中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030417

圓外切三角形與四邊形之構造與性質探究

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 曾琮鈞	蕭偉智
國二 徐正皓	
國二 劉誠恩	

關鍵詞：調和四邊形、陪位中線、黃金比例

摘要

本研究推廣於近年的兩篇研究，Sejfried 與 Shelomovskii 的三角形及其內切圓的幾何構圖研究[1]，以及沈執中與陳彥睿提出的三角形與四邊形及其內切圓的幾何構圖研究[3]。

相較他們的研究，本研究是新的方向，我們的對象不同，使用方法也不同。我們不使用空間射影模型，因為射影只能處理共點、共線，卻喪失了角度、長度、形狀等幾何定性與定量性質。本研究討論了給定任意圓內接三角形，如何在其三邊的延長線上分別取一點，使得這兩兩點的連線（共三條直線）都與圓相切呢？同樣的，推廣到給定任意圓內接四邊形的外切四邊形構圖。值得一提的是，在任意三角形中，我們進一步發現外切三角形的樣態與原三角形的兩邊比值有關，臨界點是漂亮的黃金比例！

壹、 動機與文獻

一、 給定圓外切三角形（四邊形），而構造圓內接三角形（四邊形）

在 2017 年的第五十七屆全國科學展覽會，沈執中與陳彥睿提出一篇研究〈Sejfried 定理在四邊形的推廣〉[3]，他們將 Sejfried 與 Shelomovskii 的 2012 年所提出的三角形與其內切圓的幾何構圖推廣到四邊形[1]。

Sejfried 和 Shelomovskii 提出任意三角形射影到正三角形，且同時其內切圓也會射影到正三角形的內切圓的空間射影模型。因為交比是射影變換不變量，僅需證明正三角形的構圖，因此解決了給定任意圓外切三角形，分別自三個頂點各作一條射線，兩兩射線交於圓上，而構造一個圓內接三角形。

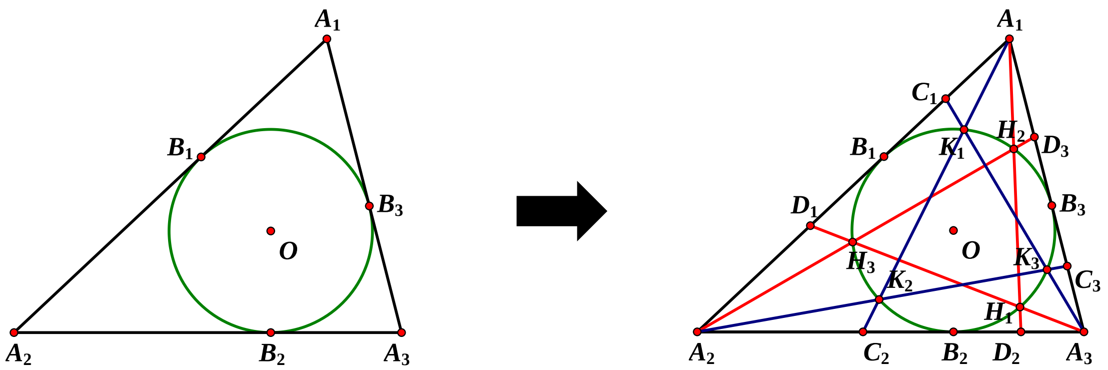


圖1：給定圓外切三角形，構造圓內接三角形。

沈執中與陳彥睿探討一個高難度的作圖，如下圖，給定圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，分別自四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四個頂點各作一條射線 $\overrightarrow{A_1C_2}$、$\overrightarrow{A_2C_3}$、$\overrightarrow{A_3C_1}$、$\overrightarrow{A_4C_1}$ 且此四條射線彼此的交點都落在內切圓上，構成一個圓內接四邊形 $K_1K_2K_3K_4$（$H_1H_2H_3H_4$），他們證明此作圖共有兩解。

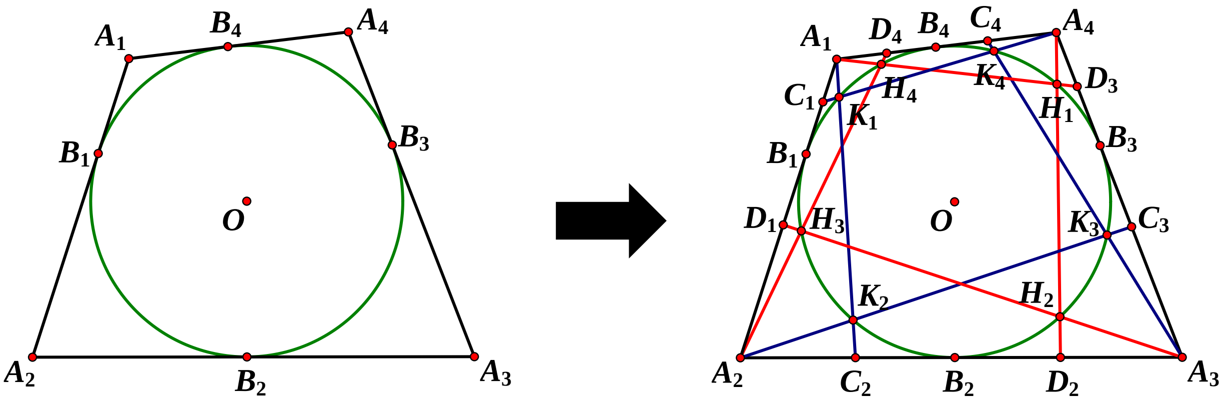


圖2：給定圓外切四邊形，構造圓內接四邊形（取自沈執中與陳彥睿[3]）。

沈執中與陳彥睿他們並非直接在原四邊形上直接作圖，而是利用一個空間射影模型，利用此模型將圓射影到圓，然後再證明任意的圓外切四邊形皆可射影為圓外切菱形的存在唯一性，透過此模型則證明了任意四邊形的構圖，如下圖。

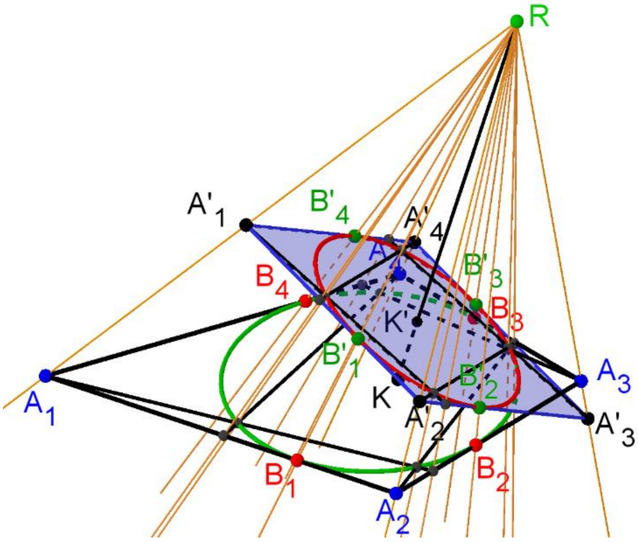


圖3：圓射影到圓模型（取自沈執中與陳彥睿[3]）。

綜合來看，無論 Sejfried 和 Shelomovskii 的研究，或者沈執中與陳彥睿的研究，他們

分別對於圓外切三角形、圓外切四邊形，利用射影的方式作出圓內接三角形、圓內接四邊形圖，因為射影所以僅能刻畫出其交比性質，這是他們研究上的限制。

二、 給定圓內接三角形（四邊形），而構造圓外切三角形（四邊形）

2014 年，Shelomovskii 再提出一篇更完整的研究〈Sejfriedian: existence, uniqueness, constructing and the proof of properties〉[2]，他探討了另外一個不同的構圖問題：給定圓內接三角形，而構造圓外切三角形。

如圖3，給定圓內接 $\triangle ABC$，在三角形邊的延長線上分別取三點 P_A、P_B、P_C，使得直線 $\overleftrightarrow{P_AP_B}$、$\overleftrightarrow{P_BP_C}$、$\overleftrightarrow{P_CP_A}$ 分別外切圓於三點 E_{C_1}、E_{A_1}、E_{B_1}，形成外切 $\triangle P_AP_BP_C$。

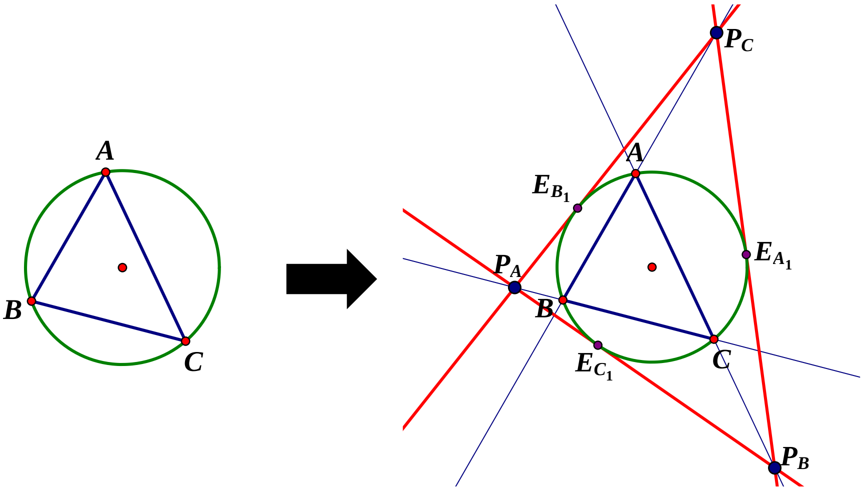


圖4：圓內接三角形構造圓外切三角形。

如下圖，Shelomovskii 利用 $\triangle ABC$ 的 Lemoine point 作為控制點，可將任意三角形與其外接圓射影變換到正三角形與其外接圓，用類似射影的手法，他解決了此作圖難題。

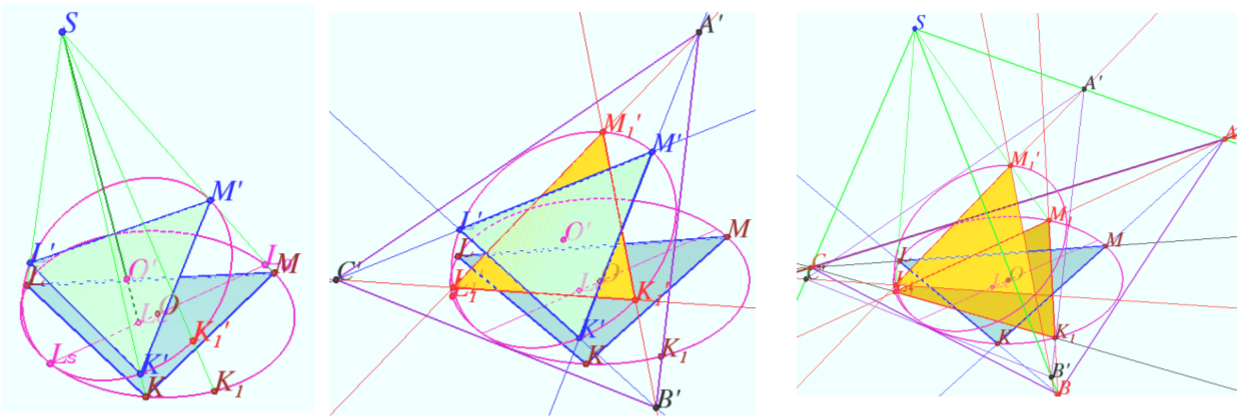


圖5：圓內接三角形射影回圓內接正三角形模型（取自 Shelomovskii [2]）。

然而，此作圖的缺點是無法在原先給定的任意三角形上作圖，而必須藉由射影模型先

射影到正三角形，再進行正三角形的構圖，然後再射影回原任意三角形。

三、 本研究進行的議題

無論 Sejfried 和 Shelomovskii 的研究，或者沈執中與陳彥睿的研究透過一個射影模型解決「給定圓外切三角形（四邊形），而構造圓內接三角形（四邊形）」的作圖。

本研究的主題異於前述兩者，我們是「給定任意圓內接三角形（四邊形），如何直接在原本上構造圓外切三角形（四邊形）的作圖方法」，以及探究其豐富的幾何性質。

相較他們的研究，本研究是新的方向且難度也比較高。因為三角形與四邊形及其內切圓會有邊上的兩個端點與切點（共三點），資訊量較足夠，我們的研究對象則是探討任意三角形與其外接圓，僅有三角形或四邊形邊上的兩個端點，必須創造出輔助點、輔助線。

本研究的另外一個亮點是，我們不使用跟前人一樣的射影模型，而是在平面上，直接針對任意圓內接三角形（任意圓內接四邊形）上進行幾何作圖，因為空間射影只能簡潔處理共點、共線、共圓，但卻喪失了角度、長度、形狀等幾何定性與定量性質，所以我們以重心坐標系統，搭配調和四邊形、陪位中線、配極原則等幾何定理進行研究。

貳、 研究目的

一、 對於任意圓內接三角形，給出構造圓外切三角形的作圖方法，其中外切三角形的三個頂點分別落在圓內接三角形的邊或延長線上。

二、 刻劃前述圓外切三角形的幾何性質。

三、 對於任意圓內接四邊形，給出構造圓外切四邊形的作圖方法，其中外切四邊形的四個頂點分別落在圓內接四邊形的邊或延長線上。

四、 刻劃前述圓外切四邊形的幾何性質。

五、 任意圓內接正三角形（正方形），迭代其圓外正三角形（正方形）的性質。

參、 研究設備及器材

一、 軟體：幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0

二、 網站：WolframAlpha 計算網站

肆、預備知識

本研究約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$。

一、 調和四邊形（Harmonic Quadrilateral）

平面上，調和四邊形是指對邊乘積相等的圓內接四邊形。如下圖，四邊形 $ABCD$ 是調和四邊形，即滿足 $\overline{AB}\times\overline{CD}=\overline{BC}\times\overline{DA}$。

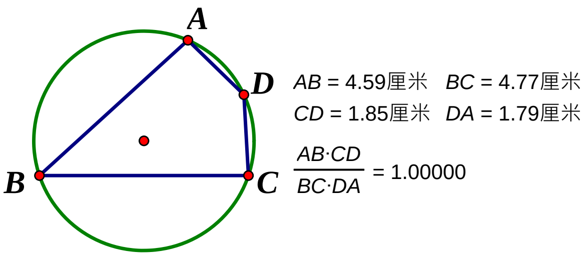


圖6：調和四邊形。

二、 陪位中線／類似中線（Symmedian）

平面上，三角形的一條中線關於與其共頂點的內角平分線的對稱直線稱為三角形的陪位中線。如下圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AM}$ 為中線，$\overline{AN}$ 為角平分線，P 點在 $\overline{BC}$ 上且滿足有向角 $\angle PAN=\angle NAM$，則稱 $\overline{AP}$ 為陪位中線，其中 $\overline{BP}:\overline{PC}=c^2:b^2$。

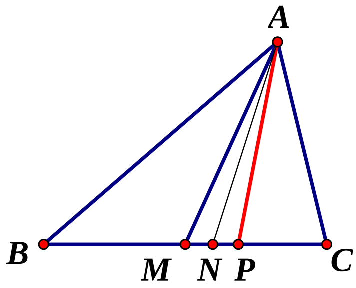


圖 7：陪位中線。

三、 重心坐標（Barycentric Coordinates）

平面上任一點 P 與 $\triangle ABC$ 三頂點形成三個子三角形 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$，其中 ΔPBC 的頂點 P、B、C 為逆時鐘方向，則定義面積為正；順時鐘方向，則定義面積為負，其餘亦同。利用這些三角形的有向面積比來定義此點的位置，就稱為 P 點的重心坐標（Barycentric Coordinates），即 $P(x:y:z)=P(\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB)$。

若三個實數序對 (x,y,z) 滿足 $x+y+z=1$ 時，我們就用逗號表示 P 點的中心坐標之三個分量，此時稱 $P(x,y,z)$ 為正規化的重心坐標（Normalized Barycentric

Coordinates）。因此，我們有三個頂點的坐標 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$。

四、 重心坐標下的直線方程式與外接圓方程式

若點坐標 $P(x:y:z)$ 滿足一次方程 $\sigma_1 x+\sigma_2 y+\sigma_3 z=0$，則全體點 $(x:y:z)$ 為一直線，其中 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 為常數。

此外，平面上給定兩點 $P(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$、$Q(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，則通過此兩點的直線方程式可以用三階行列式表示

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$$

$\triangle ABC$ 的外接圓方程式為

$$a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$$

五、 重心坐標下關於外接圓圓的極點（Pole）與極線（Polar）

若 $\triangle ABC$ 的外接圓方程式為

$$a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$$

則 $P(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ 關於外接圓的極線方程式為

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3]\begin{bmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$$

當 P 點在圓上時，其關於圓的極線就是通過 P 點的切線。

當 P 點在圓外時，過 P 點對圓作兩條切線，其兩切點連線即為 P 點極線。

六、 交比（Cross-ratio）

給定平面上共線的四點 A,B,C,D（四點不一定依照順序排列），定義此四點的交比為有向線段比（同向為正、異向為負），以符號 $(A,B;C,D)$ 表示，其交比的值為：

$$(A,B;C,D)=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\Big/\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

