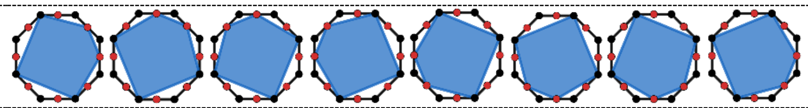
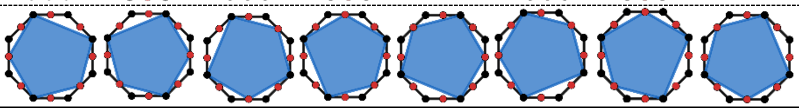
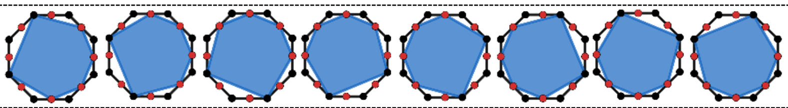
$n=3$		$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接三角形（$\boldsymbol{3b}$）		$T_3(3)=1$	$R_3(3)=1$
總　　和		$\boldsymbol{T_3=1}$	$\boldsymbol{R_3=1}$

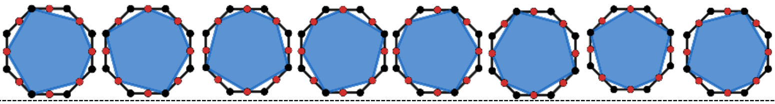
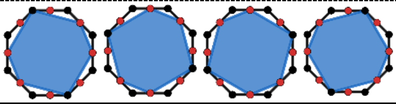
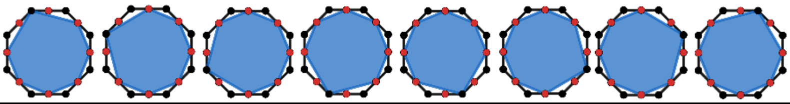
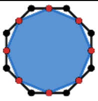
$n=4$		$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接三角形（$\boldsymbol{1a2b}$）		$T_4(3)=4$	$R_4(3)=1$
不連續頂點內接四邊形（$\boldsymbol{4b}$）		$T_4(4)=1$	$R_4(4)=1$
總　　和		$\boldsymbol{T_4=5}$	$\boldsymbol{R_4=2}$

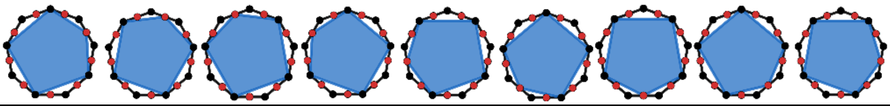
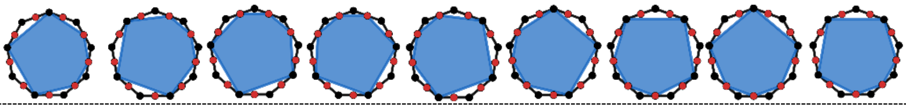
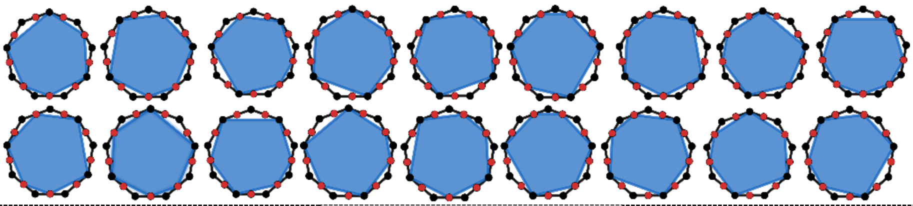
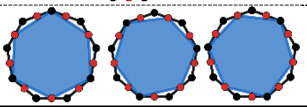
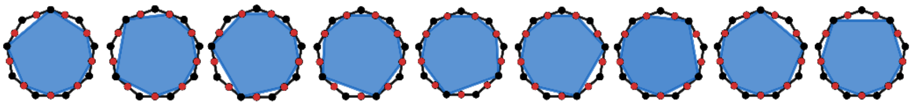
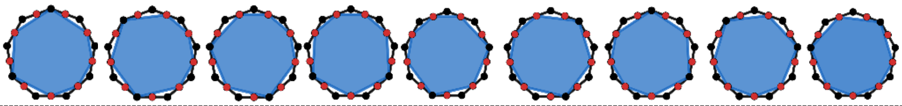
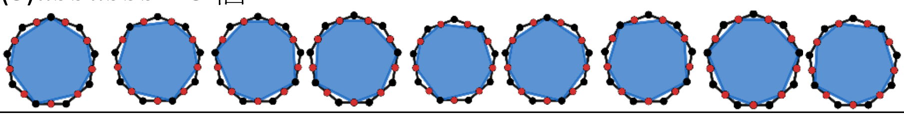
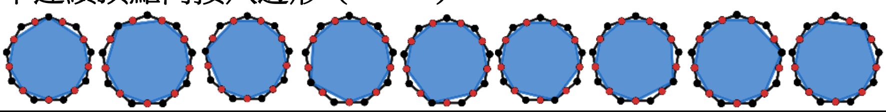
$n=5$		$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接三角形（$\boldsymbol{2a1b}$）		$T_5(3)=5$	$R_5(3)=1$
不連續頂點內接四邊形（$\boldsymbol{1a3b}$）		$T_5(4)=5$	$R_5(4)=1$
不連續頂點內接五邊形（$\boldsymbol{5b}$）		$T_5(5)=1$	$R_5(5)=1$
總　　和		$\boldsymbol{T_5=11}$	$\boldsymbol{R_5=3}$

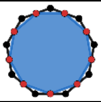
$n=6$	$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接三角形（$\boldsymbol{3a}$） 	$T_6(3)=2$	$R_6(3)=1$
不連續頂點內接四邊形（$\boldsymbol{2a2b}$） (1) $aabb$：6 個  (2) $abab$：3 個 	$T_6(4)=9$	$R_6(4)=2$
不連續頂點內接五邊形（$\boldsymbol{1a4b}$） 	$T_6(5)=6$	$R_6(5)=1$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{6b}$） 	$T_6(6)=1$	$R_6(6)=1$
總　　和	$\boldsymbol{T_6=18}$	$\boldsymbol{R_6=5}$

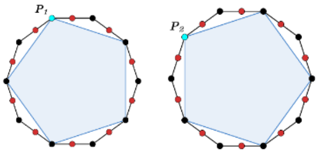
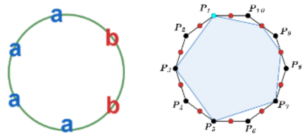
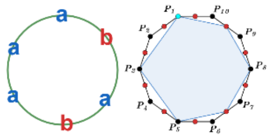
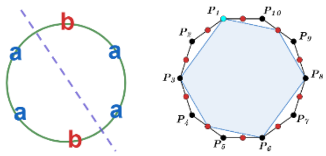
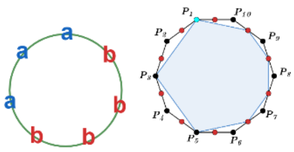
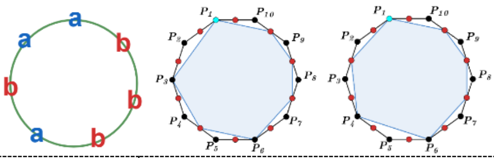
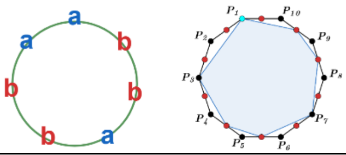
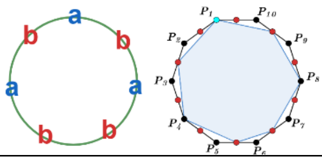
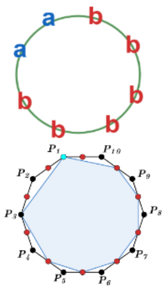
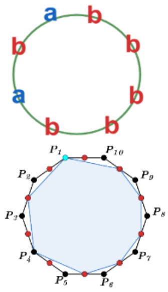
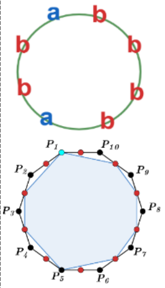
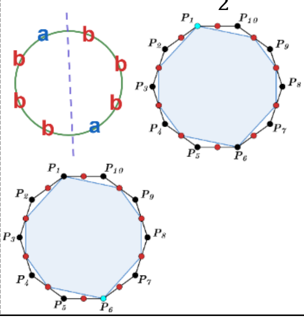
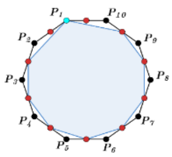
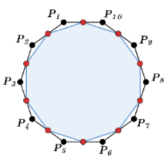
$n=7$	$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接四邊形（$\boldsymbol{3a1b}$） 	$T_7(4)=7$	$R_7(4)=1$
不連續頂點內接五邊形（$\boldsymbol{2a3b}$） (1) $aabbb$：7 個  (2) $ababb$：7 個 	$T_7(5)=14$	$R_7(5)=2$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{1a5b}$） 	$T_7(6)=7$	$R_7(6)=1$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{7b}$） 	$T_7(7)=1$	$R_7(7)=1$
總　　和	$\boldsymbol{T_7=29}$	$\boldsymbol{R_7=5}$

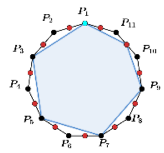
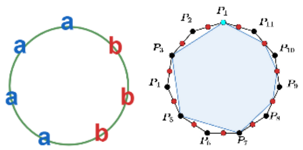
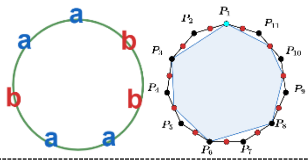
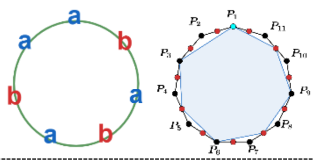
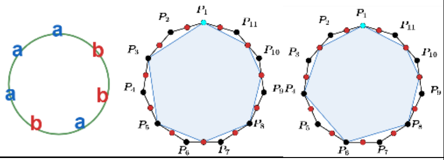
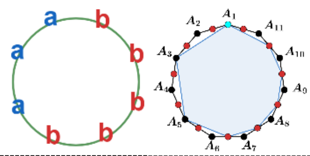
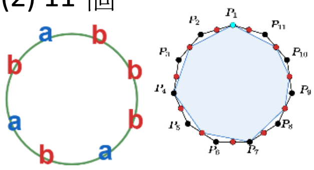
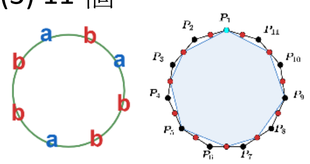
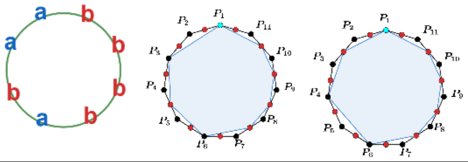
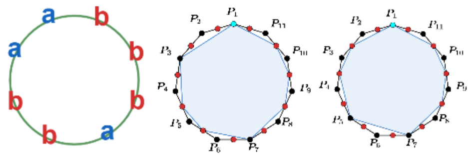
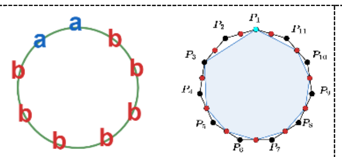
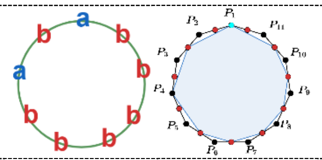
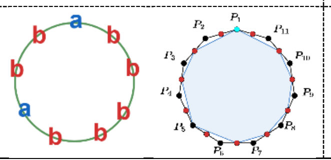
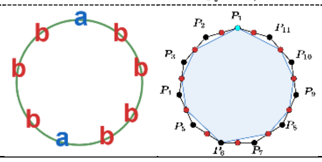
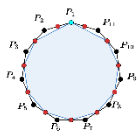
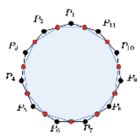
$n=8$	$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接四邊形（$\boldsymbol{4a}$） 	$T_8(4)=2$	$R_8(4)=1$
不連續頂點內接五邊形（$\boldsymbol{3a2b}$） (1) $aaabb$ 8 個  (2) $ababa$ 8 個 	$T_8(5)=16$	$R_8(5)=2$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{2a4b}$） (1) $aabbbb$ 8 個 	$T_8(6)=20$	$R_8(6)=3$

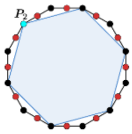
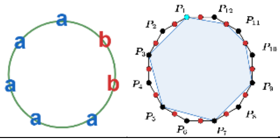
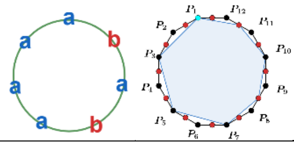
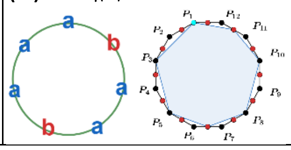
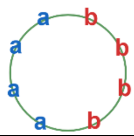
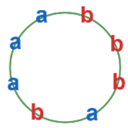
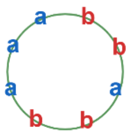
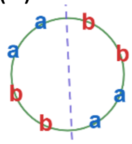
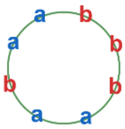
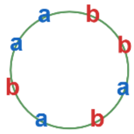
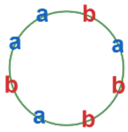
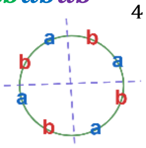
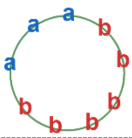
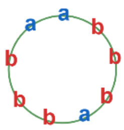
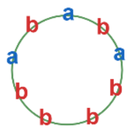
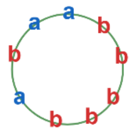
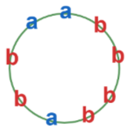
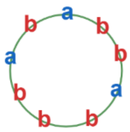
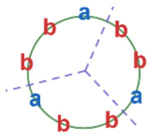
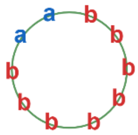
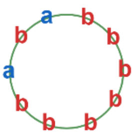
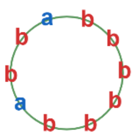
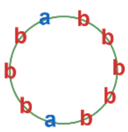
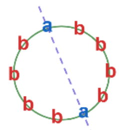
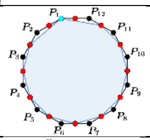
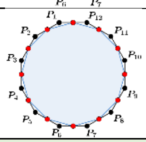
(2) $ababbb$ 8 個 		
(3) $abbabb$ 4 個 		
不連續頂點內接七邊形（$\boldsymbol{1a6b}$） 	$T_8(7)=8$	$R_8(7)=1$
不連續頂點內接八邊形（$\boldsymbol{8b}$） 	$T_8(8)=1$	$R_8(8)=1$
總　　和	$\boldsymbol{T_8=47}$	$\boldsymbol{R_8=8}$

