中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030418

正多面體表面移動及一刀斬所形成的截面

學校名稱：臺中市立沙鹿國民中學

作者：	指導老師：
國二 紀韋廷 國二 陳書睿 國二 吳映築	楊士弘

關鍵詞：柏拉圖立體、橫截面、最短路徑

摘要

此研究探討螞蟻在各正多面體按特定行進規則進行表面行走之最短路徑，以及按照特定的截面規則將正多面體(柏拉圖立體)一刀斬後分割成二部份，觀察其所形成的可能截面變化，並利用 Geogebra 等電腦軟體模擬繪製，藉此協助我們計算正多面體分割成的截面周長與面積，進而推導出其公式及觀察截面大小之變化關係。

壹、 研究動機

世界上的立體圖形是數之不盡，任何事都和立體圖形脫離不了關係，過去在課堂上學習到螞蟻在正六面體表面行進的最短路徑的求法，是將立體圖形展開後，找出兩點的直線距離，即「一步」到達的距離；這讓我們好奇：1. 如果將螞蟻在正多面體表面的行進方式加上特殊的規則後，最短路徑是否存在於行進「最少步」的路徑？以及，2. 如果在正多面體上採特殊規則將此立體圖截出一個截面時，此截面會是怎樣的形狀及具有甚麼性質？能否找到一個最大截面？

在搜尋網路資料後，看到有人求解正六面體的所有可能截面圖形，讓我們不禁好奇其他正多面體的可能截面圖形，在此研究報告中，我們將研究對象限縮在 5 種正(凸)多面體，並加上特定的螞蟻行進/截面規則，以瞭解我們感興趣的問題，並且利用 Geogebra 電腦繪製軟體來協助我們觀察和完成計算。

貳、 研究目的

一 、 分析螞蟻在各正多面體進行表面行走時之最短路徑。
二 、 理解正多面體的各種截面變化和圖形。
三 、 可以運用 Geogebra 等電腦軟體[1]觀察正多面體進行截面的圖形變化。
四 、 算出正多面體採特定方式截面時所形成的各種截面形狀及其周長和面積。
五 、 分析並判斷每個正多面體的截面形狀有何種共通點。

參、 研究器材與設備

電腦、GeoGebra 軟體、紙、筆

[1] 參考軟體及線上資源列於參考資料【1】、【2】

肆、 研究過程

一、　基本定義：

(一)、正多面體：

本研究中所使用的正多面體，為各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的**凸多面體**，即柏拉圖立體(Platonic Solids)，符合這種特性的立體總共有 5 種，分別為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。

(二)、螞蟻行進步數定義及限制條件：

本研究中所指的螞蟻行進步數，指的是從上述任一正多面體頂點出發，經由正多面體表面的頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點，最後再由頂點或稜線中點到達鏡射點的連線，每連線一次代表一步，且在最少步情況下增加一步來探討最短路徑，螞蟻行進的終點為(出發時)頂點的鏡射點。

(三)、頂點的鏡射點：本研究中所指的正多面體的鏡射點，於正六、正八、正十二及正二十面體中指的是一頂點的對頂點(與前一點不同面)；而正四面體因不具點鏡射到其自身的性質(無對頂點)，鏡射點指的是一頂點對面的中心點(黃子恩，民 109；"Tetrahedron," 2004)。

(四)、截面限制條件：

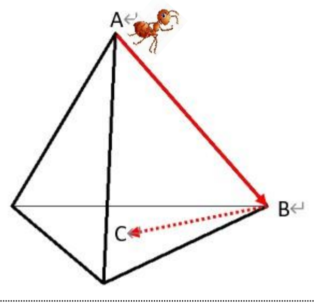
本研究中所指的截面，連線方式限縮在頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線。橫切面，幾何學上，面一種，物體與平面相交之處，就好似物體一刀斬開，斬出來為平面。亦稱剖面或者截面。

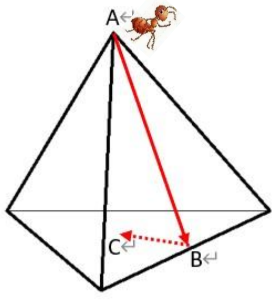
二、　探討在各正多面體表面使用特定連線方式時，頂點至鏡射點的最短路徑：

本研究按照基本定義中所列的特定連線方式，列舉在各正多面體表面由頂點至鏡射點可能的最少步數路徑，以找出最短路徑，以下將各正多面體的探討過程分別列出：

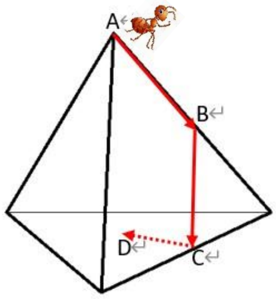
(一)正四面體

1.繪出一邊長為 a 的正四面體，將從其中一頂點 A 出發，經由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線而到達鏡射點的路徑可能性繪出。

<table>
<tr><td colspan="2">(1)如圖所示，頂點 A→頂點 B→(A 點的)鏡射點 C</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為 C 點為 A 點鏡射點,剛好落在底邊正三角形的重心,所以$\overline{BC}$=$\frac{2}{3}a$

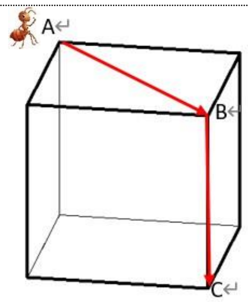
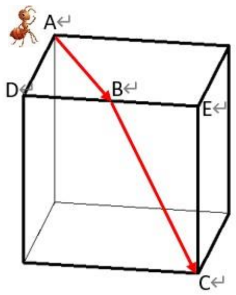
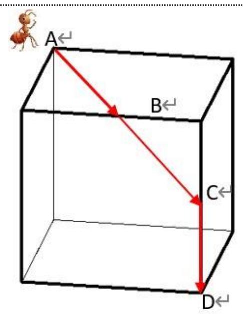
故此一路徑總長度= $\overline{AB}+\overline{BC}=a+\frac{2}{3}a=\frac{5}{3}a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→(A 點的)鏡射點 C</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為$\overline{AB}$為正三角形的高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，且 C 點為 A 點鏡射點,剛好落在底邊正三角形的重心,所以$\overline{BC}$=$\frac{1}{3}a$

故此一路徑總長度= $\overline{AB}+\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{3}a=\frac{2+3\sqrt{3}}{6}a$</td></tr>
</table>

(3)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→稜線中點 C→(A 點的)鏡射點 D	
	因為B、C點皆為邊長的中點，所以$\overline{AB}=\overline{BC}=\frac{1}{2}a$， 且 D 點為 A 點鏡射點,剛好落在底邊正三角形的重心, 所以$\overline{CD}$=$\frac{1}{3}a$，故此一路徑總長度=$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=$ $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a=\frac{4}{3}a$

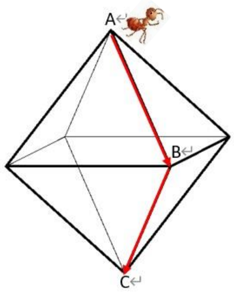
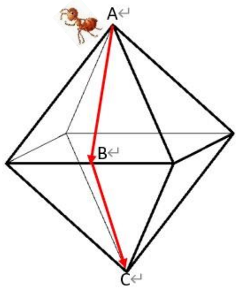
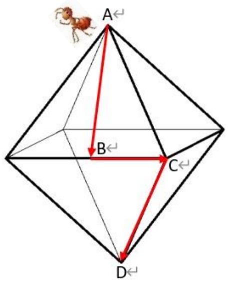
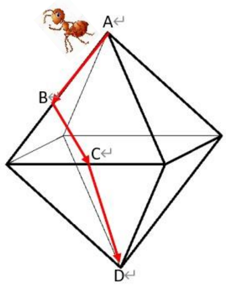
(二)正六面體

1.繪出一邊長為 a 的正六面體，將從其中一頂點 A 出發，經由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線而到達鏡射點的路徑可能性繪出。

(1)如圖所示，頂點 A→頂點 B→(A 點的)鏡射點 C	
	$\overline{\mathrm{AB}}$為正方形之斜邊長 經由畢氏定理可得知$\overline{AB}=\sqrt{2}a$ 故此一路徑總長度 $=\overline{AB}+\overline{BC}=(1+\sqrt{2})a$
(2)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→(A 點的)鏡射點 C	
	因為 B 點為中點，所以$\overline{BD}=\overline{BE}=\frac{1}{2}a$ 經由畢氏定理可得知$\overline{AB}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$ 故此一路徑總長度=$\frac{\sqrt{5}}{2}a+\frac{\sqrt{5}}{2}a=\sqrt{5}a$
(3)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→稜線中點 C→(A 點的)鏡射點 D	
	因 B、C 為稜邊中點，所以經由畢氏定理可得知 $\overline{AB}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$、$\overline{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，且$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}a$ **故此一路徑總長度=**$\boldsymbol{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}}$ $=\frac{\sqrt{5}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}a=\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{a}$

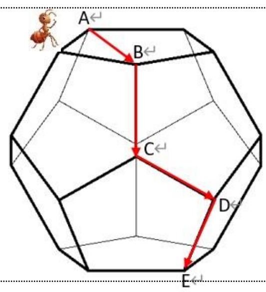
(三)正八面體

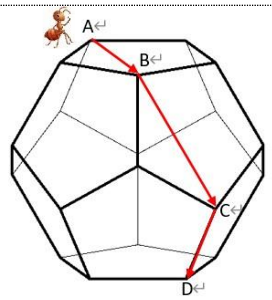
1.繪出一邊長為 a 的正八面體，將從其中一頂點 A 出發，經由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線而到達鏡射點的路徑可能性繪出。

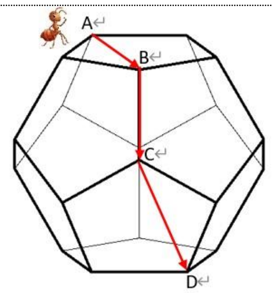
(1)如圖所示，頂點 A→頂點 B→(A 點的)鏡射點 C	
	因為$\overline{AB}=\overline{BC}$皆為正三角形的邊長 所以此一路徑總長度$=\overline{AB}+\overline{BC}$ $=a+a=2a$
(2)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→(A 點的)鏡射點 C	
	因為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$皆為正三角形的高 所以$\overline{AB}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 故此一路徑總長度$=\overline{AB}+\overline{BC}$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}a$
(3)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→頂點 C→(A 點的)鏡射點 D	
	因為$\overline{AB}$為正三角形的高$=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，且$\overline{BC}$為邊長的一半$=\frac{1}{2}a$，故此一路徑總長度$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}a+a=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a$
(4)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→稜線中點 C→(A 點的)鏡射點 D	
	因為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$皆為正三角形邊長的一半，所以$\overline{AB}=\overline{BC}=\frac{1}{2}a$，且$\overline{CD}$為正三角形的高$=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，故此一路徑總長度$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$

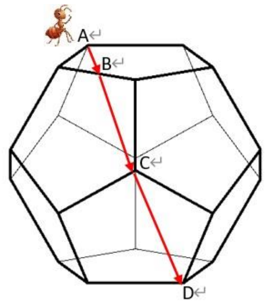
(四)正十二面體

1.繪出一邊長為 a 的正十二面體，將從其中一頂點 A 出發，經由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線而到達鏡射點的路徑可能性繪出。

(1)如圖所示，頂點 A→對角線頂點 B→頂點 C→頂點 D→ (A 點的)鏡射點 E	
	因為正五邊形的對角線公式為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，可求出$\overline{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，其餘邊長線段皆為$a$，故此一路徑總長度$=3a+\frac{1+\sqrt{5}}{2}a=\frac{7+\sqrt{5}}{2}a$

<table>
<tr><td colspan="2">(2)如圖所示，頂點 A→頂點 B→頂點 C→(A 點的)鏡射點 D</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$皆為正五邊形的對角線，所以長度皆為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，其餘邊長線段皆為a

故此一路徑總長度$= a + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a = (2+\sqrt{5})a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3)如圖所示，頂點 A→對角線頂點 B→頂點 C→(A 點的)鏡射點 D</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為正五邊形的對角線公式為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，所以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$皆為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，$\overline{BC}$為a，

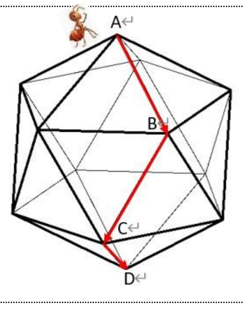
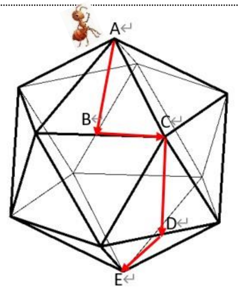
故此一路徑總長度$=(1+\sqrt{5})a + a = (2+\sqrt{5})a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(4)如圖所示，頂點 A→稜邊中點 B→頂點 C→(A 點的)鏡射點 D</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為 B 點為稜線中點,所以$\overline{AB} = \overline{BC}$，且正五邊形邊長 a ： $\overline{AB}$ ：正五邊形對角線比約等於 1: 1.25: 1.62