伍、　研究結果

有關圓內接三角形（四邊形）其延長上線分別取三點（四點）而構造圓外切三角形的作圖，我們先從特殊三角形（四邊形）探討，即正三角形與矩形，接著探究一般化情形。

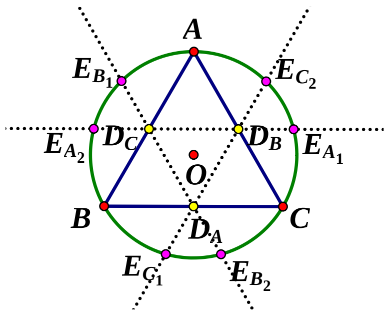
一、 特殊化的三角形：正三角形的作圖與性質

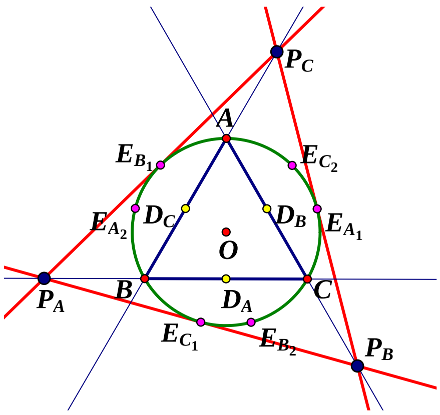
關於圓內接正三角形，我們利用對稱性，可得出其圓外切三角形的作圖步驟與證明。

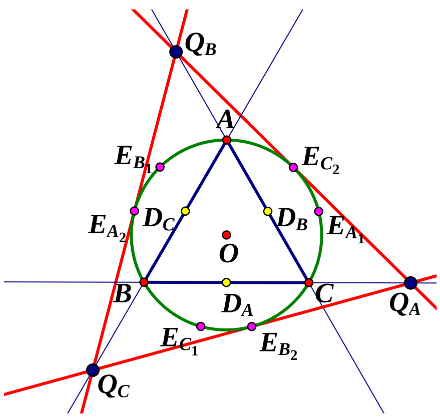
給定任意圓內接正 $\triangle ABC$

【求作】圓外切三角形，使得其頂點分別落在正 $\triangle ABC$ 邊的延長線上。

（一） 作圖步驟

<table>
<tr>
<td>
步驟1. 分別作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的中點 D_C、D_A、D_B。
步驟2. 令 $\overleftrightarrow{D_AD_B}$ 交外接圓 O 於 E_{C_1}、E_{C_2} 點，
$\overleftrightarrow{D_BD_C}$ 交外接圓 O 於 E_{A_1}、E_{A_2} 點，
$\overleftrightarrow{D_CD_A}$ 交外接圓 O 於 E_{B_1}、E_{B_2} 點。
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
步驟3. 分別過點 E_{A_1}、E_{B_1}、E_{C_1} 作外接圓 O 的三條切線。
步驟4. 令三條切線兩兩交於點 P_A、P_B、P_C。同理，過點 E_{A_2}、E_{B_2}、E_{C_2} 作一樣操作，可得交於點 Q_A、Q_B、Q_C。
步驟5. $\triangle P_AP_BP_C$ 與 $\triangle Q_AQ_BQ_C$ 即為所求。注意到，根據對稱性可得出 $\triangle P_AP_BP_C$ 與 $\triangle Q_AQ_BQ_C$ 皆為正三角形。
</td>
<td>




</td>
</tr>
</table>

（二） 存在性證明

因為對稱性，關於圓外切正三角形 $\triangle P_AP_BP_C$ 或 $\triangle Q_AQ_BQ_C$ 的作圖，我們只須證明直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過切線的交點 P_C 即可，其餘其餘兩直線因為對稱性同理可證。

我們先需要有關調和四邊形的引理。

引理1（調和四邊形）（[4], p.128）若圓內接四邊形 $ABCD$ 是調和四邊形，若且唯若其中一條對角線，與過其餘兩點的兩條外接圓切線，此三條直線交於一點。

<u>分析與討論</u>

我們觀察 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{E_{B_1}P_C}$、$\overleftrightarrow{E_{A_1}P_C}$，它們分別為一條割線、兩條切線，根據引理1，我們發現三條直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{E_{B_1}P_C}$、$\overleftrightarrow{E_{A_1}P_C}$ 交於一點的充要條件是四邊形 $AE_{B_1}BE_{A_1}$ 為調和四邊形，於是接下來的要進行的證明就是四邊形 $AE_{B_1}BE_{A_1}$ 為調和四邊形。

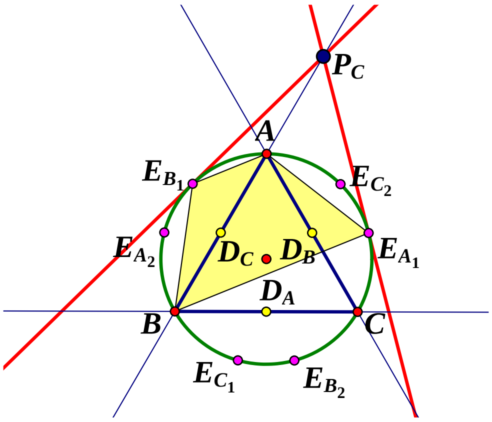


圖8：利用調和四邊形進行證明。

命題2（作圖）圓內接正 $\triangle ABC$ 中，$\overleftrightarrow{AB}$ 通過兩切線的交點 P_C（即證明四邊形 $AE_{B_1}BE_{A_1}$ 為調和四邊形）（其餘兩邊同理可證）。

證明：

1. 因為點 D_A、D_B、D_C 是正 $\triangle ABC$ 邊上的中點，我們利用其對稱性可得在 $\triangle BE_{B_1}D_C$、$\triangle E_{A_1}BD_C$ 中，$\angle BE_{B_1}D_C = \frac{1}{2}\widehat{BE_{B_2}} = \frac{1}{2}\widehat{AE_{A_1}} = \angle E_{A_1}BD_C$，且 $\angle E_{B_1}BD_C = \frac{1}{2}\widehat{AE_{B_1}} = \frac{1}{2}\widehat{BE_{A_2}} = \angle BE_{A_1}D_C$，所以 $\triangle BE_{B_1}D_C \sim \triangle E_{A_1}BD_C$（AA相似），可得

$\overline{BE_{B_1}}:\overline{E_{A_1}B}=\overline{D_CE_{B_1}}:\overline{D_CB}$。

2. 同理，$\triangle AE_{B_1}D_C\sim\triangle E_{A_1}AD_C$，可得 $\overline{AE_{B_1}}:\overline{E_{A_1}A}=\overline{D_CE_{B_1}}:\overline{D_CA}$，又 $\overline{D_CA}=\overline{D_CB}$，所以 $\overline{AE_{B_1}}:\overline{E_{A_1}A}=\overline{BE_{B_1}}:\overline{E_{A_1}B}$，即 $\overline{E_{A_1}A}\times\overline{BE_{B_1}}=\overline{AE_{B_1}}\times\overline{E_{A_1}B}$，因此四邊形 $AE_{B_1}BE_{A_1}$ 為調和四邊形，根據引理2得直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過兩切線 $\overleftrightarrow{E_{B_1}P_C}$、$\overleftrightarrow{E_{A_1}P_C}$ 的交點 P_C，再以相同方法可證明點 P_B、P_A 的情形。

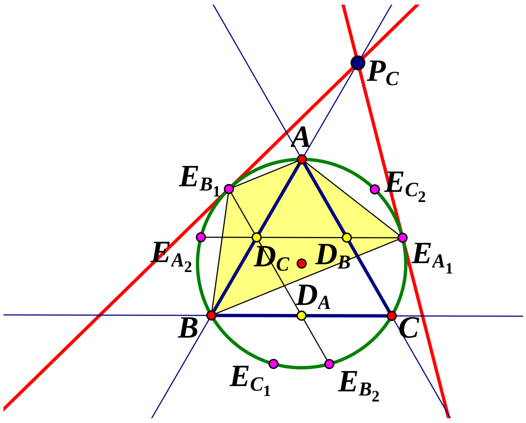


圖9：$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{E_{B_1}P_C}$、$\overleftrightarrow{E_{A_1}P_C}$ 三線交於一點。

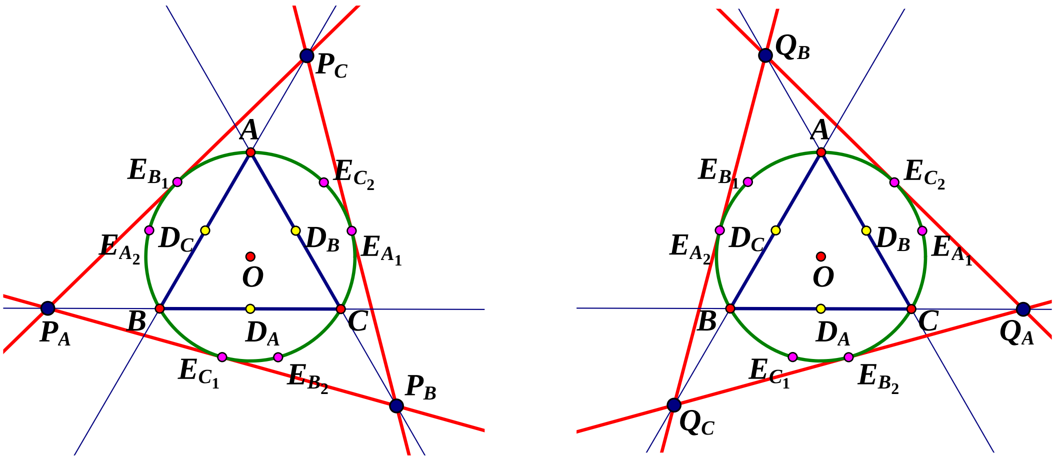


圖10：兩組圓外切三角形構圖。

■

（三） 幾何性質

我們已將完成圓內接正三角形的圓外切三角形構圖，接下來繼續探討其性質。很自然地，我們好奇點 P_A、P_B、P_C 有什麼特殊性質？有趣的是，我們發現 $\frac{\overline{AB}}{P_CA}=\frac{\overline{BC}}{P_AB}=\frac{\overline{CA}}{P_BC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，以下是我們的證明。

性質3（黃金比例） $\frac{\overline{AB}}{\overline{P_CA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{P_AB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{P_BC}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$。

證明：

1. 如下圖，連 $\overline{E_{B_1}A}$、$\overline{E_{B_1}B}$，在 $\triangle P_CE_{B_1}A$、$\triangle P_CBE_{B_1}$ 中，弦切角 $\angle P_CE_{B_1}A=\frac{1}{2}\widehat{E_{B_1}A}=\angle P_CBE_{B_1}$，且 $\angle E_{B_1}P_CA=\angle BP_CE_{B_1}$，所以 $\triangle P_CE_{B_1}A\sim\triangle P_CBE_{B_1}$（AA相似）。
2. 點 D_A、D_B、D_C 是正 $\triangle ABC$ 邊上的中點，我們利用其對稱性可得考慮 $\triangle E_{A_1}E_{B_1}E_{C_1}$ 為正三角形，所以 $\overline{E_{A_1}E_{B_1}}=\overline{AB}$，又因為切線段 $\overline{P_CE_{A_1}}=\overline{P_CE_{B_1}}$ 且 $\angle P_CE_{B_1}E_{A_1}=\frac{1}{2}\widehat{E_{A_1}E_{B_1}}=\angle E_{B_1}E_{C_1}E_{A_1}=60°$，得出 $\overline{P_CE_{B_1}}=\overline{AB}$。
3. 不失一般性令 $\overline{AB}=\overline{P_CE_{B_1}}=x>0$、$\overline{P_CA}=1$，因為 $\triangle P_CE_{B_1}A\sim\triangle P_CBE_{B_1}$，所以 $\overline{P_CE_{B_1}}:\overline{P_CB}=\overline{P_CA}:\overline{P_CE_{B_1}}$，即 $x:(1+x)=1:x$，解方程式得 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。因此，$\frac{\overline{AB}}{\overline{P_CA}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，同理，$\frac{\overline{AB}}{\overline{P_CA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{P_AB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{P_BC}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$。

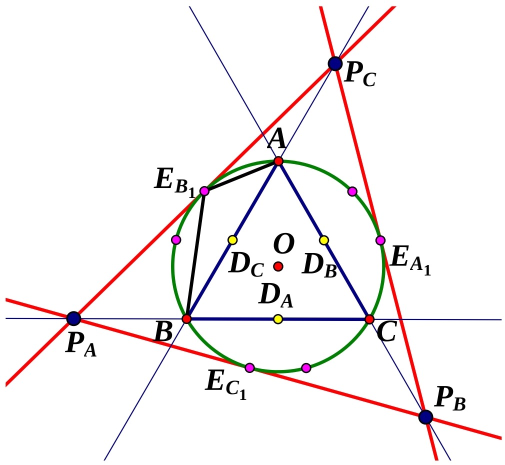


圖 11：黃金比例。

■

應用性質3，我們可以得到更簡單的作圖方法：如下圖，分別在射線 $\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$ 上分別取點 P_C、P_B、P_A，使得 $\frac{\overline{AB}}{\overline{P_CA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{P_AB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{P_BC}}=\phi$，則 $\triangle P_AP_BP_C$ 即為所求。在射線 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{BC}$ 上做相同構造就可得出另外一個所求的三角形 $\triangle Q_AQ_BQ_C$。

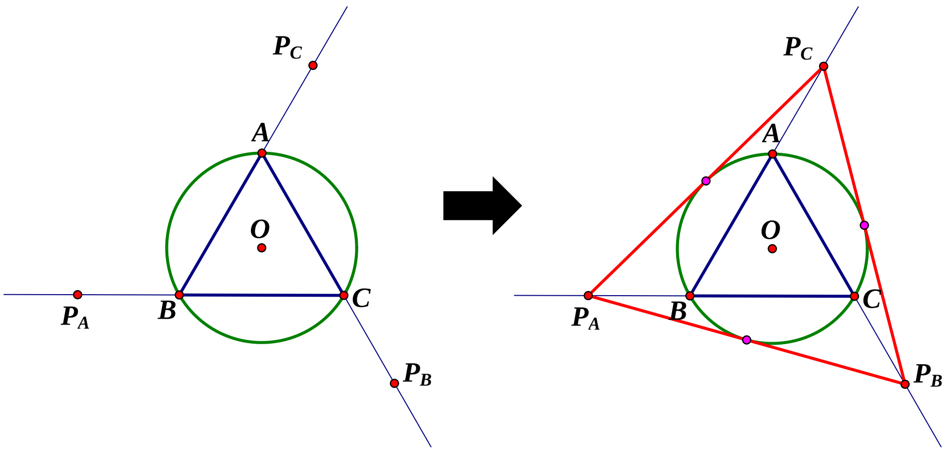


圖12：更簡易的作圖步驟。

我們考慮將中點 D_A、D_B、D_C 納入觀察。

推論4（交比）共線四點的交比 $(B,A;D_C,P_C)=(C,B;D_A,P_A)=(A,C;D_B,D_B)=-\frac{1}{\phi+1}$。

證明：

如圖11，因為點 D_A、D_B、D_C 是正 $\triangle ABC$ 邊上的中點，可得共線四點的有向線段交比 $(B,A;D_C,P_C)=\frac{\overline{BD_C}}{\overline{D_CA}}/\frac{\overline{BP_C}}{\overline{P_CA}}=1\times\frac{\overline{P_CA}}{\overline{BP_C}}$，又根據性質3得出 $\frac{\overline{BA}}{\overline{AP_C}}=\phi$，所以 $\frac{\overline{BA}+\overline{AP_C}}{\overline{AP_C}}=\frac{\overline{BP_C}}{\overline{AP_C}}=\phi+1$，因此交比 $(B,A;D_C,P_C)=-\frac{1}{\phi+1}$，$(B,C;P_A,D_A)$ 與 $(C,A;P_B,D_B)$ 亦同理。

■

二、 一般化的三角形：任意三角形的作圖與性質

我們接下來將圓內接正三角形推廣到任意圓內接三角形，同樣地，如右圖，我們取 $\triangle ABC$ 的 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的中點 M_C、M_A、M_B，再依照正三角形相同的步驟進行構圖，結果發現 $\triangle P_AP_BP_C$ 的三個頂點不會落在 $\triangle ABC$ 邊的延長線上。

事實上，我們知道正三角形的對稱性導致許多點重合，換句話說，對於任意三角形來說，並不是取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的中點。

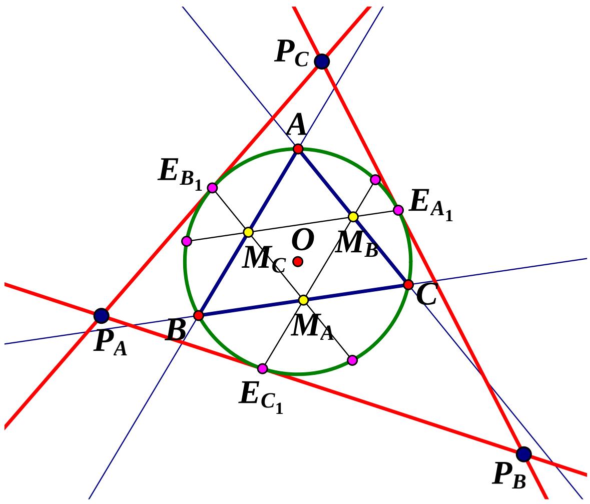


圖 13：以 $\triangle ABC$ 各邊中點進行構圖。

我們回顧正三角形的構圖，結果發現有趣的陪位中線性質，但我們先需要性質5。

性質5（調和四邊形與陪位中線）對於任意調和四邊形 $ABCD$，其對角線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與過 B、D 兩點的外接圓的切線，三條直線交於一點 T，令 $\overline{CT}$ 交 $\overline{BD}$ 於 S 點，則 $\overline{CS}$ 為 $\triangle BCD$ 的陪位中線且 $\overline{AS}$ 為 $\triangle ABD$ 的陪位中線。

證明：

$\overline{BS}:\overline{SD}=(\overline{BC}\times\sin\angle BCS):(\overline{CD}\times\sin\angle SCD)$

$=(\overline{BC}\times\sin\angle ADB):(\overline{CD}\times\sin\angle DBA)$（圓周角）

$=(\overline{BC}\times\overline{AB}):(\overline{CD}\times\overline{AD})$（$\triangle ABD$ 中的正弦定理）

又在調和四邊形 $ABCD$ 中，所以 $\overline{AB}\times\overline{CD}=\overline{BC}\times\overline{AD}$，可得 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DC}$，再得 $\overline{BS}:\overline{SD}=\overline{BC}^2:\overline{CD}^2$，故 $\overline{CS}$ 為 $\triangle BCD$ 的陪位中線；同理，$\overline{AS}$ 為 $\triangle ABD$ 的陪位中線。