$n=9$	$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接五邊形（$\boldsymbol{4a1b}$） 	$T_9(5)=9$	$R_9(5)=1$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{3a3b}$）	$T_9(6)=30$	$R_9(6)=3$
(1)$aaabbb$：9 個 		
(2) $aabbab$與水平翻轉→$babbaa(aababb)$：9×2個 		
(3) $ababab$：$\frac{9}{3}=3$個 		
不連續頂點內接七邊形（$\boldsymbol{2a5b}$）	$T_9(7)=27$	$R_9(7)=3$
(1) $aabbbbb$：9 個 		
(2) $ababbbb$：9 個 		
(3)$abbabbb$：9 個 		
不連續頂點內接八邊形（$\boldsymbol{1a7b}$） 	$T_9(8)=9$	$R_9(8)=1$

不連續頂點內接九邊形（$\boldsymbol{9b}$） 	$T_9(9)=1$	$R_9(9)=1$
總　　和	$\boldsymbol{T_9=76}$	$\boldsymbol{R_9=9}$

$n=10$	$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接五邊形（$\boldsymbol{5a}$）：2 個 正十邊形中的 10 個頂點中，選取 5 個頂點。 第 1 個頂點可為P_1或P_2，之後 4 個頂點 即依序固定。 	$T_{10}(5)=2$	$R_{10}(5)=1$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{4a2b}$）： (1) $aaaabb$：10 個  (2) $aaabab$：10 個  (3)$\boldsymbol{aabaab}$：5 個 	$T_{10}(6)=25$	$R_{10}(6)=3$
不連續頂點內接七邊形（$\boldsymbol{3a4b}$） (1) $aaabbbb$：10 個  (2) $\boldsymbol{aabab}bbb$與$\boldsymbol{abaab}bbb$：10×2個  (3) $aabbabb$：10 個  (4) $ababbab$：10 個 	$T_{10}(7)=50$	$R_{10}(7)=4$
不連續頂點內接八邊形（$\boldsymbol{2a6b}$） (1) 10 個  (2) 10 個  (3) 10 個  (4)$abbbabbb$：$\frac{10}{2}=5$個 	$T_{10}(8)=35$	$R_{10}(8)=4$
不連續頂點內接九邊形（$\boldsymbol{1a8b}$） 	$T_{10}(9)=10$	$R_{10}(9)=1$
不連續頂點內接九邊形（$\boldsymbol{10b}$） 	$T_{10}(10)=1$	$R_{10}(10)=1$
總　　和	$\boldsymbol{T_{10}=123}$	$\boldsymbol{R_{10}=14}$

$n = 11$	$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{5a1b}$） 	$T_{11}(6) = 11$	$R_{11}(6) = 1$
不連續頂點內接七邊形（$\boldsymbol{4a3b}$） (1) 11 個  (2) 11 個  (3) 11 個  (4) $11 \times 2 = 22$個 $aaababb$與$abaaabb$為同種類的圖形，但不重疊。 	$T_{11}(7) = 55$	$R_{11}(7) = 4$
不連續頂點內接八邊形（$\boldsymbol{3a5b}$） (1) 11 個  (2) 11 個  (3) 11 個  (4) $aababbbb$與$abaabbbb$ $11 \times 2 = 22$個  (5)$aabbabbb$與$abbaabbb$ $11 \times 2 = 22$個 	$T_{11}(8) = 77$	$R_{11}(8) = 5$
不連續頂點內接九邊形（$\boldsymbol{2a7b}$） (1) 11 個  (2) 11 個  (3) 11 個  (4) 11 個 	$T_{11}(9) = 44$	$R_{11}(9) = 4$
不連續頂點內接十邊形（$\boldsymbol{1a9b}$） 	$T_{11}(10) = 11$	$R_{11}(10) = 1$
不連續頂點內接十一邊形（$\boldsymbol{11b}$） 	$T_{11}(11) = 1$	$R_{11}(11) = 1$
總　　和	$\boldsymbol{T_{11} = 199}$	$\boldsymbol{R_{11} = 16}$

$n=12$	$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接六邊形（$\boldsymbol{6a}$） 	$T_{12}(6)$ $=2$	$R_{12}(6)$ $=1$
不連續頂點內接七邊形（$\boldsymbol{5a2b}$） (1) 12 個  (2) 12 個  (3) 12 個 	$T_{12}(7)$ $=36$	$R_{12}(7)$ $=3$
不連續頂點內接八邊形（$\boldsymbol{4a4b}$） (1) 12 個  (2) 12×2=22  (3) 12 個  (4)$\boldsymbol{aabbaabb}$：6 個  (5) 12 個  (6) $aababa\boldsymbol{bb}$與 $aaba\boldsymbol{bbab}$：12×2=22  (7) 12 個  (8)$\boldsymbol{abababab}$：$\frac{12}{4}=3$ 	$T_{12}(8)$ $=105$	$R_{12}(8)$ $=8$
不連續頂點內接九邊形（$\boldsymbol{3a6b}$） (1) 12 個  (2) 12 個  (3) 12 個  (4)$\boldsymbol{aa}b\boldsymbol{a}bbbbb$與$\boldsymbol{a}b\boldsymbol{aa}bbbbb$：24  (5)$\boldsymbol{aa}bb\boldsymbol{a}bbbb$與 $\boldsymbol{a}bb\boldsymbol{aa}bbbb$：24  (6)$a\boldsymbol{b}abbba\boldsymbol{bb}$與 $a\boldsymbol{bb}abbba\boldsymbol{b}$：24  (7) $\boldsymbol{abbabbabb}$：$\frac{12}{3}=4$ 	$T_{12}(9)$ $=112$	$R_{12}(9)$ $=7$
不連續頂點內接十邊形（$\boldsymbol{2a8b}$） (1) 12 個  (2) 12 個  (3) 12 個  (4) 12 個  (5) $\boldsymbol{abbbabbb}$：$\frac{12}{2}=6$ 	$T_{12}(10)$ $=54$	$R_{12}(10)$ $=5$
不連續頂點內接十一邊形（$\boldsymbol{1a10b}$） 	$T_{12}(11)$ $=12$	$R_{12}(11)$ $=1$
不連續頂點內接十二邊形（$\boldsymbol{12b}$） 	$T_{12}(12)$ $=1$	$R_{12}(12)$ $=1$
總　　和	$\boldsymbol{T_{12}}$ $\boldsymbol{=322}$	$\boldsymbol{R_{12}}$ $\boldsymbol{=26}$

二、 正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的數量，以表格方式整理，討論規律性。

正n邊形	不連續頂點內接k邊形的數量											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	T_n
3	1											1
4	4	1										5
5	5	5	1									11
6	2	9	6	1								18
7		7	14	7	1							29
8		2	16	20	8	1						47
9			9	30	27	9	1					76
10			2	25	50	35	10	1				123
11				11	55	77	44	11	1			199
12				2	36	105	112	54	12	1		322
13					13	91	182	156	65	13	1	521

(一)k的範圍限制：當n為偶數時，$\frac{n}{2}\le k\le n$；當n為奇數時，$\frac{n+1}{2}\le k\le n$

$$\therefore \left[\frac{n+1}{2}\right]\le k\le n$$

(二)觀察出遞迴關係式：

正n邊形	不連續頂點內接k邊形的數量											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	T_n
3	1											1
4	4	1										5
5	5	5	1									11
6	2	9	6	1								18
7		7	14	7	1							29
8		2	16	20	8	1						47
9			9	30	27	9	1					76
10			2	25	50	35	10	1				123
11				11	55	77	44	11	1			199
12				2	36	105	112	54	12	1		322
13					13	91	182	156	65	13	1	521

1.由表格中觀察到

$T_6(4)+T_7(4)=T_8(5)$，$T_6(5)+T_7(5)=T_8(6)$，$T_6(6)+T_7(6)=T_8(7)$，⋯

發現「遞迴關係式」:

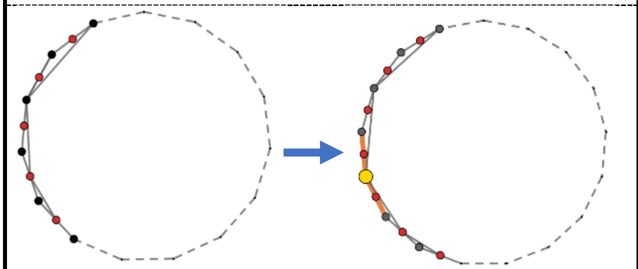
$T_n(k)=T_{n-2}(k-1)+T_{n-1}(k-1)$，

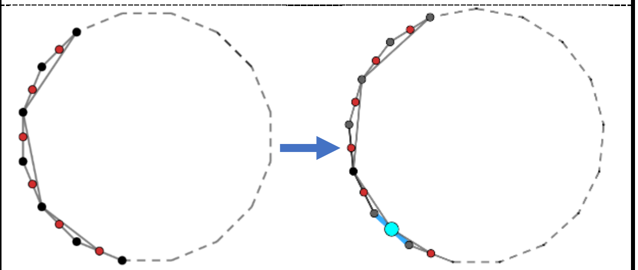
其中$T_3(3)=T_4(4)=\cdots=T_t(t)=1$，$T_4(3)=4$,$T_5(3)=5$,$T_6(3)=2$

2.以圖形來解釋：

$T_{n-2}(k-1)$	+	$T_{n-1}(k-1)$	=	$T_n(k)$
正$n-2$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量	+	正$n-1$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量	=	正n邊形不連續頂點內接k邊形數量
（$n-k-1$個a，$2k-n$個b）		（$n-k$個a，$2k-n-1$個b）		（$n-k$個a，$2k-n$個b）

正$n-2$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量 $T_{n-2}(k-1)$ $(n-k-1)a$ $(2k-n)b$	加 1 a 需增加 2 個邊	正n邊形不連續頂點內接k邊形數量 $T_n(k)$ $(n-k)a$ $(2k-n)b$	正$n-1$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量 $T_{n-1}(k-1)$ $(n-k)a$ $(2k-n-1)b$	加 1 b 只增加 1 個邊	正n邊形不連續頂點內接k邊形數量 $T_n(k)$ $(n-k)a$ $(2k-n)b$

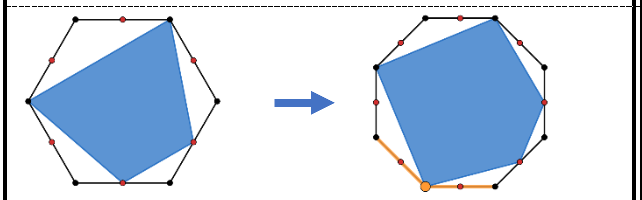


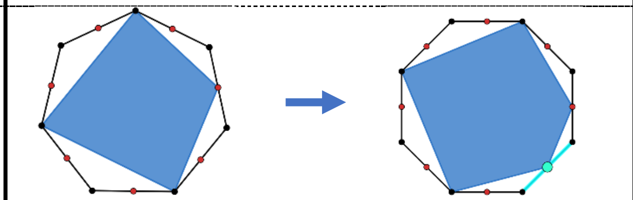


因此，$T_n(k) = T_{n-2}(k-1) + T_{n-1}(k-1)$ 。

例如： $T_6(4) + T_7(4) = 9 + 7 = 16 = T_8(5)$

正六邊形不連續頂點內接四邊形（$2a2b$）數量 $T_6(4)$	加 1 a 需增加 2 個邊	正八邊形不連續頂點內接五邊形（$3a2b$）數量 $T_8(5)$	正七邊形不連續頂點內接四邊形（$3a1b$）數量 $T_7(4)$	加 1 b 只增加 1 個邊	正八邊形不連續頂點內接五邊形（$3a2b$）數量 $T_8(5)$





三、$T_n(k)$的關係式

(一)當$k = n$時，$T_n(k) = T_n(n) = 1$

n \ k	3	4	5	6	7
3	1				
4	4	1			
5	5	5	1		
6	2	9	6	1	
7		7	14	7	1

1. 由表格中觀察： $T_3(3) = T_4(4) = \cdots = T_{13}(13) = 1$
2. 以圖形來解釋：

∵在正n邊形上不連續頂點之內接n多邊形
　必選取了原正n邊形的n個中點（nb），只有 1 個。

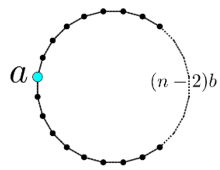
∴ $T_3(3) = T_4(4) = \cdots = T_{13}(13) = 1$

(二)當$k=n-1$時，$T_n(k)=T_n(n-1)=n$

k \ n	3	4	5	6	7
3	1				
4	4	1			
5	5	5	1		
6	2	9	6	1	
7		7	14	7	1

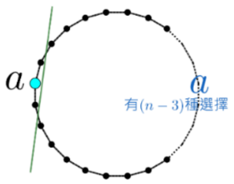
1. 表格中觀察到：$T_4(3)=4$，$T_5(4)=5$， …$T_{13}(12)=13$
2. 以圖形來解釋：

∵在正n邊形上不連續頂點之內接$n-1$多邊形
必選取了原正n邊形的 1 個頂點，$n-2$個中點，
當選取頂點時，有n個選擇，其餘皆選中點。
$\therefore T_n(n-1)=n$



(三)當$k=n-2$時，$T_n(k)=T_n(n-2)=\frac{n(n-3)}{2}$

k \ n	3	4	5	6	7
5	5	5	1		
6	2	9	6	1	
7		7	14	7	1
8		2	16	20	8
9			9	30	27



1. 由表格中觀察到：

$T_5(3)=5=2+3$
$T_6(4)=9=2+3+4$

$\therefore T_n(n-2)=2+3+4+\cdots+(n-2)=\frac{n(n-3)}{2}$

2. 以圖形來解釋：

∵在正n邊形上不連續頂點內接$n-2$邊形為$(2a$，$(n-4)b)$型
先選取第一個頂點(a)時，有n個選擇。
因頂點左右的頂點不能選，所以第 2 個頂點剩下$(n-3)$個選擇。
再除以 2 個a的互換數：2 !