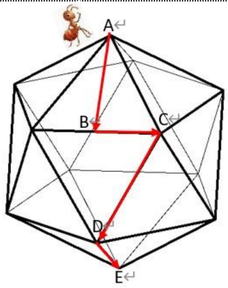
因此$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}a+a}{2} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}a}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}a$

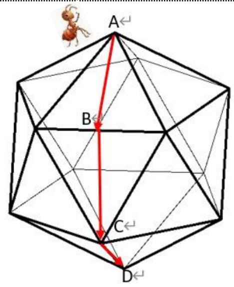
故此一路徑總長度$= \frac{3+\sqrt{5}}{4}a + \frac{3+\sqrt{5}}{4}a + \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$
$= (2+\sqrt{5})a$</td></tr>
</table>

(五)正二十面體

1.繪出一邊長為 a 的正二十面體，將從其中一頂點 A 出發，經由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線而到達鏡射點的路徑可能性繪出。

<table>
<tr><td colspan="2">(1)如圖所示，頂點 A→頂點 B→頂點 C→(A 點的)鏡射點 D</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$皆為正三角形邊長 $= a$
故此一路徑總長度$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 3a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→頂點 C→稜線中點 D→(A 點的)鏡射點 E</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE}$為正三角形的高 $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$，且 B、D 皆為中點，所以$\overline{BC} = \frac{1}{2}a$，故此一路徑總長度$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \times 3 + \frac{1}{2}a = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}a$</td></tr>
</table>

(3)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→頂點 C→頂點 D→(A 點的)鏡射點 E	
	因為$\overline{AB}$為正三角形的高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，且 B 點為中點，所以 $\overline{BC}=\frac{1}{2}a$，**故此一路徑總長度**$=\overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{BC}}+\overline{\mathbf{CD}}+\overline{\mathbf{DE}}$ $=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}a+a+a=\frac{5+\sqrt{3}}{2}a}$

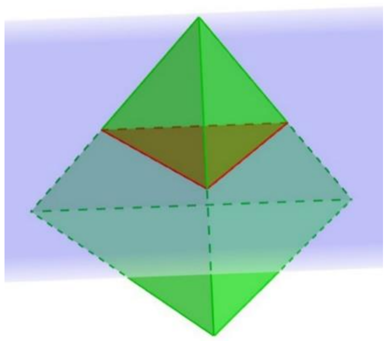
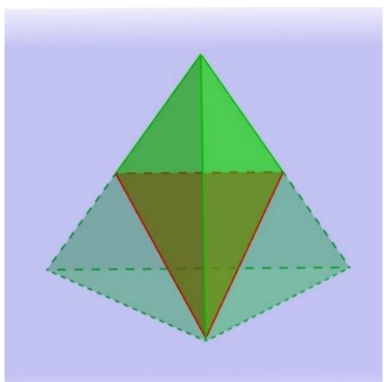
(4)如圖所示，頂點 A→稜線中點 B→頂點 C→(A 點的)鏡射點 D	
	因為$\overline{AB}=\overline{CD}$為正三角形的高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **故此一路徑總長度**$=\overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{BC}}+\overline{\mathbf{CD}}$ $=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}a\times 2+a=(1+\sqrt{3})a}$

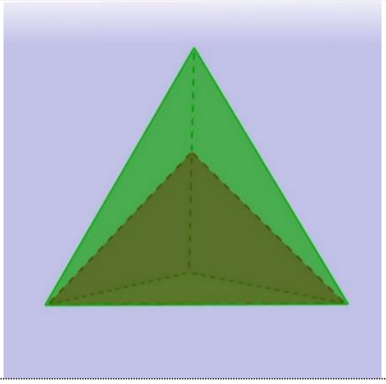
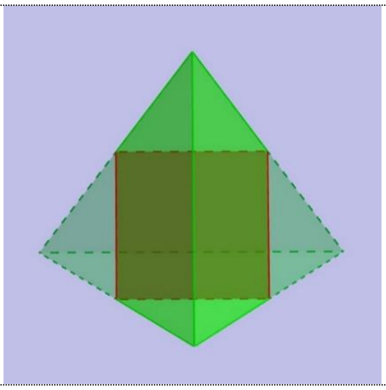
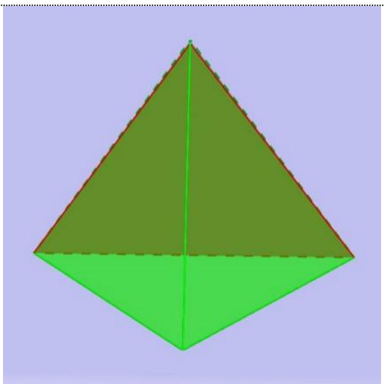
三、　探討在各正多面體內部使用特定連線方式所截出的截面可能形狀、周長及面積：

在這個部分，本研究按照基本定義中所列的特定連線方式，列舉特定連線方式可截出的可能形狀，並計算出周長及面積，以下將各正多面體的探討過程分別列出：

(一)正四面體

1. 繪出一邊長為 a 的正四面體，按照由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

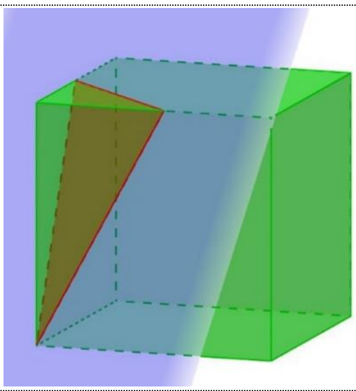
(1)如圖所示，連接 3 **稜線中點**所成的截面為一**正三角形**	
	因為 A、B、C 皆為各邊之中點，所以各面正三角形之中點連線皆等於$\frac{1}{2}a$。此**截面周長**$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}a\times\mathbf{3}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}a$ 此**截面面積**= **正三角形面積公式** $=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\times\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}a\right)^{\mathbf{2}}$ $=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}a^{\mathbf{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{16}}a^{\mathbf{2}}$
(2)如圖所示，連接 1 **頂點及 2 稜線中點**所成的截面為**等腰三角形**	
	點 A、B 皆為兩邊之中點，所以正三角形之中點連線段長$=\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，兩中點連線段長 $=\overline{AB}=\frac{1}{2}a$ 此**截面周長**$=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}\times\mathbf{2}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}a=\frac{\mathbf{1+2\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}$ 算出等腰三角形之高$=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{1}{4}a)^2}=\frac{\sqrt{11}}{4}a$ 此**截面面積**$=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{11}}{4}a\div\mathbf{2}=\frac{\sqrt{\mathbf{11}}}{\mathbf{16}}a^{\mathbf{2}}$

(3)如圖所示，連接 2 **頂點及 1 稜線中點**所成的截面為**等腰三角形**	
	因為E點為$\overline{AD}$之中點，所以正三角形之中點連線段長$=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，此**截面周長**$=(\frac{\sqrt{3}}{2})\boldsymbol{a}\times\mathbf{2}+\boldsymbol{a}=(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}})\boldsymbol{a}$ 算出等腰三角形之高$=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ **此截面面積**$=a\times\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}\div\mathbf{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$
(4)如圖所示，連接 4 **稜線中點**所成的截面為一**正方形**	
	所截各點皆位於各邊長的中點。 所以截面的任一線段皆等於$\frac{1}{2}a$。 **此截面周長**$=\frac{1}{2}a\times\mathbf{4}=\mathbf{2}a$ **此截面面積**$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2$
(5)如圖所示，連接 3 **頂點**所成的截面為一**正三角形**	
	所截各點皆位於各邊長的頂點。 所以截面的任一線段皆等於a。 **此截面周長**$=a\times\mathbf{3}=\mathbf{3}a$ **此截面面積**$=$ **正三角形面積** $=\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{a}^2$

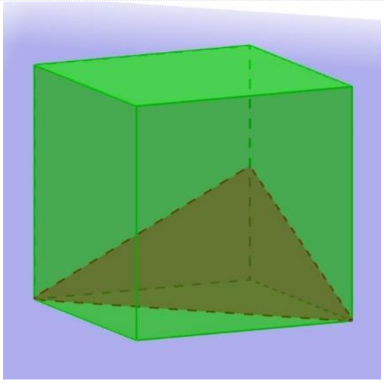
C

(二)正六面體

1. 繪出一邊長為 a 的正六面體，按照由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的截點方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

(1)如圖所示，連接 1 **頂點及 2 稜線中點**所成的截面為**等腰三角形**	
	三角形底邊$=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}}=\sqrt{\frac{2\boldsymbol{a}^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$、斜邊$=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\boldsymbol{a}^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$、高$=\sqrt{\frac{5\boldsymbol{a}^2}{4}-\frac{2\boldsymbol{a}^2}{16}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$ **截面周長**$=\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}=\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2}\boldsymbol{a}$ **截面面積**$=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{a}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\boldsymbol{a}^2$

(2)如圖所示，連接 **2 頂點及 1 稜線中點**所成的截面為**等腰三角形**



等腰三角形兩腰長= $\sqrt{a^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$

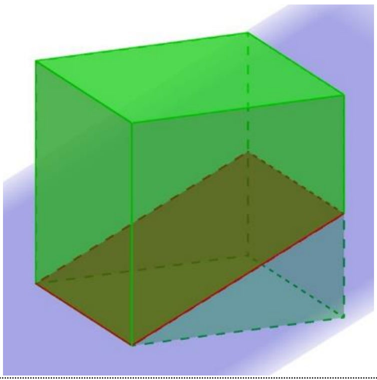
底邊長= $\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2}=\sqrt{2}a$

截面周長= $\frac{\sqrt{5}}{2}a+\frac{\sqrt{5}}{2}a+\sqrt{2}a=(\sqrt{2}+\sqrt{5})a$

等腰三角形之高= $\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

截面面積 $=\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{a^2}$

(3)如圖所示，連接 **2 頂點及 2 稜線中點**所成的截面為**長方形**



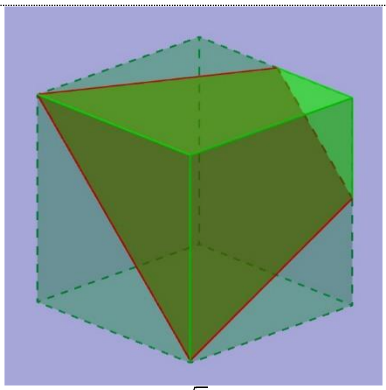
長方形的長= $\sqrt{a^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$

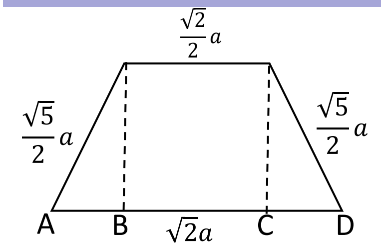
且長方形的寬= a

截面周長= $\mathbf{2}(\frac{\sqrt{5}}{2}a+a)=(2+\sqrt{5})a$

截面面積 $=a\times\frac{\sqrt{5}}{2}a=\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a^2}$

(4)如圖所示，連接 **2 頂點及 2 稜線中點**連線所成的截面為**等腰梯形**





梯形上底= $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}$

梯形下底= $\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{2}\boldsymbol{a}$

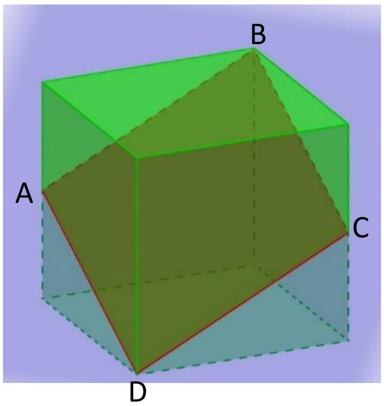
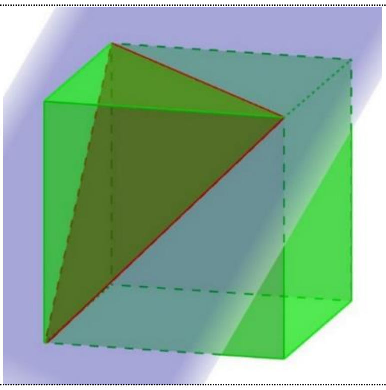
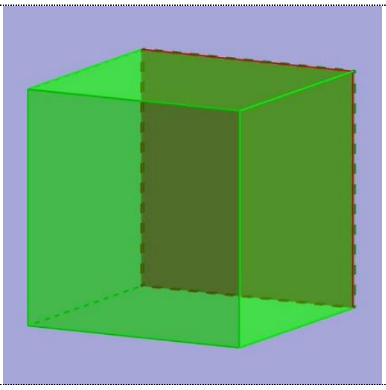
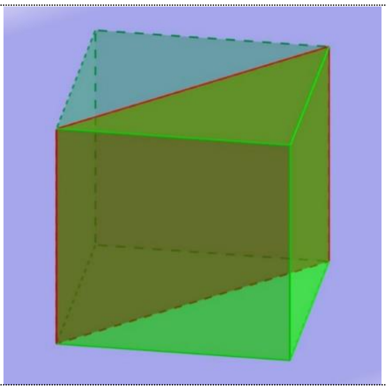
梯形斜邊長= $\sqrt{\boldsymbol{a}^2+(\frac{1}{2}\boldsymbol{a})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}$