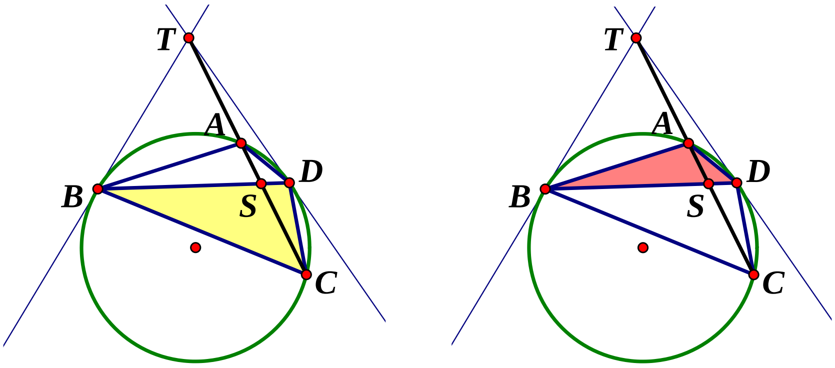


圖14：調和四邊形與陪位中線。

■

我們再觀察正三角形中的 D_C、D_A、D_B 點，我們好奇 $\overline{AD_A}$、$\overline{BD_B}$、$\overline{CD_C}$ 是不是特殊的西瓦線？

如下圖，我們分別過正 $\triangle ABC$ 的頂點 A 與 B 作切線，根據正三角形的對稱性，直線 $\overleftrightarrow{CD_C}$ 與過頂點 A 與 B 的切線三線共點於 C_1，此時根據性質5的調和四邊形性質，可得 $\overline{CD_C}$ 是 $\triangle ABC$ 的陪位中線。同理，$\overline{BD_B}$ 與 $\overline{AD_A}$ 也是 $\triangle ABC$ 的陪位中線。

因此，我們得出對於將圓內接正三角形推廣到任意圓內接三角形的作圖步驟。

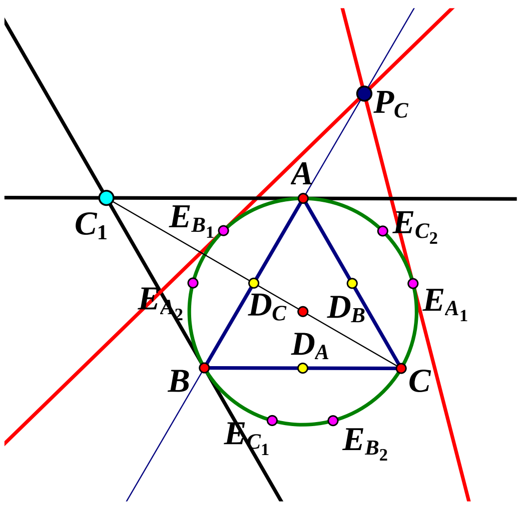


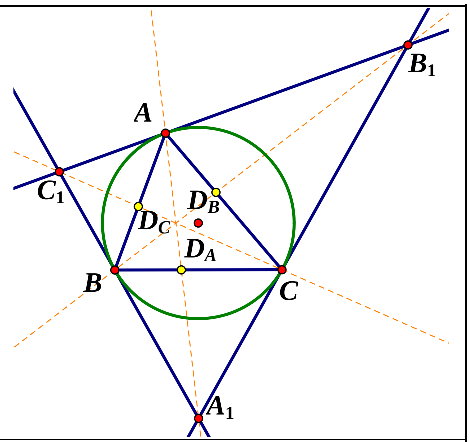
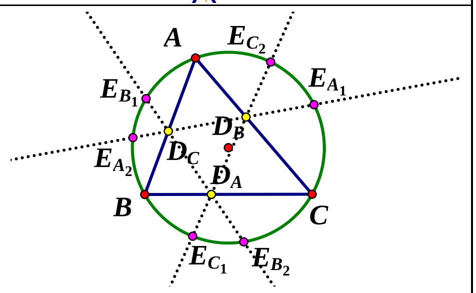
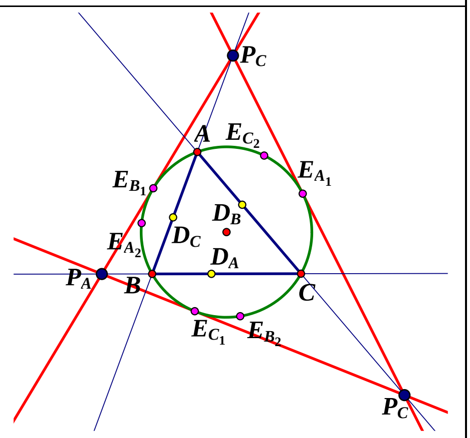
圖15：$\overline{AD_A}$、$\overline{BD_B}$、$\overline{CD_C}$ 為陪位中線。

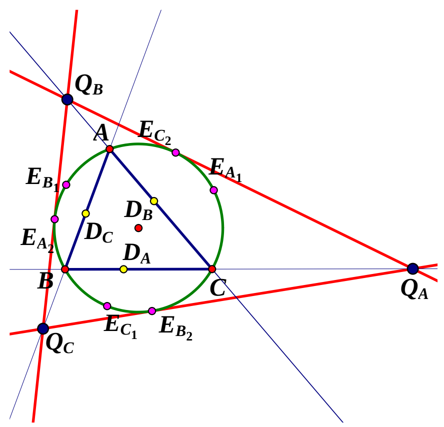
關於圓內接任意三角形，我們利用調和四邊形與陪位中線的性質，可得出其圓外切三角形的作圖步驟與證明。

給定圓內接任意 $\triangle ABC$

【求作】圓外外切三角形，使得其頂點分別落在圓內接任意 $\triangle ABC$ 邊的延長線上。

（一） 作圖步驟

<table>
<tr><td>步驟1. 過 A 作圓的切線 $\overline{B_1C_1}$、過 B 作圓的切線 $\overline{A_1C_1}$、過 C 作圓的切線 $\overline{A_1B_1}$。
步驟2. 連接 $\overleftrightarrow{AA_1}$、$\overleftrightarrow{BB_1}$、$\overleftrightarrow{CC_1}$ 可得其為 $\triangle ABC$ 之陪位中線。
步驟3. 令 $\overline{AA_1}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D_A 點，$\overline{BB_1}$ 交 $\overline{AC}$ 於 D_B 點，$\overline{CC_1}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D_C 點。</td><td>
</td></tr>
<tr><td>步驟4. 連接 $\overleftrightarrow{D_AD_B}$、$\overleftrightarrow{D_BD_C}$、$\overleftrightarrow{D_AD_C}$。
步驟5. 令 $\overleftrightarrow{D_AD_B}$ 交圓於點 E_{C_1}、E_{C_2}
$\overleftrightarrow{D_BD_C}$ 交圓於點 E_{A_1}、E_{A_2}
$\overleftrightarrow{D_CD_A}$ 交圓於點 E_{B_1}、E_{B_2}。</td><td>
</td></tr>
<tr><td>步驟6. 分別過點 E_{A_1}、E_{B_1}、E_{C_1} 作圓的三條切線。
步驟7. 令三條切線兩兩交於點 P_A、P_B、P_C。同理，過點 E_{A_2}、E_{B_2}、E_{C_2} 作一樣操作，可得交於點 Q_A、Q_B、Q_C。
步驟8. $\triangle P_AP_BP_C$ 與 $\triangle Q_AQ_BQ_C$ 即為所求。</td><td>


</td></tr>
</table>

（二） 存在性證明

同樣地，關於圓外切三角形 $\triangle P_AP_BP_C$ 或 $\triangle Q_AQ_BQ_C$ 的作圖，我們只須證明直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過切線的交點 P_C 點即可，其餘兩直線因為對稱性同理可證。

<u>分析與討論</u>

如同正三角形時，我們想要證明四邊形 $AE_{B_1}BE_{A_1}$ 為調和四邊形。

然而，仿照命題2的方法，考慮 $\triangle BE_{B_1}D_C$、$\triangle E_{A_1}BD_C$，利用軟體幾何畫板 GSP 5.0 實驗發現，$\triangle BE_{B_1}D_C$ 並不會相似於 $\triangle E_{A_1}BD_C$，事實上是因為此時 D_C 並非 $\overline{AB}$ 中點。因此，我們必須換個不同的證明方法。

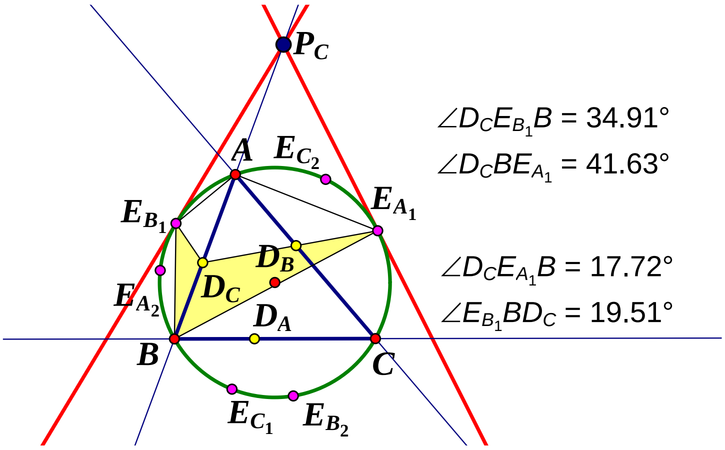


圖16：證明策略的討論。

若比較正三角形與任意三角形的作圖步驟差異，可發現我們在一般三角形中，分別過 A、B、C 點作了圓的三條切線，其實這就是「極點」與「極線」的概念。

接下來，我們需要使用配極原則（polarity principle）作為引理來協助證明。

我們繼續討論證明策略，如下圖，$\overleftrightarrow{C_1A}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1B}$ 是切線，所以 C_1 點為極點且 $\overleftrightarrow{AB}$ 為其極線；同樣的，P_C 點為極點且 $\overleftrightarrow{E_{B_1}E_{A_1}}$ 為其極線。因此根據配極原則，我們若能證明 $\overleftrightarrow{E_{B_1}E_{A_1}}$ 通過 C_1 點，若且為若證明了 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過通過兩切線的交點 P_C。

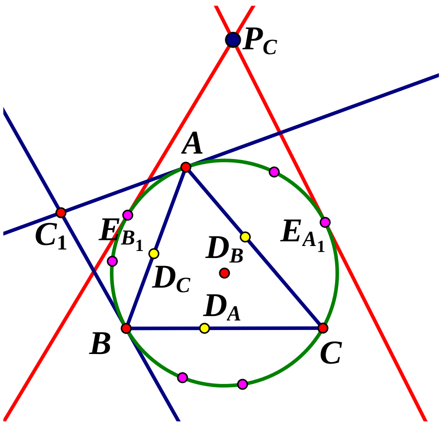


圖 17：配極原則。

引理6（配極原則）若點 P 關於圓的極線 L_P 通過點 Q，則點 Q 關於圓的極線 L_Q 通過點 P。

命題7（作圖）圓內接 $\triangle ABC$ 中，$\overleftrightarrow{AB}$ 通過兩切線的交點 P_C（其餘兩邊同理可證）。

證明：

1. 約定在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\mathrm{c}$、$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$。如圖17，因為 $\overline{CD_C}$ 、$\overline{BD_B}$ 與 $\overline{AD_A}$ 是 $\triangle ABC$ 的陪位中線，可得重心坐標 $D_A(0:b^2:c^2)$、$D_B(a^2:0:c^2)$、$D_C(a^2:b^2:0)$，再得出兩條直線方程式

   $$\overleftrightarrow{D_AD_C}: b^2c^2x-c^2a^2y+a^2b^2z=0\text{、}\overleftrightarrow{D_BD_C}: -b^2c^2x+c^2a^2y+a^2b^2z=0$$

   我們再求 $\overleftrightarrow{D_AD_C}$、$\overleftrightarrow{D_BD_C}$ 分別與外接圓 $a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$ 的交點 E_{A1} 與 E_{B1}

   $$E_{A1}\left(2a^2:\left(1-\sqrt{5}\right)b^2:\left(1+\sqrt{5}\right)c^2\right)\text{、}E_{B1}\left(2a^2:\left(-1+\sqrt{5}\right)b^2:\left(-3+\sqrt{5}\right)c^2\right)\text{、}$$

2. 因為點 C_1 在陪位中線 $\overline{CD_C}$ 的延長線上，且為兩切切線的交點，利用三角函數計算面積，得到重心坐標 $C_1(a^2:b^2:-c^2)$。接下來我們繼續證明 E_{A1}、E_{B1}、C_1 三點共線。

   考慮 $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & -c^2 \\ 2a^2 & \left(1-\sqrt{5}\right)b^2 & \left(1+\sqrt{5}\right)c^2 \\ 2a^2 & \left(-1+\sqrt{5}\right)b^2 & \left(-3+\sqrt{5}\right)c^2 \end{vmatrix}$ 的行列式值

   利用列運算，分別將第一列乘以 -2 並加入第二列與第三列可得

   $$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & -c^2 \\ 0 & \left(-1-\sqrt{5}\right)b^2 & \left(3+\sqrt{5}\right)c^2 \\ 0 & \left(-3+\sqrt{5}\right)b^2 & \left(-1+\sqrt{5}\right)c^2 \end{vmatrix}$$

   $$=a^2\times\begin{vmatrix} \left(-1-\sqrt{5}\right)b^2 & \left(3+\sqrt{5}\right)c^2 \\ \left(-3+\sqrt{5}\right)b^2 & \left(-1+\sqrt{5}\right)c^2 \end{vmatrix}$$

   $$=a^2\times(-4b^2c^2+4b^2c^2)=0$$

   因此，E_{A1}、E_{B1}、C_1 三點共線，即根據配極原則，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過 P_C 點。

3. 我們可再得出坐標 $E_{C1}\left(-2a^2:\left(3+\sqrt{5}\right)b^2:\left(1+\sqrt{5}\right)c^2\right)$，利用同樣的方法，可以得出 E_{B1}、E_{C1}、A_1 三點共線，以及 E_{C1}、E_{A1}、B_1 三點共線，即直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 通過 P_A 點、直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 通過 P_B 點。

■

（三） 幾何性質

性質8（交比）共線四點的交比 $(B,A;D_C,P_C)=(C,B;D_A,P_A)=(A,C;D_B,D_B)=-\frac{1}{\phi+1}$。

證明：

1. 我們一樣利用重心坐標來證明，因為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過兩切線的交點 P_C，所以我們先求出點 P_C 的坐標。考慮通過點 $E_{A1}\left(2a^2:(1-\sqrt{5})b^2:(1+\sqrt{5})c^2\right)$的切線方程式為

$$\begin{bmatrix}2a^2 & (1-\sqrt{5})b^2 & (1+\sqrt{5})c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c^2 & b^2\\ c^2 & 0 & a^2\\ b^2 & a^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0$$

化簡可得 $2b^2c^2x+(3+\sqrt{5})a^2c^2y+(3-\sqrt{5})a^2b^2z=0$

再與 $\overleftrightarrow{AB}:z=0$ 解聯立方程式，可求出坐標 $P_C\left((3+\sqrt{5})a^2:-2b^2:0\right)$

2. 考慮讓四點 B、A、D_C、P_C 坐標正規化，我們約定 $1+\sqrt{5}=2\phi$，可得重心坐標

$$B(0:1:0)、A(1:0:0)、D_C\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}:\frac{b^2}{a^2+b^2}:0\right)、P_C\left(\frac{(2\phi+2)a^2}{(2\phi+2)a^2-2b^2}:\frac{-2b^2}{(2\phi+2)a^2-2b^2}:0\right)$$

討論有向線段交比 $(B,A;D_C,P_C)=\frac{\overline{BD_C}}{\overline{D_CA}}\Big/\frac{\overline{BP_C}}{\overline{P_CA}}=\dfrac{\frac{a^2}{a^2+b^2}-0}{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}}\Bigg/\dfrac{\frac{(2\phi+2)a^2}{(2\phi+2)a^2-2b^2}-0}{1-\frac{(2\phi+2)a^2}{(2\phi+2)a^2-2b^2}}$，化簡可得

$(B,A;D_C,P_C)=-\frac{1}{\phi+1}$。根據輪轉性，$(B,C;P_A,D_A)$ 與 $(C,A;P_B,D_B)$ 亦同理。

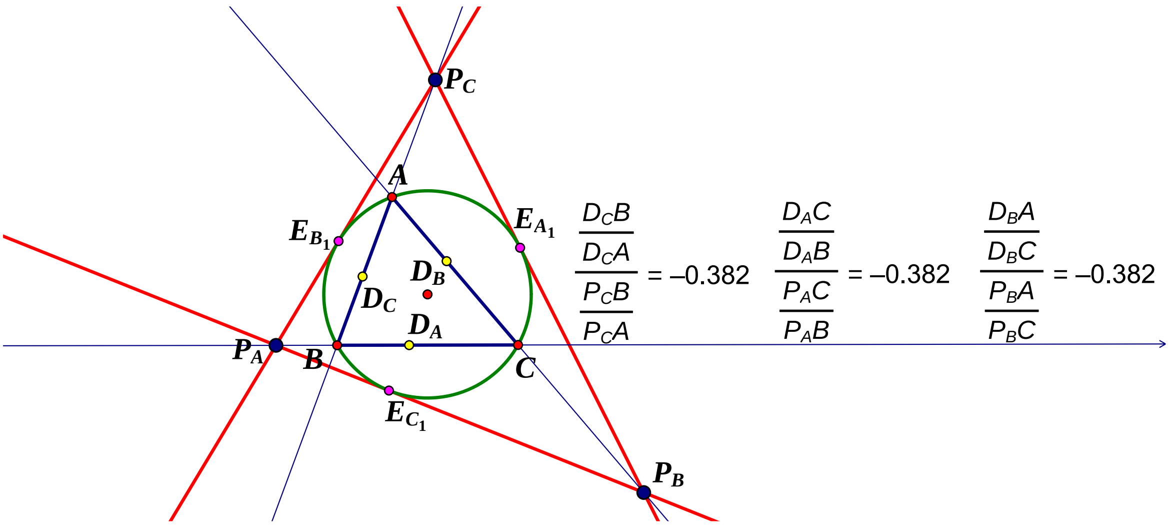


圖18：黃金比例 $-\frac{1}{\phi+1}$。

■

接下來，我們探討外切 $\triangle P_AP_BP_C$ 的定性性質。

我們將 $\triangle P_AP_BP_C$ 分成兩種，第一種是圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 的內切圓時；第二種是圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 旁切圓時。我們一開始認為，判別的條件跟初始的 $\triangle ABC$ 的角度有關（銳角、直角、鈍角），後來發現並非如此！