$\therefore T_n(n-2)=\frac{n(n-3)}{2}$

(四)當$k=n-3$時，$T_n(k)=T_n(n-3)=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$

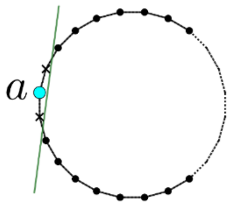
k \ n	3	4	5	6	7
6	2	9	6	1	
7		7	14	7	1
8		2	16	20	8
9			9	30	27
10			2	25	50

1.表格中觀察：

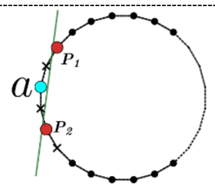
2.以圖形來解釋：

正n邊形上不連續頂點內接$n-3$邊形為（$3a$，（$n-6$）b）型。
依序選擇 3 個頂點，分別為a_1，a_2，a_3

a_1有n個選擇

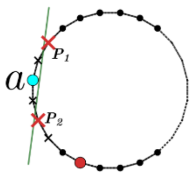


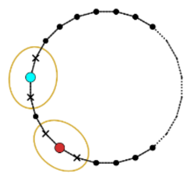
若a_2在P_1，P_2的位置有 2 個選擇 → a_3有$n-5$個選擇



所得內接$n-3$邊形個數為$n\times 2\times(n-5)$

若 a_2不在P_1，P_2位置有$n-5$個選擇 → a_3有$n-6$個選擇





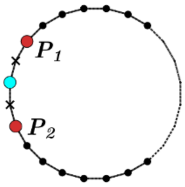
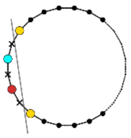
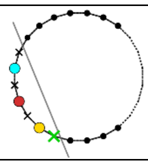
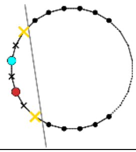
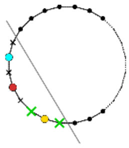
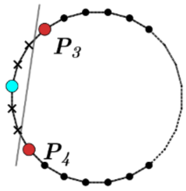
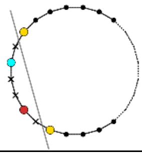
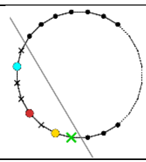
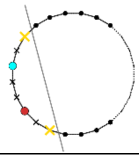
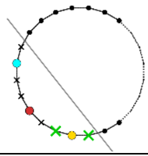
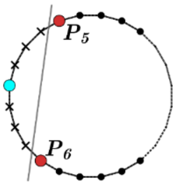
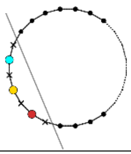
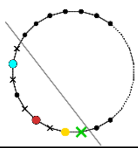
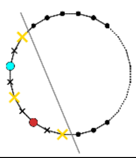
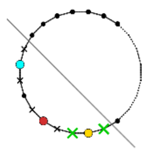
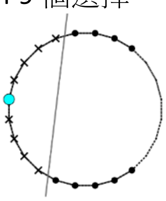
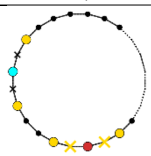
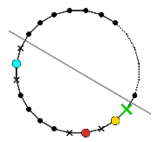
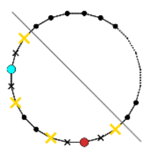
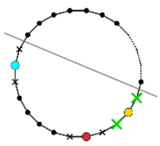
所得內接$n-3$邊形個數為$n(n-5)(n-6)$

$\therefore n[2(n-5)+(n-5)(n-6)]=n(n-5)(n-4)$，再除以 3 頂點$a_1$，$a_2$，$a_3$的互換數：3!

$\therefore T_n(n-3)=\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$

(五)當$k=n-4$時，$T_n(k)=T_n(n-4)=\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}$

正 n 邊形上不連續頂點內接$n-4$邊形（$4a$，$(n-8)b$）型。依序選 4 個頂點：a_1,a_2,a_3,a_4

<table>
<tr><th></th><th>a_2位置的
選擇個數</th><th colspan="2">a_3位置的選擇個數</th><th colspan="2">a_4位置的
選擇個數</th><th>不連續頂點
內接$n-4$邊形個數</th></tr>
<tr><td rowspan="9">a_1位置有 n 個選擇</td><td rowspan="2">a_2在P_1，P_2的位置， 有 2 個選擇
</td><td>a_3接著a_2：
2 個</td><td></td><td>n-7</td><td></td><td>$n\times2\times2(n-7)$</td></tr>
<tr><td>n-7 個</td><td></td><td>n-8</td><td></td><td>$n\times2(n-7)(n-8)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_2在P_3，P_4的位置， 有 2 個選擇
</td><td>a_3接著a_1、a_2
：2 個</td><td></td><td>n-8</td><td></td><td>$n\times2\times2(n-8)$</td></tr>
<tr><td>a_3在a_1、a_2遠處：n-8</td><td></td><td>n-9</td><td></td><td>$n\times2(n-8)(n-9)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">a_2在P_5，P_6的位置， 有 2 個選擇
</td><td>a_3在a_1、a_2之間空位：1 個</td><td></td><td>n-7</td><td></td><td>$n\times2\times1(n-7)$</td></tr>
<tr><td>a_3接著a_1、a_2
：2 個</td><td></td><td>n-8</td><td></td><td>$n\times2\times2(n-8)$</td></tr>
<tr><td>n-9</td><td></td><td>n-9</td><td></td><td>$n\times2(n-9)(n-9)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">其他有
n-9 個選擇
</td><td>找相鄰的 4 點</td><td></td><td>n-8</td><td></td><td>$n(n-9)\times4(n-8)$</td></tr>
<tr><td>n-10</td><td></td><td>n-9</td><td></td><td>$n(n-9)(n-10)(n-9)$</td></tr>
</table>

$$\begin{aligned}\therefore\ & n[2\times2(n-7)+2(n-7)(n-8)+2\times2(n-8)+2(n-8)(n-9)+2\times1(n-7)\\ &+2\times2(n-8)+2(n-9)(n-9)+(n-9)\times4(n-8)+(n-9)(n-10)(n-9)]\\ &=n[2(n-6)(n-7)+2(n-7)(n-10)+2(n^2-15n+510)+(n^2-15n+510)(n-10)]\\ &=n(n-7)(n^2-11n+30)=n(n-7)(n-5)(n-6)\text{，再除以 4!（四點互換數）}\end{aligned}$$

$$\therefore T_n(n-4)=\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}=\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}$$

(六)觀察$T_n(k)$的關係式

正n邊形	不連續頂點內接k邊形的數量，$(n-k)a,(2k-n)b$											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	T_n
3	$3b$ 1											1
4	$1a2b$ 4	$4b$ 1										5
5	$2a1b$ 5	$1a3b$ 5	$5b$ 1									11
6	$3a$ 2	$2a2b$ 9	$1a4b$ 6	$6b$ 1								18
7		$3a1b$ 7	$2a3b$ 14	$1a5b$ 7	$7b$ 1							29
8		$4a$ 2	$3a2b$ 16	$2a4b$ 20	$1a6b$ 8	$8b$ 1						47
9			$4a1b$ 9	$3a3b$ 30	$2a5b$ 27	$1a7b$ 9	$9b$ 1					76
10			$5a$ 2	$4a2b$ 25	$3a4b$ 50	$2a6b$ 35	$1a8b$ 10	$10b$ 1				123
11				$5a1b$ 11	$4a3b$ 55	$3a5b$ 77	$2a7b$ 44	$1a9b$ 11	$11b$ 1			199
12				$6a$ 2	$5a2b$ 36	$4a4b$ 105	$3a6b$ 112	$2a8b$ 54	$1a10b$ 12	$12b$ 1		322
13					$6a1b$ 13	$5a3b$ 91	$4a5b$ 182	$3a7b$ 156	$2a9b$ 65	$1a11b$ 13	$13b$ 1	521

$$\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}$$

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}$$

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}$$

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

觀察關係式發現，$T_n(n-t)=\dfrac{n(n-t-1)(n-t-2)\cdots(n-2t+1)}{t!}=n\cdot\dfrac{(n-t)!}{t!(n-2t)!}\cdot\dfrac{1}{n-t}$

取$k=n-t$代入，$T_n(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}$

◆正 n 邊形上不連續頂點內接 k 邊形的數量：$T_n(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}$

從排列組合的觀點，解釋公式：

∵正 n 邊形上不連續頂點內接 k 邊形，必為 $n-k$ 個頂點，$2k-n$ 個中點類型。
即（$(n-k)a,(2k-n)b$ 型）。

∴先將 $(n-k)$個$a,(2k-n)$個b，共 k 個，做不盡相異物直線排列：$\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}$

再除以轉動數 k：$\left(\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\right)\cdot\dfrac{1}{k}$

最後，選擇放置正 n 邊形的出發位置有 n 個選擇：$n\cdot\left(\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\right)\cdot\dfrac{1}{k}$

$$T_n(k)=\underbrace{n\cdot}_{\text{初始位置}}\underbrace{\left(\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\right)}_{\substack{(n-k)\text{個}a,(2k-n)\text{個}b\\ \text{不盡相異物直線排列}}}\underbrace{\cdot\frac{1}{k}}_{\text{轉動數}}$$

(七)正n邊形上不連續頂點內接k邊形數量總和

∵範圍限制 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\le k\le n$

且 $T_n=T_n\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)+T_n\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+1\right)+\cdots+T_n(n-1)+T_n(n)$

又 $T_n(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}$

∴ $T_n=\displaystyle\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n}n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}$

雖然整理出T_n，但此式子不好化簡。因此參考文獻 Crux Mathematicorum, Vol. 45(8), October 2020（354/ MathemAttic），以另一種方法找T_n，討論如下：

四、從頂點的「不連續選擇」討論正 n 邊形上不連續頂點內接多邊形數量總和：T_n

(一) 定義

「***length n***」:「$length\ n$」表示n個由 0 和 1 組成的數串，且 1 不相連續。

「A_n」 :「 $length\ n$」的數量，記作A_n 。

$A_1=2$	$A_2=3$	$A_3=5$	$A_4=8$
0	00	000	0000
1	01	001	0001
	10	010	0010
		100	0100
		101	0101
			1000
			1001
			1010
		$A_3=A_2+A_1$	$A_4=A_3+A_2$

(二) 觀察A_n：發現 $A_3=A_2+A_1$，$A_4=A_3+A_2$， $A_5=A_4+A_3=13$，・・・

因此，$\boxed{A_n=A_{n-1}+A_{n-2}\text{，其中}A_1=2\text{，}A_2=3}$

$\because A_n$恰為費氏數列F_{n+2}，又$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

$$\therefore A_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

(三) 觀察正 n 邊形的 n 個頂點與其內接多邊形重疊的頂點，發現選取頂點時不可連續，若選取頂點視為”1”，未選取頂點視為”0”，則”1”不相連續，且頭尾不可皆 1。

$T_n = A_{n-1} + A_{n-3}$，其中 $n\geq 5$

出發點不選，剩$n-1$個點。
即 $\boldsymbol{length(n-1)}$。數量有A_{n-1}種

出發點選取，左右不可選，剩$n-3$個點。
即 $\boldsymbol{length(n-3)}$。數量有A_{n-3}種

$$T_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\text{，}n\geq 5\ \text{且}\ \ T_3=1\text{，}T_4=5$$

五、將正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的「**種類**」

將先前的討論，以表格方式整理出$R_n(k)$、R_n

正n邊形	不連續頂點所構成內接 k 邊形的**種類**，$(n-k)a,(2k-n)b$ 型											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	R_n
3	$3b$ 1											1
4	$1a2b$ 1	$4b$ 1										2
5	$2a1b$ 1	$1a3b$ 1	$5b$ 1									3
6	$3a$ 1	$2a2b$ 2	$1a4b$ 1	$6b$ 1								5
7		$3a1b$ 1	$2a3b$ 2	$1a5b$ 1	$7b$ 1							5
8		$4a$ 1	$3a2b$ 2	$2a4b$ 3	$1a6b$ 1	$8b$ 1						8
9			$4a1b$ 1	$3a3b$ 3	$2a5b$ 3	$1a7b$ 1	$9b$ 1					9
10			$5a$ 1	$4a2b$ 3	$3a4b$ 4	$2a6b$ 4	$1a8b$ 1	$10b$ 1				14
11				$5a1b$ 1	$4a3b$ 4	$3a5b$ 5	$2a7b$ 4	$1a9b$ 1	$11b$ 1			16
12				$6a$ 1	$5a2b$ 3	$4a4b$ 8	$3a6b$ 7	$2a8b$ 5	$1a10b$ 1	$12b$ 1		26
13					$6a1b$ 1	$5a3b$ 5	$4a5b$ 10	$3a7b$ 8	$2a9b$ 5	$1a11b$ 1	$13b$ 1	31