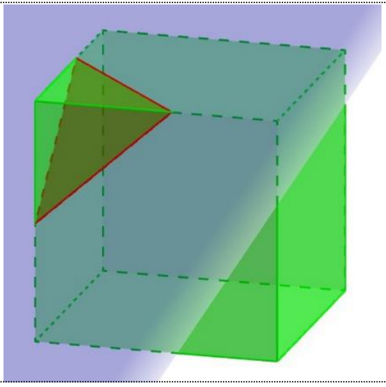
因為 $\overline{AB}=\overline{CD}=\left(\sqrt{2}\boldsymbol{a}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{a}$

所以梯形的高= $\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a})^2-(\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{a})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$

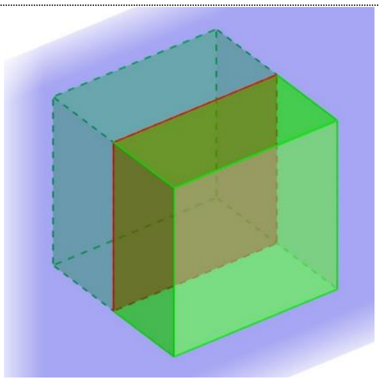
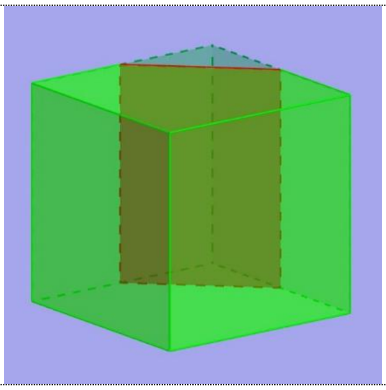
截面周長= $\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{a}+\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}\times\mathbf{2}=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{2}\boldsymbol{a}$

截面面積= $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{a}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{8}\boldsymbol{a^2}$

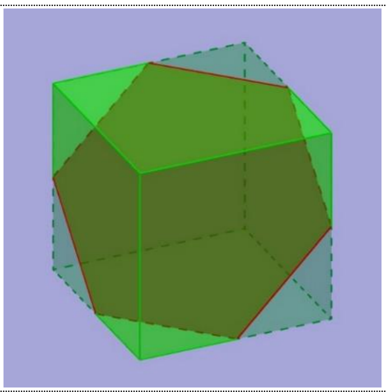
<table>
<tr><td colspan="2">(5)如圖所示，連接 2 頂點及 2 稜線中點連線所成的截面為菱形</td></tr>
<tr><td>
</td><td>因為四邊等長，所以截面邊長= $\sqrt{a^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$
又$\overline{AC}$為中點連線 = 對角線長 = $\sqrt{2}\boldsymbol{a}$
且$\overline{BD}$為鏡射點連線 = $\sqrt{\boldsymbol{a}^2+(\sqrt{2}\boldsymbol{a})^2}$=$\sqrt{3}\boldsymbol{a}$
截面周長= $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}a\times 4=2\sqrt{5}a}$
截面面積= 菱形面積公式=對角線相乘
$=\sqrt{3}\boldsymbol{a}\times\sqrt{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(6)如圖所示，連接 3 頂點所成的截面為正三角形</td></tr>
<tr><td></td><td>截面邊長為$\sqrt{a^2+a^2}$=$\sqrt{2}a$
截面周長= $\boldsymbol{\sqrt{2}a\times 3=3\sqrt{2}a}$
截面面積= $\boldsymbol{\sqrt{\frac{3\sqrt{2}a}{2}}\times\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}a}{2}-\sqrt{2}a\right)^3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(7)如圖所示，連接 4 頂點所成的截面為正方形</td></tr>
<tr><td></td><td>截面邊長皆為邊長a
截面周長= $\boldsymbol{4\times a=4a}$
截面面積 =正方形面積= $\boldsymbol{a\times a=a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(8)如圖所示，連接 4 頂點所成的截面為一長方形</td></tr>
<tr><td></td><td>正方形斜對角邊長=$\sqrt{a^2+a^2}$=$\sqrt{2}a$
截面周長=$\boldsymbol{2a+2\sqrt{2}a=(2+2\sqrt{2})a}$
截面面積=$\boldsymbol{a\times\sqrt{2}a=\sqrt{2}a^2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">(9)如圖所示，連接 3 稜線中點所成的截面為一正三角形</td></tr>
<tr><td></td><td>三邊皆為稜線中點連線= $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

截面周長= $\boldsymbol{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{3\sqrt{2}}{2}a}$

截面面積 =正三角形面積= $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{3\sqrt{2}}{2}a)^2=\frac{3\sqrt{6}}{8}a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(10)如圖所示，連接 4 稜線中點所成的截面為正方形</td></tr>
<tr><td></td><td>截面邊長等於$\boldsymbol{a}$
截面周長= $\boldsymbol{4a}$
截面面積= $\boldsymbol{a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(11)如圖所示，連接 4 稜線中點所成的截面為長方形</td></tr>
<tr><td></td><td>寬為鄰邊之稜線中點連線= $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$
長為對邊之稜線中點連線= a

截面周長= $\boldsymbol{2(a+\frac{\sqrt{2}}{2}a)=(2+\sqrt{2})a}$

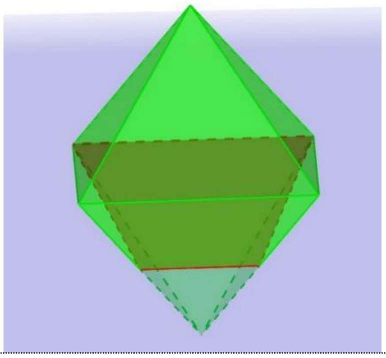
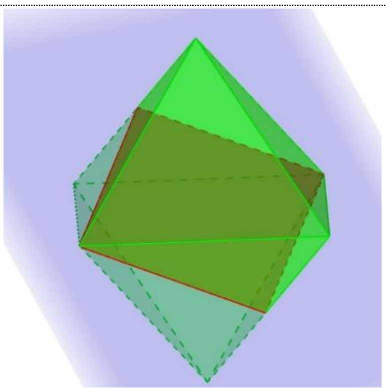
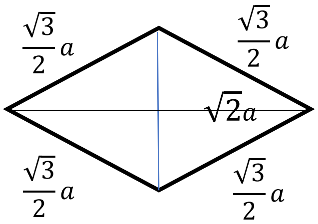
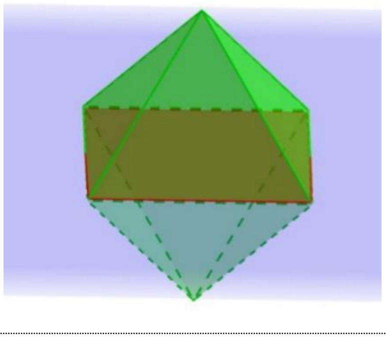
截面面積 $=a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(12)如圖所示，連接 6 稜線中點連線所成的截面為正六邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>因為截面為正六邊形，所以各邊長為稜線中點之連線
$=\sqrt{(\frac{1}{2}\boldsymbol{a})^2+(\frac{1}{2}\boldsymbol{a})^2}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}$

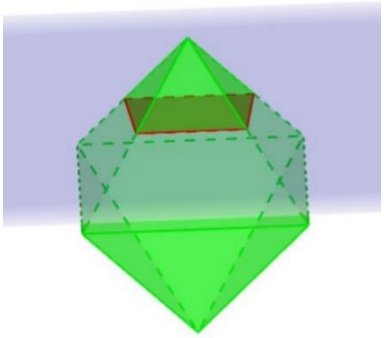
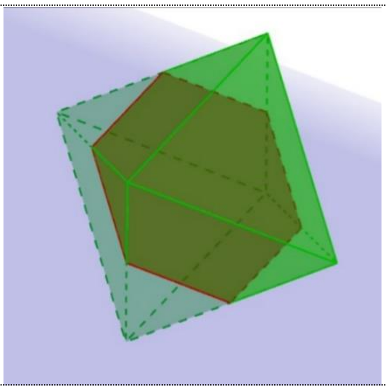
截面周長= $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}a\times 6=3\sqrt{2}a}$

截面面積=正六邊形面積=六塊正三角形面積
$\boldsymbol{=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}$</td></tr>
</table>

(三)正八面體

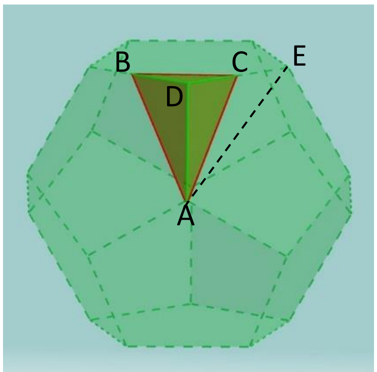
1. 繪出一邊長為 a 的正八面體，按照由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的截點方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

<table>
<tr><td colspan="2">(1)如圖所示，連接 2 頂點及 2 稜線中點連線所成的截面為等腰梯形</td></tr>
<tr><td></td><td>上底為兩邊中點= $\frac{1}{2}a$,下底為a，兩腰皆為正三角形的高= $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，等腰梯型的高經由畢氏定理= $\frac{\sqrt{11}}{4}a$
截面周長 $= \frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a+a=\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)a$
截面面積 $= \left(\frac{a}{2}+a\right)\times\frac{\sqrt{11}}{4}a\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{11}}{16}a^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)如圖所示，連接 2 頂點及 2 稜線中點連線所成的截面為菱形</td></tr>
<tr><td>

</td><td>菱形各邊皆為點到各邊的中點連線= $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
菱形截面周長= $\frac{\sqrt{3}}{2}a\times4=2\sqrt{3}a$
菱形一對角線=正方形對角線 $=\sqrt{2}a$
菱形另一對角線經由畢氏定理
$=2\times\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=2\times\sqrt{\frac{1}{4}a^2}=a$
故菱形截面面積= $\sqrt{2}a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3)如圖所示，連接 4 頂點連線所成的截面為正方形</td></tr>
<tr><td></td><td>正方形各邊長皆為a
截面周長=$a\times4=4a$
截面面積=$a\times a=a^2$</td></tr>
</table>

(4)如圖所示，連接 4 **稜線中點**所成的截面為**正方形**	
	正方形各邊皆為正三角形的中邊連線 所以各邊長=$\frac{1}{2}a$ **截面周長**=$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times 4=2\boldsymbol{a}$ **截面面積**=$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2$
(5)如圖所示，連接 6 **稜線中點**連線所成的截面為**正六邊形**	
	因為每邊皆為正八面體邊長的中點 所以正六邊形邊長= $\frac{a}{2}$ **截面周長** $=\frac{\boldsymbol{a}}{2}\times 6=3\boldsymbol{a}$ **截面面積** $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times 6=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{a^2}{4}\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{8}\boldsymbol{a}^2$

(四)正十二面體

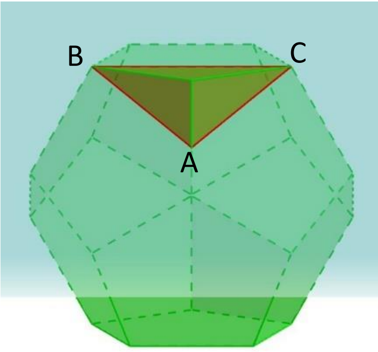
1. 繪出一邊長為 a 的正十二面體，按照由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的截點方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

(1)如圖所示，連接 1 **頂點及 2 稜線中點**連線所成的截面為等腰三角形	
	因為 B、C 點皆為各邊中點，所以$\overline{AB}=\overline{AC}$， 且$\overline{BC}$為兩邊中點連線 $=\frac{3+\sqrt{5}}{4}a$，連接$\overline{AE}$， 在△ADE 中，$\overline{AE}$為正五邊形對角線 $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$， $\overline{CD}=\overline{CE}=\frac{1}{2}a$，已知三邊長我們可利用<u>**中線定理**</u>求出中線$\overline{AC}$，即為$\overline{AD}^2+\overline{AE}^2=2[\overline{AC}^2+\overline{CE}^2]$ $a^2+(\frac{1+\sqrt{5}}{2}a)^2=2[\overline{AC}^2+(\frac{1}{2}a)^2]$ 展開移項後算出中線$\overline{AC}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2}a$ **截面周長**= $\frac{3+\sqrt{5}}{4}\boldsymbol{a}+2(\frac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2}\boldsymbol{a})=\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{64+16\sqrt{5}}}{4}\boldsymbol{a}$ 等腰三角形 ABC 之高經由畢氏定理= $\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{8}a$

故截面面積= $\frac{3+\sqrt{5}}{4}\boldsymbol{a}\times\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{8}\boldsymbol{a}\times\frac{1}{2}=$

$\frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{50+10\sqrt{5}})}{64}\boldsymbol{a}^2$

(2)如圖所示，連接 2 **頂點及 1 稜線中點**連線所成的截面為**等腰三角形**



因為 A 點為中點，所以$\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2}a$

且$\overline{BC}$為正五邊形之對角線 $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$