如下圖，$\triangle ABC$ 都是銳角三角形時，$\triangle P_AP_BP_C$ 可能三邊與圓 O 相切，也可能兩邊延長線以及一邊與圓 O 相切。這是很有趣的發現，同時激發我們好奇心，讓我們想把圓外切 $\triangle P_AP_BP_C$ 的位置判別條件找出來。

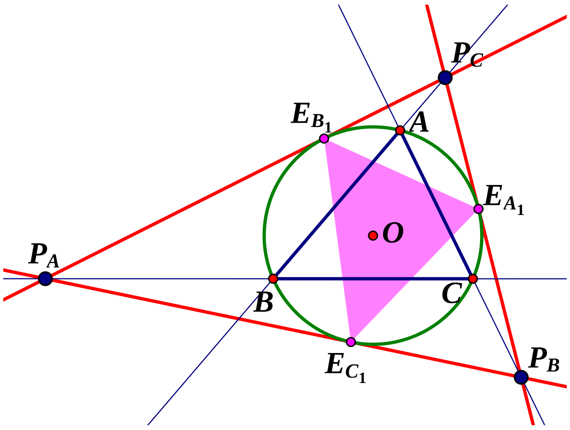


圖19-1：圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 的內切圓。

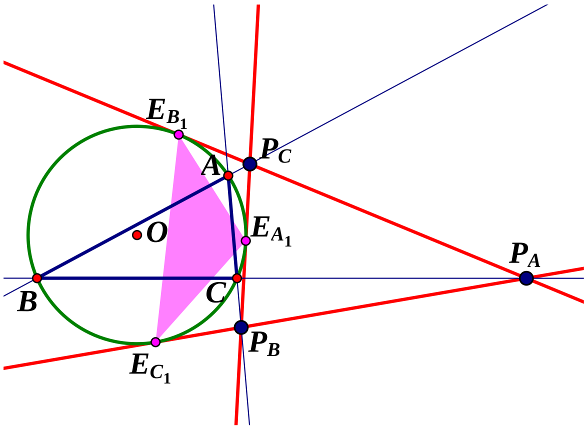


圖19-2：圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 的旁切圓。

注意到，點 O 在 $\triangle E_{A1}E_{B1}E_{C1}$ 內部時，圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 的內切圓；點 O 在 $\triangle E_{A1}E_{B1}E_{C1}$ 外部時，圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 旁切圓。因此，我們考慮用「重心坐標」與「有向面積」來進行刻畫，這也是本研究的亮點之處。

（一）當有向面積 $\triangle OE_{A1}E_{B1}$ 或 $\triangle OE_{B1}E_{C1}$ 或 $\triangle OE_{C1}E_{A1}$ 任一個小於 0 時，點 O 在 $\triangle E_{A1}E_{B1}E_{C1}$ 外部，因此圓 O 即為 $\triangle P_AP_BP_C$ 旁切圓，反之亦然。

（二）當有向面積 $\triangle OE_{A1}E_{B1}$ 或 $\triangle OE_{B1}E_{C1}$ 或 $\triangle OE_{C1}E_{A1}$ 任一個等於 0 （即三點共線）時，兩切線平行，所以 $\triangle P_AP_BP_C$ 不存在，反之亦然。

（三）當有向面積 $\triangle OE_{A1}E_{B1}$ 且 $\triangle OE_{B1}E_{C1}$ 且 $\triangle OE_{C1}E_{A1}$ 皆大於 0 時，點 O 在 $\triangle E_{A1}E_{B1}E_{C1}$ 內部，因此圓 O 即為 $\triangle P_AP_BP_C$ 內切圓，反之亦然。

我們接下來發現非常有趣的結論！有關 $\triangle P_AP_BP_C$ 判別條件與初始的 $\triangle ABC$ 的兩兩邊長的比值所決定！這個比值的切截點居是漂亮的黃金比例 $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

定理9 (1)當 $\frac{b}{a}<\phi$ 且 $\frac{a}{c}<\phi$ 且 $\frac{c}{b}<\phi$ 時，圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 內切圓；

(2)當 $\frac{b}{a}>\phi$ 或 $\frac{a}{c}>\phi$ 或 $\frac{c}{b}>\phi$ 時，圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 旁切圓。

(3)當 $\frac{b}{a}=\phi$ 或 $\frac{a}{c}=\phi$ 或 $\frac{c}{b}=\phi$ 時，$\triangle P_AP_BP_C$ 不存在。

證明：

1. 因為只需要判斷 $\triangle OE_{A1}E_{B1}$、$\triangle OE_{B1}E_{C1}$ 與 $\triangle OE_{C1}E_{A1}$ 的有向面積是正、是負，還是零，所以不用將三點的重心坐標正規化。我們有四點坐標 $O\big(a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2)\big)$、$E_{A1}\big(2a^2:\big(1-\sqrt{5}\big)b^2:\big(1+\sqrt{5}\big)c^2\big)$、$E_{B1}\big(2a^2:\big(-1+\sqrt{5}\big)b^2:\big(-3+\sqrt{5}\big)c^2\big)$、$E_{C1}\big(-2a^2:\big(3+\sqrt{5}\big)b^2:\big(1+\sqrt{5}\big)c^2\big)$。其中，約定 x_O、y_O、x_O 分別表示 O 點的 x 坐標、y 坐標、z 坐標，其餘點亦同。

2. (1)先討論 $\triangle OE_{A1}E_{B1}$

$$\begin{vmatrix} x_O & y_O & z_O \\ x_{E_{A1}} & y_{E_{A1}} & z_{E_{A1}} \\ x_{E_{B1}} & y_{E_{B1}} & z_{E_{B1}} \end{vmatrix} = 8a^2b^2c^2\big(2a^2-\big(3-\sqrt{5}\big)b^2\big)$$

考慮 $2a^2-\big(3-\sqrt{5}\big)b^2>0$，化簡可得 $\left(\frac{b}{a}\right)^2<\frac{2}{3-\sqrt{5}}$，又 $a,b>0$，

所以 $0<\frac{b}{a}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$。同理再得 $2a^2-\big(3-\sqrt{5}\big)b^2<0$，即 $\frac{b}{a}>\phi$。

(2)接著討論 $\triangle OE_{B1}E_{C1}$

$$\begin{vmatrix} x_O & y_O & z_O \\ x_{E_{B1}} & y_{E_{B1}} & z_{E_{B1}} \\ x_{E_{C1}} & y_{E_{C1}} & z_{E_{C1}} \end{vmatrix} = 8a^2b^2c^2\left(\big(1+\sqrt{5}\big)b^2-\big(-1+\sqrt{5}\big)c^2\right)$$

考慮 $\big(1+\sqrt{5}\big)b^2+\big(1-\sqrt{5}\big)c^2>0$，化簡可得 $0<\frac{c}{b}<\phi$。

(3)最後討論 $\triangle OE_{C1}E_{A1}$

$$\begin{vmatrix} x_O & y_O & z_O \\ x_{E_{C1}} & y_{E_{C1}} & z_{E_{C1}} \\ x_{E_{A1}} & y_{E_{A1}} & z_{E_{A1}} \end{vmatrix} = 8a^2b^2c^2\left(\big(3+\sqrt{5}\big)c^2-2a^2\right)$$

考慮 $\big(3+\sqrt{5}\big)c^2-2a^2>0$，化簡可得 $0<\frac{a}{c}<\phi$。

因此，當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 皆小於 ϕ 時，圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 的內切圓；當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 任一個

大於 ϕ 時，圓 O 是旁切圓；當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 任一個等於 ϕ 時，$\triangle P_AP_BP_C$ 不存在。

■

三、 四邊形的特殊化：矩形的作圖與性質

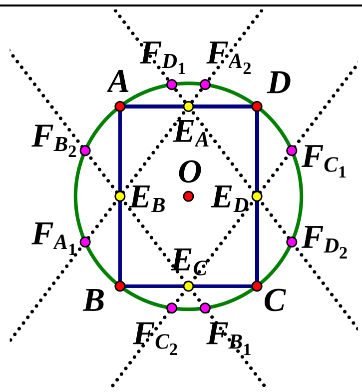
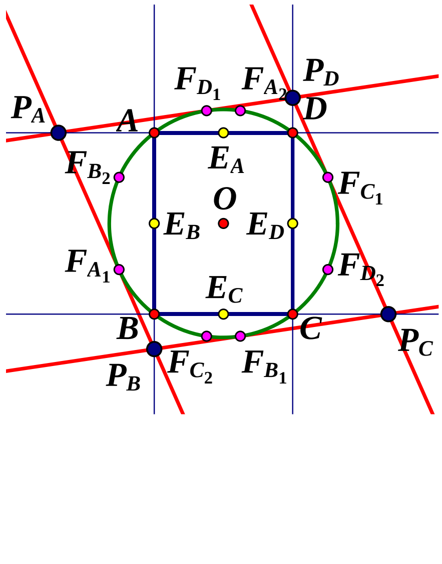
我們成功解決了圓內接任意三角形其延長線上分別取三點而構造圓外切三角形的作圖（符合條件的三角形僅有兩個）。

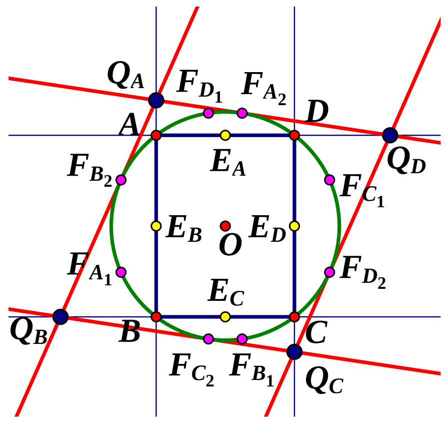
接下來推廣到四邊形，上一節我們從正三角形切入，因為正三角形邊的對稱性讓其外接圓的圓弧等長。同樣地，我們考慮具有對稱性的四邊形，我們發現不用限制為正方形，而是可以放寬條件，使用矩形。我們從取圓內接矩形邊上的中點開始進行作圖。

給定任意圓內接矩形 $ABCD$

【求作】圓外切四邊形，使得其頂點分別落在矩形 $ABCD$ 邊的延長線上。

（一） 作圖步驟

步驟1. 分別作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的中點 E_B、E_C、E_C、E_A 。 步驟2. 令 $\overleftrightarrow{E_AE_B}$ 交外接圓 O 於 F_{A_1}、E_{A_2} 點， $\overleftrightarrow{E_BE_C}$ 交外接圓 O 於 F_{B_1}、F_{B_2} 點， $\overleftrightarrow{E_CE_D}$ 交外接圓 O 於 F_{C_1}、F_{C_2} 點， $\overleftrightarrow{E_DE_A}$ 交外接圓 O 於 F_{D_1}、F_{D_2} 點。	
步驟3. 分別過點 F_{A_1}、F_{B_1}、F_{C_1}、F_{D_1} 作外接圓 O 的四條切線。 步驟4. 令切線兩兩交於點 P_A、P_B、P_C、P_D。同理，過點 F_{A_2}、F_{B_2}、F_{C_2}、F_{D_2} 作一樣操作，可得交於點 Q_A、Q_B、Q_C、Q_D。 步驟5. 四邊形 $P_AP_BP_CP_D$ 與四邊形 $Q_AQ_BQ_CQ_D$ 即為所求。注意到，根據對稱性可得出四邊形 $P_AP_BP_CP_D$ 與四邊形 $Q_AQ_BQ_CQ_D$ 皆為菱形。	



（二） 存在性證明

如右圖，因為對稱性，關於圓外切菱形 $P_AP_BP_CP_D$ 或 $Q_AQ_BQ_CQ_D$ 的作圖，我們只須證明直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過切線的交點 P_B 即可，其餘三直線因為對稱性同理可證。與正三角形相同，我們證明四邊形 $AE_{A_1}DE_{D_1}$ 為調和四邊形即可。

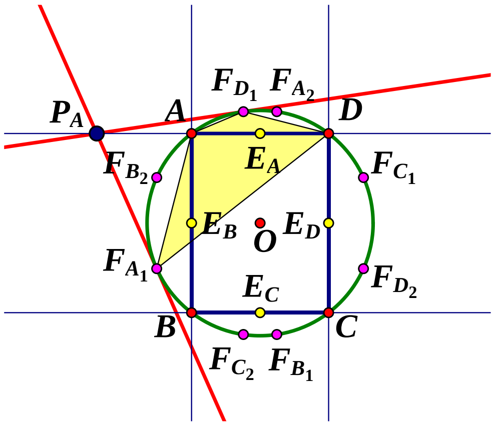


圖 20：利用調和四邊形進行證明。

命題10（作圖） 圓內接矩形 $ABCD$ 中，直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 通過 P_A 點（即證明四邊形 $AF_{A_1}DF_{D_1}$ 為調和四邊形）（其餘三邊同理可證）。

證明：

如下圖，點 E_A、E_B、E_C、E_D 是矩形邊上的中點，利用對稱性可得 $\triangle DF_{D_1}E_A \sim \triangle F_{A_1}DE_A$（AA相似），可得 $\overline{DF_{D_1}}:\overline{F_{A_1}D} = \overline{DE_A}:\overline{F_{A_1}E_A}$。同理，$\triangle AF_{D_1}E_A \sim \triangle F_{A_1}AE_A$（AA相似），可得 $\overline{AF_{D_1}}:\overline{F_{A_1}A} = \overline{AE_A}:\overline{F_{A_1}E_A}$，又 $\overline{DE_A} = \overline{AE_A}$，所以 $\overline{DF_{D_1}}:\overline{F_{A_1}D} = \overline{AF_{D_1}}:\overline{F_{A_1}A}$，即 $\overline{F_{A_1}D} \times \overline{AF_{D_1}} = \overline{DF_{D_1}} \times \overline{F_{A_1}A}$，因此四邊形 $AF_{A_1}DF_{D_1}$ 為調和四邊形，根據引理1得直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 通過兩切線 $\overleftrightarrow{F_{A_1}P_A}$、$\overleftrightarrow{F_{D_1}P_A}$ 的交點 P_A，再以相同方法可證明點 P_B、P_C、P_D 的情形。

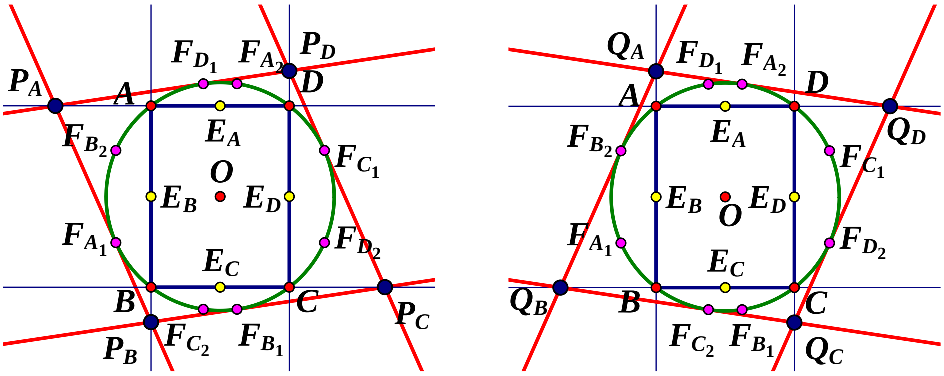


圖21：兩組圓外切四邊形構圖。

■

（三） 幾何性質

我們已將完成圓內接矩形的圓外切四邊形構圖。在正三角形的構圖出現了三點構成的線段比值為黃金比例，有趣的是，我們發現圓內接矩形並非如此，而是線段乘冪為定值，為圓的半徑的四次方。

性質11（不變量） $\overline{P_AA}\times\overline{P_AD}\times\overline{P_BB}\times\overline{P_BA}=R^4$，其中 R 為圓 O 的半徑。

證明：

如下圖，根據圓的切割線性質可得 $(\overline{P_AA}\times\overline{P_AD})\times(\overline{P_BB}\times\overline{P_BA})=\overline{P_AF_{A_1}}^2\times\overline{P_BF_{B_1}}^2$，注意到，因為作圖對稱性，可得四邊形 $P_AP_BP_CP_D$ 為菱形，所以對角線 $\overline{P_AP_C}\perp\overline{P_BP_D}$，即 $\angle P_AOP_B=90°$。在直角 $\triangle P_AOP_B$ 中，已知 F_{A_1} 為切點，$\overline{OF_{A_1}}\perp\overline{P_AP_B}$，根據直角三角形母子相似性質可得 $\overline{P_AF_{A_1}}\times\overline{P_BF_{A_1}}=\overline{OF_{A_1}}^2=R^2$，故 $\overline{P_AA}\times\overline{P_AD}\times\overline{P_BB}\times\overline{P_BA}=R^4$。

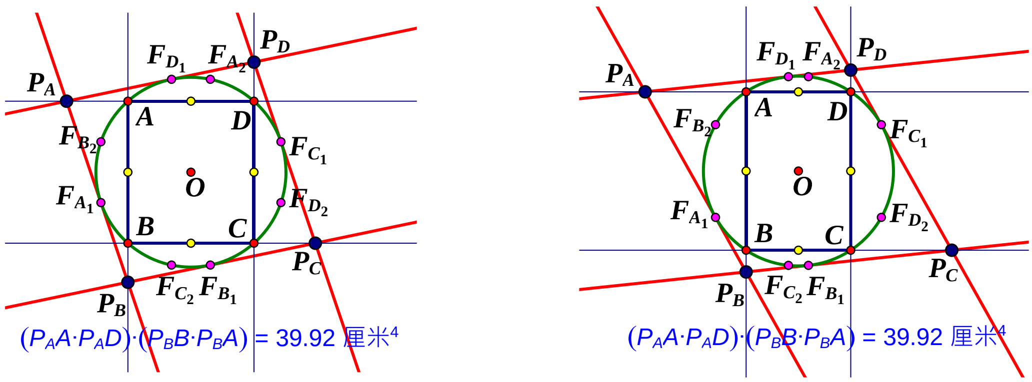


圖22：乘冪不變量。

■

當給定圓內接矩形 $ABCD$ 時，能否直接在 $\overline{AD}$ 的延長線上得出 P_A 點的位置呢？答案是肯定的！我們證明了 $\overline{P_AA}=\overline{P_CC}$ 或 $\overline{P_BB}=\overline{P_DD}$ 可以由圓內接矩形 $ABCD$ 的長與寬的長度所表示，即我們給出有第二種構造圓外切四邊形 $P_AP_BP_CP_D$ 的作圖方式。

性質12 $\overline{P_AA}=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{2a}$ 且 $\overline{P_BB}=\frac{-b^2+\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{2b}$，其中 $\overline{AD}=a$、$\overline{AB}=b$。

證明：

令 $\overline{P_AA}=x$、$\overline{P_BB}=y$、$\overline{AD}=a$、$\overline{AB}=b$，由性質11可得知

$$x\cdot(x+a)\cdot y\cdot(y+b)=R^4=\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$$

又在直角 $\triangle P_AAP_B$ 與 $\triangle P_ADP_D$ 中，我們有

$$x^2+(y+b)^2=y^2+(x+a)^2$$

解前兩式的聯立方程組可得出

$$\begin{cases} x=\dfrac{-a^2\pm\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{2a} & (\text{負不合}) \\ y=\dfrac{-b^2\pm\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{2b} & (\text{負不合}) \end{cases}$$

故 $\overline{P_AA}=\overline{P_CC}=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{2a}$ 且 $\overline{P_BB}=\overline{P_DD}=\frac{-b^2+\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{2b}$。

■

根據性質12，我們就有更簡單的作圖方法，可直接作出點 P_A、P_B、P_C、P_D 的位置，同理可得點 Q_A、Q_B、Q_C、Q_D 的位置。

四、 四邊形的一般化：任意四邊形的作圖與性質

我們接下來將圓內接矩形推廣到任意圓內接四邊形，與正三角形相同，我們也發現取矩形 $ABCD$ 的 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的中點 M_B、M_C、M_D、M_A，再依照矩形相同的步驟進行構圖，結果發現四邊形 $P_AP_BP_CP_D$ 的四個頂點不會落在四邊形 $ABCD$ 邊的延長線上。

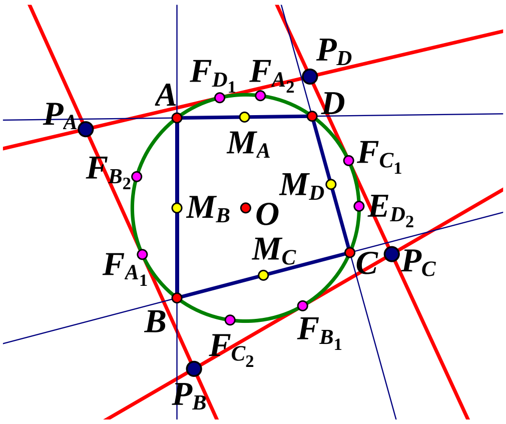


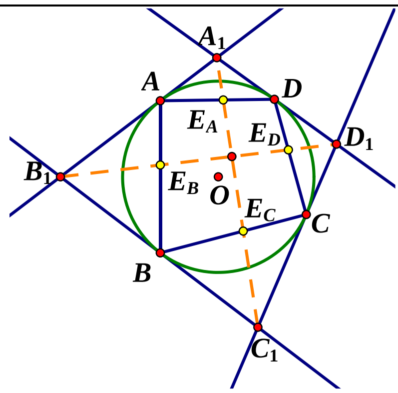
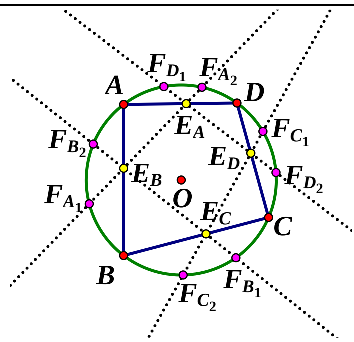
圖23：以四邊形 $ABCD$ 各邊中點進行構圖。

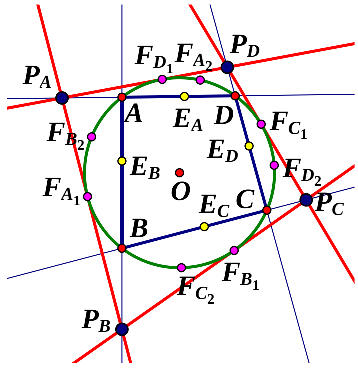
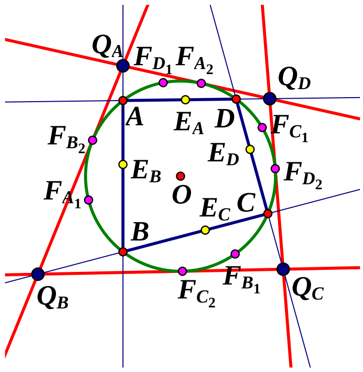
我們仿照任意三角形的步驟，找出兩者在作圖的共通性，考慮分別過四邊形 $ABCD$ 頂點作圓的切線，我們給出關於圓內接任意四邊形，其圓外切四邊形的作圖步驟與證明。

給定圓內接任意四邊形 $ABCD$

【求作】圓外外切四邊形，使得其頂點分別落在圓內接四邊形 $ABCD$ 邊的延長線上。

（一） 作圖步驟

步驟1. 過 A 作圓的切線 $\overline{A_1B_1}$、過 B 作圓的切線 $\overline{B_1C_1}$、過 C 作圓的切線 $\overline{C_1D_1}$、過 D 作圓的切線 $\overline{A_1A_1}$。 步驟2. 連接 $\overline{A_1C_1}$、$\overline{B_1D_1}$。 步驟3. 令 $\overline{A_1C_1}$ 分別交 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 於 E_A、E_C 點；$\overline{B_1D_1}$ 交 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 於 E_B、E_D 點。	
步驟4. 令 $\overleftrightarrow{E_AE_B}$ 交外接圓 O 於 F_{A_1}、E_{A_2} 點，$\overleftrightarrow{E_BE_C}$ 交外接圓 O 於 F_{B_1}、F_{B_2} 點，$\overleftrightarrow{E_CE_D}$ 交外接圓 O 於 F_{C_1}、F_{C_2} 點，$\overleftrightarrow{E_DE_A}$ 交外接圓 O 於 F_{D_1}、F_{D_2} 點。	

步驟5. 分別過點 F_{A_1}、F_{B_1}、F_{C_1}、F_{D_1} 作外接圓 O 的四條切線。 步驟6. 令切線兩兩交於點 P_A、P_B、P_C、P_D。同理，過點 F_{A_2}、F_{B_2}、F_{C_2}、F_{D_2} 作一樣操作，可得交於點 Q_A、Q_B、Q_C、Q_D。 步驟7. 四邊形 $P_AP_BP_CP_D$ 與四邊形 $Q_AQ_BQ_CQ_D$ 即為所求。	 

（二） 存在性證明

證明過程我們需要以下有關圓外切四邊形對角形的對角線的引理。

引理13（[4], p.153-156）過任意圓內接四邊形 $ABCD$ 的頂點作四條切線，構造圓外切四邊形 $A_1B_1C_1D_1$，則 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{A_1C_1}$、$\overline{B_1D_1}$ 四線共點。

命題14（作圖）圓內接任意四邊形 $ABCD$ 中，直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 通過 P_A 點（其餘三邊同理可證）。

證明：

1. 如右圖，利用三角形來建構四邊形，考慮圓內接 $\triangle ABC$，在 $\overline{AC}$ 上任意取一點 E，點 E 不與端點 A、C 重合，令 $\overrightarrow{BE}$ 交外接圓 O 於 D 點，分別過 A、B 兩點作切線交於 B_1 點，分別過 B、C 兩點作切線交於 C_1 點。
2. 我們可得 $B_1(a^2{:}\,b^2{:}-c^2)$、$C_1(-a^2{:}\,b^2{:}\,c^2)$，再令 $E(\lambda,0,1)$，則可得直線方程式

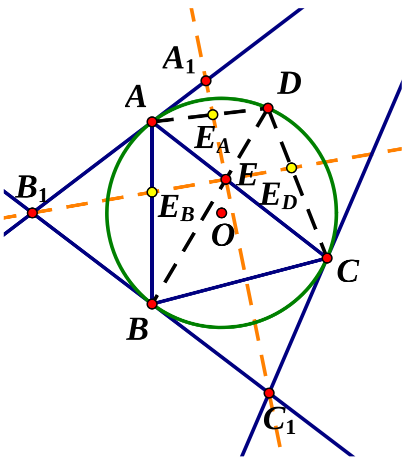


圖 24：外切四邊形作圖(1)。

$$\overleftrightarrow{EC_1}: -b^2x-(a^2+\lambda c^2)y+\lambda b^2z=0$$

又過點 $A(1:0:0)$ 的切線方程式為

$$[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}0 & c^2 & b^2\\ c^2 & 0 & a^2\\ b^2 & a^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0\text{，即 } c^2y+b^2z=0$$

根據引理13，$\overleftrightarrow{C_1E}$ 與過 A 點的切線交點為 A_1 點，可得 $A_1\big((a^2+2\lambda c^2):-b^2:c^2\big)$。

3. 令 $d=a^2+\lambda c^2$，得出方程式 $\overleftrightarrow{BE}: x-\lambda z=0$，求其與外接圓交點可得 $D\left(d:-b^2:\frac{d}{\lambda}\right)$。

   再計算得出 $\overleftrightarrow{AB}: z=0$、$\overleftrightarrow{CD}: b^2x+dy=0$ 與 $\overleftrightarrow{B_1E}: b^2x-dy-\lambda b^2z=0$。解交點可得 $\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{B_1E}=E_B(d:b^2:0)$，$\overleftrightarrow{CD}\cap\overleftrightarrow{B_1E}=E_D(\lambda d:-\lambda b^2:2d)$，再將求出 $\overleftrightarrow{AD}: dy+\lambda b^2z=0$、$\overleftrightarrow{C_1E}: b^2x+dy-\lambda b^2z=0$，得 $\overleftrightarrow{AD}\cap\overleftrightarrow{C_1E}=E_A\left(2d:-b^2:\frac{d}{\lambda}\right)$。

4. 接著求出 $\overleftrightarrow{E_AE_B}$、$\overleftrightarrow{E_AE_D}$ 分別與外接圓 $a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$ 的交點 F_{A_1} 與 F_{D_1}

$$F_{A_1}\left(3a^2:\frac{3b^2\left(\lambda c^2+\sqrt{a^4+\lambda a^2c^2+\lambda^2c^4}\right)}{d}:\frac{a^2-\lambda c^2-\sqrt{a^4+\lambda a^2c^2+\lambda^2c^4}}{\lambda}\right).$$

$$F_{D_1}\left(3a^2:\frac{-b^2\left(2a^2+\lambda c^2-\sqrt{a^4+\lambda a^2c^2+\lambda^2c^4}\right)}{d}:\frac{3\left(a^2+\lambda c^2-\sqrt{a^4+\lambda a^2c^2+\lambda^2c^4}\right)}{\lambda}\right).$$

5. 證明 A_1、F_{A_1}、F_{D_1} 三點共線，令 $d=a^2+\lambda c^2$ 且 $n=\sqrt{a^4+\lambda a^2c^2+\lambda^2c^4}$，

   考慮 $\begin{vmatrix}-a^2+2d & -b^2 & c^2\\ 3a^2 & \frac{-3b^2(a^2-d-n)}{d} & \frac{2a^2-d-n}{\lambda}\\ 3a^2 & \frac{-b^2(a^2+d-n)}{d} & \frac{3(d-n)}{\lambda}\end{vmatrix}$ 的行列式值

   將第 3 列 $\times(-1)$ 加入第 2 列可得

$$\begin{vmatrix}-a^2+2d & -b^2 & \frac{d-a^2}{\lambda}\\ 0 & \frac{-2b^2(a^2-2d-n)}{d} & \frac{2(a^2-2d+n)}{\lambda}\\ 3a^2 & \frac{-b^2(a^2+d-n)}{d} & \frac{3(d-n)}{\lambda}\end{vmatrix}$$

   再提出行或列中的公因式可得

$$\frac{-2b^2}{\lambda^2d^2}\times\begin{vmatrix}-a^2+2d & 1 & \frac{d-a^2}{\lambda}\\ 0 & \lambda(a^2-2d-n) & d(a^2-2d+n)\\ 3\lambda a^2d & \lambda(a^2+d-n) & d(3d-3n)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-2b^2}{\lambda d^2}\times\begin{vmatrix}-a^2+2d & 1 & d-a^2\\ 0 & a^2-2d-n & d(a^2-2d+n)\\ 3a^2d & a^2+d-n & d(3d-3n)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-2b^2}{\lambda d^2}\times\left(4d(a^2-2d)(a^4-a^2d+d^2-n^2)\right)$$

注意到，$d^2-n^2=-a^2(a^2-d)$，所以上式其值為零，故 A_1、F_{A_1}、F_{D_1} 三點共線，根據配即原則再得 A、D、P_A 也會三點共線

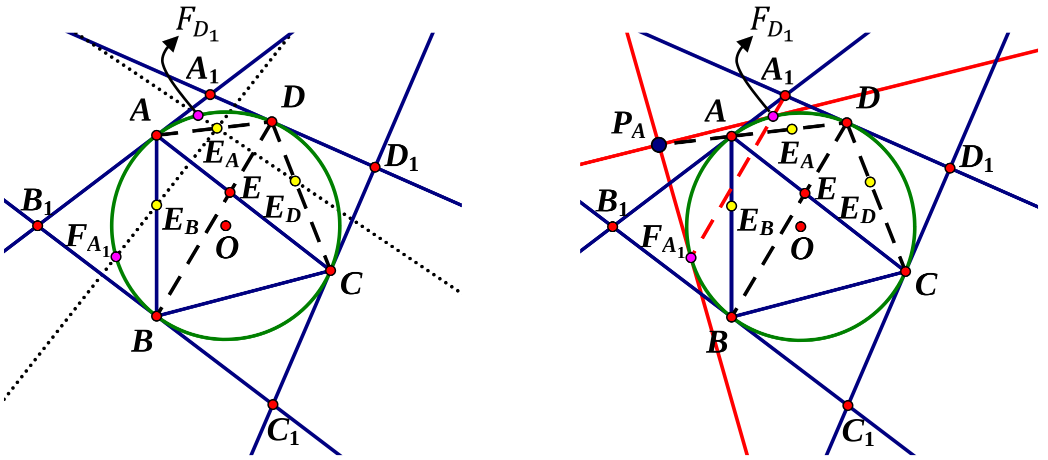


圖 25：外切四邊形作圖(2)。

6. 最後我們證明其他三邊情形，即直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 通過 P_B 點、直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 通過 P_C 點、直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 通過 P_D 點。由前面的證明以 $\triangle ABC$ 為參考三角形時，無論 $\overline{AC}$ 上的 E 點的位置如何，直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 必通過 P_A 點。

   注意到，又當圓上的 A、B、C、D 四點給定時，F_{A_1}、F_{B_1}、F_{C_1}、F_{D_1} 即為唯一，而且過 F_{A_1}、F_{B_1}、F_{C_1}、F_{D_1} 的切線也是唯一。因此利用相同方式，可以得出若以 $\triangle BCD$ 為參考三角形時，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 必通過 P_B 點；$\triangle CDA$ 為參考三角形時，直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 通過 P_C 點；$\triangle DAB$ 為參考三角形時，直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 通過 P_D 點。

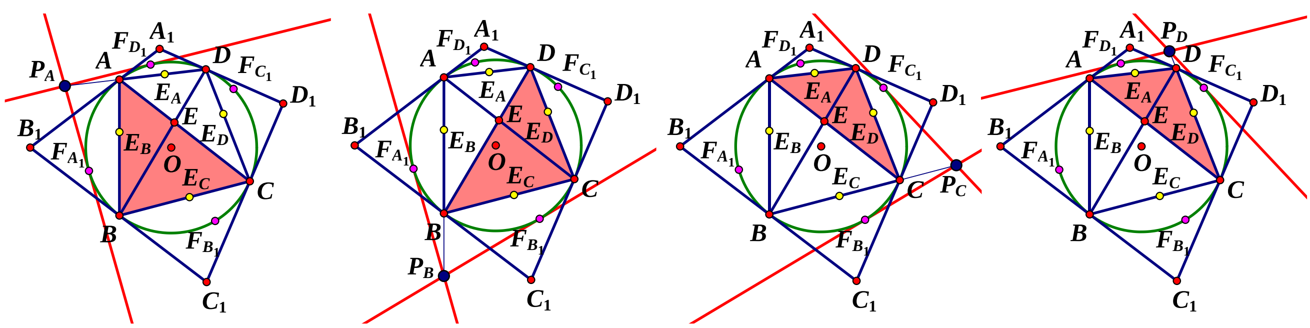


圖 26：輪轉性。

■

（三） 幾何性質

性質15 $\overline{F_{A_1}F_{C_1}}$ 與 $\overline{F_{B_1}F_{D_1}}$ 共線於對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 的交點 E 點。

證明：

由前可知坐標 $E(\lambda:0:1)$、$F_{A_1}\left(3a^2:\frac{-3b^2(a^2-d-n)}{d}:\frac{2a^2-d-n}{\lambda}\right)$、$F_{B_1}\left(-a^2:\frac{b^2(-a^2+d+n)}{d}:\frac{d+n}{\lambda}\right)$、$F_{C_1}\left(a^2:\frac{-b^2(a^2+d-n)}{d}:\frac{2a^2-d+n}{\lambda}\right)$、$F_{D_1}\left(3a^2:\frac{-b^2(a^2+d-n)}{d}:\frac{3(d-n)}{\lambda}\right)$。其中，$d=a^2+\lambda c^2$ 且 $n=\sqrt{a^4+\lambda a^2c^2+\lambda^2c^4}$，分別求點 F_{A_1}、F_{C_1}、E 以及點 F_{B_1}、F_{D_1}、E 所構成的三階行列式的值，化簡可得其值為零，即可證明。

■

五、 迭代外切正三角形與正方形的性質

考慮圓內接正 $\triangle P_{A_0}P_{B_0}P_{C_0}$ 構造其外切正 $\triangle P_{A_1}P_{B_1}P_{C_1}$，再針對正 $\triangle P_{A_1}P_{B_1}P_{C_1}$ 構造外切正 $\triangle P_{A_2}P_{B_2}P_{C_2}$……，重複迭代外切正 $\triangle P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}$，我們發現非常漂亮的長度與角度性質！