◆正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形，若經過旋轉或翻轉相同者，則視為<u>同類</u>。

$\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\left[\frac{n-13}{2}\right]+\ldots$（加到最後一個正整數）

$\left[\frac{n-2}{2}\right]$

(一)觀察表格：斜向（\）

1. 當$k=n$時，即$t=0$，內接n邊形（n個中點）（nb）：1 種。　∴ $R_n(n)=1$

2. 當$k=n-1$時，即$t=1$，內接$n-1$邊形（$1a$，$(n-2)b$）：

$a\underbrace{\text{bbb}\ldots\text{b}}_{n-2\text{ 個}}$：1 種　∴ $R_n(n-1)=1$

3. 當$k=n-2$時，即$t=2$，內接$n-2$邊形（$2a$，$(n-4)b$）

$aa\underbrace{\text{bbb}\ldots\text{b}}_{n-4\text{ 個}}$，$a\underbrace{b}_{1\text{ 個}}a\underbrace{\text{bbb}\ldots\text{b}}_{n-5\text{ 個}}$，$a\underbrace{bb}_{2\text{ 個}}a\underbrace{\text{bbb}\ldots\text{b}}_{n-6\text{ 個}}$，⋯，$a\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-4}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{\text{bbb}\ldots\text{b}}_{n-4-\left[\frac{n-4}{2}\right]\text{個}}$

有 $1+\left[\frac{n-4}{2}\right]=\left[\frac{n-2}{2}\right]$ 種　∴ $R_n(n-2)=\left[\frac{n-2}{2}\right]$

4. 當$k=n-3$時，即$t=3$，內接$n-3$邊形（$3a$，$(n-6)b$）

$aaa\underbrace{b\ldots b}_{n-6\text{ 個}}$，$aa\underbrace{b}_{1\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-7\text{ 個}}$，$aa\underbrace{bb}_{2\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-8\text{ 個}}$，⋯，$aa\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-6}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-6-\left[\frac{n-6}{2}\right]\text{個}}$ 有$1+\left[\frac{n-6}{2}\right]=\left[\frac{n-4}{2}\right]$種
$a\underbrace{b}_{\text{固定}}a\underbrace{b}_{\text{至少 1 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-8\text{ 個}}$，⋯，$aba\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-7}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-7-\left[\frac{n-7}{2}\right]\text{個}}$，有$\left[\frac{n-7}{2}\right]$種
$a\underbrace{bb}_{\text{固定}}a\underbrace{bb}_{2\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-10\text{ 個}}$，$a\underbrace{bb}_{\text{固定}}a\underbrace{bbb}_{3\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-11\text{ 個}}$，⋯，$abba\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-8}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-8-\left[\frac{n-8}{2}\right]\text{個}}$ 有$\left[\frac{n-8}{2}\right]-1=\left[\frac{n-10}{2}\right]$種
$a\underbrace{bbb}_{\text{固定}}a\underbrace{bbb}_{3\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-12\text{ 個}}$，$a\underbrace{bbb}_{\text{固定}}a\underbrace{bbbb}_{4\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-13\text{ 個}}$，⋯，$abbba\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-9}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-9-\left[\frac{n-9}{2}\right]\text{個}}$， 有$\left[\frac{n-9}{2}\right]-2=\left[\frac{n-13}{2}\right]$種
$a\underbrace{bbbb}_{\text{固定}}a\underbrace{bbbb}_{4\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-14\text{ 個}}$，$a\underbrace{bbbb}_{\text{固定}}a\underbrace{bbbbb}_{5\text{ 個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-15\text{ 個}}$，⋯，$abbbba\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-10}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{b\ldots b}_{n-10-\left[\frac{n-10}{2}\right]\text{個}}$， 有$\left[\frac{n-10}{2}\right]-3=\left[\frac{n-16}{2}\right]$種
• • • • • •
$a\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-6}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{b\ldots b}_{\left[\frac{n-6}{2}\right]\text{個}}a\underbrace{b\ldots b}_{\text{其他}}$　有$\left[\frac{n-3m-1}{2}\right]$種（其中$m\in N$，$n-3m\geq 1$）

$$\therefore R_n(n-3)=\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-3m-1}{2}\right]$$，其中$m\in N$，$n-3m\geq 1$

由於觀察表格的**斜向**，若繼續討論下去會很複雜。所以換成觀察**直向**，探討是否有規律性。

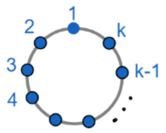
(二) 觀察表格：直向（I）

直行觀察種類表格發現有對稱的規律性，

正n邊形內接k邊形（$xayb$型），其中$\boldsymbol{x+y=k}$，且$x=n-k$，$y=2k-n$，

$\boldsymbol{R_n(k)}$可視為x個a，y個b的珠狀排列方法數。參酌 Burnside’s Formula 找出種類公式。

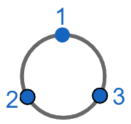
1. 將$\boldsymbol{k}$個位置代數化處理

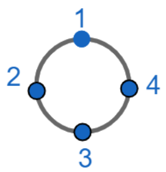


因為每個位置可放a或b，並且旋轉或翻轉相同者視為等價類。

因此為不盡相異物的珠狀排列。

令$\boldsymbol{G_k}$表示珠狀排列的動作所成集合。

例如：$\boldsymbol{k=3}$	排列方式	旋轉動作	排列方式	翻轉動作
	$e=(1)(2)(3)$	轉 $0°$	$(1)(23)$	對稱軸過 1 翻轉
	$(1\ 2\ 3)$	轉 $120°$	$(2)(13)$	對稱軸過 2 翻轉
	$(1\ 3\ 2)$	轉 $240°$	$(3)(12)$	對稱軸過 3 翻轉
	$\therefore G_3=3+3=6$			

例如：$\boldsymbol{k=4}$	排列方式	旋轉動作	排列方式	翻轉動作
	$e=(1)(2)(3)(4)$	轉 $0°$	$(12)(34)$	對稱軸過 1.2 間與 3.4 間的翻轉
	$(1\ 2\ 3\ 4)$	轉 $90°$	$(14)(23)$	對稱軸過 1.4 間與 2.3 間的翻轉
	$(1\ 3)(2\ 4)$	轉 $180°$	$(1)(3)(24)$	對稱軸過 1.3 間的翻轉
	$(1\ 4\ 3\ 2)$	轉 $270°$	$(2)(4)(13)$	對稱軸過 2.4 間的翻轉
	$\therefore G_4=4+4=8$			

則考慮G_k

旋轉有$\boldsymbol{k}$種動作：轉 $\frac{i}{k}\times 360°$，$i=0,1,2,\cdot\cdot\cdot,k-1$

翻轉也有$\boldsymbol{k}$種動作：

k為奇數: 對稱軸過i的翻轉，$i=1,2,\ldots,k$，共k種	
k為偶數: (1)對稱軸過i及$i+\frac{k}{2}$之翻轉，$i=1,2,\ldots,\frac{k}{2}-1$ (2)對稱軸過（i與$i+1$）間及（$i+\frac{k}{2}$與$i+1+\frac{k}{2}$ 間）的翻轉	合計k種

因此，$|G_k|$ (動作種類) $=k$（旋轉）$+k$（翻轉）$=2k$ 種。

2. 計算$|X_g|$：引入代數學中的 Burnside's Formula

Burnside's Formula

設G_k為作用在集合X的排列群，若集合$X_g=\{x|gx=x，x\epsilon X\}$，表示某個排列元素$g$作用在$X$上會保持不動的元素所成集合，則$R=\frac{1}{|G_k|}\sum_{g\epsilon G_k}|X_g|$，其中$R$表示集合$X$可分割出$R$個不同的**等價類**數量。

X_g在珠狀排列中，視為「針對某種旋轉或翻轉動作g後相同者的那些排列」所形成的集合，而等價類數量R即為珠狀排列之方法數。

Burnside's Formula 角色	珠狀排列	Burnside's Formula 角色	珠狀排列
集合X	珠狀排列方式	X中元素x	某種珠狀排列方式
排列群G_k	珠狀排列的動作變換方式	G_k中元素g	某種珠狀排列動作變換方式g
不動群X_g	經過g動作變換後相同的那些排列所成之集合	**等價類數量R**	**R個不同的珠狀排列之方法數**

因此，只要計算G_k中每個g所對應的$|X_g|$，就能利用 Burnside's Formula 來計算珠狀排列數。

例如，$k=12$

G_{12}旋轉動作	G_{12}翻轉動作
$e=g_1$=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)	g_{13}=(1)(7)(2 12)(3 11)(4 10)(5 9)(6 8)
g_2=(1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12)	g_{14}=(2)(8)(1 3)(4 12)(5 11)(6 10)(7 9)
g_3=(1 3 5 7 9 11)(2 4 6 8 10 12)	g_{15}=(3)(9)(2 4)(1 5)(6 12)(7 11)(8 10)
g_4=(1 4 7 10)(2 5 8 11)(3 6 9 12)	g_{16}=(4)(10)(3 5)(2 6)(1 7)(8 12)(9 11)
g_5=(1 5 9)(2 6 10)(3 7 11)(4 8 12)	g_{17}=(5)(11)(10 12)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)
g_6=(1 6 11 4 9 2 7 12 5 10 3 8)	g_{18}=(6)(12)(1 11)(2 10)(3 9)(4 8)(5 7)
g_7=(1 7)(2 8)(3 9)(4 10)(5 11)(6 12)	g_{19}=(1 2)(3 12)(4 11)(5 10)(6 9)(7 8)
g_8=(1 8 3 10 5 12 7 2 9 4 11 6)	g_{20}=(2 3)(1 4)(5 12)(6 11)(7 10)(8 9)
g_9=(1 9 5)(2 10 6)(3 11 7)(4 12 8)	g_{21}=(3 4)(2 5)(1 6)(7 12)(8 11)(9 10)
g_{10}=(1 10 7 4)(2 11 8 5)(3 12 9 6)	g_{22}=(4 5)(3 6)(2 7)(1 8)(9 12)(10 11)
g_{11}=(1 11 9 7 5 3)(2 12 10 8 6 4)	g_{23}=(5 6)(4 7)(3 8)(2 9)(1 10)(11 12)
g_{12}=(1 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2)	g_{24}=(6 7)(8 5)(4 9)(3 10)(2 11)(1 12)

(1) 旋轉動作

① 考慮 cycle 的產生方式：12-cycle 因為旋轉格數與 12 互質（每次可轉 1、5、7、11 格，恰對應g_2、g_6、g_8、g_{12}）所以會把每個位置「跳」完後，才回出發點。

∴ 考慮「12 以下，與 12 互質的正整數有幾個」，通常以$\varphi(d)$來表示（尤拉函數）

∴ **$\varphi(12)=4$，即有 4 個 12-cycle**

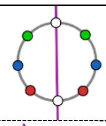
② **同 cycle 內須皆為a或皆為b**，如此動作變換後才不變。

(2) 翻轉動作

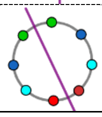
翻轉動作會將兩個一組的位置交換，所以必可寫成一群 2-cycle 乘積。

① k為偶數：

對稱軸過對面的兩個位置的g可拆成 2 個 1-cycle 與$\frac{k-2}{2}$個 2-cycle。



對稱軸不過任何位置的g可拆成$\frac{k}{2}$個 2-cycle



② k為奇數：所有g的對稱軸必定過某一個位置，均可拆成 1 個 1-cycle 與$\frac{k-1}{2}$個 2-cycle

例如：$k=12$時。6 個a，6 個b，珠狀排列

◆旋轉動作

(1) G_{12}有 1 種 12 個 $1-cycle$的g，排入 $6a$、$6b$：$\frac{12!}{6!\,6!}\times\varphi(1)=924\times1=924$(種)

(2) G_{12}有 1 種 6 個 $2-cycle$的g，6 個 2 − cycle 排入 $6a$、$6b$，而同一個 $2-cycle$ 內必皆a或皆b。 ∴ 視為$\frac{6!}{\left(\frac{6}{2}\right)!\left(\frac{6}{2}\right)!}\times\varphi(2)=20\times1=20$(種)

(3) G_{12}有 2 種 4 個 $3-cycle$的g，排入 $6a$、$6b$，而同一個 $3-cycle$內必皆a或皆b。

∴ 視為$\frac{4!}{\left(\frac{6}{3}\right)!\left(\frac{6}{3}\right)!}\times\varphi(3)=6\times2=12$(種)

(4) G_{12}有 2 種 3 個 $4-cycle$的g，排入 $6a$、$6b$，而同一個 $4-cycle$內必皆a或皆b。無法滿足。

☆ **因此x個a，y個b之最大公因數$(x，y)=d$須被 cycle 長度d_i整除。**

(5) G_{12}有 2 種 2 個 $6-cycle$的g， ∴ 6 個a置於同一個$cycle$，6 個b置於同$cycle$，

∴ $\frac{2!}{1!\,1!}\times\varphi(6)=2\times2=4$(種)

(6) G_{12}有 4 種 1 個 $12-cycle$的g，但無法滿足 $12-cycle$內皆a或皆b。

◆翻轉動作

(7) G_{12}有 6 種 2 個 $1-cycle$和 5 個 $2-cycle$的g，同一個$cycle$需皆a或皆b

∴ 2 個 $1-cycle$須同時a或同時b ∴ $\left[\frac{5!}{\left(\frac{6-2}{2}\right)!\left(\frac{6}{2}\right)!}+\frac{5!}{\left(\frac{6}{2}\right)!\left(\frac{6-2}{2}\right)!}\right]\times6=120$(種)