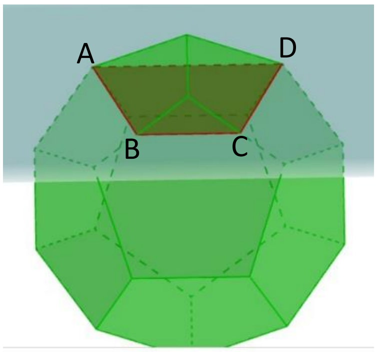
故截面周長= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathbf{a}+2(\frac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2}\boldsymbol{a})=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{16+4\sqrt{5}}}{2}\boldsymbol{a}$

等腰三角形 ABC 之高經由畢氏定理= $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}a$

截面面積= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\boldsymbol{a}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{16}\boldsymbol{a}^2$

(3)如圖所示，連接 2 **頂點及 2 稜線中點**連線所成的截面為**等腰梯形**

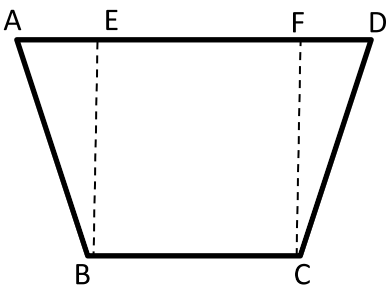


因為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$皆為正五邊形的高，所以$\overline{AB}=\overline{CD}=$
$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$a，又$\overline{AD}$ = 正五邊形之對角線 $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$a

且$\overline{BC}$為 ΔEFG 之中點連線 = 正五邊形對角線之一半

$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a\times\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$

由以上可得知等腰梯形截面周長= $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+$
$\overline{BC}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\boldsymbol{a}\times 2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\boldsymbol{a}=\frac{3+3\sqrt{5}+4\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}\boldsymbol{a}$



由梯形上底兩端點分別對下底作垂直線得 E、F 點

因為為等腰梯形,所以算出$\overline{AE}=\overline{DF}=\frac{1+\sqrt{5}}{8}a$

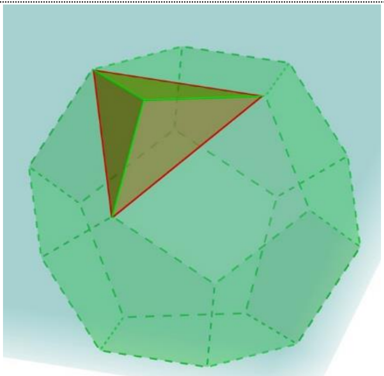
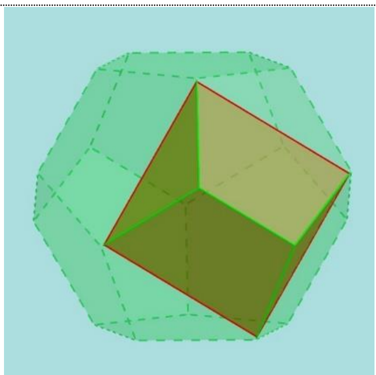
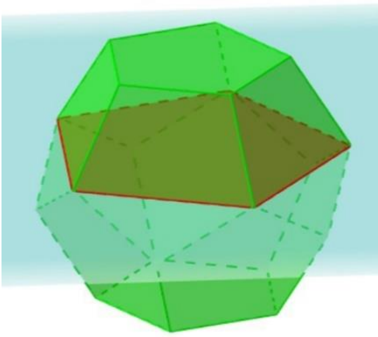
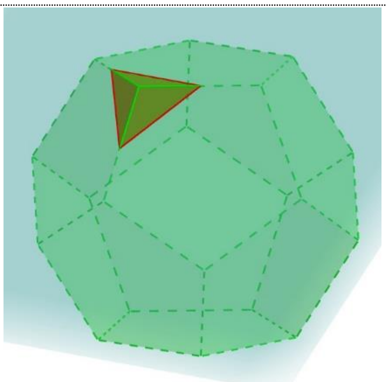
再經由畢氏定理算出等腰梯形的高

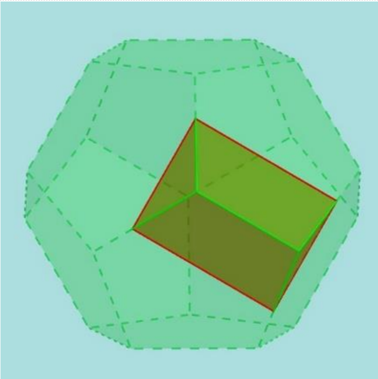
$$=\sqrt{(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a)^2-(\frac{1+\sqrt{5}}{8}a)^2}=\frac{\sqrt{74+30\sqrt{5}}}{8}a$$

故截面面積=等腰梯形面積

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}\right)\times\frac{\sqrt{74+30\sqrt{5}}}{8}\boldsymbol{a}\times\frac{1}{2}$$

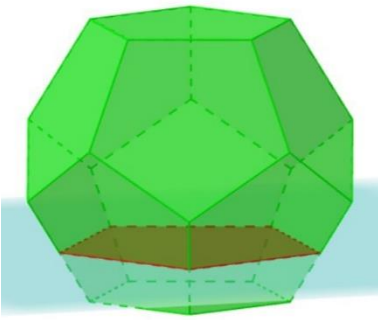
$$=\frac{(3+3\sqrt{5})(\sqrt{74+3\sqrt{5}})}{64}\boldsymbol{a}^2$$

<table>
<tr><td colspan="2">(4)如圖所示，連接 3 頂點連線所成的截面為正三角形</td></tr>
<tr><td></td><td>根據三角函數我們可得知，正五邊形的對頂角為
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}$，邊長為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a}$，可得截面周長= $\frac{\mathbf{3+3\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}$
再根據正三角形面積公式$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
得知截面面積=$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a})^2$=$\frac{\mathbf{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{a}^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5) 如圖所示，連接 4 頂點連線所成的截面為正方形</td></tr>
<tr><td></td><td>截面四邊長皆為正五邊形之對角線= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，
且各角皆為直角，故截面為正方形
截面周長= $\mathbf{4}(\frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}) = (\mathbf{2}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}})\boldsymbol{a}$
截面面積= $(\frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a})^2 = \frac{\mathbf{6+2\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{a}^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(6)如圖所示，連接 5 頂點連線所成的截面為正五邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>邊長為正五邊形之對頂角= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，可得知截面周長
$= \frac{\mathbf{5+5\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}$，根據五邊形面積公式= $\frac{5t^2\tan(54°)}{4}$
可得知截面面積= $\frac{\mathbf{5}\times\left(\frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a})^2\tan(\mathbf{54°}\right)}{\mathbf{4}} =$
$\frac{(\mathbf{30+10\sqrt{5}})\boldsymbol{a}^2\tan(\mathbf{54°})}{\mathbf{16}} = \frac{\mathbf{15+5\sqrt{5}}}{\mathbf{8}}\tan(\mathbf{54}°)\boldsymbol{a}^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(7)如圖所示，連接 3 稜線中點連線所成的截面為正三角形</td></tr>
<tr><td></td><td>正三角形每邊長皆為邊之中點連線= $\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$，
故截面周長= $\mathbf{3}(\frac{1+\sqrt{5}}{4}a) = (\frac{3+3\sqrt{5}}{4})\boldsymbol{a}$
截面面積=正三角形面積公式$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{1+\sqrt{5}}{4}a)^2 = \frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{64}a^2$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">(8)如圖所示，連接 4 稜線中點連線所成的截面為長方形</td></tr>
<tr><td></td><td>長方形之寬=兩邊中點連線= $\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$，

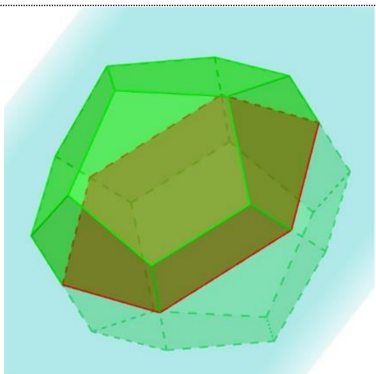
長方形之長= $\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+a}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}a$

故截面周長= $\mathbf{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}a+\frac{3+\sqrt{5}}{4}a\right)=(\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{5}})\boldsymbol{a}$

截面面積= $\frac{3+\sqrt{5}}{4}a\times\frac{1+\sqrt{5}}{4}a=(\frac{2+\sqrt{5}}{4})a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(9)如圖所示，連接 5 稜線中點連線所成的截面為正五邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>頂點為五邊中點所連出來的正五邊形

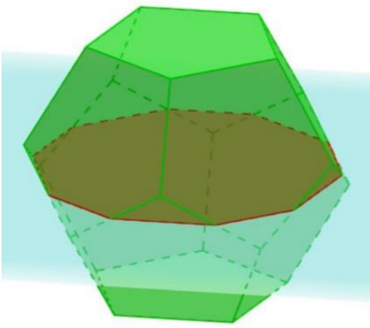
由正五邊形的對頂角為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$中點連出來的線段為

$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}a+a}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}a$，截面周長= $\boldsymbol{\frac{15+5\sqrt{5}}{4}a}$
再根據正五邊形面積公式可得知

截面面積= $\boldsymbol{\frac{5\times\frac{3+\sqrt{5}}{4}a^2\tan(54^\circ)}{4}=\frac{35+15\sqrt{5}}{32}\tan(54^\circ)a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(10)如圖所示，連接 6 稜線中點連線所成的截面為正六邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>邊長為正五邊形之對頂角的正六邊形

正五邊形的對頂角為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，可得知截面周長=3+$\sqrt{3}$

根據正六邊形面積公式可得知面積= $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}=$

$\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2}a)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}a^2=\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{4}a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(11)如圖所示，連接 10 稜線中點連線所成的截面為正十邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>線段中點連線形成之正十邊形

根據三角函數得知，正五邊形的對角線為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$

中點所連出來的線段= $\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+a}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}a$，

截面周長= $\frac{3+\sqrt{5}}{4}a\times 10=\boldsymbol{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}a}$

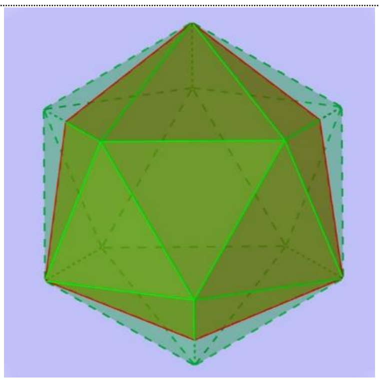
根據正十邊形面積公式得知截面面積=

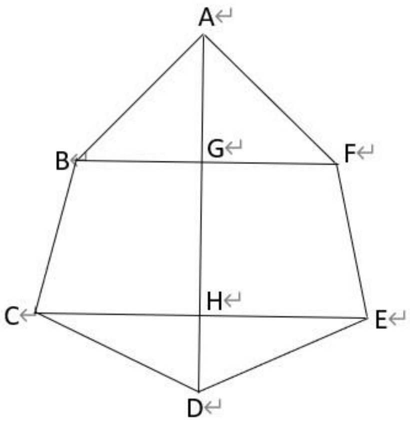
$\boldsymbol{\frac{5}{2}t^2\cot(18^\circ)=\frac{5}{2}\times\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}a\right)^2\cot(18^\circ)}$

$=\boldsymbol{\frac{20+15\sqrt{5}}{16}\cot(18^\circ)a^2}$</td></tr>
</table>

(五)正二十面體

1. 繪出一邊長為 a 的正二十面體，按照由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的截點方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

<table>
<tr><td colspan="2">(1)如圖所示，連接 3 頂點及 3 稜線中點連線所成的截面為六邊形</td></tr>
<tr><td>




</td><td>
各邊長皆為點到稜線中點= 正三角形的高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

，但各面與面之角度皆不同,故為左右對稱之六邊形

截面周長= $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}a\times 6=3\sqrt{3}a}$

在面積的部分，我們將六邊形圖形進行分割後，
發現此六邊形的 C 點到 E 點會是平行剖面正五邊形的

對角線長度= $\overline{CE}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，且$\overline{BF}$為正五邊形對角線

和底邊之中點連線= $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}a+a\right)\div 2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}a$

又$\overline{BG}=\overline{FG}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}a$、$\overline{CH}=\overline{EH}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$

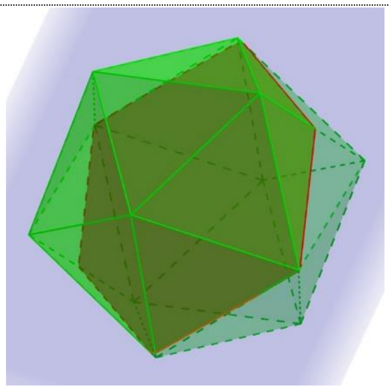
經由畢氏定理算出$\overline{AG}=\frac{(\sqrt{34-6\sqrt{5}})}{8}a$、

$\overline{GH}=\frac{(\sqrt{42+2\sqrt{5}})}{8}a$、$\overline{HD}=\frac{(\sqrt{6-2\sqrt{5}})}{4}a$

故截面面積= $\triangle$ABF + $\triangle$CDE + 等腰梯形 BCEF =

$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}a\times\frac{(\sqrt{34-6\sqrt{5}})}{8}a\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}a\times\frac{(\sqrt{6-2\sqrt{5}})}{4}a\times\frac{1}{2}\right)+$