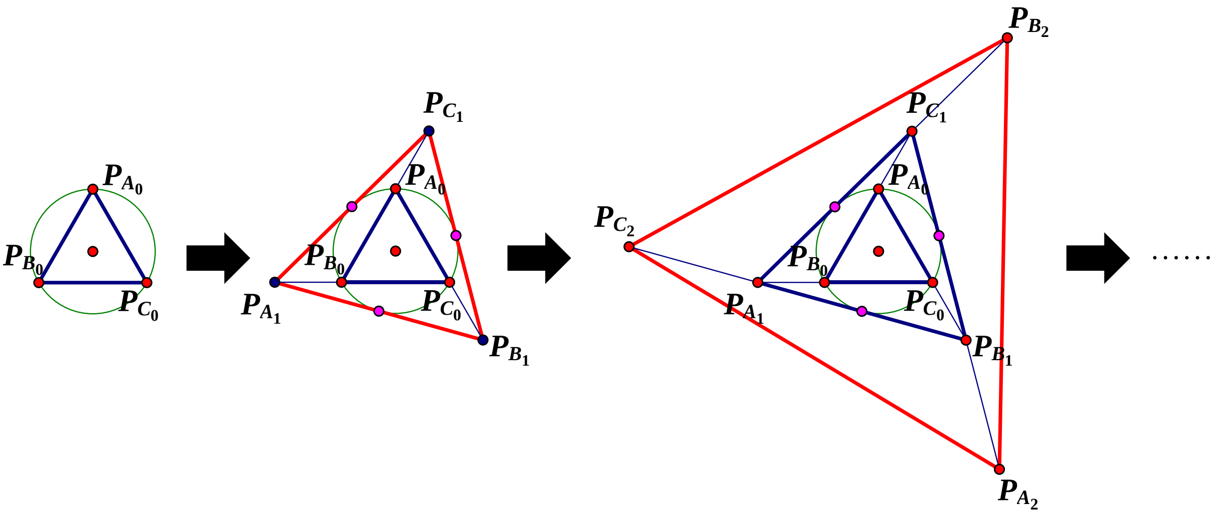


圖 27：迭代外切正三角形。

性質16 迭代外切正 $\triangle P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}$ 中，對於 $k=0,1,2,\ldots$，皆有

(1) $\frac{\overline{P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}}}}{\overline{P_{C_k}P_{B_{k+1}}}}=\frac{\overline{P_{A_{k+1}}P_{C_{k+2}}}}{\overline{P_{B_k}P_{A_{k+1}}}}=\frac{\overline{P_{C_{k+1}}P_{B_{k+2}}}}{\overline{P_{A_k}P_{C_{k+1}}}}=2$；

(2) $\angle P_{C_k}P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}}=\angle P_{B_k}P_{A_{k+1}}P_{C_{k+2}}=\angle P_{A_k}P_{C_{k+1}}P_{B_{k+2}}=\cos^{-1}\left(-\frac{1+3\sqrt{5}}{8}\right)\approx 164.4775°$。

證明：

1. 如圖 27，考慮 $\triangle P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}$ 與 $\triangle P_{A_{k+1}}P_{B_{k+1}}P_{C_{k+1}}$ 為同一圓的內接正三角形與外切正三角形，所以可得 $2\overline{P_{A_k}P_{B_k}} = \overline{P_{C_{k+1}}P_{A_{k+1}}}$，又在迭代構造下有 $\triangle P_{A_{k+1}}P_{B_{k+1}}P_{C_k} \sim \triangle P_{C_{k+2}}P_{A_{k+2}}P_{B_{k+1}}$，可得 $\overline{P_{C_k}P_{B_{k+1}}}:\overline{P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}}} = \overline{P_{A_{k+1}}P_{B_{k+1}}}:\overline{P_{C_{k+2}}P_{A_{k+2}}} = 1:2$，即 $\frac{\overline{P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}}}}{\overline{P_{C_k}P_{B_{k+1}}}} = 2$。因為對稱，其餘邊同理可證。
2. 如圖 27，再處理角度，因為 $\angle P_{C_k}P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}} + \angle P_{A_k}P_{B_{k+1}}P_{C_{k+1}} = 180°$，所以我們計算 $\angle P_{A_k}P_{B_{k+1}}P_{C_{k+1}}$ 即可。考慮在 $\triangle P_{A_k}P_{B_{k+1}}P_{C_{k+1}}$ 中，不失一般性，令 $\overline{P_{A_k}P_{C_k}} = 1$，則 $\overline{P_{B_{k+1}}P_{C_{k+1}}} = 2$，再根據性質 3 可得 $\overline{P_{A_k}P_{C_{k+1}}} = \varphi - 1$ 且 $\overline{P_{A_k}P_{B_{k+1}}} = \varphi$，由餘弦定理有 $\cos\angle P_{A_k}P_{B_{k+1}}P_{C_{k+1}} = \frac{\varphi^2+2^2-(\varphi-1)^2}{2\times2\times\varphi} = \frac{2\varphi+3}{4\varphi} = \frac{1+3\sqrt{5}}{8}$，因此 $\cos\angle P_{C_k}P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}} = -\frac{1+3\sqrt{5}}{8}$，故$\angle P_{C_k}P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}} = \cos^{-1}\left(-\frac{1+3\sqrt{5}}{8}\right) \approx 164.4775°$。因為對稱性，其餘角度同理可證。

■

性質17 迭代外切正方形 $P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}P_{D_k}$ 中，對於 $k = 0,1,2,\dots$，皆有

(1) $\frac{\overline{P_{A_{k+1}}P_{A_{k+2}}}}{\overline{P_{A_k}P_{A_{k+1}}}} = \frac{\overline{P_{B_{k+1}}P_{B_{k+2}}}}{\overline{P_{B_k}P_{B_{k+1}}}} = \frac{\overline{P_{C_{k+1}}P_{C_{k+2}}}}{\overline{P_{C_k}P_{C_{k+1}}}} = \frac{\overline{P_{D_{k+1}}P_{D_{k+2}}}}{\overline{P_{D_k}P_{D_{k+1}}}} = \sqrt{2}$；

(2) $\angle P_{A_k}P_{A_{k+1}}P_{A_{k+2}} = \cdots = \angle P_{D_k}P_{D_{k+1}}P_{D_{k+2}} = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = 165°$。

證明：如圖28，證明方法和過程與迭代正三角形相仿，記錄於研究日誌，在此省略。

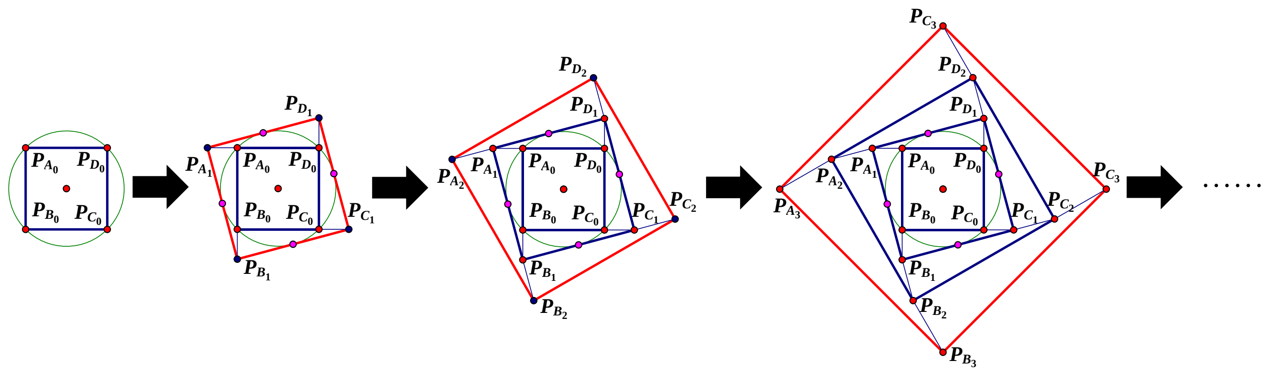


圖 28：迭代外切正方形。

陸、 結論

本研究推廣前人的研究[1][2][3]，相較他們的研究，本研究是新的方向且難度也比較高，我們必須創造出輔助點、輔助線來進行證明。此外，我們的研究方法也不同，我們不

使用空間射影，因為空間射影只能簡潔處理共點、共線、共圓，但卻喪失了角度、長度、形狀等幾何定性與定量性質，我們直接在平面上進行探討，因而找出許多有趣的性質。

本研究針對給定任意圓內接 $\triangle ABC$，如何在邊的延長線上分別取三點 P_A、P_B、P_C，使得直線 $\overleftrightarrow{P_AP_B}$、$\overleftrightarrow{P_BP_C}$、$\overleftrightarrow{P_CP_A}$ 分別外切圓於三點呢？同樣的，給定任意圓內接四邊形 $ABCD$，如何在邊的延長線上分別取四點 P_A、P_B、P_C、P_D，使得 $\overleftrightarrow{P_AP_B}$、$\overleftrightarrow{P_BP_C}$、$\overleftrightarrow{P_CP_D}$、$\overleftrightarrow{P_DP_A}$ 分別外切圓於四點呢？其主要研究結果如下。

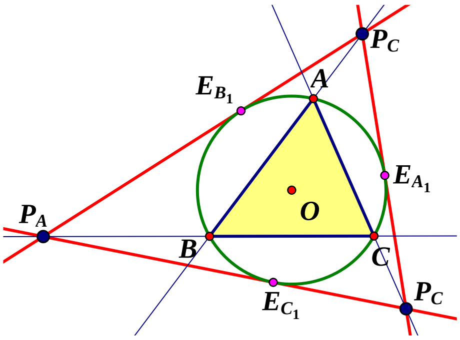


圖 29：外切三角形。

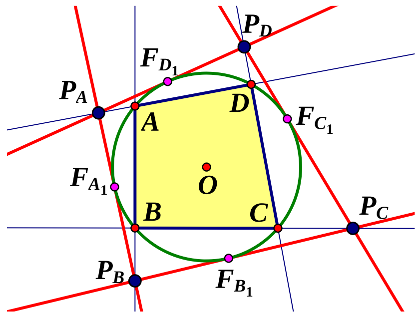


圖 30：外切四邊形形。

一、 給出構造圓外切三角形的作圖方法，及其幾何性質

先針對圓內接正三角形進行討論，利用三邊的中點與對稱性，得出其外切三角形的構圖方法與性質，我們發現了正三角形中的線段比值為黃金比例 $\frac{\overline{AB}}{\overline{P_CA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{P_AB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{P_BC}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$，這個性質提供給我們更簡單的作圖步驟。

推廣到圓內接任意 $\triangle ABC$ 的外切 $\triangle P_AP_BP_C$ 之構圖時，取 $\triangle ABC$ 三邊的中點適用嗎？我們發現取中點是行不通的！於是使用極點與極線的配極原理、調和四邊形、陪位中線及重心座標，給出了圓內接任意三角形的外切三角形之構圖步驟與證明。值得一提的是，構造出來的 $\triangle P_AP_BP_C$ 有個有趣的定性性質，當 $\triangle ABC$ 的邊之比值 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 都小於黃金比例 ϕ 時，圓 O 會是 $\triangle P_AP_BP_C$ 內切圓；當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 任一個大於黃金比例 ϕ 時，圓 O 會是 $\triangle P_AP_BP_C$ 旁切圓；當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 任一個等於黃金比例 ϕ 時， $\triangle P_AP_BP_C$ 不存在。同理，我們可得出邊之比值 $\frac{a}{b}$、$\frac{c}{a}$、$\frac{b}{c}$ 決定了 $\triangle Q_AQ_BQ_C$ 的型態，這個有趣性質是無法透過射影幾何得出的，因為三點的比在射影幾何中並非不變量。

二、 給出構造圓外切四邊形的作圖方法，及其幾何性質

針對圓內接矩形進行討論，利用四邊的中點與對稱性，也得出其外切四邊形的構圖方法與性質。有趣的是，我們發現其中的線段乘冪為定值，為圓的半徑的四次方，透過這個性質我們可以給出 $\overline{P_A A}$、$\overline{P_B B}$、$\overline{P_C C}$、$\overline{P_D D}$ 可由矩形的長、寬所表示。

推廣到圓內接任意四邊形 $ABCD$ 的外切四邊形 $P_A P_B P_C P_D$ 之構圖時，同樣取四邊的中點是行不通的！我們使用極點與極線的配極原理、調和四邊形、陪位中線及重心座標，給出了圓內接任意四邊形的外切四邊形之構圖步驟與證明。

三、 迭代外切正三角形與正方形的性質

利用本研究發現的性質，進一步得出迭代「外切正三角形」與「外切正方形」的長度與角度的優美性質，如下所示，這些頂點都坐落在等角螺線（equiangular spiral）上。

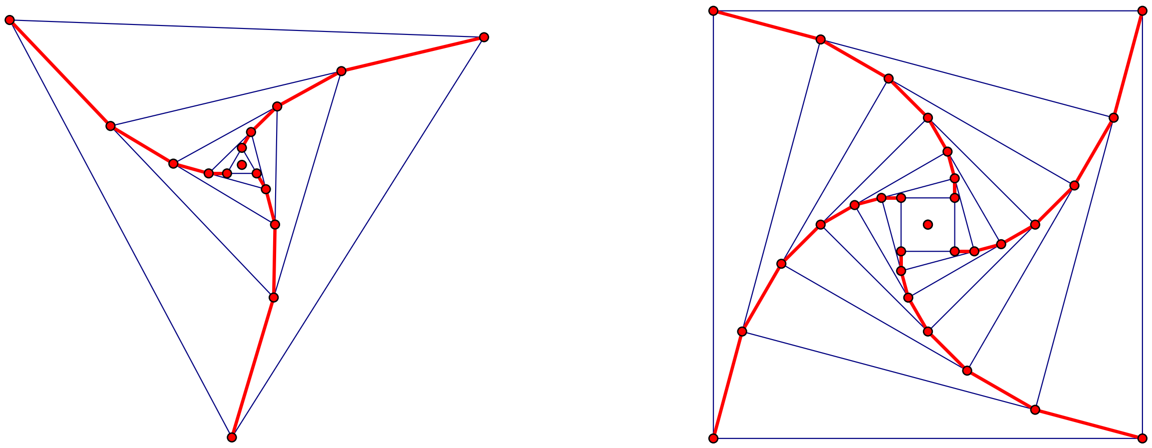


圖 31：迭代外切正三角形與正方形。

柒、 參考文獻

[1] M. Sejfried, V.Shelomovskii (2012). *Elementary Proof of Sejfriedian Properties*,at the Proceedings of the 17th Asian Technology Conference in Mathematics, pp 342-352.

[2] V. Shelomovskii (2014). *Sejfriedian: existence, uniqueness, constructing and the proof of properties*, at the Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG 2014), pp 1095-1110.

[3] 沈執中、陳彥睿（2017）。**Sejfried 定理在四邊形的推廣**。中華民國第 57 屆全國科學展覽會國中組數學科作品。取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/030413.pdf

[4]沈文選、楊清桃（2010）。**幾何瑰寶：平面幾何 500 名題暨 1000 條定理（下）**。哈爾濱工業大學出版社。

【評語】030417

本作品研究對於任意圓內接三角形，給出構造圓外切三角形的作圖方法，其中除了此圓外切三角形的三個頂點分別落在圓內接三角形的邊或延長線上，也得到了圓外切三角形與圓以及圓內接三角形相關的一些幾何性質。作者尺規作圖步驟相當完整， 是扎實的幾何作品， 研究精神佳， 數學處理上以國中生而言相對深. 可惜的是主要結果沒有很聚焦且展望的部分有些薄弱.