(8) G_{12}有 6 種 6 個 $2-cycle$的g ∴ $\frac{6!}{\left(\frac{6}{2}\right)!\left(\frac{6}{2}\right)!}\times6=120$(種)

由(1)～(8)，共$\frac{1}{24}[924+20+12+4+120+120]=50$(種)。

3. 整理出種類公式：

x 個 a ， y 個 b 的珠狀排列方法數，若 $x+y=k$ ，取 $(x,y)=d$ ，且 d 的因數為 $d_1,d_2,\cdots,d_w$ ， $\varphi(d_i)$ 表示不大於 d_i 且與 d_i 互質的正整數個數。

(1) k 為奇數

$$\frac{1}{2k}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{x}{d_i}\right)!\left(\frac{y}{d_i}\right)!}}_{\text{旋轉}}+\underbrace{k\cdot\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{x}{2}\right]!\left[\frac{y}{2}\right]!}}_{\text{翻轉}}\right)$$

$\because x+y=k$ 為奇數 $\therefore x,y$ 必一奇一偶

$\therefore$ 對稱軸必過奇數的 a 或 b

因不知道 1-cycle 是 a 或 b ，故取高斯符號。

(2) k 為偶數， x,y 為奇數

$$\frac{1}{2k}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{x}{d_i}\right)!\left(\frac{y}{d_i}\right)!}}_{\text{旋轉}}+\underbrace{k\cdot\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{x-1}{2}\right)!\left(\frac{y-1}{2}\right)!}}_{\text{翻轉}}\right)$$

對稱軸過 a 和 b

(3) k 為偶數， x,y 為偶數：

對稱軸過 aa 對稱軸過 bb 對稱軸不過位置

$$\frac{1}{2k}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{x}{d_i}\right)!\left(\frac{y}{d_i}\right)!}}_{\text{旋轉}}+\underbrace{\frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{x-2}{2}\right)!\left(\frac{y}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{x}{2}\right)!\left(\frac{y-2}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{x}{2}\right)!\left(\frac{y}{2}\right)!}\right)}_{\text{翻轉}}\right)$$

又 $R_n(k)$ 表示正 n 邊形內接 k 邊形（ $xayb$ 型）之**種類**，其中 $x+y=k$

$\because x=n-k$ ， $y=2k-n$ ，代入公式，整理出 $R_n(k)$ 如下：

$R_n(k)$ 表示正 n 邊形內接 k 邊形的種類，取 $(n-k,2k-n)=d$ ，且 d 的因數為 $d_1,d_2,\cdots,d_w$ ， $\varphi(d_i)$ 表示不大於 d_i 且與 d_i 互質的正整數個數。

(1) k 為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{n-k}{2}\right]!\left[\frac{2k-n}{2}\right]!}\right)$$

(2) k 為偶數， $n-k,2k-n$ 為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-1}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-1}{2}\right)!}\right)$$

(3) k 為偶數， $n-k,2k-n$ 為偶數：

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+\frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-2}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-2}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}\right)\right)$$

例 1：[k 為奇數]

正12邊形內接9邊形，$n=12$，$k=9$，$3a6b$型，$(3,6)=3$，公因數1、3

$$R_{12}(9)=\frac{1}{18}\left[\varphi(1)\frac{9!}{3!\,6!}+\varphi(3)\frac{3!}{1!\,2!}+9\times\frac{4!}{1!\,3!}\right]=\frac{1}{18}[84+2\times3+9\times4]=7$$

例 2：[k 為偶數，$n-k$, $2k-n$ 為奇數]

正15邊形內接12邊形，$n=15$，$k=12$，$3a9b$型，$(3,9)=3$，公因數1、3

$$R_{15}(12)=\frac{1}{24}\left[\varphi(1)\frac{12!}{3!\,9!}+\varphi(3)\frac{4!}{1!\,3!}+12\times\frac{5!}{1!\,4!}\right]=\frac{1}{24}[220+2\times4+6\times5\times2]=12$$

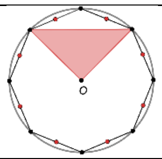
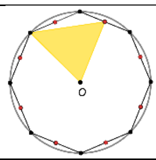
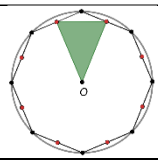
例 3：[k 為偶數，$n-k$, $2k-n$ 為偶數]

正16邊形內接12邊形，$n=16$，$k=12$，$4a8b$型，$(4,8)=4$，公因數1、2、4

$$R_{16}(12)=\frac{1}{24}\left[\varphi(1)\frac{12!}{4!\,8!}+\varphi(2)\frac{6!}{2!\,4!}+\varphi(4)\frac{3!}{1!\,2!}+\frac{12}{2}\times\left(\frac{5!}{1!\,4!}+\frac{5!}{2!\,3!}+\frac{6!}{2!\,4!}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{24}[495+15+2\times3+6\times(5+10+15)]=29$$

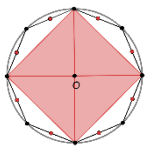
六、正n邊形上不連續頂點內接多邊形的三角形拼板

將不連續頂點內接多邊形之頂點與圓心相連，可將內接多邊形分割成三種類型的三角形拼板，分別討論如下：

「頂點－頂點」拼板 （aa 拼板）	「頂點－中點」拼板 （ab 拼板）	「中點－中點」拼板 （bb 拼版）
		

例如：正八邊形上不連續頂點內接多邊形的三角形拼板

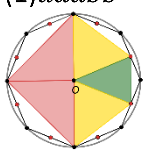
1.不連續頂點內接四邊形（$4a$）



需要
4 個aa拼板

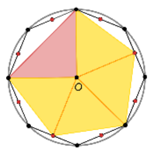
2.不連續頂點內接五邊形（$3a2b$）

(1)$aaabb$



需要
2 個aa拼板
2 個ab拼板
1 個bb拼板

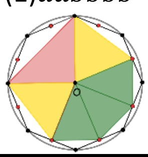
(2)$ababa(aabab)$



需要
1 個aa拼板
4 個ab拼板

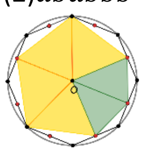
3.不連續頂點內接六邊形（$2a4b$）

(1)$aabbbb$



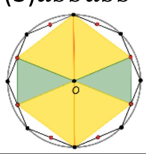
需要
1 個aa拼板
2 個ab拼板
3 個bb拼板

(2)$ababbb$



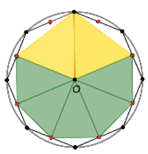
需要
4 個ab拼板
2 個bb拼板

(3)$abbabb$



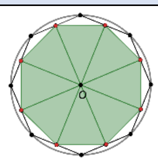
需要
4 個ab拼板
2 個bb拼板

4.不連續頂點內接七邊形（$1a6b$）



需要
2 個ab拼板
5 個bb拼板

5.不連續頂點內接八邊形（$8b$）



需要
8 個bb拼板

∴正 n 邊形上不連續頂點所構成內接 k 邊形皆可使用 aa 拼板、ab 拼板、bb 拼板拼組而成。

伍、研究結果

一、正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形，k的範圍限制：$\left[\frac{n+1}{2}\right] \le k \le n$

二、正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形，數量的遞迴關係式：

$T_n(k)=T_{n-2}(k-1)+T_{n-1}(k-1)$，其中$T_3(3)=T_4(4)=\cdots=T_t(t)=1, T_4(3)=4$,$T_5(3)=5$,$T_6(3)=2$

三、正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形

(一) 數量：$T_n(k)=n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}$，數量總和：$T_n=\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}$

(二) 從頂點的不連續選擇，數量總和：$T_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,$n\ge 5$且$T_3=1$,$T_4=5$

四、正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的種類

(一) $R_n(n)=1$,$R_n(n-1)=1$,$R_n(n-2)=\left[\frac{n-2}{2}\right]$,

$R_n(n-3)=\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-3m-1}{2}\right]$，其中$m\in N$,$n-3m\ge 1$

(二) 取$(n-k,2k-n)=d$且d的因數為$d_1,d_2,\cdots,d_w$，

$\varphi(d_i)$表示不大於d_i且與d_i互質的正整數個數。

(1) k為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{n-k}{2}\right]!\left[\frac{2k-n}{2}\right]!}\right)$$

(2) k為偶數，$n-k, 2k-n$為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-1}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-1}{2}\right)!}\right)$$

(3) k為偶數，$n-k, 2k-n$為偶數：

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}\right.$$

$$\left.+\frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-2}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-2}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}\right)\right)$$

五、正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形皆可用 *aa* **拼板**、 *ab* **拼板**、 *bb* **拼板**拼組而成。

陸、討論

一、正 n 邊形上 2 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形

(一)定義

1. 正 n 邊形上 2 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形：
正 n 邊形上每邊三等分有 2 個等分點，從 n 個頂點，$2n$ 個等分點中，每邊只能選一個點，不連續頂點所構成內接 k 邊形。
2. $T_{(n,2)}(k)$：正 n 邊形上 2 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形的**數量**。

(二)數量

正 n 邊形上 2 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形，必為 $(n-k)a,(2k-n)b$ 型。

在選取 $2k-n$ 個**等分點**時，每邊各有 2 個等分點可選擇。

因此，$T_{(n,2)}(k)=T_n(k)\times 2^{2k-n}$，以表格方式整理 $T_{(n,2)}(k)$ 如下：

正 n 邊形	正 n 邊形上 2 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形的**數量**，$(n-k)a,(2k-n)b$ 型											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$T_{(n,2)}$
3	$3b$ 1×2^3											8
4	$1a2b$ 4×2^2	$4b$ 1×2^4										32
5	$2a1b$ 5×2	$1a3b$ 5×2^3	$5b$ 1×2^5									82
6	$3a$ 2	$2a2b$ 9×2^2	$1a4b$ 6×2^4	$6b$ 1×2^6								198
7		$3a1b$ 7×2	$2a3b$ 14×2^3	$1a5b$ 7×2^5	$7b$ 1×2^7							478
8		$4a$ 2	$3a2b$ 16×2^2	$2a4b$ 20×2^4	$1a6b$ 8×2^6	$8b$ 1×2^8						1154
9			$4a1b$ 9×2	$3a3b$ 30×2^3	$2a5b$ 27×2^5	$1a7b$ 9×2^7	$9b$ 1×2^9					**
10			$5a$ 2	$4a2b$ 25×2^2	$3a4b$ 50×2^4	$2a6b$ 35×2^6	$1a8b$ 10×2^8	$10b$ 1×2^{10}				**
11				$5a1b$ 11×2	$4a3b$ 55×2^3	$3a5b$ 77×2^5	$2a7b$ 44×2^7	$1a9b$ 11×2^9	$11b$ 1×2^{11}			**
12				$6a$ 2	$5a2b$ 36×2^2	$4a4b$ 105×2^4	$3a6b$ 112×2^6	$2a8b$ 54×2^8	$1a10b$ 12×2^{10}	$12b$ 1×2^{12}		**
13					$6a1b$ 13×2	$5a3b$ 91×2^3	$4a5b$ 182×2^5	$3a7b$ 156×2^7	$2a9b$ 65×2^9	$1a11b$ 13×2^{11}	$13b$ 1×2^{13}	**

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}\times 2^{n-8}$$

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\times 2^{n-6}$$

$$\frac{n(n-3)}{2}\times 2^{n-4}$$

$$n\times 2^{n-2}$$

$$2^n$$

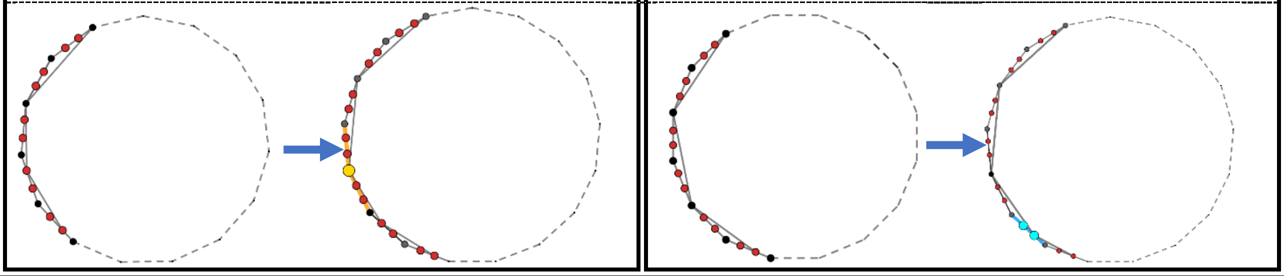
(三)數量的遞迴關係式

觀察發現存在**遞迴關係式**：$T_{(n-2,2)}(k-1)+2\cdot T_{(n-1,2)}(k-1)=T_{(n,2)}(k)$

，其中 $T_{(t,2)}(t)=2^t$，當 $t\geq 3$， 且 $T_{(4,2)}(3)=4\times 2^2, T_{(5,2)}(3)=5\times 2, T_{(6,2)}(3)=2$

◆幾何意義：

正$n-2$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量	加 1 個頂點 需增加 2 個邊	正n邊形不連續頂點內接k邊形數量	正$n-1$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量	加 1 個等分點 ×2 只增加 1 個邊	正n邊形不連續頂點內接k邊形數量
$T_{(n-2,2)}(k-1)$		$T_{(n,2)}(k)$	$T_{(n-1,2)}(k-1)$		$T_{(n,2)}(k)$
$(n-k-1)a$		$(n-k)a$	$(n-k)a$		$(n-k)a$
$(2k-n)b$		$(2k-n)b$	$(2k-n-1)b$		$(2k-n)b$