$[(\frac{3+\sqrt{5}}{4}a+\frac{1+\sqrt{5}}{2}a)\times\frac{(\sqrt{42+2\sqrt{5}})}{8}a\times\frac{1}{2}]$

$=\left[\frac{(5+3\sqrt{5})\left[\left(\sqrt{34-6\sqrt{5}}\right)+\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)+\left(\sqrt{42+2\sqrt{5}}\right)\right]}{64}\right]a^2$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)如圖所示，連接 4 頂點及 2 稜線中點連線所成的截面為六邊形</td></tr>
<tr><td>

</td><td>
此六邊形有兩邊分別為點到點之邊長= a，

另外 4 個邊為點到稜線中點=正三角形的高=$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

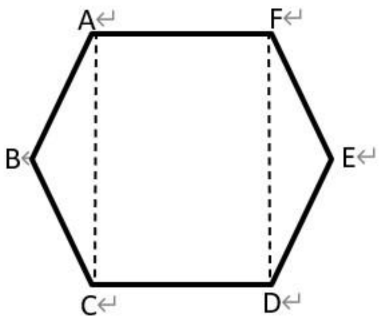
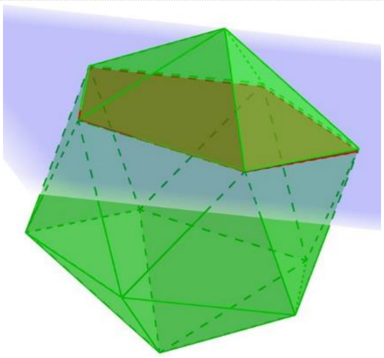
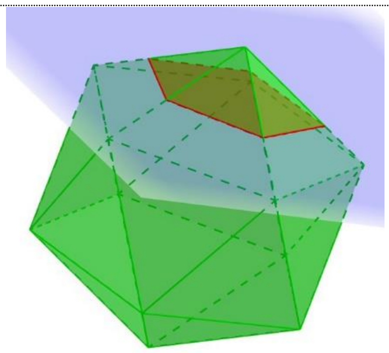
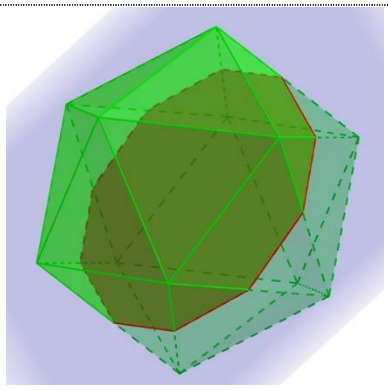
截面周長= $\boldsymbol{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}a+2a=(2+2\sqrt{3})a}$

在面積的部分，我們將六邊形圖形進行分割後，
發現此六邊形的點到點會是平行剖面正五邊形的

對角線長度= $\overline{AC}=\overline{DF}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，$\overline{AF}=\overline{CD}=a$，

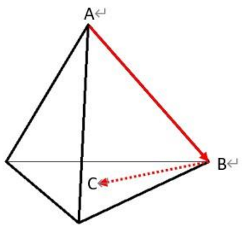
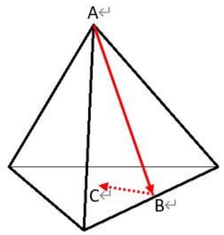
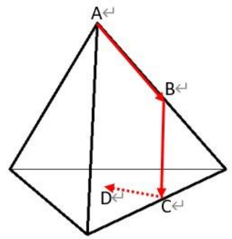
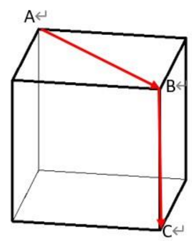
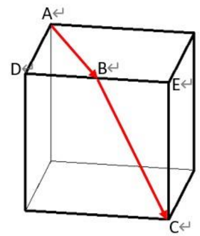
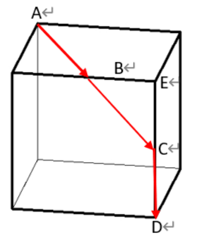
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{EF}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$
</td></tr>
</table>

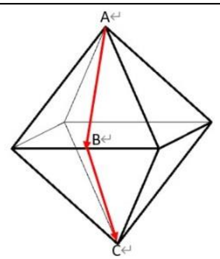
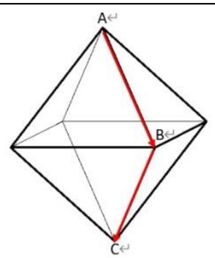
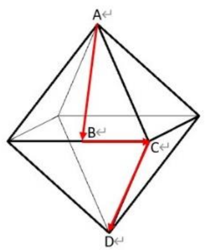
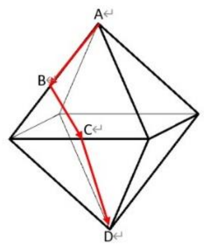
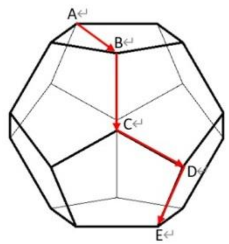
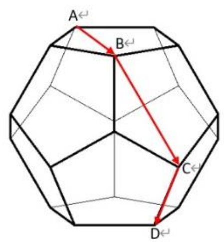
E

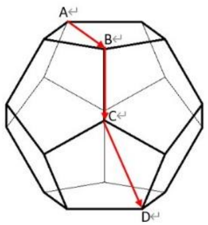
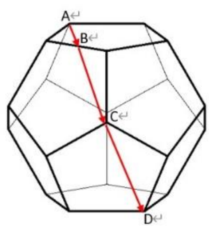
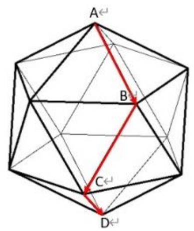
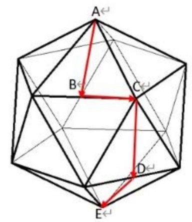
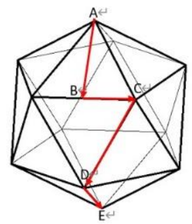
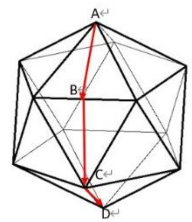
<table>
<tr><td>
</td><td>如圖，切割成兩塊全等三角形ΔABC、ΔDEF，以及一長方形 ABCD，ΔABC、ΔDEF 經由畢氏定理得出高 $=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}a$，所以ΔABC=ΔDEF
$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a\times\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}a\times\frac{1}{2}=\frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{6-2\sqrt{5}})}{8}a^2$
截面面積= $\boldsymbol{\Delta ABC+\Delta DEF+}$ 長方形$\boldsymbol{ABCD=}$
$\boldsymbol{\frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{6-2\sqrt{5}})}{8}a^2\times 2+a\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}a}$
$\boldsymbol{=\left[\frac{2+2\sqrt{5}+(1+\sqrt{5})(\sqrt{6-2\sqrt{5}})}{4}\right]a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3)如圖所示，連接 5 頂點連線所成的截面為正五邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>五邊形每邊皆為各點之連線$=a$
截面周長= $\boldsymbol{a\times 5=5a}$
根據正五邊形的面積公式$\frac{5t^2\tan(54°)}{4}$
當$t=a$時，可得知
截面面積= $\boldsymbol{\frac{5\times(a)^2\tan(54°)}{4}=\frac{5\tan(54°)}{4}a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(4)如圖所示，連接 5 稜線中點連線所成的截面為正五邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>正五邊形各邊皆為各稜線之中點連線=每面正三角形之中點連線$=\frac{1}{2}a$，截面周長= $\boldsymbol{\frac{1}{2}a\times 5=\frac{5}{2}a}$
根據正五邊形的面積公式$\frac{5t^2\tan(54°)}{4}$，當$t=\frac{1}{2}a$時，
可得知截面面積= $\boldsymbol{\frac{5\times(\frac{1}{2}a)^2\tan(54°)}{4}=\frac{5\tan(54°)}{16}a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5)如圖所示，連接 10 稜線中點連線所成的截面為正十邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>各邊長皆為點到稜線中點= 正三角形的高 $=\frac{1}{2}a$
截面周長= $\boldsymbol{\frac{1}{2}a\times 10=5a}$
根據正十邊形面積公式$\frac{5}{2}t^2\cot(18^{\circ})$得知截面面積
$\boldsymbol{=\frac{5}{2}\times(\frac{1}{2}a)^2\times\cot(18^{\circ})=\frac{5}{8}\cot(18^{\circ})a^2}$</td></tr>
</table>

伍、研究結果

一、　依照第肆章的最短路徑限制條件，將螞蟻行進的可能最少步數路線圖和計算出的路徑總長度列於下方：

多面體類型	正四面體			正六面體		
行進步數	2 步	2 步	3 步	2 步	2 步	3 步
路徑長度	$\frac{5}{3}a$	$\frac{2+3\sqrt{3}}{6}a$	$\frac{4}{3}a$	$(1+\sqrt{2})a$	$\sqrt{5}a$	$\frac{1+2\sqrt{5}}{2}a$
近似值	$1.667a$	$1.199a$	$1.333a$	$2.414a$	$2.236a$	$2.736a$
示意圖						
最短路徑		V			V	

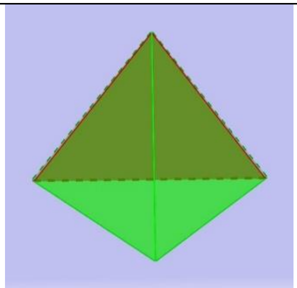
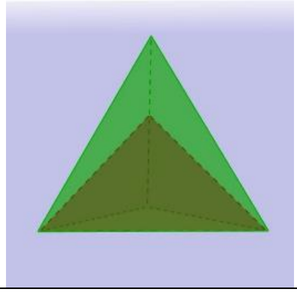
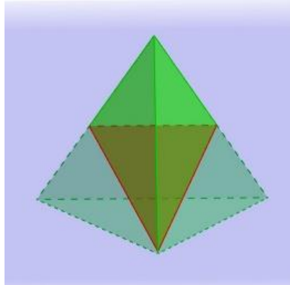
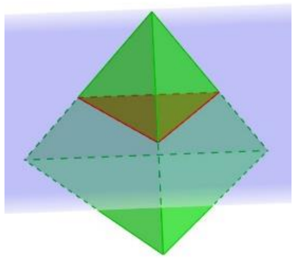
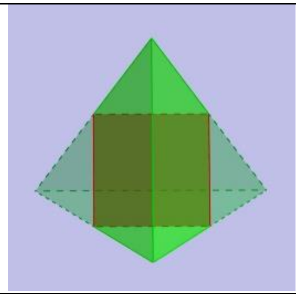
多面體類型	正八面體				正十二面體	
行進步數	2 步	2 步	3 步	3 步	4 步	3 步
路徑長度	$\sqrt{3}a$	$2a$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{7+\sqrt{5}}{2}a$	$(2+\sqrt{5})a$
近似值	$1.732a$	$2a$	$2.366a$	$1.866a$	$4.618a$	$4.236a$
示意圖						
最短路徑	V					V

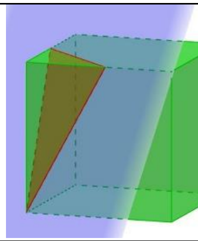
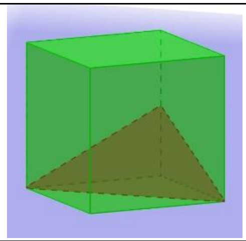
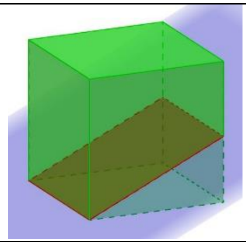
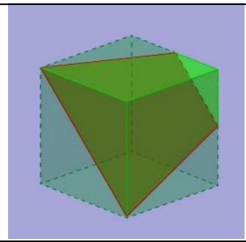
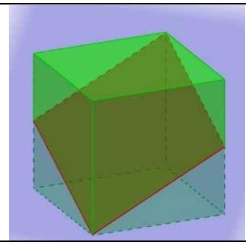
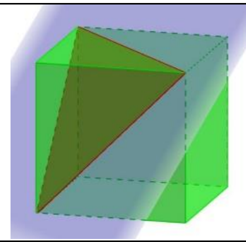
多面體類型	正十二面體		正二十面體			
行進步數	3 步	3 步	3 步	4 步	4 步	3 步
路徑長度	$\boldsymbol{(2+\sqrt{5})a}$	$\boldsymbol{(2+\sqrt{5})a}$	$\boldsymbol{3a}$	$\boldsymbol{\frac{1+3\sqrt{3}}{2}a}$	$\boldsymbol{\frac{5+\sqrt{3}}{2}a}$	$\boldsymbol{(1+\sqrt{3})a}$
近似值	$4.236a$	$4.236a$	$3a$	$3.098a$	$3.366a$	$2.732a$
示意圖						
最短路徑	V	V				V