作品簡報

圓外切三角形與四邊形之構造與性質探究

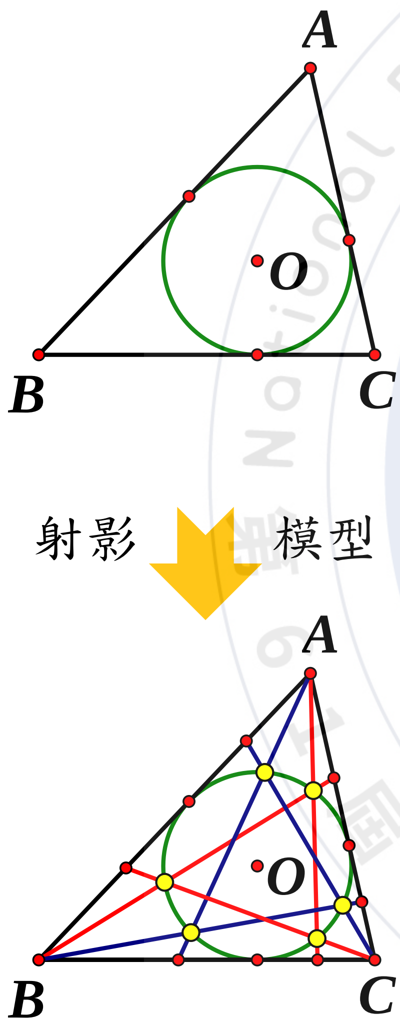
組別：國中組

科別：數學科

編號：030417

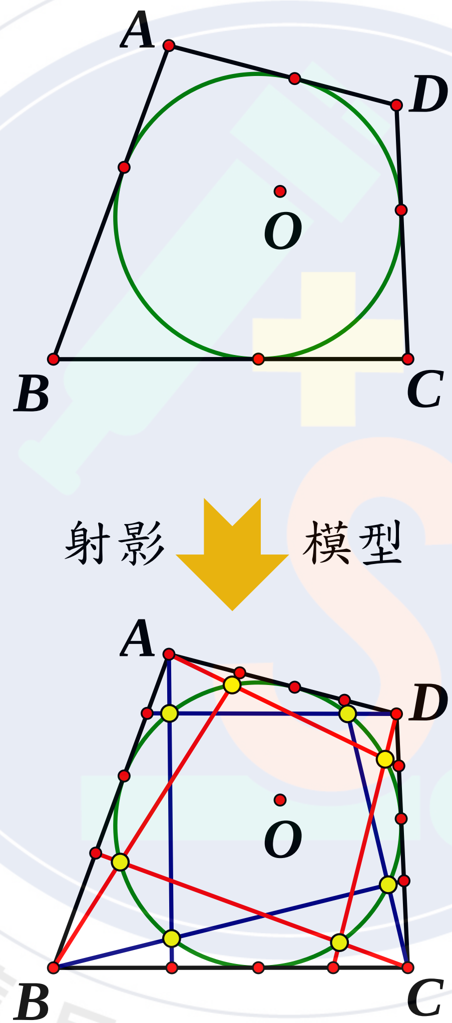
壹、背景與目的

Shelomovskii (2014)



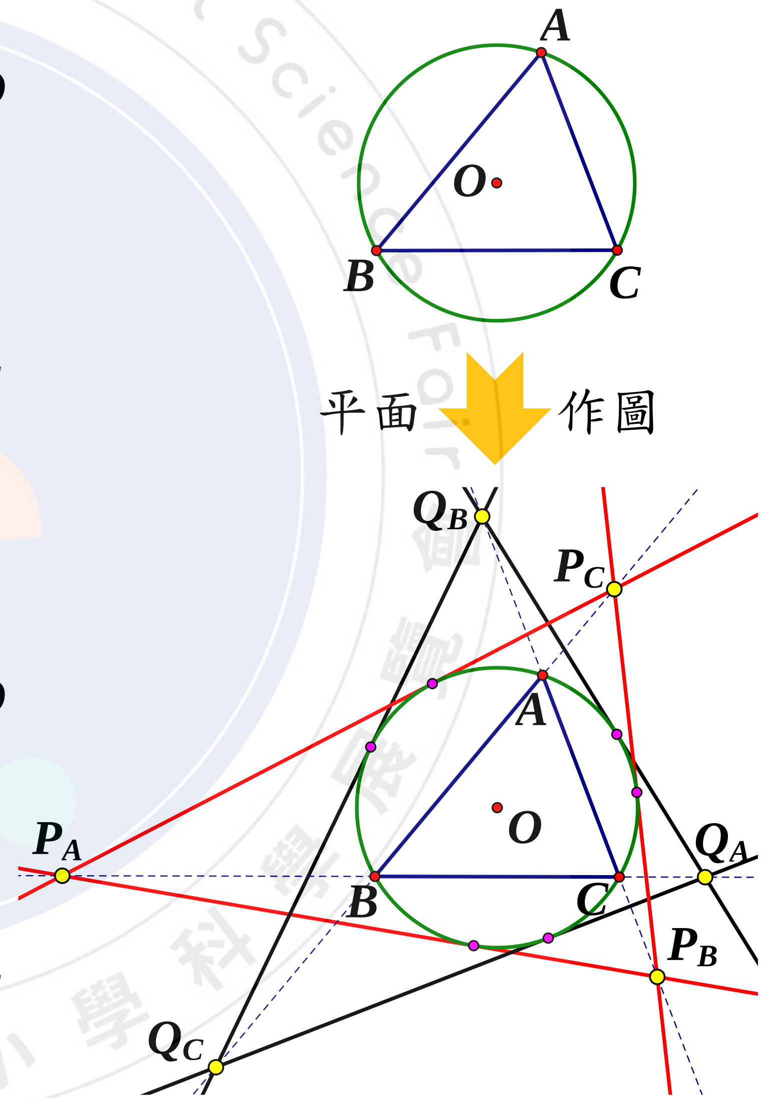
▲圖1：構造圓內接三角形

沈執中與陳彥睿 (2017)



▲圖2：構造圓內接四邊形

我們的研究目的

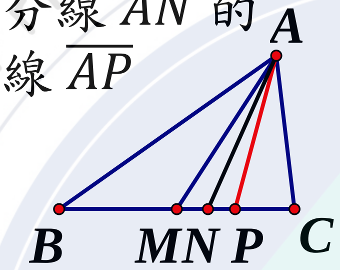


▲圖3：構造圓外切三角形

貳、預備知識

一、陪位中線／類似中線

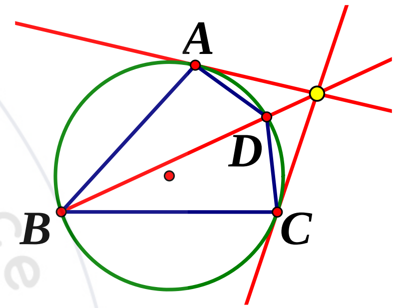
- 中線 $\overline{AM}$ 關於角平分線 $\overline{AN}$ 的鏡射線即為陪位中線 $\overline{AP}$
- $\overline{BP}:\overline{PC}=c^2:b^2$



▲圖4：陪位中線

二、調和四邊形的性質

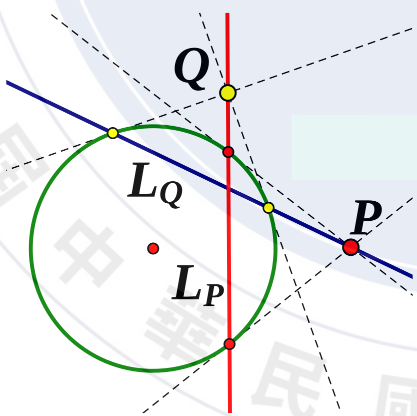
- 對邊乘積相等
- 一條對角線與過其餘兩點的切線三線共點



▲圖5：調和四邊形

三、極點極線與配極原則

- 極點對圓的兩條切線切點連線即為極線
- 若點 P 的極線 L_P 通過點 Q，則點 Q 的極線 L_Q 通過點 P



▲圖6：配極原則

四、重心坐標

- 點 P 位於 $\triangle ABC$ 所在平面上，則定義點 P 的重心坐標 (x,y,z) 為有向面積比 $x:y:z=\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB$
- $S(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$、$T(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，則

$$\overleftrightarrow{ST}:\begin{vmatrix} x_1 & y_2 & z_3 \\ x_1 & y_2 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$$

- 外接圓方程式為

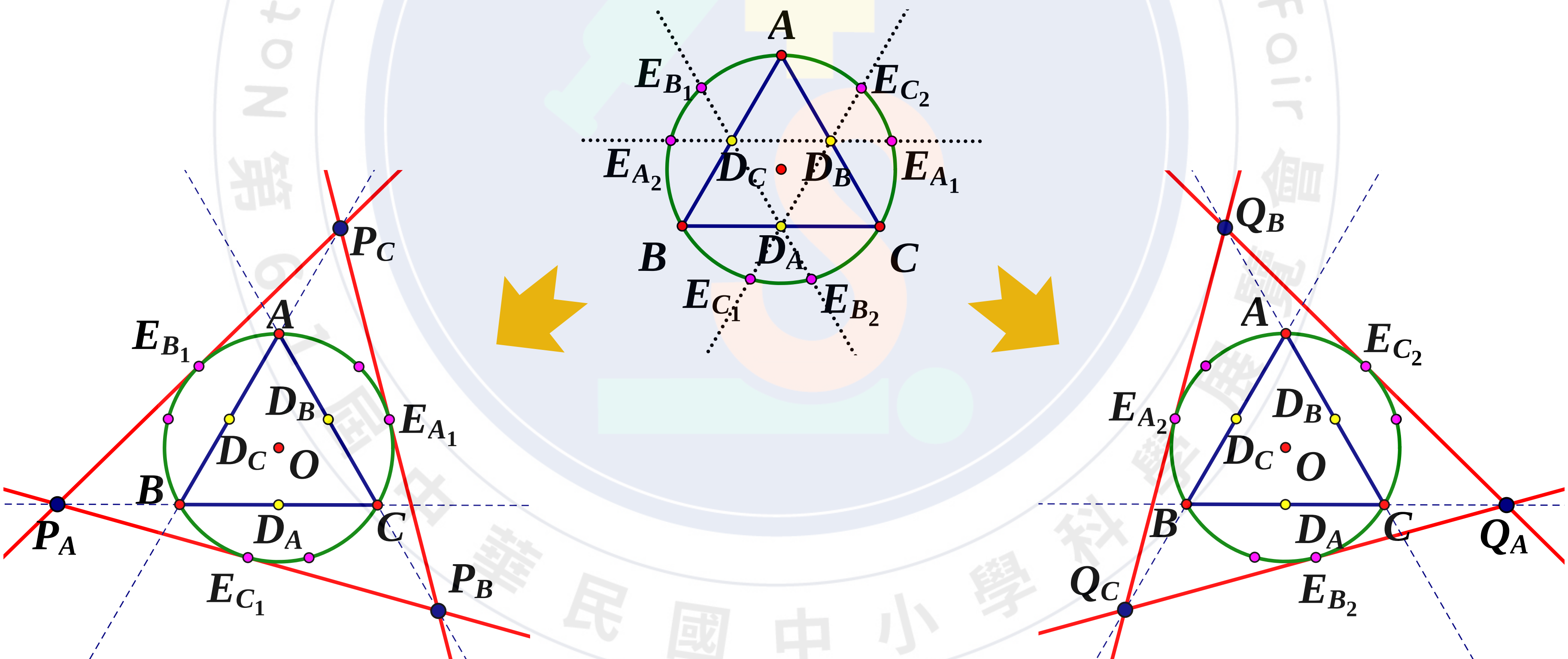
$$a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$$

一、特殊化：正三角形之作圖與性質探究

作圖1. 取 △ ABC 的三邊之中點，再依序作圖。

命題2. (存在性) 圓內接正 △ ABC 中，$\overleftrightarrow{AB}$ 通過兩切線的交點 P_C 。

性質3. (黃金比例) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{P_CA}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{P_AB}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{P_BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$。

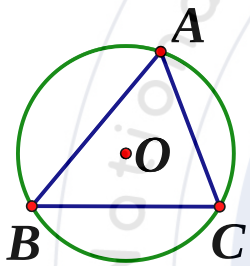


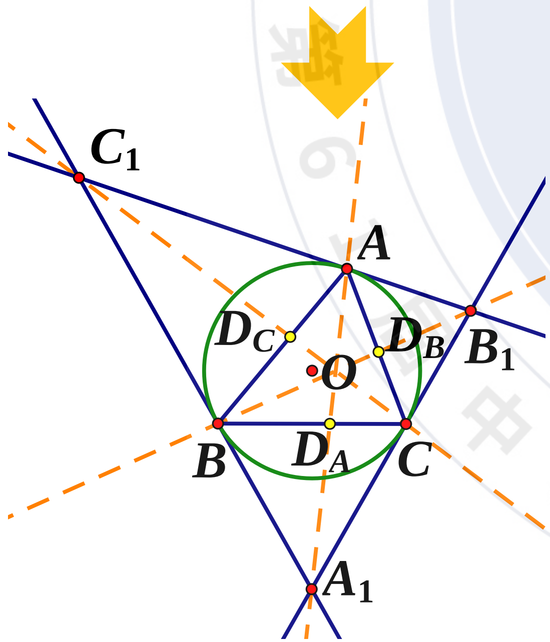
▲圖7：圓外切正三角形構圖與性質

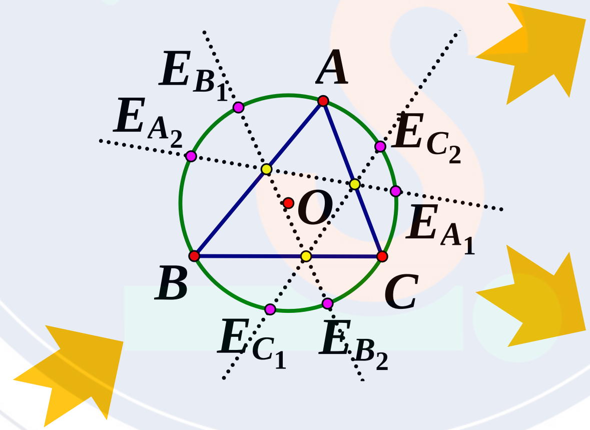
作圖4. 過 $\triangle ABC$ 三個頂點作切線，分別給出陪位中線與邊的交點 D_A、D_B、D_C 再依序作圖。

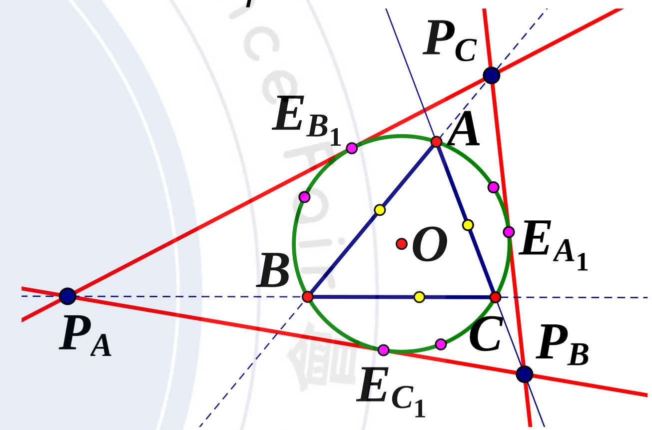
命題5. (存在性) 圓內接任意 $\triangle ABC$ 中，$\overleftrightarrow{AB}$ 通過兩切線的交點 P_C

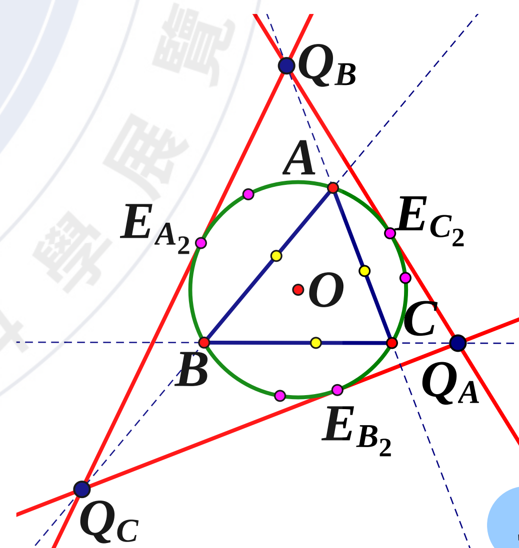
性質6. (交比) $(B,A;D_C,P_C)=(C,B;D_A,P_A)=(A,C;D_B,P_B)=-\dfrac{1}{\phi+1}$。











▲圖8：圓外切任意三角形構圖與性質

外切 $\triangle P_AP_BP_C$ ($\triangle Q_AQ_BQ_C$) 的型態

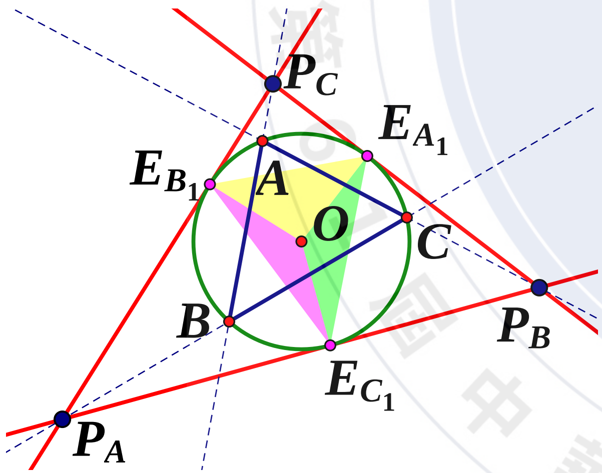
約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$。

分別考慮 $\triangle OE_{A_1}E_{B_1}$、$\triangle OE_{B_1}E_{C_1}$、$\triangle OE_{C_1}E_{A_1}$ 的有向面積可得出以下定理。

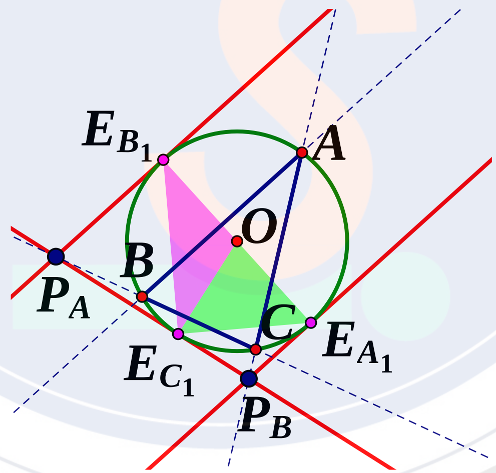
定理7. 當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 皆小於 ϕ 時，圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 的內切圓。

定理8. 當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 任一個等於 ϕ 時，$\triangle P_AP_BP_C$ 不存在。

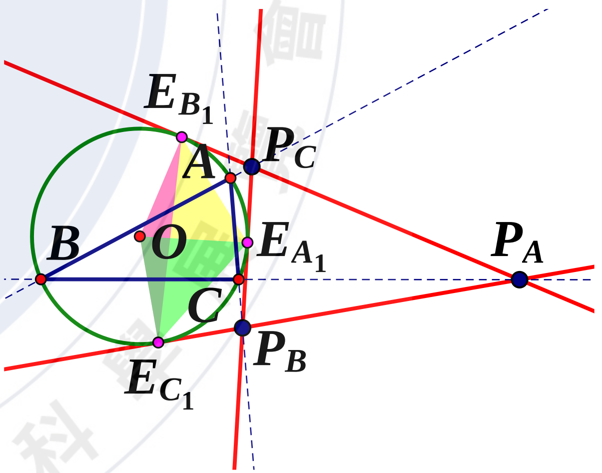
定理9. 當 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 任一個大於 ϕ 時，圓 O 是 $\triangle P_AP_BP_C$ 的旁切圓。