(四) 數量的一般項公式

正n邊形上 2 等分點不連續頂點所構成內接k邊形，必為$(n-k)a,(2k-n)b$型。

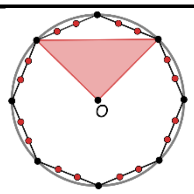
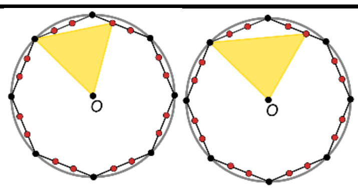
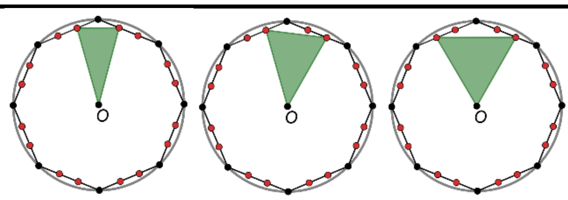
在選取$2k-n$個等分點時，每邊各有 2 個等分點可選擇。

$T_{(n,2)}(k)$	$=$	$n\cdot$	$\left(\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\right)$	$\cdot\dfrac{1}{k}$	$\cdot 2^{2k-n}$
		初始位置	$(n-k)$個$a,(2k-n)$個b 不盡相異物直線排列	轉動數	每邊有2個等分點可選 須選$(2k-n)$個等分點

$\because$範圍限制 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\leq k\leq n$ 且 $T_{(n,2)}=T_{(n,2)}\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)+T_{(n,2)}\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+1\right)+\cdots+T_{(n,2)}(n-1)+T_{(n,2)}(n)$

又 $T_{(n,2)}(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot 2^{2k-n}$ $\quad\therefore$數量總和 $T_{(n,2)}=\displaystyle\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot 2^{2k-n}$

(五)三角形拼板類型

「頂點－頂點」拼板 *aa* 拼板	「頂點－等分點」拼板 *ab* 拼板	「等分點－等分點」拼板 *bb* 拼板
		
1 種	2 種	2＋1＝3 種

二、正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形

(一)定義

1. 正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形：
正 n 邊形上每邊 m+1 等分有 m 個等分點，從 n 個頂點，mn 個等分點中，每邊只能選一個點，不連續頂點所構成內接 k 邊形。
2. $T_{(n,m)}(k)$：正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形的**數量**。

(二)數量

正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形，必為 $(n-k)a,(2k-n)b$ 型。

在選取 $2k-n$ 個**等分點**時，每邊各有 m 個等分點可選擇。

因此，$T_{(n,m)}(k)=T_n(k)\times m^{2k-n}$，以表格方式整理 $T_{(n,m)}(k)$ 如下：

正 n 邊形	正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形的數量，$(n-k)a,(2k-n)b$ 型											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$T_{(n,m)}$
3	$3b$ $1\times m^3$											**
4	$1a2b$ $4\times m^2$	$4b$ $1\times m^4$										**
5	$2a1b$ $5\times m$	$1a3b$ $5\times m^3$	$5b$ $1\times m^5$									**
6	$3a$ 2	$2a2b$ $9\times m^2$	$1a4b$ $6\times m^4$	$6b$ $1\times m^6$								**
7		$3a1b$ $7\times m$	$2a3b$ $14\times m^3$	$1a5b$ $7\times m^5$	$7b$ $1\times m^7$							**
8		$4a$ 2	$3a2b$ $16\times m^2$	$2a4b$ $20\times m^4$	$1a6b$ $8\times m^6$	$8b$ $1\times m^8$						**
9			$4a1b$ $9\times m$	$3a3b$ $30\times m^3$	$2a5b$ $27\times m^5$	$1a7b$ $9\times m^7$	$9b$ $1\times m^9$					**
10			$5a$ 2	$4a2b$ $25\times m^2$	$3a4b$ $50\times m^4$	$2a6b$ $35\times m^6$	$1a8b$ $10\times m^8$	$10b$ $1\times m^{10}$				**
11				$5a1b$ $11\times m$	$4a3b$ $55\times m^3$	$3a5b$ $77\times m^5$	$2a7b$ $44\times m^7$	$1a9b$ $11\times m^9$	$11b$ $1\times m^{11}$			**
12				$6a$ 2	$5a2b$ $36\times m^2$	$4a4b$ $105\times m^4$	$3a6b$ $112\times m^6$	$2a8b$ $54\times m^8$	$1a10b$ $12\times m^{10}$	$12b$ $1\times m^{12}$		**
13					$6a1b$ $13\times m$	$5a3b$ $91\times m^3$	$4a5b$ $182\times m^5$	$3a7b$ $156\times m^7$	$2a9b$ $65\times m^9$	$1a11b$ $13\times m^{11}$	$13b$ $1\times m^{13}$	**

$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}\times m^{n-8}$

$\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\times m^{n-6}$

$\frac{n(n-3)}{2}\times m^{n-4}$

$n\times m^{n-2}$

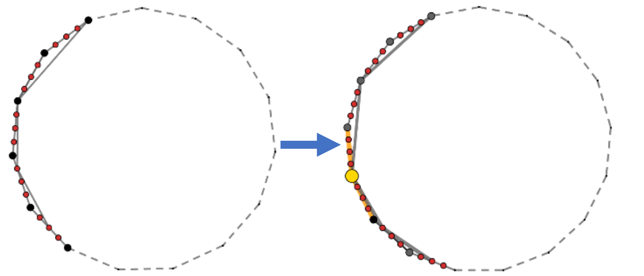
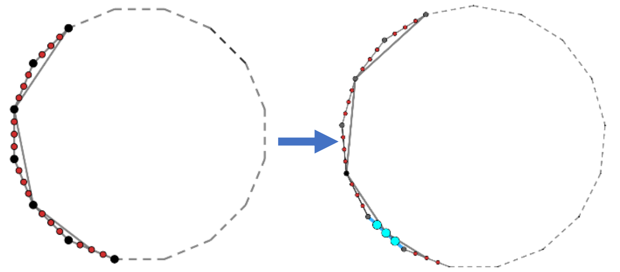
m^n

(三)數量的遞迴關係式

觀察發現存在**遞迴關係式**：$T_{(n-2,m)}(k-1)+m\cdot T_{(n-1,m)}(k-1)=T_{(n,m)}(k)$

，其中 $T_{(t,m)}(t)=m^t, t\geq 3$ ，且 $T_{(4,m)}(3)=4m^2,\ T_{(5,m)}(3)=5m,\ T_{(6,m)}(3)=2$

◆幾何意義：

正$n-2$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量	加 1 個頂點 需增加 2 個邊	正n邊形不連續頂點內接k邊形數量	正$n-1$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量	加 1 個等分點 ×m 只增加 1 個邊	正n邊形不連續頂點內接k邊形數量
$T_{(n-2,m)}(k-1)$		$T_{(n,m)}(k)$	$T_{(n-1,m)}(k-1)$		$T_{(n,m)}(k)$
$(n-k-1)a$		$(n-k)a$	$(n-k)a$		$(n-k)a$
$(2k-n)b$		$(2k-n)b$	$(2k-n-1)b$		$(2k-n)b$
					

(四) 數量的一般項公式

正n邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接k邊形，必為$(n-k)a,(2k-n)b$型。
在選取$2k-n$個等分點時，每邊各有 m 個等分點可選擇。

$T_{(n,m)}(k)$	$=$	$n\cdot$	$\left(\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\right)$	$\cdot\dfrac{1}{k}$	$\cdot m^{2k-n}$
		初始位置	$(n-k)$個a,$(2k-n)$個b 不盡相異物直線排列	轉動數	每邊有m個等分點可選 須選$(2k-n)$個等分點

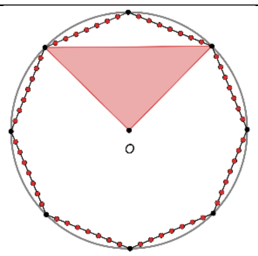
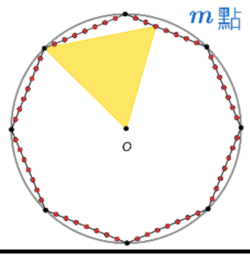
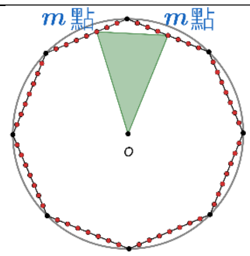
∵範圍限制 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\leq k\leq n$

且 $T_{(n,m)}=T_{(n,m)}\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)+T_{(n,m)}\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+1\right)+\cdots+T_{(n,m)}(n-1)+T_{(n,m)}(n)$

又 $T_{(n,m)}(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$

∴**數量總和** $T_{(n,m)}=\displaystyle\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$

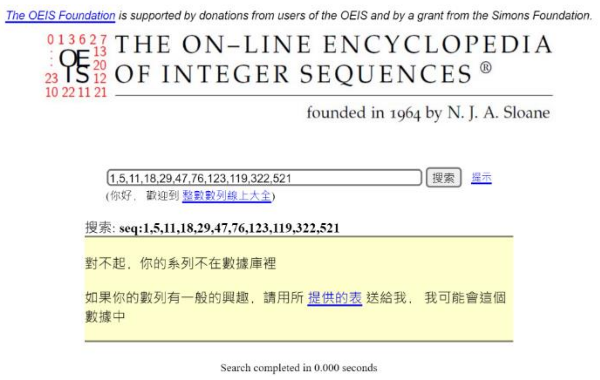
(五)三角形拼板類型

「頂點－頂點」拼板 *aa* 拼板	「頂點－等分點」拼板 *ab* 拼板	「等分點－等分點」拼板 *bb* 拼板
		
1 種	$1 \times m = m$ 種 頂點 等分點有m個選擇	$m+(m-1)+\cdots+2+1=\dfrac{m(m+1)}{2}$ 種

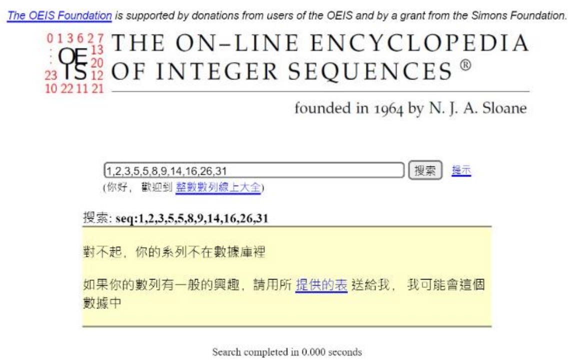
三、T_n、R_n可能是新發現的數列

上網查「整數數列線上大全」發現目前沒有T_n、R_n。因此，T_n、R_n可能是新發現的數列。

T_n搜尋結果



R_n搜尋結果



柒、結論

一、正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的**數量**

(一) **k的範圍限制**：$\left\lceil \dfrac{n+1}{2} \right\rceil \le k \le n$

(二)**遞迴關係式**：$T_n(k)=T_{n-2}(k-1)+T_{n-1}(k-1)$，

$$\text{其中 } T_3(3)=T_4(4)=\cdots=T_t(t)=1, T_4(3)=4 \;, T_5(3)=5 \;, T_6(3)=2$$

(三)**數量一般項**：$T_n(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}$，**數量總和**：$T_n=\displaystyle\sum_{\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil}^{n} n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}$

(四)從頂點的不連續選擇，**數量總和**：$T_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n\ge 5$ 且 $T_3=1, T_4=5$

二、正n邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的**種類**

(一) $R_n(n)=1 \;, R_n(n-1)=1 \;, R_n(n-2)=\left\lceil \dfrac{n-2}{2} \right\rceil$，

$$R_n(n-3)=\left\lceil \frac{n-4}{2} \right\rceil+\left\lceil \frac{n-7}{2} \right\rceil+\left\lceil \frac{n-10}{2} \right\rceil+\cdots+\left\lceil \frac{n-3m-1}{2} \right\rceil \text{，其中 } m\in N \;, n-3m\ge 1$$

(二) 取$(n-k,2k-n)=d$且d的因數為$d_1,d_2,\cdots,d_w$，
$\varphi(d_i)$表示不大於d_i且與d_i互質的正整數個數。

(1) k為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{n-k}{2}\right]!\left[\frac{2k-n}{2}\right]!}\right)$$

(2) k為偶數，$n-k, 2k-n$為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-1}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-1}{2}\right)!}\right)$$

(3) k為偶數，$n-k, 2k-n$為偶數：

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}\right.$$

$$\left.+\frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-2}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-2}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}\right)\right)$$

三、T_n、R_n 可能是新發現的數列。

四、正 n 邊形上 **m 等分點**不連續頂點所構成內接 k 邊形的**數量**

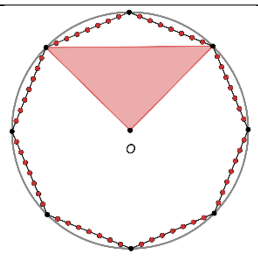
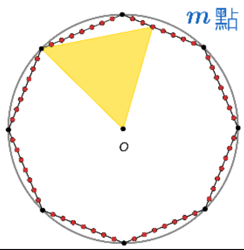
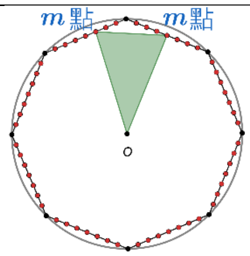
(一)**遞迴關係式**：$T_{(n-2,m)}(k-1)+m\cdot T_{(n-1,m)}(k-1)=T_{(n,m)}(k)$ ，

$$\text{其中 } T_{(t,m)}(t)=m^t\text{, 當 } t\geq 3\text{，且 } T_{(4,m)}(3)=4m^2, T_{(5,m)}(3)=5m, T_{(6,m)}(3)=2$$