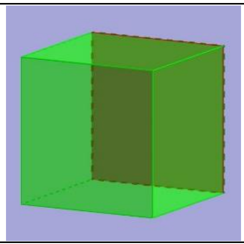
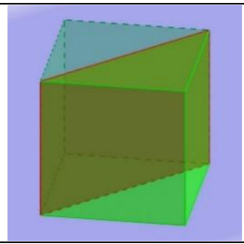
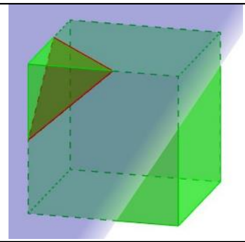
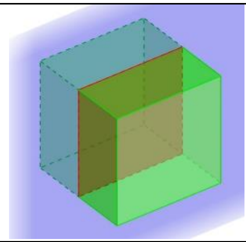
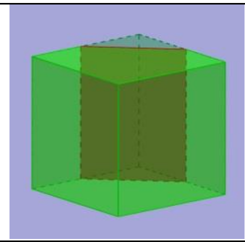
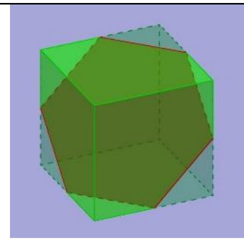
(一)由 Geogebra 電腦繪製軟體的輔助和計算結果，可以看到在 5 種正多面體的表面上，如按照第肆章所設定的螞蟻行進規則，可能存在的「最少步」的路徑，根據計算出路徑長度的結果，可以歸納並證實我們的假設：如果將螞蟻在正多面體表面的行進方式加上特殊的規則後，從正(凸)面體表面由一頂點至其鏡射點的最短路徑會存在於行進「最少步」的路徑。

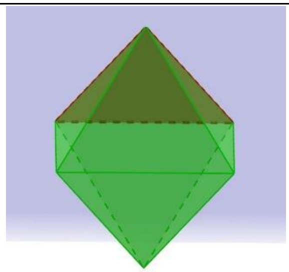
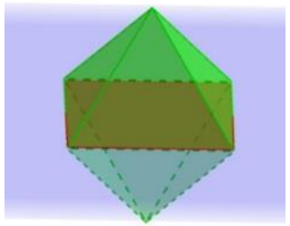
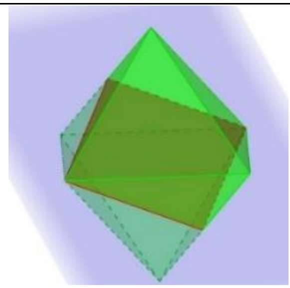
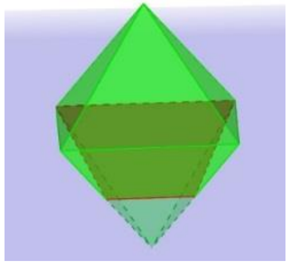
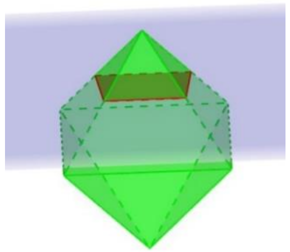
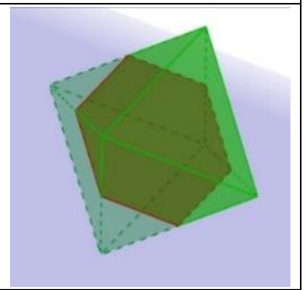
二、　依照第肆章的截面限制條件，列出各多面體的可能截面形狀、截面周長及面積

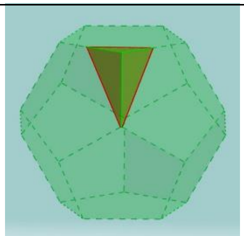
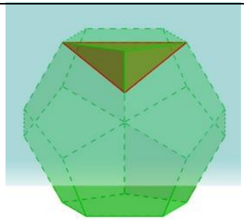
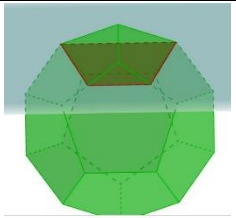
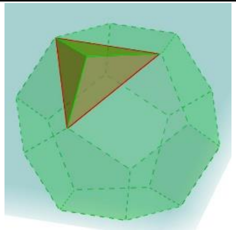
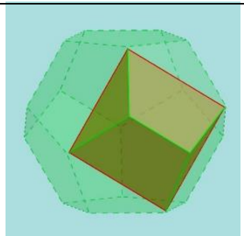
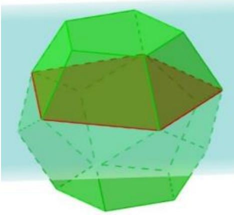
由於空間中不共線的三點可決定一平面，因此任一種正多面體皆可以依序按照 3 頂點連線、2 頂點與 1 稜線中點連線、1 頂點與 2 中點連線以及 3 稜線中點連線找出截面；另因正多面體特殊的對稱特性，前述任三點連線之後，會有其他頂點或稜線中點共面的情形，而形成不同的截面形狀，以下將各正多面體按特定連線方式所截出的截面歸納於表格中：

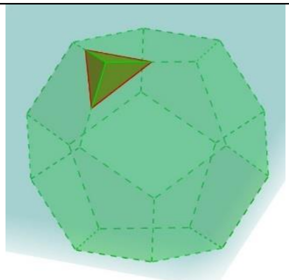
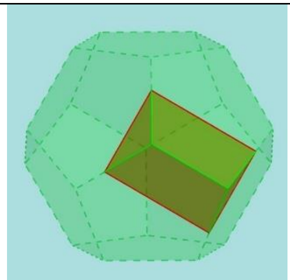
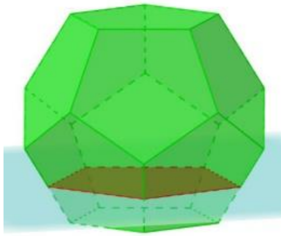
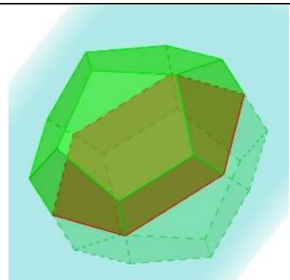
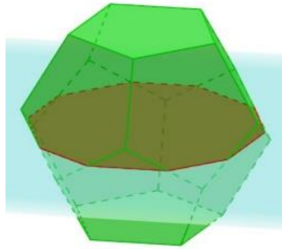
多面體類型	正四面體				
截面形狀	正三角形	等腰三角形	等腰三角形	正三角形	正方形
截面方式	3 頂點連線	2 頂點與 1 稜線中點連線	1 頂點 2 稜線中點連接	3 稜線中點連線	4 稜線中點連線 (3 稜線中點連線，恰有另 1 中點共面)
周長	$3a$	$(1+\sqrt{3})a$	$\frac{1+2\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{3}{2}a$	$2a$
近似值	$3a$	$2.732a$	$2.232a$	$1.5a$	$2a$
面積	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$	$\frac{1}{4}a^2$
近似值	$0.433a^2$	$0.354a^2$	$0.207a^2$	$0.108a^2$	$0.250a^2$
示意圖					

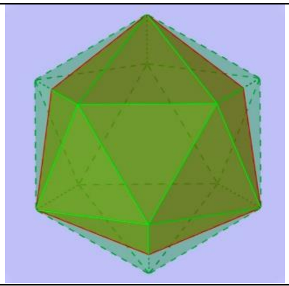
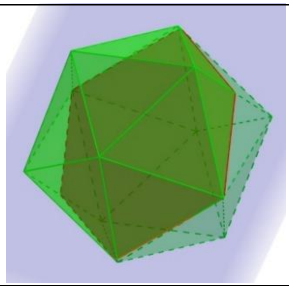
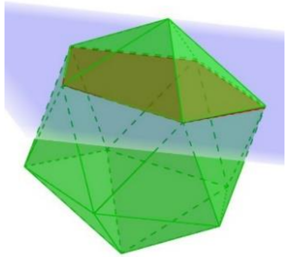
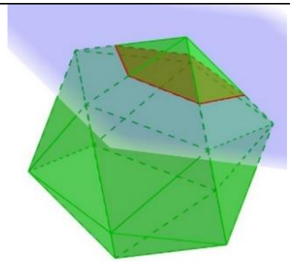
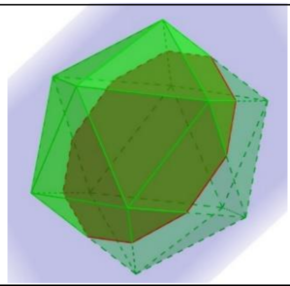
多面體類型	正六面體					
截面形狀	等腰三角形	等腰三角形	長方形	等腰梯形	菱形	正三角形
截面方式	1 頂點與 2 稜線中點連線	2 頂點與 1 稜線中點連線	2 頂點與 2 稜線中點連線 (2 頂點與 1 稜線中點連線，恰有另 1 稜線中點共面)	2 頂點與 2 稜線中點連線 (2 頂點與 1 稜線中點連線，恰有另 1 稜線中點共面)	2 頂點與 2 稜線中點連線 (2 頂點與 1 稜線中點連線，恰有另 1 稜線中點共面)	3 頂點連線
周長	$\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2}a$	$(\sqrt{2}+\sqrt{5})a$	$(2+\sqrt{5})a$	$\frac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)}{2}a$	$2\sqrt{5}a$	$3\sqrt{2}a$
近似值	$2.943a$	$3.650a$	$4.236a$	$4.357a$	$4.472a$	$4.243a$
面積	$\frac{3}{8}a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a^2}$	$\frac{3\sqrt{10}}{8}a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$
近似值	$0.375a^2$	$0.612a^2$	$1.118a^2$	$1.186a^2$	$1.225a^2$	$0.866a^2$
示意圖						

多面體類型	正六面體					
截面形狀	正方形	長方形	正三角形	正方形	長方形	正六邊形
截面方式	4 頂點連線 (3 頂點連線，恰有另 1 頂點共面)	4 頂點連線 (3 頂點連線，恰有另 1 頂點共面)	3 稜線中點連線	4 稜線中點連線 (3 稜線中點連線，恰有另 1 中點共面)	4 稜線中點連線 (3 稜線中點連線，恰有另 1 中點共面)	6 陵線中點連線 (3 稜線中點連線，恰有另 3 稜線中點共面)
周長	$4a$	$(2+2\sqrt{2})a$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}a$	$4a$	$(2+\sqrt{2})a$	$3\sqrt{2}a$
近似值	$4a$	$4.828a$	$2.121a$	$4a$	$3.414a$	$4.423a$
面積	a^2	$\sqrt{2}a^2$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}a^2$	a^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$
近似值	a^2	$1.414a^2$	$0.919a^2$	a^2	$0.707a^2$	$1.299a^2$
示意圖						

多面體類型	正八面體					
截面形狀	正三角形	正方形	菱形	等腰梯形	正方形	正六邊形
截面方式	3 頂點連線	4 頂點連線 (3 頂點連線，恰有另 1 頂點共面)	2 頂點與 2 稜線中點連線 (2 頂點與 1 稜線中點連線，恰有另 1 稜線中點共面)	2 頂點與 2 稜線中點連線 (2 頂點與 1 稜線中點連線，恰有另 1 稜線中點共面)	4 稜線中點連線 (3 稜線中點連線，恰有另 1 稜線中點共面)	6 稜線中點 (3 稜線中點連線，恰有另 3 稜線中點共面)
周長	$3a$	$4a$	$2\sqrt{3}a$	$\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)a$	$2a$	$3a$
近似值	$3a$	$4a$	$3.464a$	$3.232a$	$2a$	$3a$
面積	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	a^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$	$\frac{3\sqrt{11}}{16}a^2$	$\frac{1}{4}a^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$
近似值	$0.433a^2$	a^2	$0.707a^2$	$0.622a^2$	$0.250a^2$	$0.650a^2$
示意圖						

多面體類型	正十二面體					
截面形狀	等腰三角形	等腰三角形	等腰梯形	正三角形	正方形	正五邊形
截面方式	1 頂點連接 2 陵線中點	2 頂點連接 1 陵線中點	2 頂點與 2 稜線中點連線 (2 頂點與 1 稜線中點連線，恰有另 1 稜線中點共面)	3 頂點連線	4 頂點連線 (3 頂點連線，恰有另 1 頂點共面)	5 頂點連線 (3 頂點連線，恰有另 2 頂點共面)
周長	$\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{64+16\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{16+4\sqrt{5}}}{2}a$	$\frac{3+3\sqrt{5}+4\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{3+3\sqrt{5}}{2}a$	$(2+2\sqrt{5})a$	$\frac{5+5\sqrt{5}}{2}a$
近似值	$3.306a$	$4.115a$	$5.505a$	$4.854a$	$6.472a$	$8.090a$
面積	$\frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{58+14\sqrt{5}})}{64}a^2$	$\frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{16}a^2$	$\frac{(3+3\sqrt{5})(\sqrt{74+3\sqrt{5}})}{64}$	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}a^2$	$\frac{6+2\sqrt{5}}{4}a^2$	$\frac{15+5\sqrt{5}}{8}a^2\tan(54°)$
近似值	$0.478a^2$	$0.476a^2$	$1.363a^2$	$1.009a^2$	$2.618a^2$	$4.504a^2$
示意圖						