▲圖9：圓 O 是內切圓



▲圖10：$\triangle P_AP_BP_C$ 不存在



▲圖11：圓 O 是旁切圓

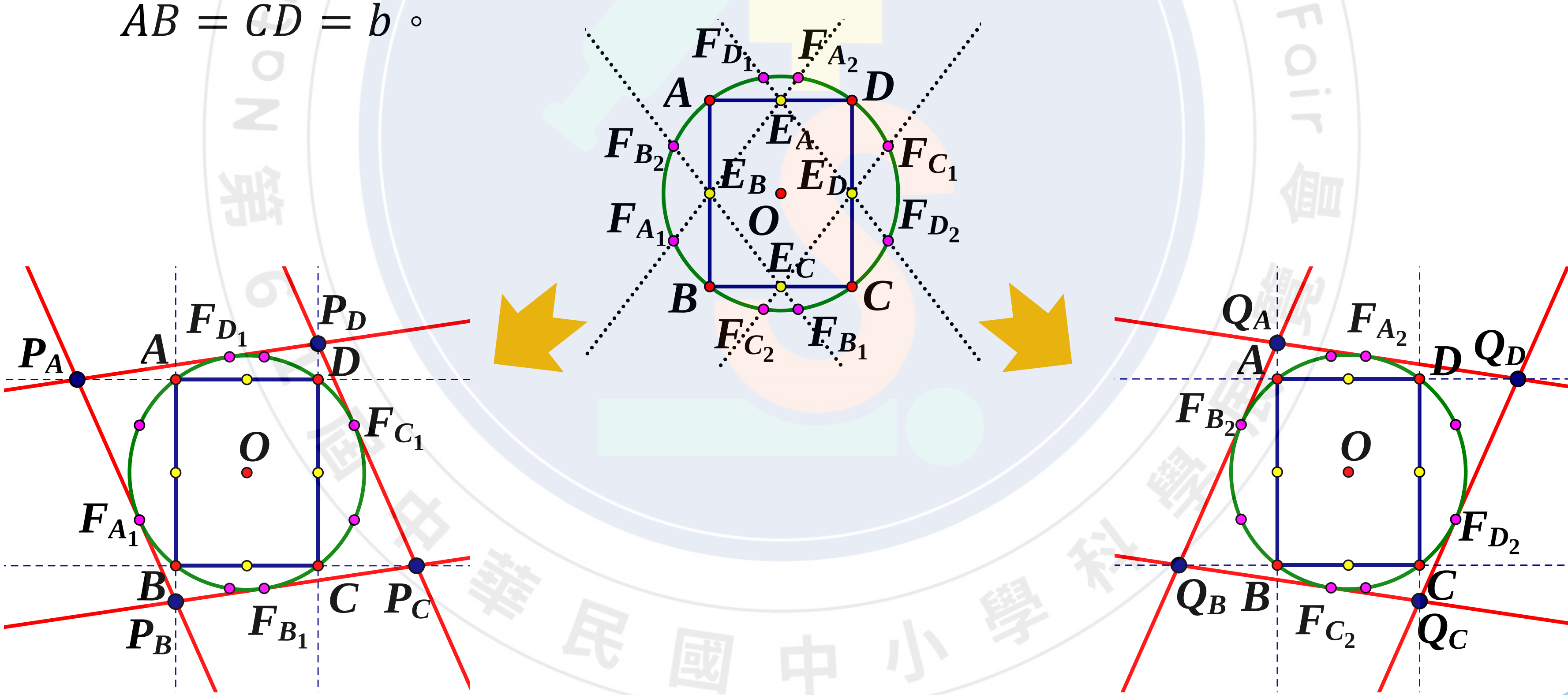
仿照圓內接正三角形，先探討具有對稱性的圓內接四邊形

作圖10. 取矩形 $ABCD$ 的四邊之中點，再依序作圖。

命題11. (存在性) 圓內接矩形 $ABCD$ 中，直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 通過 P_A 點。

性質12. (不變量) $\overline{P_AA}\times\overline{P_AD}\times\overline{P_BB}\times\overline{P_BA}=R^4$，其中 R 為圓 O 的半徑。

性質13. $\overline{P_AA}=\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+a^2b^2+b^2}}{2a}$ 且 $\overline{P_BB}=\dfrac{-b^2+\sqrt{a^4+a^2b^2+b^2}}{2b}$，其中 $\overline{AD}=\overline{BC}=a$、$\overline{AB}=\overline{CD}=b$。



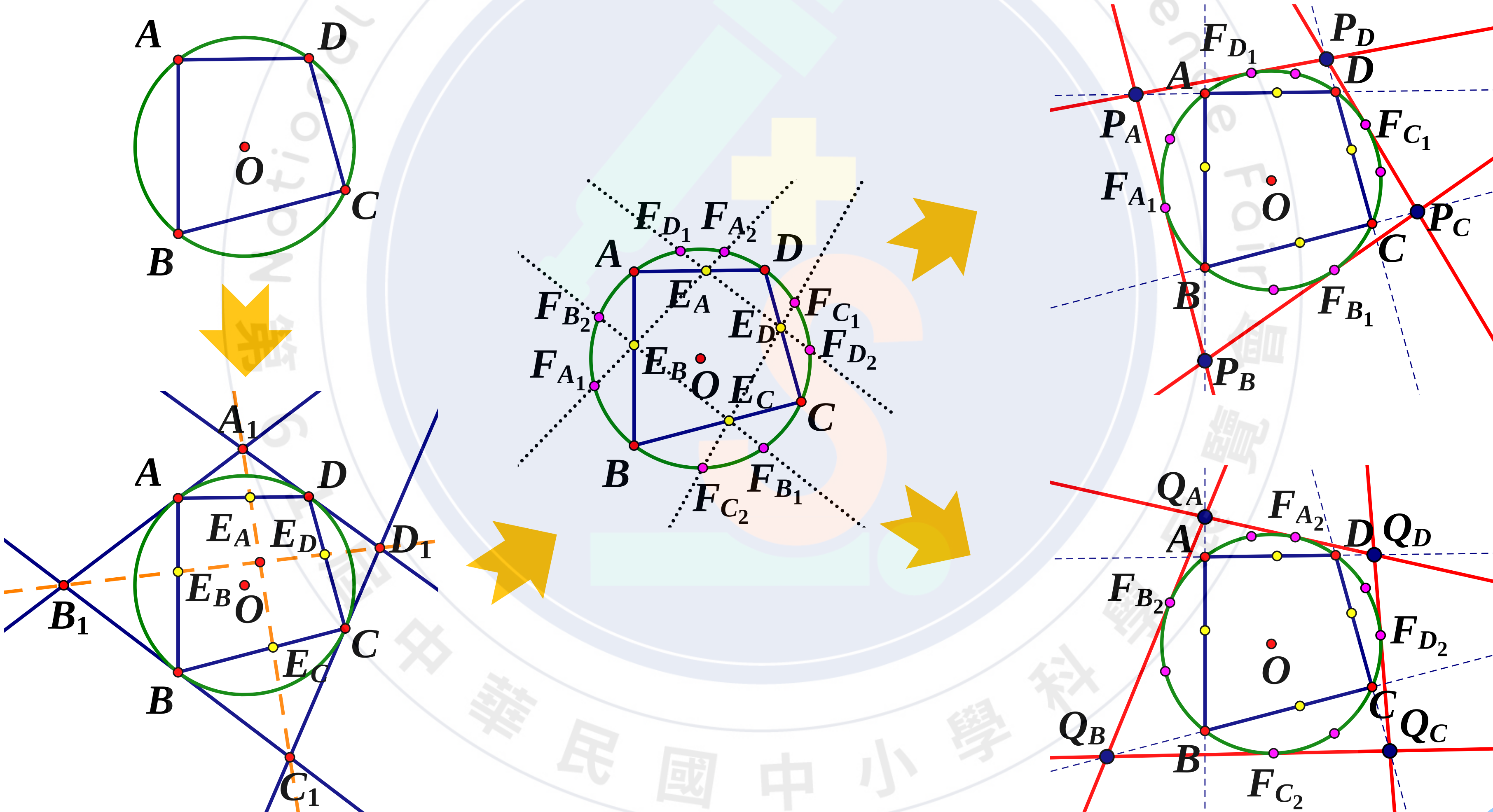
▲圖12：圓外切菱形構圖與性質

四、一般化：任意四邊形之作圖與性質探究

作圖14. 過四邊形 $ABCD$ 四個頂點作切線，再依序作圖。

四邊形 $ABCD$ 中，以 $\triangle ABC$ 為參考三角形，利用重心坐標與配極原則得出：

命題15. (存在性) 圓內接任意四邊形 $ABCD$ 中，直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 通過 P_A 點。



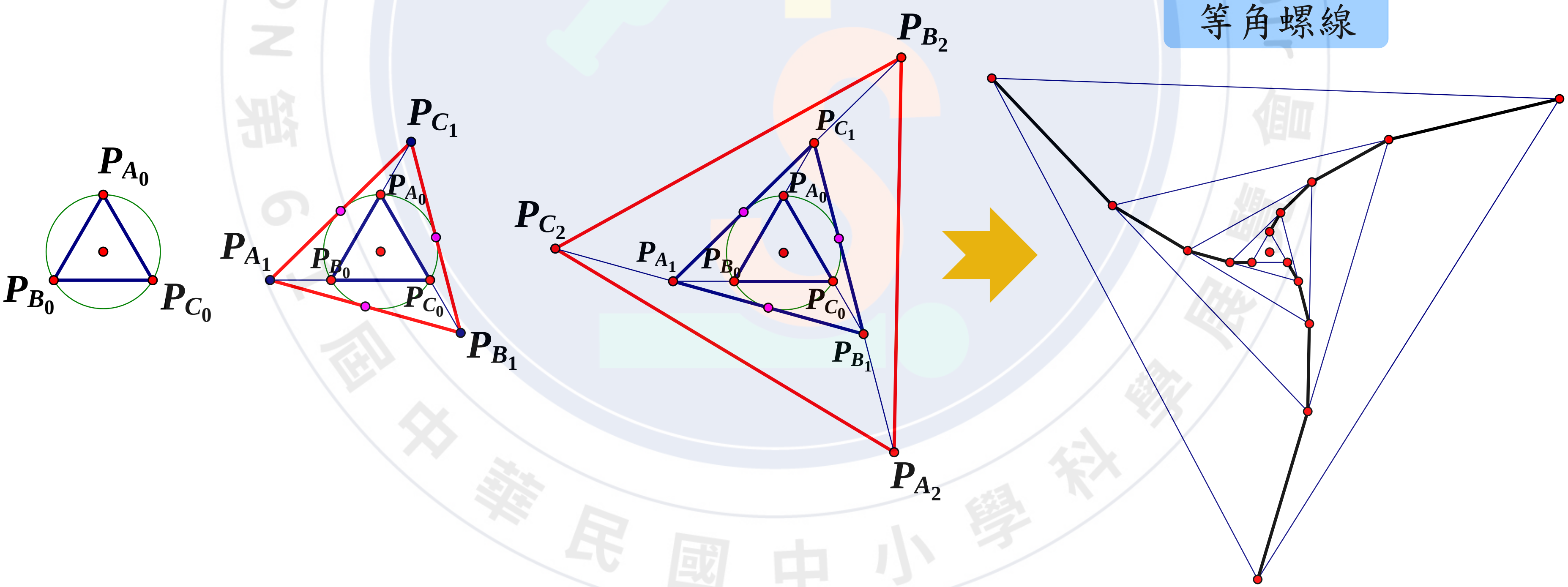
▲圖13：圓外切任意四邊形構圖

五、重複迭作：正 $\triangle P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}$ 的性質

性質16. 迭代外切正 $\triangle P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}$ 中，對於 $k=0,1,2,\ldots$ 皆有

- 長度 $\dfrac{\overline{P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}}}}{\overline{P_{C_k}P_{B_{k+1}}}}=\dfrac{\overline{P_{A_{k+1}}P_{C_{k+2}}}}{\overline{P_{B_k}P_{A_{k+1}}}}=\dfrac{\overline{P_{C_{k+1}}P_{B_{k+2}}}}{\overline{P_{A_k}P_{C_{k+1}}}}=2$
- 角度 $\angle P_{C_k}P_{B_{k+1}}P_{A_{k+2}}=\angle P_{B_k}P_{A_{k+1}}P_{C_{k+2}}=\angle P_{A_k}P_{C_{k+1}}P_{B_{k+2}}=\cos^{-1}\left(-\frac{1+3\sqrt{5}}{8}\right)$

$\left(\cos^{-1}\left(-\frac{1+3\sqrt{5}}{8}\right)\approx 164.4775°\right)$

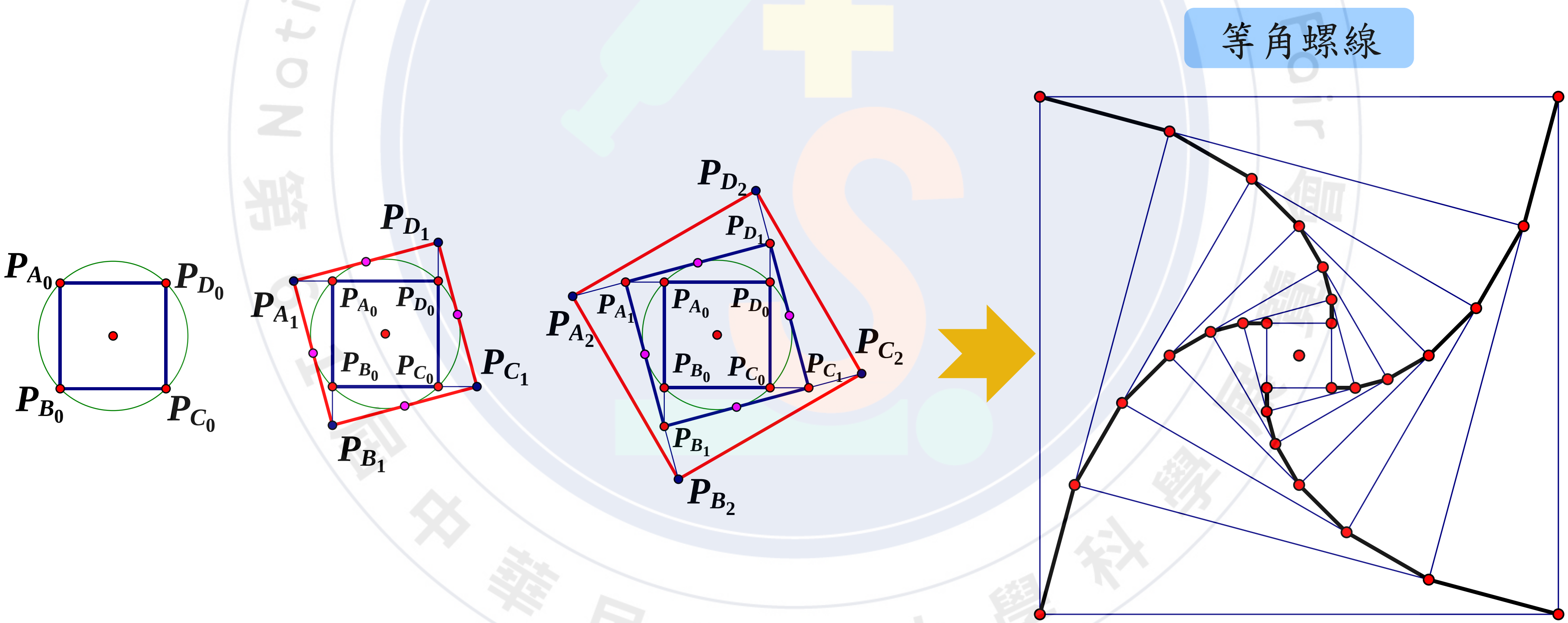


▲圖14：重複迭作正 $\triangle P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}$

五、重複迭作：正方形△$P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}P_{D_k}$的性質

性質17. 迭代外切正方形 $P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}P_{D_k}$ 中，對於 $k=0,1,2,\dots$皆有

- 長度 $\dfrac{\overline{P_{A_{k+1}}P_{A_{k+2}}}}{\overline{P_{A_k}P_{A_{k+1}}}}=\dfrac{\overline{P_{B_{k+1}}P_{B_{k+2}}}}{\overline{P_{B_k}P_{B_{k+1}}}}=\dfrac{\overline{P_{C_{k+1}}P_{C_{k+2}}}}{\overline{P_{C_k}P_{C_{k+1}}}}=\dfrac{\overline{P_{D_{k+1}}P_{D_{k+2}}}}{\overline{P_{D_k}P_{D_{k+1}}}}=\sqrt{2}$
- 角度 $\angle P_{A_k}P_{A_{k+1}}P_{A_{k+2}}=\cdots=\angle P_{D_k}P_{D_{k+1}}P_{D_{k+2}}=\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=165°$



▲圖15：重複迭作正方形△$P_{A_k}P_{B_k}P_{C_k}P_{D_k}$

肆、結論

本研究推廣前人的研究[1][2][3]，相較他們的研究，本研究是新的方向且難度也比較高。我們探討圓內接任意三角形及四邊形所衍伸的幾何構圖，因為僅有多邊形頂點可使用，因此必須創造出輔助點、輔助線。

我們不使用空間射影幾何模型，直接以平面幾何性質為研究工具，從特殊化到一般化給出了作圖步驟、證明，並發現豐富有趣的性質。

一、給出構造圓外切三角形的作圖方法及其幾何性質

(一) 圓內接正三角形，取三邊中點可得出其圓外切三角形的作圖步驟。

(二) 給出圓內接任意三角形的外切三角形的作圖步驟。

(三) 給出圓外切三角形的頂點的位置之比例常數。

(四) 外切 $\triangle P_AP_BP_C$ 的型態不是原本內接 $\triangle ABC$ 的內角（鈍角、直角、銳角）所決定，而是兩邊之比值 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{c}$、$\frac{c}{b}$ 所決定，臨界值是黃金比例。

二、給出構造圓外切四邊形的作圖方法及其幾何性質

(一) 圓內接矩形，取四邊中點可得出其圓外切菱形的作圖步驟。

(二) 給出圓外切菱形的頂點的位置之比例常數。

(三) 給出圓內接任意四邊形的外切四邊形的作圖步驟。

(四) 外切四邊形 $P_AP_BP_CP_D$ 的型態有三類：凸四邊形、凹四邊形以及不存在。使用我們提出的證明手法，可給出判別條件，但算式冗長，只記錄於研究日誌。

三、迭代外切正三角形與外切正方形的性質

利用本研究發現的外切正三角形與外切正方形的長度比例性質，再以相似形與餘弦函數，進一步給出迭作的「外切正三角形」與「外切正方形」的長度與角度的優美性質，其頂點皆落在特定等角螺線上。

伍、參考資料

[1] M. Sejfried, V.Shelomovskii (2012). *Elementary Proof of Sejfriedian Properties*,at the Proceedings of the 17th Asian Technology Conference in Mathematics, pp 342-352.

[2] V. Shelomovskii (2014). *Sejfriedian: existence, uniqueness, constructing and the proof of properties*, at the Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG 2014), pp 1095-1110.

[3] 沈執中、陳彥睿（2017）。**Sejfried 定理在四邊形的推廣**。中華民國第 57 屆全國科學展覽會國中組數學科作品。取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/030413.pdf