(二)**數量一般項**：$T_{(n,m)}(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$

數量總和：$T_{(n,m)}=\displaystyle\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$

五、正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接多邊形，皆可由 aa 拼板、ab 拼板、bb 拼板組合而成，並找到各拼板的種類個數。

「頂點－頂點」拼板 aa 拼板	「頂點－等分點」拼板 ab 拼板	「等分點－等分點」拼板 bb 拼板
		
1 種	m 種	$\dfrac{m(m+1)}{2}$ 種

捌、參考資料

一、Crux Mathematicorum, Vol. 46(3), March 2020（101/ MathemAttic）

二、Crux Mathematicorum, Vol. 45(8), October 2020（354/ MathemAttic）

三、John B. Fraleigh(2003)。A First Course in Abstract Algebra。7th Edition。

四、「整數數列線上大全」http://oeis.org/Seis.html

【評語】030420

針對此問題，作者們先從一些小的例子著手，觀察這些例子，看出規律，再針對找出的規律給出說明，最後，透過考慮一個相關問題的輔助，對整個問題給出完整的解答。並對於正 n 邊形上 m 等分點內接 k 邊形的數量及種類情形作一些探討，T 及 R 的推論也得到不錯的結果，論述簡潔且有條理，值得肯定。

作品簡報

正n邊形上不連續頂點所構成內接多邊形之研究

科別：數學科

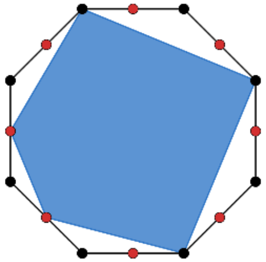
組別：國中組

編號：030420

前言

- **研究動機**

有一道有趣的數學問題：「在正八邊形上，從頂點及各邊中點中，每邊都選一個點所構成的內接多邊形，這樣的內接多邊形與原正八邊形無共同邊。請問有幾個？」起初感覺不難且有趣。但認真思考後，才發現很有挑戰性。因此開始我們的研究，並推廣到正 n 邊形。



- **研究目的與問題**

探討正 n 邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的**數量、種類**及規律性為何？

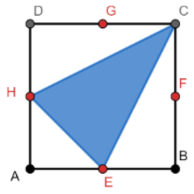
探討組成正 n 邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的**三角形拼板類型**為何？

- **名詞與符號定義**

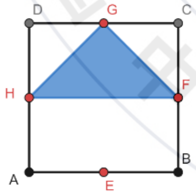
◇正 n 邊形上不連續頂點內接多邊形：

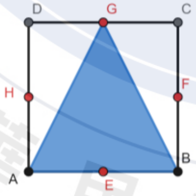
正 n 邊形上，從頂點及各邊中點，每邊都選一個點所構成內接多邊形，此內接多邊形與正 n 邊形無共同邊。

例如



反例



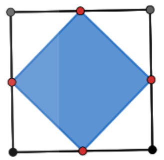


◇*xayb* 型：

正 n 邊形上，選取 x 個頂點、y 個中點所構成內接多邊形，記作 *xayb* 型。

1*a*2*b*型

4*b*型



- ***名詞與符號定義***

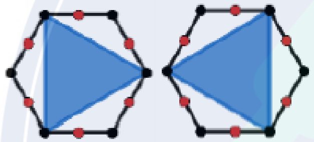
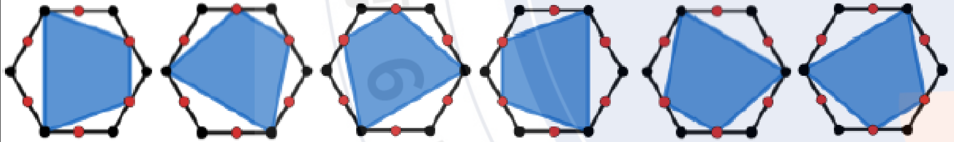
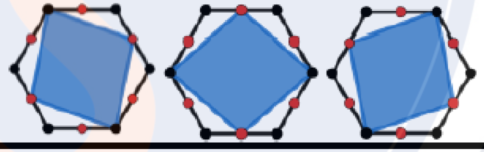
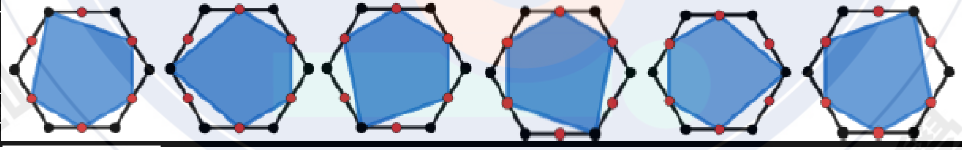
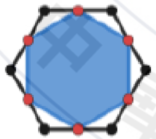
$T_n(k)$：正 n 邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的數量，記作 $T_n(k)$。

T_n：正 n 邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的數量總和，記作 T_n。

$R_n(k)$：正 n 邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的種類，記作 $R_n(k)$。

[註]若經過旋轉或翻轉相同者，視為同種類。

R_n：正 n 邊形上不連續頂點所構成內接多邊形的種類總和，記作 R_n。

例如：正六邊形上不連續頂點所構成內接多邊形		$T_n(k)$	$R_n(k)$
不連續頂點內接三角形（$3a$）		$T_6(3) = 2$	$R_6(3) = 1$
不連續頂點內接四邊形（$2a2b$）	(1) $aabb$：6 個  (2) $abab$：3 個 	$T_6(4) = 9$	$R_6(4) = 2$
不連續頂點內接五邊形（$1a4b$）		$T_6(5) = 6$	$R_6(5) = 1$
不連續頂點內接六邊形（$6b$）		$T_6(6) = 1$	$R_6(6) = 1$
總　　和		$\boldsymbol{T_6 = 18}$	$\boldsymbol{R_6 = 5}$

研究過程

◇ 正 n 邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的數量

正n邊形	不連續頂點內接k邊形的數量											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	T_n
3	1											1
4	4	1										5
5	5	5	1									11
6	2	9	6	1								18
7		7	14	7	1							29
8		2	16	20	8	1						47
9			9	30	27	9	1					76
10			2	25	50	35	10	1				123
11				11	55	77	44	11	1			199
12				2	36	105	112	54	12	1		322
13					13	91	182	156	65	13	1	521

★ k 的範圍限制：$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \le k \le n$

★觀察出遞迴關係式：$T_n(k)=T_{n-2}(k-1)+T_{n-1}(k-1)$

其中$T_t(t)=1$，$T_4(3)=4$，$T_5(3)=5$，$T_6(3)=2$

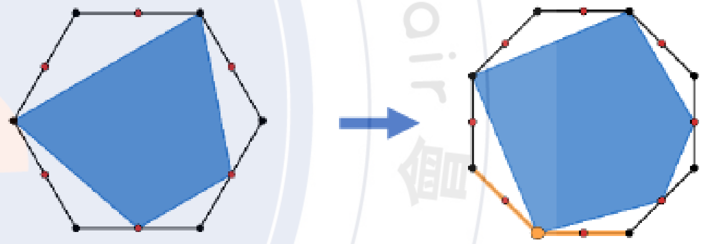
☆以圖形解釋遞迴關係式：$T_n(k)=T_{n-2}(k-1)+T_{n-1}(k-1)$

例如： $T_6(4)+T_7(4)=9+7=16=T_8(5)$

正六邊形不連續頂點內接四邊形（$2a2b$） 數量 $T_6(4)$

加 1 a 需增加 2 個邊

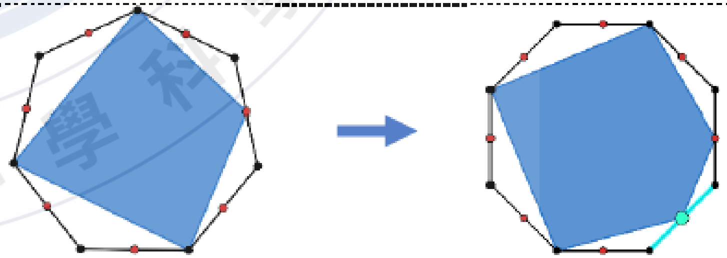
正八邊形不連續頂點內接五邊形（$3a2b$） 數量 $T_8(5)$



正七邊形不連續頂點內接四邊形（$3a1b$） 數量 $T_7(4)$

加 1 b 只增加 1 個邊

正八邊形不連續頂點內接五邊形（$3a2b$） 數量 $T_8(5)$



正n邊形	不連續頂點內接k邊形的數量，$(n-k)a,(2k-n)b$										
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	T_n
3	$3b$ 1										1
4	$1a2b$ 4	$4b$ 1									5
5	$2a1b$ 5	$1a3b$ 5	$5b$ 1								11
6	$3a$ 2	$2a2b$ 9	$1a4b$ 6	$6b$ 1							18
7		$3a1b$ 7	$2a3b$ 14	$1a5b$ 7	$7b$ 1						29
8		$4a$ 2	$3a2b$ 16	$2a4b$ 20	$1a6b$ 8	$8b$ 1					47
9			$4a1b$ 9	$3a3b$ 30	$2a5b$ 27	$1a7b$ 9	$9b$ 1				76
10			$5a$ 2	$4a2b$ 25	$3a4b$ 50	$2a6b$ 35	$1a8b$ 10	$10b$ 1			123
11				$5a1b$ 11	$4a3b$ 55	$3a5b$ 77	$2a7b$ 44	$1a9b$ 11	$11b$ 1		199
12				$6a$ 2	$5a2b$ 36	$4a4b$ 105	$3a6b$ 112	$2a8b$ 54	$1a10b$ 12	$12b$ 1	322

$\dfrac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}$　$\dfrac{n(n-4)(n-5)}{3!}$　$\dfrac{n(n-3)}{2}$　n　1

◇$T_n(k)$的關係式

觀察發現$T_n(n-t)=\dfrac{n(n-t-1)(n-t-2)\cdots(n-2t+1)}{t!}$

$=n\cdot\dfrac{(n-t)!}{t!(n-2t)!}\cdot\dfrac{1}{n-t}$ 取$k=n-t$代入

$\therefore\ T_n(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}$

從排列組合觀點，解釋公式

$$T_n(k)\ =\ n\cdot\left(\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\right)\cdot\frac{1}{k}$$

初始位置　$(n-k)$個a,$(2k-n)$個b 不盡相異物直線排列　轉動數

★正 n 邊形上不連續頂點內接多邊形的數量總和

$\because$ 範圍限制 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\le k\le n$

$\therefore T_n=\displaystyle\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}$

雖然整理出T_n，但此式子不好化簡。因此參考文獻，以另一種方法找T_n。

◇ 從頂點的「不連續選擇」討論正n邊形上不連續頂點內接多邊形數量總和

(一)定義

length n：表示 n 個由 0 和 1 組成的字串且 1 不連續

A_n：表示 *length* n 的數量。

$A_1 = 2$	$A_2 = 3$	$A_3 = 5$	$A_4 = 8$
0	00	000	0000
1	01	001	0001
	10	010	0010
		100	0100
		101	0101
			1000
			1001
			1010
		$A_3 = A_2 + A_1$	$A_4 = A_3 + A_2$

(二)觀察 A_n：發現 $\boxed{A_n = A_{n-1} + A_{n-2}，其中 A_1 = 2，A_2 = 3}$

$\because A_n$ 恰為費氏數列 F_{n+2}，又 $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

$$\therefore A_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

(三)觀察正 n 邊形與其內接多邊形重疊的頂點，

發現選取頂點不可連續。

若選取頂點視為"1"，未選取頂點視為"0"，

則"1"不連續且頭尾不可皆 1。

$\therefore T_n = A_{n-1} + A_{n-3}$，其中 $n \ge 5$

出發點不選，剩 $n-1$ 個頂點即 *length*$(n-1)$，數量有 A_{n-1} 種	出發點選取，左右不可選，剩 $n-3$ 個頂點，即 *length*$(n-3)$，數量有 A_{n-3} 種

$$\therefore T_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

，其中 $n \ge 5$ 且 $T_3 = 1$，$T_4 = 5$

◇ 正n邊形上不連續頂點內接多邊形的「種類」

(一)觀察表格：斜向（\）

正n邊形	不連續頂點所構成內接 k 邊形的種類，$(n-k)a,(2k-n)b$ 型										
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	R_n
3	$3b$ 1										1
4	$1a2b$ 1	$4b$ 1									2
5	$2a1b$ 1	$1a3b$ 1	$5b$ 1								3
6	$3a$ 1	$2a2b$ 2	$1a4b$ 1	$6b$ 1							5
7		$3a1b$ 1	$2a3b$ 2	$1a5b$ 1	$7b$ 1						5
8		$4a$ 1	$3a2b$ 2	$2a4b$ 3	$1a6b$ 1	$8b$ 1					8
9			$4a1b$ 1	$3a3b$ 3	$2a5b$ 3	$1a7b$ 1	$9b$ 1				9
10			$5a$ 1	$4a2b$ 3	$3a4b$ 4	$2a6b$ 4	$1a8b$ 1	$10b$ 1			14
11				$5a1b$ 1	$4a3b$ 4	$3a5b$ 5	$2a7b$ 4	$1a9b$ 1	$11b$ 1		16
12				$6a$ 1	$5a2b$ 3	$4a4b$ 8	$3a6b$ 7	$2a8b$ 5	$1a10b$ 1	$12b$ 1	26

$$\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n-3m-1}{2}\right]$$

$$\left[\frac{n-2}{2}\right]$$

1

1

(二)觀察表格：直向（|）發現有對稱性

正 n 邊形上不連續頂點內接 k 邊形($xayb$ 型)，其中 $x+y=k$，

$R_n(k)$可視為 x 個 a，y 個 b 的珠狀排列方法數。

參酌 *Burnside's Formula* 找出種類的公式。

x 個 a，y 個 b 的珠狀排列方法數，若 $x+y=k$，取 $(x,y)=d$，

且 d 的因數為 $d_1,d_2,\cdots,d_w$，$\varphi(d_i)$表示不大於 d_i 且與 d_i 互質的正整數個數。

(1) k 為奇數

$$\frac{1}{2k}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{x}{d_i}\right)!\left(\frac{y}{d_i}\right)!}}_{\text{旋轉}}+\underbrace{k\cdot\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{x}{2}\right]!\left[\frac{y}{2}\right]!}}_{\text{翻轉}}\right)$$