多面體類型	正十二面體				
截面形狀	正三角形	長方形	正五邊形	正六邊形	正十邊形
截面方式	3 稜線中點連線	4 稜線中點連線 (3 稜線中點連線， 恰有另 1 稜線中點 共面)	5 稜線中點連線 (3 稜線中點連線， 恰有另 2 稜線中點 共面)	6 稜線中點連線 (3 稜線中點連線， 恰有另 3 稜線中點 共面)	10 稜線中點連線 (3 稜線中點連線， 恰有另 7 稜線中點 共面)
周長	$(\frac{3+3\sqrt{5}}{4})a$	$(2+\sqrt{5})a$	$\frac{15+5\sqrt{5}}{4}a$	$3+\sqrt{3}a$	$\frac{15+5\sqrt{5}}{2}a$
近似值	$2.472a$	$4.236a$	$6.545a$	$4.732a$	$13.090a$
面積	$\frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{64}a^2$	$(\frac{2+\sqrt{5}}{4})a$	$\frac{35+15\sqrt{5}}{32}\tan(54°)$	$\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{4}a$	$\frac{20+15\sqrt{5}}{4}a^2\cot(18°)$
近似值	$0.283a^2$	$1.059a^2$	$2.948a^2$	$6.802a^2$	$10.299a^2$
示意圖					

多面體類型	正二十面體				
截面形狀	六邊形	六邊形	正五邊形	正五邊形	正十邊形
截面方式	3 頂點連接 3 稜線中點 (3 頂點連線，恰有另 3 稜線中點共面)	4 頂點連接 2 稜線中點 (3 頂點連線，恰有另 1 頂點及 3 稜線中點共面)	5 頂點連線 (3 頂點連線，恰有另 2 頂點共面)	5 稜線中點連線 (3 稜線中點連線，恰有另 2 稜線中點共面)	10 稜線中點連線 (3 稜線中點連線，恰有另 7 稜線中點共面)
周長	$3\sqrt{3}a$	$(2+2\sqrt{3})a$	$5a$	$\frac{5}{2}a$	$5a$
近似值	$5.196a$	$5.464a$	$5a$	$2.5a$	$5a$
面積	$\left[\frac{(5+3\sqrt{5})\left[\left(\sqrt{34-6\sqrt{5}}\right)+\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)+\left(\sqrt{42+2\sqrt{5}}\right)\right]}{64}\right]a^2$	$\left[\frac{2+2\sqrt{5}+(1+\sqrt{5})(\sqrt{6-2\sqrt{5}})}{4}\right]a^2$	$\frac{5\tan(54°)}{4}a^2$	$\frac{5\tan(54°)}{16}a^2$	$\frac{5}{8}\cot(18^{\circ})a^2$
近似值	$2.303a^2$	$2.618a^2$	$1.720a^2$	$0.430a^2$	$2.361a^2$
示意圖					

(一)按照特定的連線方式所得出的截面圖形，正四面體的可能截面形狀有正三角形、等腰三角形及正方形；正六面體的可能截面形狀有正三角形、等腰三角形、長方形、正方形、菱形、等腰梯形及正六邊形；正八面體的可能截面形狀有正三角形、正方形、菱形、等腰梯形及正六邊形；正十二邊形的可能截面形狀有正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形、正十邊形、長方形、等腰三角形及等腰梯形。正二十邊形的可能截面形狀有正五邊形、正十邊形及六邊形。

(二)正四面體截面的最大周長及面積恰為正四面體表面的任一正三角形；正六面體截面的最大周長及面積存在於正六面體斜角的 4 頂點連線的長方形；正八面體截面的最大周長及面積則存在於 4 頂點連線的正方形中；正十二面體截面的最大周長及面積存在於 10 稜線中點連線的正十邊形；正二十面體截面的最大周長及面積則存在於 4 頂點連接 2 稜線中點的六邊形中。

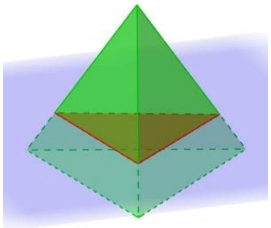
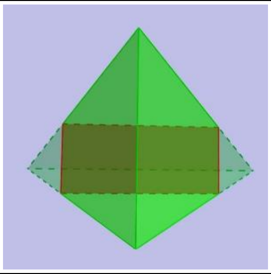
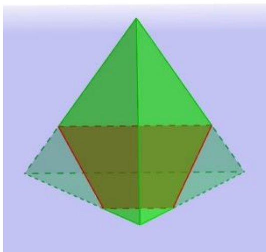
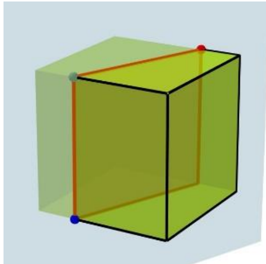
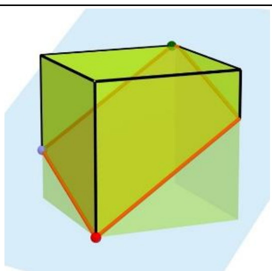
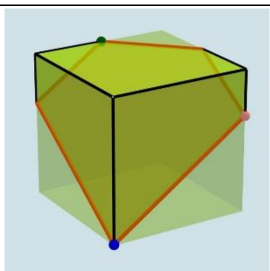
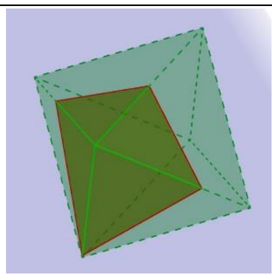
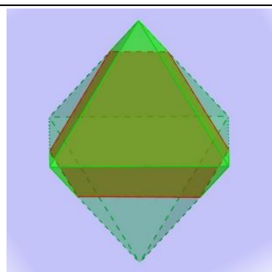
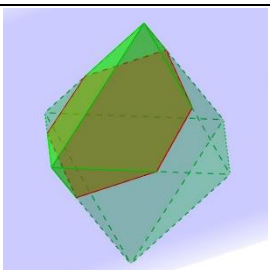
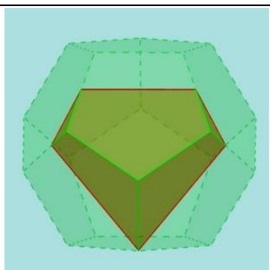
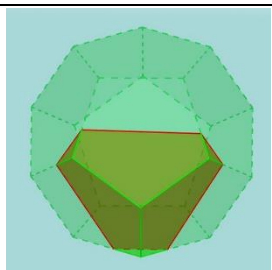
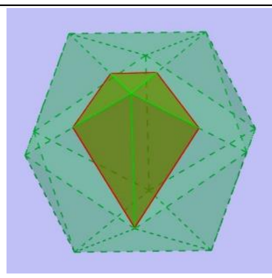
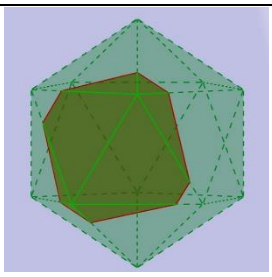
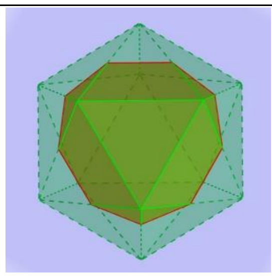
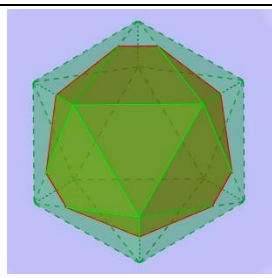
(三)如限制以上正多面體的截面必須位於正多面體的「內部」而非切面時，則正四面體截面的最大周長及面積存在於由 2 頂點與 1 稜線中點連線的等腰三角形；正六面體及正八面體的最大周長及面積的截面則與前述第(二)點中的相同。

(四)觀察此份研究中使用特定的連線方式所得出的截面圖形，只有正四面體、正八面體、正十二面體所截出的最大面積和周長為正多邊形，其餘正六面體和正二十面體所截出的最大面積和周長並非為正多邊形。

陸、 未來展望

一、　　未來可探討螞蟻在正多面體表面行進的最短路徑延伸為在正多面體內部(即三維空間內的直線距離)移動的最短路徑。

二、　　本研究正多面體截面連線方式限縮在頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線。未來將可討論如果從點到稜邊比為 1:2 的點連線或稜邊比為 1:2 的點相互連線等，來探討更進一步可能截出的形狀圖形，例如:正四面體可能截出正三角形、長方形或等腰梯形等，正六面體可能截出平行四邊形或五邊形等，正八面體可能截出箏形或六邊形等，正十二面體可能截出五邊形或六邊形等，正二十面體可能截出八邊形或九邊形等……

<table>
<tr><td colspan="3">正四面體</td><td>正六面體</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">正六面體</td><td colspan="2">正八面體</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>正八面體</td><td colspan="2">正十二面體</td><td>正二十面體</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">正二十面體</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
</table>

柒、 參考資料(文獻)及其他

【1】Geogebrab BBG5 系列功能線上資源。官長壽(2015)。取自

https://www.geogebra.org/m/PQdSDyeB#chapter/24591

【2】Pavlyk, O., & Rytin, M. (2009). Cross Sections of Regular Polyhedra [Computer software]. Wolfram Demonstrations Project. Retrieved from

http://demonstrations.wolfram.com/CrossSectionsOfRegularPolyhedra/

【3】黃子恩(民 109 年)。超不單純的群體旋轉。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會。

【4】Tetrahedron. (2021, May 6). In Wikipedia, the free encyclopedia. Retrieved May 26, 2021, from

https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron

【評語】030418

考慮在多面體上由一個頂點移動到另一個頂點或一個邊的中點，在特定的移動規則下所走的路徑長，針對各種多面體做了討論。對於通過多面體的部分頂點或邊的中點的一些特殊截面的周長與面積的值，也給出了計算的結果。對可能的各種情況作分類，並針對每種分類給出結果，可以感覺出作者們確實費了許多心思，值得鼓勵。較為美中不足的是，所討論的兩個主題似乎沒有太大的關連性，讓人感覺好像是在看兩個獨立的問題，而不是在看一個完整的作品，這有點可惜。如果能針對從多面體上一點移動到另一點的最短路徑這個部分做更深入的討論（加入一些額外的限制：整個移動路徑要經過若干個特定的點，特定的邊，移動時不可以經過某些點、邊或區域，經過邊和區域可能移動的速率不同…），作品看起來會更有一致性，結果也可能更為有趣。

作品簡報

正多面體表面移動及一刀斬形成的截面

前言及介紹

研究動機

- 1. 螞蟻在正多面體表面行進，若加上特殊的規則後，任一頂點→鏡射點間的最短路徑是否存在於行進「最少步」的路徑？
- 2. 若在正多面體上採特殊規則將此立體圖截出一個截面時，此截面的形狀及性質？
  能否找到一個最大截面？

研究目的

- 1. 分析螞蟻在各正多面體進行表面行走時之最短路徑
- 2. 運用電腦軟體觀察正多面體進行截面的圖形變化，進一步算出正多面體採特定方式截面時所形成的各種截面形狀及其周長和面積，並找出最大截面

前言及介紹

定義

- 正多面體：
  本研究中所使用的正多面體，為各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的**凸多面體**，即柏拉圖立體(Platonic Solids) 。

- 螞蟻行進步數定義及限制條件：
  指的是從上述任一正多面體頂點出發，經由下列可能的連線方式，

  頂點 → { 頂點→頂點；頂點→稜線中點；稜線中點→稜線中點 } → 頂點/稜線中點→鏡射點

  每連線一次代表一步，螞蟻行進的終點為(出發時)頂點的鏡射點。

- 頂點的鏡射點：
  本研究中所指正多面體某一頂點之鏡射點，於正六、正八、正十二及正二十面體中為該頂點的對頂點(與前一點不同面)；而正四面體因不具點鏡射到其自身的性質(無對頂點)，為該頂點對面的中心點[1]。

前言及介紹

定義

- 截面限制條件：

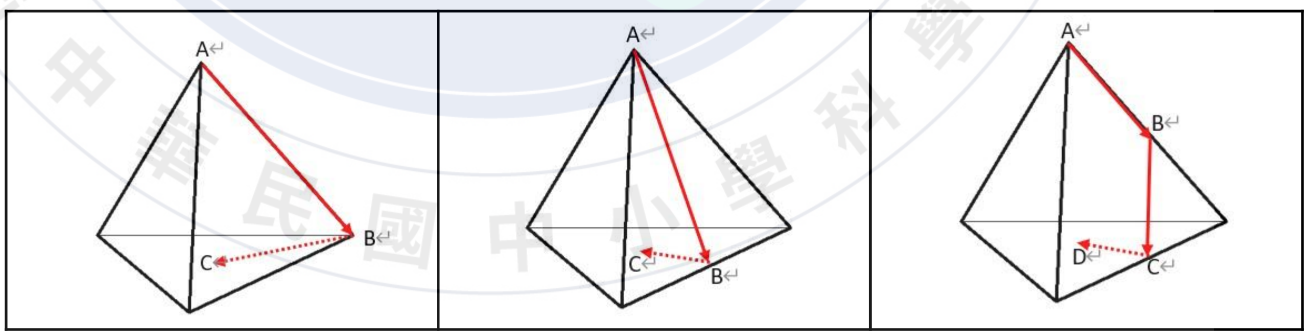
本研究中所指截面，連線方式限縮在頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線。