$\because x+y=k$ 為奇數 $\therefore x,y$ 必一奇一偶

$\therefore$對稱軸必過奇數的 a 或 b

不知道 1-cycle 是 a 或 b，故取高斯符號

(2) k 為偶數，x,y 為奇數

$$\frac{1}{2k}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{x}{d_i}\right)!\left(\frac{y}{d_i}\right)!}}_{\text{旋轉}}+\underbrace{k\cdot\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{x-1}{2}\right)!\left(\frac{y-1}{2}\right)!}}_{\text{翻轉}}\right)$$

對稱軸過 a 和 b

(3) k 為偶數，x,y 為偶數：

對稱軸過 aa 對稱軸過 bb 對稱軸不過位置

$$\frac{1}{2k}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{x}{d_i}\right)!\left(\frac{y}{d_i}\right)!}}_{\text{旋轉}}+\underbrace{\frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{x-2}{2}\right)!\left(\frac{y}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{x}{2}\right)!\left(\frac{y-2}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{x}{2}\right)!\left(\frac{y}{2}\right)!}\right)}_{\text{翻轉}}\right)$$

$\because x=n-k$，$y=2k-n$，代入公式得 $R_n(k)$

取 $(n-k, 2k-n)=d$ 且 d 的因數為 $d_1,d_1,\dots,d_w$，

$\varphi(d_i)$ 表示不大於 d_i 且與 d_i 互質的正整數個數。

(1) k 為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{n-k}{2}\right]!\left[\frac{2k-n}{2}\right]!}\right)$$

(2) k 為偶數，$n-k, 2k-n$ 為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-1}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-1}{2}\right)!}\right)$$

(3) k 為偶數，$n-k, 2k-n$ 為偶數：

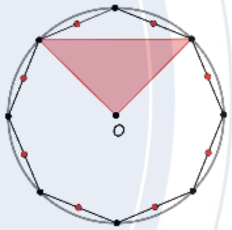
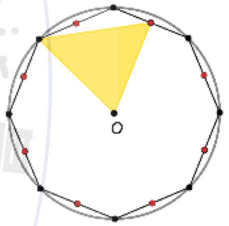
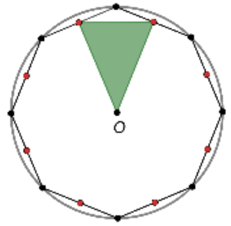
$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+\frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-2}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-2}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}\right)\right)$$

例如：正12邊形內接9邊形,即$n=12, k=9$為奇數且 $3a6b$ 型，取$(3,6)=3$

且 3 的因數為 1,3 $\therefore R_{12}(9)=\frac{1}{18}\left[\varphi(1)\frac{9!}{3!6!}+\varphi(3)\frac{3!}{1!2!}+9\times\frac{4!}{1!3!}\right]=7$

◇ 正n邊形上不連續頂點內接多邊形的三角形拼板

將內接多邊形的頂點與圓心相連，可將內接多邊形分割成三種類型的三角形拼板。

頂點－頂點拼板 aa 拼板	頂點－中點拼板 ab 拼板	中點－中點拼板 bb 拼板
		

$\therefore$ 正 n 邊形上不連續頂點內接 k 邊形皆可使用 aa 拼板、ab 拼板、bb 拼板拼組而成。

討論

◇ 正 n 邊形上m 等分點不連續頂點所構成內接k邊形

(一)定義

1. 正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接k邊形：
正n 邊形每邊m 等分點，從n 個頂點，mn 個等分點中，每邊只能選一個點，所構成之內接k邊形頂點不連續。
2. $T_{(n,m)}(k)$：
正n 邊形上m等分點不連續頂點所構成內接k邊形的數量
3. $T_{(n,m)}$：正n 邊形上m等分點不連續頂點所構成內接k邊形的數量總和

(二)數量

正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接k邊形，必為 $(n-k)a,(2k-n)b$ 型。

在選取$(2k-n)$個等分點時，每邊皆有 m 等分點可選擇。

$\therefore T_{(n,m)}(k)=T_n(k)\times m^{2k-n}$

正 n 邊形	m 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形的數量，$(n-k)a,(2k-n)b$型									
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	$3b$ $1\times m^3$									
4	$1a2b$ $4\times m^2$	$4b$ $1\times m^4$								
5	$2a1b$ $5\times m$	$1a3b$ $5\times m^3$	$5b$ $1\times m^5$							
6	$3a$ 2	$2a2b$ $9\times m^2$	$1a4b$ $6\times m^4$	$6b$ $1\times m^6$						
7		$3a1b$ $7\times m$	$2a3b$ $14\times m^3$	$1a5b$ $7\times m^5$	$7b$ $1\times m^7$					
8		$4a$ 2	$3a2b$ $16\times m^2$	$2a4b$ $20\times m^4$	$1a6b$ $8\times m^6$	$8b$ $1\times m^8$				
9			$4a1b$ $9\times m$	$3a3b$ $30\times m^3$	$2a5b$ $27\times m^5$	$1a7b$ $9\times m^7$	$9b$ $1\times m^9$			
10			$5a$ 2	$4a2b$ $25\times m^2$	$3a4b$ $50\times m^4$	$2a6b$ $35\times m^6$	$1a8b$ $10\times m^8$	$10b$ $1\times m^{10}$		
11				$5a1b$ $11\times m$	$4a3b$ $55\times m^3$	$3a5b$ $77\times m^5$	$2a7b$ $44\times m^7$	$1a9b$ $11\times m^9$	$11b$ $1\times m^{11}$	
12				$6a$ 2	$5a2b$ $36\times m^2$	$4a4b$ $105\times m^4$	$3a6b$ $112\times m^6$	$2a8b$ $54\times m^8$	$1a10b$ $12\times m^{10}$	$12b$ $1\times m^{12}$

$\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\times m^{n-6}$

$\frac{n(n-3)}{2}\times m^{n-4}$

$n\times m^{n-2}$

m^n

(三)數量的遞迴關係式

發現遞迴關係式：$T_{(n-2,m)}(k-1)+m\cdot T_{(n-1,m)}(k-1)=T_{(n,m)}(k)$

其中$T_{(t,m)}(t)=m^t, t\geq 3$且$T_{(4,m)}(3)=4m^2, T_{(5,m)}(3)=5m, T_{(6,m)}(3)=2$

☆幾何意義

正$n-2$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量

$T_{(n-2,m)}(k-1)$

$(n-k-1)a$

$(2k-n)b$

加 1 個頂點

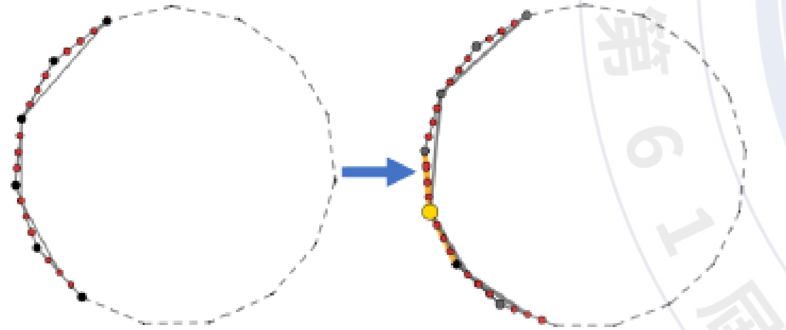
需增加 2 個邊

正n邊形不連續頂點內接k邊形數量

$T_{(n,m)}(k)$

$(n-k)a$

$(2k-n)b$



正$n-1$邊形不連續頂點內接$k-1$邊形數量

$T_{(n-1,m)}(k-1)$

$(n-k)a$

$(2k-n-1)b$

加 1 個等分點

$\times$m

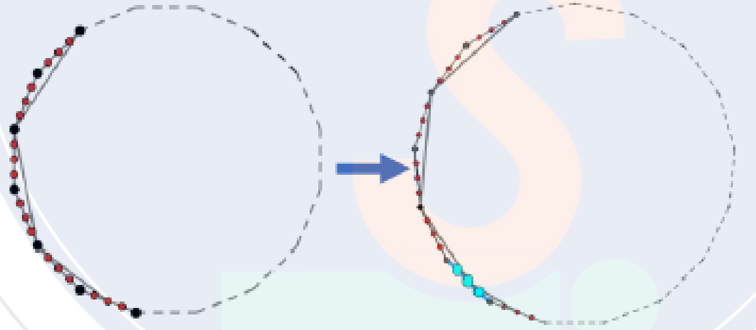
只增加 1 個邊

正n邊形不連續頂點內接k邊形數量

$T_{(n,m)}(k)$

$(n-k)a$

$(2k-n)b$



◇ T_n、R_n 可能是新發現的數列

上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences(OEIS)，發現目前沒有 T_n、R_n。

(四)數量的一般項公式

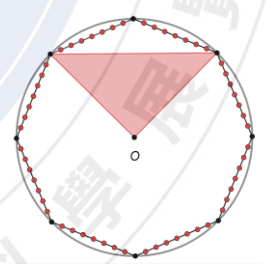
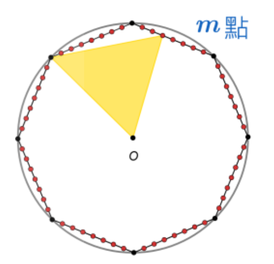
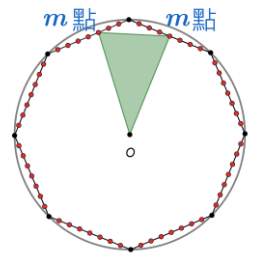
$\because T_{(n,m)}(k)=T_n(k)\times m^{2k-n}$

$\therefore T_{(n,m)}(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$

$\because$範圍限制$\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\leq k\leq n$

$\therefore T_{(n,m)}=\sum\limits_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$

(五)三角形拼板類型

頂點－頂點拼板 *aa* 拼板	頂點－等分點拼板 *ab* 拼板	等分點－等分點拼板 *bb* 拼板
		
1 種	$1\times m=m$ 種	$\frac{m(m+1)}{2}$種

結論

◇ 正 n 邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的數量

★ k 的範圍限制：$\left[\dfrac{n+1}{2}\right] \le k \le n$

★遞迴關係式：$T_n(k)=T_{n-2}(k-1)+T_{n-1}(k-1)$

其中$T_t(t)=1$，$T_4(3)=4$，$T_5(3)=5$，$T_6(3)=2$

★數量：$T_n(k)=n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}$

★數量總和：$T_n=\displaystyle\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} n\cdot\dfrac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\dfrac{1}{k}$

★從頂點的不連續選擇，數量總和：

$$T_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

,其中$n\ge 5$且$T_3=1$，$T_4=5$

◇ 正 n 邊形上不連續頂點所構成內接k邊形的種類

★ $R_n(n)=1$，$R_n(n-1)=1$，$R_n(n-2)=\left[\dfrac{n-2}{2}\right]$，

$$R_n(n-3)=\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-3m-1}{2}\right]$$

其中$n-3m\ge 1$

★ $R_n(k)$公式：取 $(n-k，2k-n)=d$ 且 d 的因數為 $d_1,d_1,\ldots,d_w$，$\varphi(d_i)$ 表示不大於 d_i 且與 d_i 互質的正整數個數。

(1) k 為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left[\frac{n-k}{2}\right]!\left[\frac{2k-n}{2}\right]!}\right)$$

(2) k 為偶數，$n-k,2k-n$ 為奇數

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}+k\cdot\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-1}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-1}{2}\right)!}\right)$$

(3) k 為偶數，$n-k,2k-n$ 為偶數：

$$R_n(k)=\frac{1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{w}\varphi(d_i)\frac{\left(\frac{k}{d_i}\right)!}{\left(\frac{n-k}{d_i}\right)!\left(\frac{2k-n}{d_i}\right)!}\right.$$

$$\left.+\frac{k}{2}\left(\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k-2}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n-2}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{2k-n}{2}\right)!}\right)\right)$$

◇ T_n、R_n 可能是新發現的數列

◇ 正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點所構成內接 k 邊形的數量

★遞迴關係式：$T_{(n-2,m)}(k-1)+m\cdot T_{(n-1,m)}(k-1)=T_{(n,m)}(k)$

其中 $T_{(t,m)}(t)=m^t, t\ge 3$ 且 $T_{(4,m)}(3)=4m^2, T_{(5,m)}(3)=5m, T_{(6,m)}(3)=2$

★數量：$T_{(n,m)}(k)=n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$，數量總和：$T_{(n,m)}=\sum_{\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil}^{n} n\cdot\frac{k!}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot\frac{1}{k}\cdot m^{2k-n}$

◇正 n 邊形上 m 等分點不連續頂點內接 k 邊形，皆可使用 aa 拼板、ab 拼板、bb 拼板拼組而成。並找到各拼板的種類個數。

參考資料

一、Crux Mathematicorum, Vol. 46(3), March 2020（101/ MathemAttic）

二、Crux Mathematicorum, Vol. 45(8), October 2020（354/ MathemAttic）

三、John B. Fraleigh(2003)。A First Course in Abstract Algebra。7th Edition。

四、「整數數列線上大全」http://oeis.org/Seis.html