研究過程

1. 正多面體表面移動最短路徑

- 按照定義中所列的特定連線方式，列舉在各正多面體表面(邊長皆設為a)由頂點至鏡射點可能的最少步數路徑，以找出最短路徑。

Ex:邊長為a的正四面體,頂點至鏡射點可能的最少步數路徑

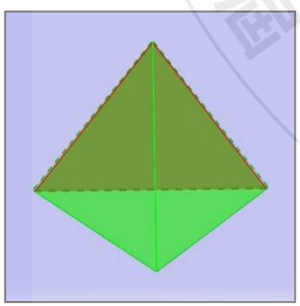
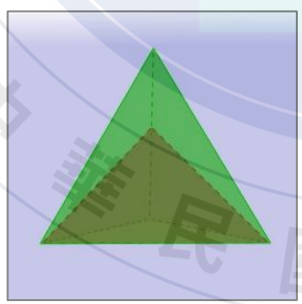
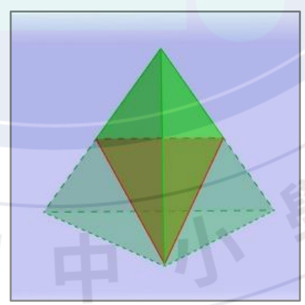
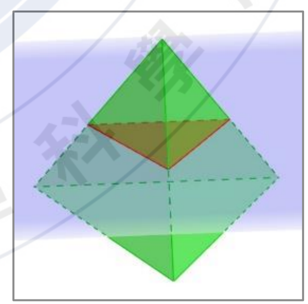
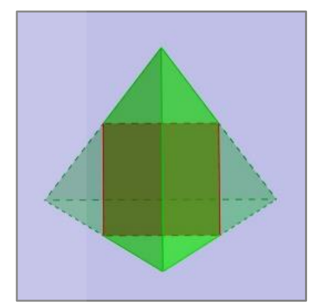


研究過程

2. 特定截面的周長及面積探討

- 按照定義中所列的截面限制條件，列舉特定連線方式可截出的可能形狀，並計算出周長及面積；探討各正多面體可截出的最大截面。。

Ex:邊長為a的正四面體,按特定連線方式截出可能截面

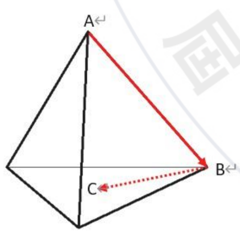
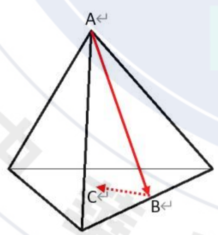
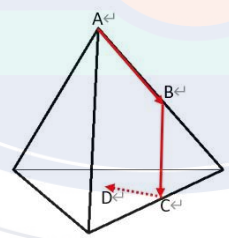
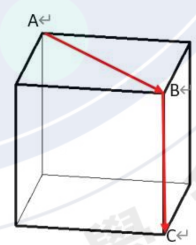
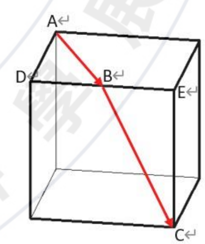
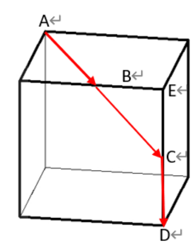
截面方式	3頂點連線	2頂點與1稜線中點連線	1頂點2稜線中點連接	3稜線中點連線	4稜線中點連線(3稜線中點連線，恰有另1中點共面)
截面形狀	正三角形	等腰三角形	等腰三角形	正三角形	正方形
示意圖					

研究結果

1. 正多面體表面移動最短路徑

- 依照前述的螞蟻行進步數定義及限制條件，將可能最少步數路線圖和計算出的路徑總長度列出，找出最短路徑。

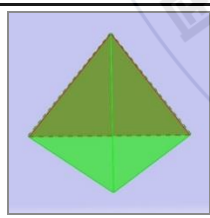
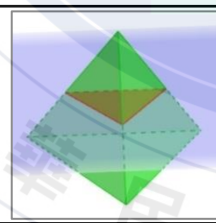
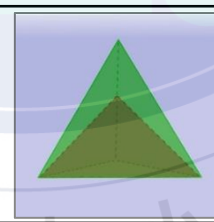
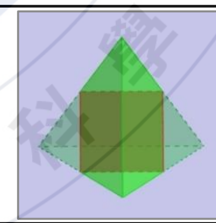
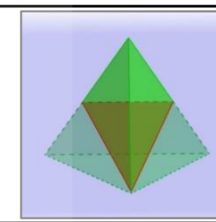
◆ 以邊長為a的正四面體及正六面體為例, 將結果列於下表中

多面體類型	正四面體			正六面體		
行進步數	2步	2步	3步	2步	2步	3步
路徑長度	$\frac{5}{3}a$	$\frac{2+3\sqrt{3}}{6}a$	$\frac{4}{3}a$	$(1+\sqrt{2})a$	$\sqrt{5}a$	$\frac{1+2\sqrt{5}}{2}a$
近似值	$1.667a$	$1.199a$	$1.333a$	$2.414a$	$2.236a$	$2.736a$
示意圖						
最短路徑		V			V	

2. 特定截面的周長及面積探討(1/3)

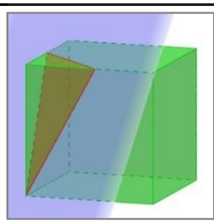
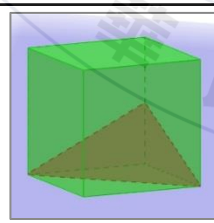
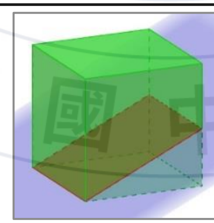
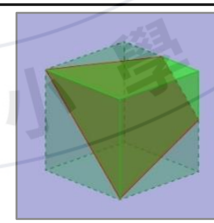
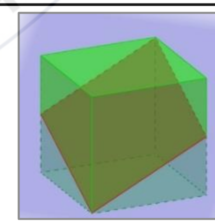
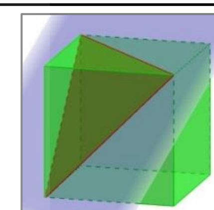
- 依照前述定義的截面限制條件，列出各多面體的可能截面形狀、截面周長及面積。

◆ 以邊長為a的正四面體為例, 將結果列於下表中

多面體類型	正四面體				
截面形狀	正三角形	等腰三角形	等腰三角形	正三角形	正方形
截面方式	3頂點連線	2頂點與 1稜線中點連線	1頂點2稜線中點連接	3稜線中點連線	4稜線中點連線 (3稜線中點連線，恰有另1中點共面)
周長	$3a$	$(1+\sqrt{3})a$	$\frac{1+2\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{3}{2}a$	$2a$
近似值	$3a$	$2.732a$	$2.232a$	$1.5a$	$2a$
面積	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$	$\frac{1}{4}a^2$
近似值	$0.433a^2$	$0.354a^2$	$0.207a^2$	$0.108a^2$	$0.250a^2$
示意圖					

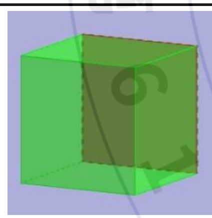
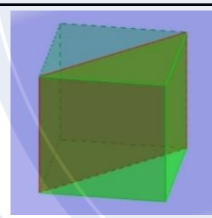
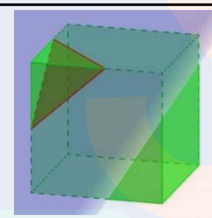
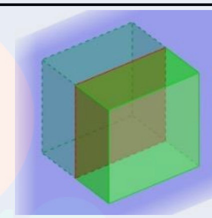
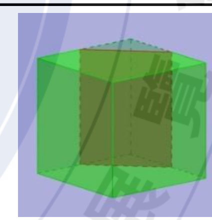
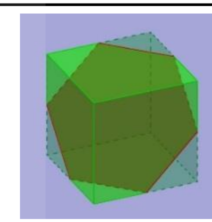
2. 特定截面的周長及面積探討(2/3)

- 由於空間中不共線的三點可決定一平面，因此任一種正多面體皆可以依序按照3頂點連線、2頂點與1稜線中點連線、1頂點與2中點連線以及3稜線中點連線找出截面。
- 因正多面體特殊的對稱特性，前述任三點連線之後，會有其他頂點或稜線中點共面的情形，而形成不同的截面形狀
  - ◆ 以邊長為a的正六面體為例, 將結果列於下表中

多面體類型	正六面體					
截面形狀	等腰三角形	等腰三角形	長方形	等腰梯形	菱形	正三角形
截面方式	1頂點與2稜線中點連線	2頂點與1稜線中點連線	2頂點與2稜線中點連線(2頂點與1稜線中點連線，恰有另1稜線中點共面)	2頂點與2稜線中點連線(2頂點與1稜線中點連線，恰有另1稜線中點共面)	2頂點與2稜線中點連線(2頂點與1稜線中點連線，恰有另1稜線中點共面)	3頂點連線
周長	$\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2}a$	$(\sqrt{2}+\sqrt{5})a$	$(2+\sqrt{5})a$	$\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{2}a$	$2\sqrt{5}a$	$3\sqrt{2}a$
近似值	$2.943a$	$3.650a$	$4.236a$	$4.357a$	$4.472a$	$4.243a$
面積	$\frac{3}{8}a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{a^2}$	$\frac{3\sqrt{10}}{8}a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$
近似值	$0.375a^2$	$0.612a^2$	$1.118a^2$	$1.186a^2$	$1.225a^2$	$0.866a^2$
示意圖						

2. 特定截面的周長及面積探討(3/3)

◆ 以邊長為a的正六面體為例, 將結果列於下表中(續)

多面體類型	正六面體					
截面形狀	正方形	長方形	正三角形	正方形	長方形	正六邊形
截面方式	4頂點連線 (3頂點連線，恰有另1頂點共面)	4頂點連線 (3頂點連線，恰有另1頂點共面)	3稜線中點連線	4稜線中點連線 (3稜線中點連線，恰有另1中點共面)	4稜線中點連線 (3稜線中點連線，恰有另1中點共面)	6陵線中點連線 (3稜線中點連線，恰有另3稜線中點共面)
周長	$4a$	$(2+2\sqrt{2})a$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}a$	$4a$	$(2+\sqrt{2})a$	$3\sqrt{2}a$
近似值	$4a$	$4.828a$	$2.121a$	$4a$	$3.414a$	$4.423a$
面積	a^2	$\sqrt{2}a^2$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}a^2$	a^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$
近似值	a^2	$1.414a^2$	$0.919a^2$	a^2	$0.707a^2$	$1.299a^2$
示意圖						

正六面體截面的最大周長及面積存在於正六面體斜角4頂點連線的長方形

研究發現與結論

1. 正多面體表面移動最短路徑

- 根據Geogebra電腦繪製軟體的輔助和計算結果，可以歸納並證實我們的假設：如果將螞蟻在正多面體表面的行進方式加上特殊的規則後，從正(凸)面體表面由一頂點至其鏡射點的最短路徑會存在於行進「最少步」的路徑。

2. 特定截面的周長及面積

- 根據計算結果，**正四面體**截面的最大周長及面積恰存在於正四面體表面的任一正三角形；**正六面體**截面的最大周長及面積存在於正六面體斜角的4頂點連線的長方形；**正八面體**截面的最大周長及面積則存在於4頂點連線的正方形中；**正十二面體**截面的最大周長及面積存在於十稜線中點連線的正十邊形；**正二十面體**截面的最大周長及面積則存在於2稜線中點連接4頂點的六邊形中。

研究發現與結論

2. 特定截面的周長及面積

- 如限制各正多面體的截面必須位於正多面體的「內部」而不可為切面時，則正四面體截面的最大周長及面積存在於由2頂點與1稜線中點連線的等腰三角形；其餘正多面體的最大周長及面積的截面則不變。
- 觀察此份研究中使用特定的連線方式所得出的截面圖形，只有正四面體、正八面體、正十二面體所截出的最大面積和周長為正多邊形，其餘正六面體和正二十面體所截出的最大面積和周長並非為正多邊形。

參考文獻

【1】Geogebrab BBG5系列功能線上資源。官長壽(2015)。取自 https://www.geogebra.org/m/PQdSDyeB#chapter/24591

【2】Pavlyk, O., & Rytin, M. (2009). Cross Sections of Regular Polyhedra [Computer software]. Wolfram Demonstrations Project. Retrieved from http://demonstrations.wolfram.com/CrossSectionsOfRegularPolyhedra/

【3】黃子恩(民109年)。超不單純的群體旋轉。中華民國第60 屆中小學科學展覽會。

【4】Tetrahedron. (2021, May 6). In Wikipedia, the free encyclopedia. Retrieved May 26, 2021, from https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron/