中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030416

兄弟你說我來求

學校名稱：臺東縣立關山國民中學

作者：	指導老師：
國三 李沐蒲	陳經明

關鍵詞：數列、遞迴、PyThon

摘要

此研究之目的為探討二階不定方程式解之關係與 PyThon 程式解方程式。我們從找出部分初始值開始，再找出遞迴關係及一般式。並提出假說，找出除了遞迴式與一般式以外的其他關係。內容包括:

一、$\begin{cases} a^2-5=b\cdot k_1 \\ b^2-5=a\cdot k_2 \end{cases}$的正整數起始解，及一組解中每個值的相互關係。

二、找出關於多組解的關係。

研究過程中發現許多國中課本沒提到的著名的數學特有名詞與本研究相關，如:費馬小定理、模數(mod)、丟番圖方程式、牛頓一次因式檢驗法。

壹、研究動機

在預習高一的課程時，偶然看到《森棚教官的數學題:〈互相牽制〉》這篇文章。文章中說到有某些數對中的兩數互相有連結。將某些有重複數值數對提出後發現重複的數值是一組數列。我們便以此為主軸探討。

貳、研究目的

一、$\begin{cases} a^2-5=b\cdot k_1 \\ b^2-5=a\cdot k_2 \end{cases}$的正整數解$(a,b,k_1,k_2 \in N)$

二、找出重複數值的數列之遞迴式

三、找出遞迴式之一般式

四、找出關於遞迴式解的正確假說

五、PyThon 程式驗證

參、研究器材與設備

紙、筆、電腦（Microsoft Word、Google 試算表）、PyThon。

肆、研究方法

首先我們用人工計算的方式求初始值，找出初始值的規律。再使用 Python 語法寫出的程式驗證推理出的解是否正確。

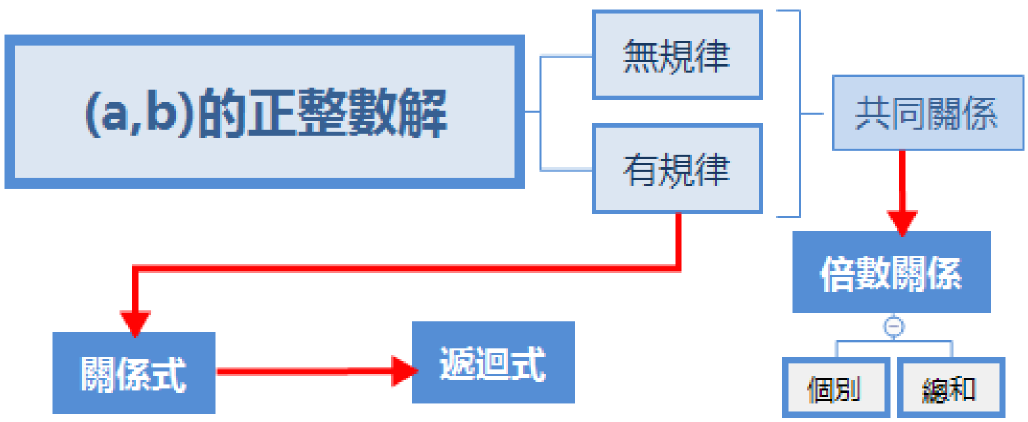


圖 1

伍、研究過程

一、探討: a^2-5是b的倍數，而且b^2-5是a的倍數，正整數(a,b)解的特性。

(一)代入法求解

代入法找出正整數(a,b)，讓a^2-5是b的倍數，而且b^2-5是a的倍數。先將題目找出多少組正整數(a,b)，讓a^2-5是b的倍數，而且b^2-5是a的倍數，轉譯為以下聯立方程式。

求 $\begin{cases} a^2-5=b\cdot k_1 \\ b^2-5=a\cdot k_2 \end{cases}$ 的正整數解， $a,b,k_1,k_2\in\mathbb{Z}^+$ ， $a,b\geq 3$。

$3^2-5=4=2^2$ 　　　　 $4^2-5=11$

$5^2 - 5 = 20 = 2^2 \times 5$

$6^2 - 5 = 31$

$7^2 - 5 = 44 = 2^2 \times 11$

$8^2 - 5 = 59$

$9^2 - 5 = 76 = 2^2 \times 19$

$10^2 - 5 = 95 = 5 \times 19$

$11^2 - 5 = 116 = 2^2 \times 29$

$12^2 - 5 = 139$

$13^2 - 5 = 164 = 2^2 \times 41$

$14^2 - 5 = 191$

$15^2 - 5 = 220 = 2^2 \times 5 \times 11$

$16^2 - 5 = 251$

$17^2 - 5 = 284 = 2^2 \times 71$

$18^2 - 5 = 319$

$19^2 - 5 = 356 = 2^2 \times 89$

$20^2 - 5 = 395 = 5 \times 79$

$21^2 - 5 = 436 = 2^2 \times 109$

$22^2 - 5 = 479$

$23^2 - 5 = 524 = 2^2 \times 131$

$24^2 - 5 = 517$

$25^2 - 5 = 620 = 2^2 \times 5 \times 31$

$26^2 - 5 = 671 = 11 \times 61$

$27^2 - 5 = 724 = 2^2 \times 181$

$28^2 - 5 = 779$

$29^2 - 5 = 836 = 2^2 \times 11 \times 19$

$30^2 - 5 = 895 = 5 \times 179$

由上述算式代入法找出正整數(a,b)，得到表　1。

a	b	k_1	k_2	$a+b$	$a-b\|$	k_1+k_2	$k_1-k_2\|$
4	11	1	29	15	7	30	28
5	5	4	4	10	0	8	0
5	10	2	19	15	5	21	17
5	20	1	79	25	15	80	78
10	95	1	902	105	85	903	901
11	29	4	76	40	18	80	72
20	395	1	7801	415	375	7802	7800
29	76	11	199	105	47	210	188
55	755	4	10364	810	700	10368	10360
110	205	59	382	315	95	441	323
…	…	…	…	…	…	…	…

表1

從表格中之數據做出以下假設

1. (a,b)正整數解有無限多組解。
2. $a+b$為 5 的倍數。
3. a、b各與 3 互質。
4. 這類問題若有無限多組正整數解，所有的解一定可以由(一個或多個)二階的線性遞迴數列的初始值對應的是一組基本解。
6. 利用 Markoff Equation 推廣的不定方程做相關的討論。（尚未完成）

定理一 若 a2-5 是 b 的倍數且 b2-5 是 a 的倍數，則正整數 a、b 各與 3 互質。

證明：若a^2-5是 b 的倍數且b^2-5是 a 的倍數

假設$\begin{cases} a^2-5=k_1\cdot b \dots ① \\ b^2-5=k_2\cdot a \dots ② \end{cases}$ (a、b、k1、k2$\in \mathbb{N}$)

1. 令 a=3p、b=3r (p、r $\in \mathbb{N}$) 代入(2)式

得$9r^2-5=3pk_2$

$9r^2-3pk_2=5$

$3(3r^2-pk_2)=5$

∵ k2、p、r∈N

∴$3r^2-pk_2$2∈Z

因此$3(3r^2-pk_2)=5$中，等號的右式值應為 3 的倍數才有解，此方程式 p、r 無解。

2. 令 a=3p、b=3r+1 (p、r $\in \mathbb{N}$) 代入②式

得$(3r+1)^2-5=3pk_2$

$9r^2+6r-3pk_2=4$

$3(3r^2+2r-pk_2)=4$

∵ k1、p、r∈N

∴ $3r^2+2r-pk_2$∈Z

因此$3(3r^2+2r-pk_2)=4$中，等號的右式值應為 3 的倍數才有解，此方程式 p、r 無解。

3. 令 a=3p、b=3r+2 (p、r Z+) 代入②式

得$(3r+2)^2-5=3pk_2$

$9r^2+12r-3pk_2=1$

$3(3r^2 + 4r - pk_2) = 1$

∵ k1、p、r∈N

∴$3r^2 + 4r - pk_2$∈Z

因此$3(3r^2 + 4r - pk_2) = 1$中，等號的右式值應為 3 的倍數才有解，
此方程式 p、r 無解。

由 1.、2.、3.可知，a 與 3 互質。同理可證，b 與 3 互質。

定理二若$a^2 - 5$是 b 的倍數且$b^2 - 5$是 a 的倍數，則$a^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$且 $b^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$。。(a、b∈N)

證明：由定理一可知，正整數 a、b 各與 3 互質。

依據費馬小定理，當 p 是質數時，對任意與 p 互質的整數 a，

$a^{L-)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$。

證明：假設$a = 3n - 2(n \in N)$

$a^2 = (3n - 2)^2$

$= 9n^2 - 12n + 4$

$= 3(3n^2 - 4n + 1) + 1$

$\equiv 1(mod3)$

假設$a = 3n - 1(n \in N)$

$a^2 = (3n - 1)^2$

$= 9n^2 - 6n + 1$

$= 3(3n^2 - 2n) + 1$

$\equiv 1(mod3)$

衍生出下列推理

（一）若$a^2 - 5$是 b 的倍數且$b^2 - 5$是 a 的倍數，

則$a^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$且$b^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$。

$\because a^2 \equiv 1(\text{mod}3)$且$b^2 \equiv 1(\text{mod}3)$

$\therefore a^2 - 5 \equiv 2(\text{mod}3)$且$b^2 - 5 \equiv 2(\text{mod}3)$

$\Rightarrow k_1 b \equiv 2(\text{mod}3)$且$k_2 a \equiv 2(\text{mod}3)$

1.假設 $k_1 = 3m$ 且 $b = 3n + 1$

$3m \cdot (3n + 1)$

$= 9mn + 3m$

$= 3(3mn + m)$

$\equiv 0(\text{mod}3)$…不合

2.假設 $k_1 = 3m + 1$ 且 $b = 3n + 1$

$(3m + 1) \cdot (3n + 1)$

$= 9mn + 3m + 3n + 1$

$= 3(3mn + m + n) + 1$

$\equiv 1(\text{mod}3)$ …不合

3.假設 $k_1 = 3m + 2$ 且 $b = 3n + 1$

$(3m + 2) \cdot (3n + 1)$

$= 9mn + 3m + 6n + 2$

$= 3(3mn + m + 2n) + 2$

$\equiv 2(\mathrm{mod}3)$ ...合

4.假設 $k_1 = 3m$ 且 $b = 3n + 2$

$3m \cdot (3n + 2)$

$= 9mn + 6m$

$= 3(3mn + 2m)$

$\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ ...不合

5.假設 $k_1 = 3m + 1$ 且 $b = 3n + 2$

$(3m + 1) \cdot (3n + 2)$

$= 9mn + 6m + 3n + 2$

$= 3(3mn + 2m + n) + 2$

$\equiv 2(\mathrm{mod}3)$ ...合

6.假設 $k_1 = 3m + 2$ 且 $b = 3n + 2$

$(3m + 2) \cdot (3n + 2)$

$= 9mn + 6m + 6n + 4$

$= 3(3mn + 2m + 2n)$

$\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ ...不合

由上述得知$k_1 + b|3$

同理得知$k_2 + a|3$

(二)探討 k1 與 k2 的關係

1.假設 $k_1 = k_2$

$$\begin{cases} a^2 - 5 = k_1 \cdot b \ldots (1) \\ b^2 - 5 = k_1 \cdot a \ldots (2) \end{cases}$$

① - ②得$a^2 - b^2 = -k_1(a - b)$

$(a+b)(a-b) = -k_1(a-b)$　(　　)

(1) 假設 $a = b$

$a = 5, b = 5, k_1 = 4$

(2) 假設 $a \neq b$

① ÷ ②得$\frac{[\backslash-]}{\wedge\backslash-]} = \frac{\wedge}{[}$

無正整數解

∵ 5 為質數 且 $a^2 - 5 > 0$ $(k_1$、$x \in Z^{+})$

∴ $a - k_1 = 1$，$x = 5$

$a = 5$，$k_1 = 4$ 唯一解

$(a, b) = (5,5)$，$k_1 = 4$，$k_2 = 4$

2.假設 $k_1 \neq k_2$，$a = 5$

$$\begin{cases} a^2 - 5 = k_1 \cdot b \ldots ① \\ b^2 - 5 = k_2 \cdot a \ldots ② \end{cases}$$

(1)假設 $k_1 = 1$,則$25 - 5k_1^2 > 0$ $b = 20, k_2 = 79$

(2)假設 $k_1 = 2$,則$25 - 5k_1^2 > 0$ $b = 10, k_2 = 19$

(3)假設 $k_1 > 2$,則$25 - 5k_1^2 < 0$ $b = 5, k_2 = 4$

故當$k_1 = k_2$時，$\begin{cases} a^2 - 5 = k_1 b \\ b^2 - 5 = k_2 a \end{cases}$有唯一解$(a, b) = (5, 5)$，$k_1 = k_2 = 4$

如果 $k_1 \neq k_2$， $\begin{cases} a^2-5=k_1 b \\ b^2-5=k_2 a \end{cases}$ ， **(a,b)則有無限多組解。(尚未推論)**

三、PyThon 程式解方程式

可以找出多少組正整數(a,b)，讓a^2-5是b的倍數，而且b^2-5是a的倍數。我們以下程式邏輯設計出電腦程式去求解。

範例為已知 a=4,b=11

而用 a=4,b=11 帶入

```
from scipy.optimize import fsolve
```

開啟 SciPy 套件 optimize 子模組中的 fsolve 程式。

```
def solve_function(unsolved_value):
```

設定函式 solve_function，而當中的變數組名稱為 unsolved_value

```
a,b,k1,k2=unsolved_value[0],unsolved_value[1],unsolved_value[2],unsolved_value[3]
```

設定 4 變數組名稱(即未知數)a,b,k1,k2 為變數組第 0 號,變數組第 1 號,變數組第 2 號,變數組第 3 號。

※定義變數時，一定要從第 0 號開始。

```
return
```

回推

```
[a**2-5-k1*b,
```

〖[a]^2-5-b 〖 - k]_1=0

```
b**2-5-k2*a,
```

b^2-5-a·k_2=0

```
a-4,
```

a-4=0

```
b-11,]
```

b-11=0]

因為有變數組第 0 號,變數組第 1 號,變數組第 2 號,變數組第 3 號，故須 4 條條件式。

※數學條件式=0

solved=fsolve(solve_function,[0,0,0,0])

solved 的值等於 fsolve 程式中函式 solve_function 未知數的解。

(顯示方式[變數組第 0 號,變數組第 1 號,變數組第 2 號,變數組第 3 號])

print(solved)

顯示 solved 的值。

print("Program done!")

顯示"Program done!"。

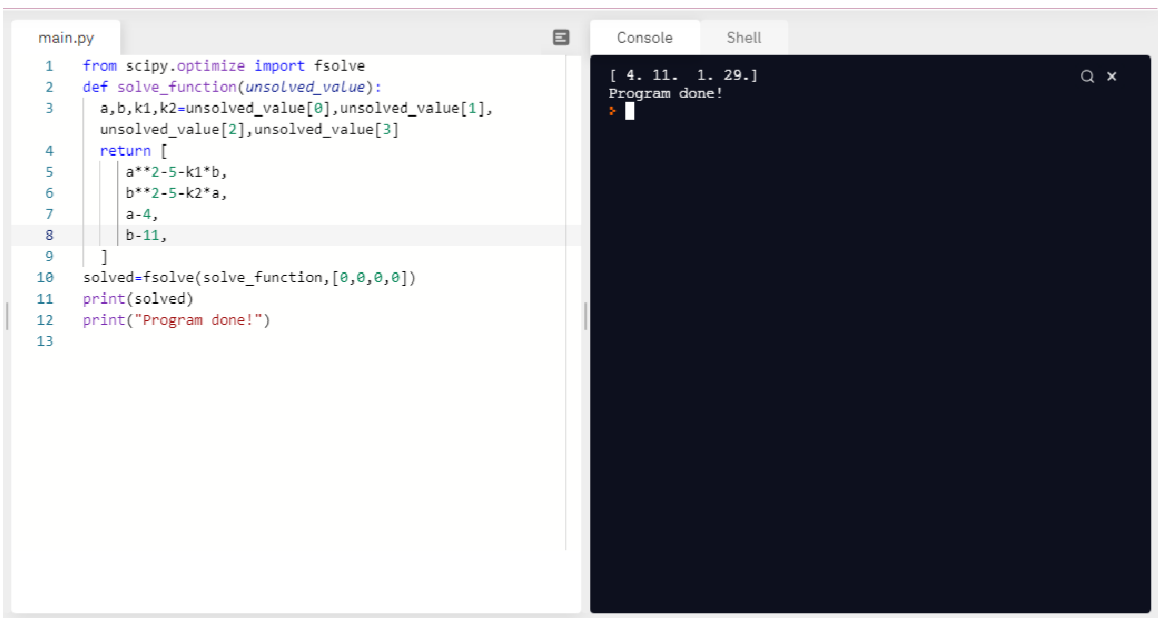


圖 2

算出當 a=4,b=11 時 k_1=1,k_2=29，整理如下表。

編號	a	b	k_1	k_2
1	4	11	1	29
2	5	5	4	4
3	5	10	2	19

4	5	20	1	79
5	10	95	1	902
6	11	29	4	76
7	20	395	1	7801
8	29	76	11	199
9	55	755	4	10364
10	76	199	29	521
11	110	205	59	382
12	119	521	76	1364
13	521	1364	199	3571
…	…	…	…	…

表 2

由上表 2 抽出以下幾項成為表 3。

編號	a	b	k)	k_2
1	4	11	1	29
2	11	29	4	76
8	29	76	11	199
10	76	199	29	521
12	199	521	76	1364
13	521	1364	199	3571
…	…	…	…	…

表 3

發現a、b、k)、k_2中的數值有所重疊。如 B1 之a=B2 之k)、B1 之b=B2 之a=B3 之k)、B1 之k_2=B2 之b=B3 之a

由上述關係中得知這些數值出現有 一定規律

$k_2 \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow k_)$

將這些數值提出，我們找到一組遞迴數列

$$\begin{cases} c_) = 1, c_2 = 4 \\ c_{\mathbf{i}b2} = \dfrac{{c_{\mathbf{i}b)}}^2 - 5}{c_{\mathbf{i}}}, n \in \mathrm{N} \end{cases}$$

依序帶入$k_2, b, a, k_)$，得到表 3

在(a, b)解的列表，序號 1 到 13 為在表 2 推論得知。

且目前得出的(a, b)解亦滿足我們在一開始的直觀假設:

1. $a + b$為 5 的倍數

2.. a、b與 3 互質。

3. $a^2 \equiv 1(mod\ 3)$且$b^2 \equiv 1(mod\ 3)$。

並從表中，找到部份解的規律性，列出如表 4:

表 4 $a^2 - 5$是b的倍數，$b^2 - 5$是a的倍數，(a, b)遞迴關係特殊解

編號	a	b	$k_)$	k_2
C1	4	11	1	29
C2	11	29	4	76
C3	29	76	11	199
C4	76	199	29	521
C5	199	521	76	1364
C6	521	1364	199	3571
C7	1364	3571	521	9349

C8	3571	9349	1364	24476
C9	9349	24476	3571	64079
C10	24476	64079	9349	167761
C11	64079	167761	24476	439204
C12	167761	439204	64079	1149851
C13	439204	1149851	167761	3010349
C14	1149851	3010349	439204	7881196
C15	3010349	7881196	1149851	20633239
…	…	…	…	…

表 4

四、探討a^2-m是b的倍數，而且b^2-m是a的倍數，正整數(a,b)解的特性。

$$\begin{cases} a^2-m=k_1b \\ b^2-m=k_2a \end{cases},\quad a、b、m、k_1、k_2\in Z^+$$

1. $\boldsymbol{k_1=k_2}$

$$\begin{cases} a^2-m=k_1b \ldots\ldots\ldots(1) \\ b^2-m=k_1a \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$得$a^2-b^2=-k_1(a-b)$

$(a+b)(a-b)=-k_1(a-b)$………(3)

狀況 1. $a=b$

(a,b)顯然為方程式的解

由(1) $a^2-m=k_1a$

$a(a-k_1)=m$

①若m為質數 且 $a^2-m>0$ (k_1、$a\in Z^+$)

則 $a = m$， $k_) = m - 1$ 唯一解

$(a, b) = (m, m)$ ， $k_) = k_2 = m - 1$

②若m為合數

則 $a = \frac{k_1 b \sqrt{k_1 \backslash bm}}{2} \in Z^b$ （$\because k_) < \sqrt{k_)^2 + 4m}$ $\therefore a = \frac{k_1 - \sqrt{k_1 \backslash bm}}{2}$不合）

$(a, b) = (\frac{k_1 b \sqrt{k_1 \backslash bmm}}{2}, \frac{k_1 b \sqrt{k_1 \backslash bm}}{2})$ ， $k_)^2 + 4m$為完全平方數

狀況 2. $a \neq b$

由(3)式知 $a + b = -k_) \ldots\ldots\ldots (4)$

$\because$ a、b、$k_) \in z^b$

$\therefore$ (a, b) 無解

故$k_1 = k_2$時，

若$a = b$，m為質數，則$(a, b) = (m, m)$ ， $k_1 = k_2 = m - 1$ 唯一解。

若$a = b$，m為合數，則$(a, b) = (\frac{k_1 b \sqrt{k_1^2 b 4m}}{2}, \frac{k_1 b \sqrt{k_1^2 b 4m}}{2})$ ， $k_1^2 + 4m$為完全平方數。

若$a \neq b$，則(a, b)無解

2. **$k_1 \neq k_2$**

$$\begin{cases} a^2 - m = k_) b \ldots\ldots\ldots (1) \\ b^2 - m = k_2 a \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(1)代入(2)得

$$(\frac{a^{\backslash} - m}{k_1})^2 - m = k_2 a$$

$$a^m - 2ma^2 - k_)^2 k_2 a + (m^2 - mk_)^2) = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$\because a \in Z^{\mathrm{b}}$

$\therefore$ 令$f(a) = a^{\mathrm{m}} - 2ma^2 - k_1^2k_2a + (m^2 - mk_1^2)$

依據一次因式檢驗法(牛頓定理)

得知若$a - p$是$f(x)$的因式，則p是$|m^2 - mk_1^2|$的正因數，

且$a = p$是$a^{\mathrm{m}} - 2ma^2 - k_1^2k_2a + (m^2 - mk_1^2) = 0$的解。

若a有正整數解，則a的值最大可能為$|m^2 - mk_1^2|$。

$\boxed{\text{狀況 1}}$若$m > k_1^2$，則a可能有的最大值解為$m^2 - mk_1^2$。

令$a = m^2 - mk_1^2$代入(3)式得

$$(m^2 - mk_1^2)^{\mathrm{m}} - 2m\left(m^2 - mk_1^2\right)^2 - k_1^2k_2\left(m^2 - mk_1^2\right) + \left(m^2 - mk_1^2\right) = 0$$

$\because m^2 - mk_1^2 > 0$

$\therefore (m^2 - mk_1^2)^{\mathrm{r}} - 2m(m^2 - mk_1^2) - k_1^2k_2 + 1 = 0$

$m^{\mathrm{r}}k_1^{\mathrm{s}} - 3m^{\mathrm{m}}k_1^{\mathrm{m}} + (3m^{]} - 2m^2 + k_2)k_1^2 + (-m^{\mathrm{s}} + 2m^{\mathrm{r}} - 1) = 0$

$\because m > k_1^2$且k_1、$m \in Z^{\mathrm{b}}$

$\therefore -m^{\mathrm{s}} + 2m^{\mathrm{r}} - 1 < 0$

$\because k_1 \in Z^{\mathrm{b}}$

$\therefore$ 令$g(k_1) = m^{\mathrm{r}}k_1^{\mathrm{s}} - 3m^{\mathrm{m}}k_1^{\mathrm{m}} + (3m^{]} - 2m^2 + k_2)k_1^2 + (-m^{\mathrm{s}} + 2m^{\mathrm{r}} - 1)$

依據一次因式檢驗法(牛頓定理)

得知若$uk_1 - v$是$g(k_1)$的因式，$(u,v) = 1$

則u是m^{r}的因數且v是$m^{\mathrm{s}} - 2m^{\mathrm{r}} + 1$的正因數。

因而可知若k_1有正整數解，則k_1的最大值為$(m^6\ -\ 2m^3\ +\ 1)$。

$$
\text{藉由}\begin{cases} k_2 = \dfrac{-m^{z}\mathrm{k_l}^{\{}\mathrm{b|}m^{\}}\mathrm{k_l}^{\}}-(\mathrm{r}m^{\sim}-2m^{\backslash})\mathrm{k_l}^{\backslash}\mathrm{b}(m^{\{}-2m^{z}\mathrm{b}))}{\mathrm{k_l}^{\backslash}} \\ a = m^2 - mk_{)}^2 \\ b = \dfrac{a^{\backslash}-m}{\mathrm{k_l}} \end{cases}
$$

進而可推論k_2、a、b的值為有限個。

可得以下推論

當$m > k_1^2$，$a = m^2 - mk_1^2$為聯立方程式的解時，

$1 \le k_1 \le m^6 - 2m^3 + 1$。

狀況 2 若$m < k_{)}^2$，則a可能有的最大值解為則$mk_{)}^2 - m^2$

令$a = mk_{)}^2 - m^2$代入(3)式得

$$(mk_{)}^2 - m^2)^{\mathrm{m}} - 2m(mk_{)}^2 - m^2)^2 - k_{)}^2k_2(mk_{)}^2 - m^2) + (m^2 - mk_{)}^2) = 0$$

$$\because\ mk_{)}^2 - m^2 > 0$$

$$\therefore\ (mk_{)}^2 - m^2)^{\mathrm{r}} - 2m\left(mk_{)}^2 - m^2\right) - k_{)}^2k_2 - 1 = 0$$

$$m^{\mathrm{r}}k_{)}^{\mathrm{s}} - 3m^{\mathrm{m}}k_{)}^{\mathrm{m}} + (3m^{]} - 2m^2 - k_2)k_{)}^2 + (-m^{\mathrm{s}} + 2m^{\mathrm{r}} - 1) = 0$$

$\because\ m < k_{)}^2$且$m \in Z^{\mathrm{b}}$

$\therefore\ m = 1$時，$-m^{\mathrm{s}} + 2m^{\mathrm{r}} - 1 = 0$。$m > 1$時，$-m^{\mathrm{s}} + 2m^{\mathrm{r}} - 1 < 0$

① $m = 1$時，$-m^{\mathrm{s}} + 2m^{\mathrm{r}} - 1 = 0$。

$$k_{)}^{\mathrm{s}} - 3k_{)}^{\mathrm{m}} + (1 - k_2)k_{)}^2 = 0$$

$$k_{)}^{\mathrm{m}} - 3k_{)}^2 + (1 - k_2) = 0$$

$$k_{)}^2 = \frac{\mathrm{r}+\sqrt{\mathrm{]bmk\backslash}}}{2}\quad \left(\frac{\mathrm{r}-\sqrt{\mathrm{]bmk\backslash}}}{2} < 0\ \text{不合}\right)$$

$k_{)} = \sqrt{\frac{rb\sqrt{]bmk\backslash}}{2}}$ $(k) > 0$ 且 $5+4(k2$ 為完全平方數)

並依據牛頓定理，$k_{)}$、$k_2 \in Z^{b}$，得知$k_{)}$的解為 $(k_2 - 1)$的正因數。

$$\sqrt{\frac{rb\sqrt{]bmk\backslash}}{2}} \leq k_2 - 1$$

$$k_2^{m} - 4k_2^{r} - 3k_2^{2} + k_2 - 1 \geq 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

其中$k_2 > 4$均滿足(4)式

當$m < k_1^2$，$m = 1 < k_1^2$，$a = k_1^2 - 1$時，

$k_1 = \sqrt{\frac{3b\sqrt{5b4k_2}}{2}}$ ($k_2 > 4$ 且 $(5 + 4k_2)$ 為完全平方數)

$(a, b) = \left(k_1^2 - 1, \frac{a^2\,1}{k_1}\right)$

② $m > 1$時，$-m^{s} + 2m^{r} - 1 < 0$

$$m^{r}k_{)}^{s} - 3m^{m}k_{)}^{m} + (3m^{]} - 2m^2 - k_2)k_{)}^{2} + (-m^{s} + 2m^{r} - 1) = 0$$

$$\therefore \text{令} g(k_{)}) = m^{r}k_{)}^{s} - 3m^{m}k_{)}^{m} + (3m^{]} - 2m^2 - k_2)k_{)}^{2} + (-m^{s} + 2m^{r} - 1)$$

依據一次因式檢驗法(牛頓定理)

得知若$uk_{)} - v$是$g(k_{)})$的因式，$(u, v) = 1$

則u是m^{r}的因數且v是$m^{s} - 2m^{r} + 1$的正因數。

因而可知若k_1有正整數解，則k_1的最大值為$(m^6 - 2m^3 + 1)$。

$$\text{藉由}\begin{cases} k_2 = \dfrac{m^{z}k_1^{\{}-rm^{\}}k_1^{\}}b(rm^{\sim}-2m^{\backslash})k_1^{\backslash}-(m^{\{}-2m^{z}b))}{k_1^{\backslash}} \\ a = mk_{)}^2 - m^2 \\ b = \dfrac{a^{\backslash}-m}{k_1} \end{cases}$$

進而可推論k_2、a、b的值為有限個。

可得以下推論

> **當$m < {k_1}^2$，$a = m{k_1}^2 - m^2$為聯立方程式的解時，**
> **$1 \le k_1 \le m^6 - 2m^3 + 1$。**

五、遞迴關係式

在表 3 中，發現到第 15 組之前的解之值都為正整數。但遞迴式為分數型態，極小機率會為正整數，故我們便思考為什麼c_{n+1}會被c_n整除。

定理三$\{c_1 = 1, c_2 = 4, c_{n+2} = 2\cdot c_{n+1} + \sqrt{c_n\cdot c_{n+1} + 5}, n \in N$

我們為了證明$c_{n+2} = \frac{c_{n+1}^2 - 5}{c_n}$必為正整數，故我們將$c_{n+1}$分解後得

$2\cdot c_n + m$(m為偏差值)，平方後為$4\cdot c_n^2 + 4\cdot c_n\cdot m + m^2$

$c_{n+1}^2 - 5$中不一定會被c_n整除的部分為$m^2 - 5$。

以下為c_3~c_7的$m^2 - 5$

$c_3 = 11 = 2\times4 + 3$ $\quad 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4 = 1\times4$

$c_4 = 29 = 2\times11 + 7$ $\quad 7^2 - 5 = 49 - 5 = 44 = 4\times11$

$c_5 = 76 = 2\times29 + 18$ $\quad 18^2 - 5 = 324 - 5 = 319 = 11\times29$

$c_6 = 199 = 2\times76 + 47$ $\quad 47^2 - 5 = 2209 - 5 = 2204 = 29\times76$

$c_7 = 521 = 2\times199 + 123$ $\quad 123^2 - 5 = 15129 - 5 = 15124 = 76\times199$

由上述算式導出第二組遞迴式

$\{c_1 = 1, c_2 = 4, c_{n+2} = 2\cdot c_{n+1} + \sqrt{c_n\cdot c_{n+1} + 5}, n \in N$

證明 : 1,4,11,29,76...數列

$$\begin{cases} a_0 = 0\,;\,a_1 = 1 \\ a_i = 3a_{i-1} - a_{i-2} \end{cases}$$

$a_1=1$

$a_2=4$

$a_3=3a_{2-1}$

$a_4=3a_{3-4}$

$a_5=3a_{4-11}$

$a_6=3a_{5-29}$

$a_n=3an-1-a_{n-2}$......以累加法得出

利用數學歸納法

$(\text{i}) = \sum_{\text{åè}0}^{\text{é}} \text{a}_{\text{å}} \cdot \text{x}^{\text{å}} \qquad (n \geq 3)$

$\frac{\text{A(ë)}-\text{[í}-\text{[ı}\cdot\text{ë}}{\text{ë}} = \frac{\text{A(ë)}}{\text{ë}} = \sum_{\text{åè)}}^{\text{é}} \text{a}_{\text{å}} \cdot \text{x}^{\text{å}-)}$ ......為$\text{a}_{\mathbf{i}-)}$

$\frac{\text{rA(ë)}}{\text{ë}} - \text{A(x)} = \frac{\text{A(ë)}-\text{ë}}{\text{ë}\backslash}$......為$\text{a}_{\mathbf{i}}$

$= (3\text{a}_{)} \cdot \text{x}^0 + 3\text{a}_2 \cdot \text{x}^{)} + 3\text{a}_{\mathbf{r}} \cdot \text{x}^2 + \cdots + 3\text{a}_{\mathbf{i}-)} \cdot \text{x}^{\mathbf{i}} + \cdots)$

$-(\text{a}_0 \cdot \text{x}^0 + \text{a}_{)} \cdot \text{x}^{)} + \text{a}_2 \cdot \text{x}^2 + \cdots + \text{a}_{\mathbf{i}} \cdot \text{x}^{\mathbf{i}} + \cdots)$

$= (3\text{a}_{)} - \text{a}_0)\text{x}^0 + (3\text{a}_2 - \text{a}_{)})\text{x}^{)} + (3\text{a}_{\mathbf{r}} - \text{a}_2)\text{x}^2 + \cdots + (3\text{a}_{\mathbf{i}-)} - \text{a}_{\mathbf{i}})\text{x}^{\mathbf{i}}$

......以上段橫式中用 x 項相同之性質合併

$= \text{a}_2 \cdot \text{x}^0 + \text{a}_{\mathbf{r}} \cdot \text{x}^{)} + \text{a}_{\text{m}} \cdot \text{x}^2 + \cdots + \text{a}_{\mathbf{i}-2} \cdot \text{x}^{\mathbf{i}} + \cdots$

$3\text{x} \cdot \text{A(x)} - \text{x}^2 \cdot \text{A(x)} = \text{A(x)} - \text{x}$......為x 倍之$\text{a}_{\mathbf{i}} = 3\text{a}_{\mathbf{i}-)} - \text{a}_{\mathbf{i}-2}$

$\Rightarrow A(x)(3x - x^2 - 1) = -x$

$\Rightarrow A(x)(x^2 - 3x + 1) = x$

$A(x) = \frac{x}{1-3x+x^2}$……得出$A(x)$

$(ii)A(x) = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}$

$= (3^0x^0 + 3^1x^1 + 3^2x^2 + \cdots + 3^nx^n + \cdots)$

$-(2^0x^0 + 2^1x^1 + 2^2x^2 + \cdots + 2^nx^n + \cdots)$

$= (3^0 - 2^0)x^0 + (3^1 - 2^1)x^1 + \cdots + (3^n - 2^n)x^n + \cdots$

$\Rightarrow a_n = 3^n - 2^n$

陸、結論

一、我們在假設(一)中，證明了 a,b 不為 3 的倍數。

二、在假設(二)中，結合在假設(一)中推得 a,b 不為三的倍數，

得知如$b = 3n + 2$ 則 $k_1 = 3m + 1$ 且$b = 3n + 1$則 $k_1 = 3m + 2$同理得$a = 3n + 2$ 則 $k_2 = 3m + 1$ 且$a = 3n + 1$ 則 $k_2 = 3m + 2$ 綜合上述二敘述推得$b + k_1|3 \land a + k_2|3$

三、而在假設(三)中，我們知道$a = 5$ 共有四組解。

四、由$\begin{cases} c_1 = 1, c_2 = 4 \\ c_{n+2} = \frac{c_{n+1}^2-5}{c_n} \end{cases}, n \in N$推得$c_{n+2}$為有理數

而$\begin{cases} c_1 = 1, c_2 = 4 \\ c_{n+2} = 2 \cdot c_{n+1} + \sqrt{c_n \cdot c_{n+1} + 5} \end{cases}, n \in N$推得$c_{n+2}$為正整數或無理數

綜合上述二敘述得知c_{n+2}必為正整數。

推得$\begin{cases} a^2 - 5 = b \cdot k_1 \\ b^2 - 5 = a \cdot k_2 \end{cases}$有無限多組正整數解。

五、遞迴關係式，$a_i = 3a_{i-1} - a_{i-2}$。

柒、討論

我們透過人工計算初始值，用 PyThon 及 Google 試算表計算出至少有 15 組正整數解，而用二條二階遞迴式得知有無限多組正整數解。

雖然找出了解的部分關係及重複出現值的遞迴關係，但沒能找到所有的解與遞迴式的一般式而深感惋惜。而 PyThon 這個電腦語法仍有很多功能我們沒使用，或許有辦法直接求二次不定方程式的值。

捌、參考資料

國立台灣科學教育館

《科學研習月刊 56 卷 12 期 森棚教官的數學題：〈互相牽制〉》

https://www.ntsec.gov.tw/user/Article.aspx?a=3479

PyThon 官網

https://www.python.org/

【評語】030416

本作品研究某個特定二階不定方程式正整數解的問題。作者藉由程式的輔助得出一連串的解，觀察這些解，找尋規律，藉助一些分析的手法說明解可能的形式，並給出了有系統構造一序列的解的方法。可惜的是結果稍嫌薄弱， 論證也不夠完整且展望的部分有些弱， 整個作品有許多改進的空間. 但作者立意良好，目標明確， 能夠從觀察開始，一步步分析問題，已掌握了基本的研究精神， 值得嘉許.

作品簡報

兄弟你說我來求

作品編號：030416

作品組別：國中組

作品科別：數學科

Introduction

此研究之目的為探討二階不定方程式解之關係與PyThon程式解方程式。

我們從找出部分初始值開始，再找出遞迴關係及一般式。並提出假說，找出除了遞迴式與一般式以外的其他關係。內容包括：

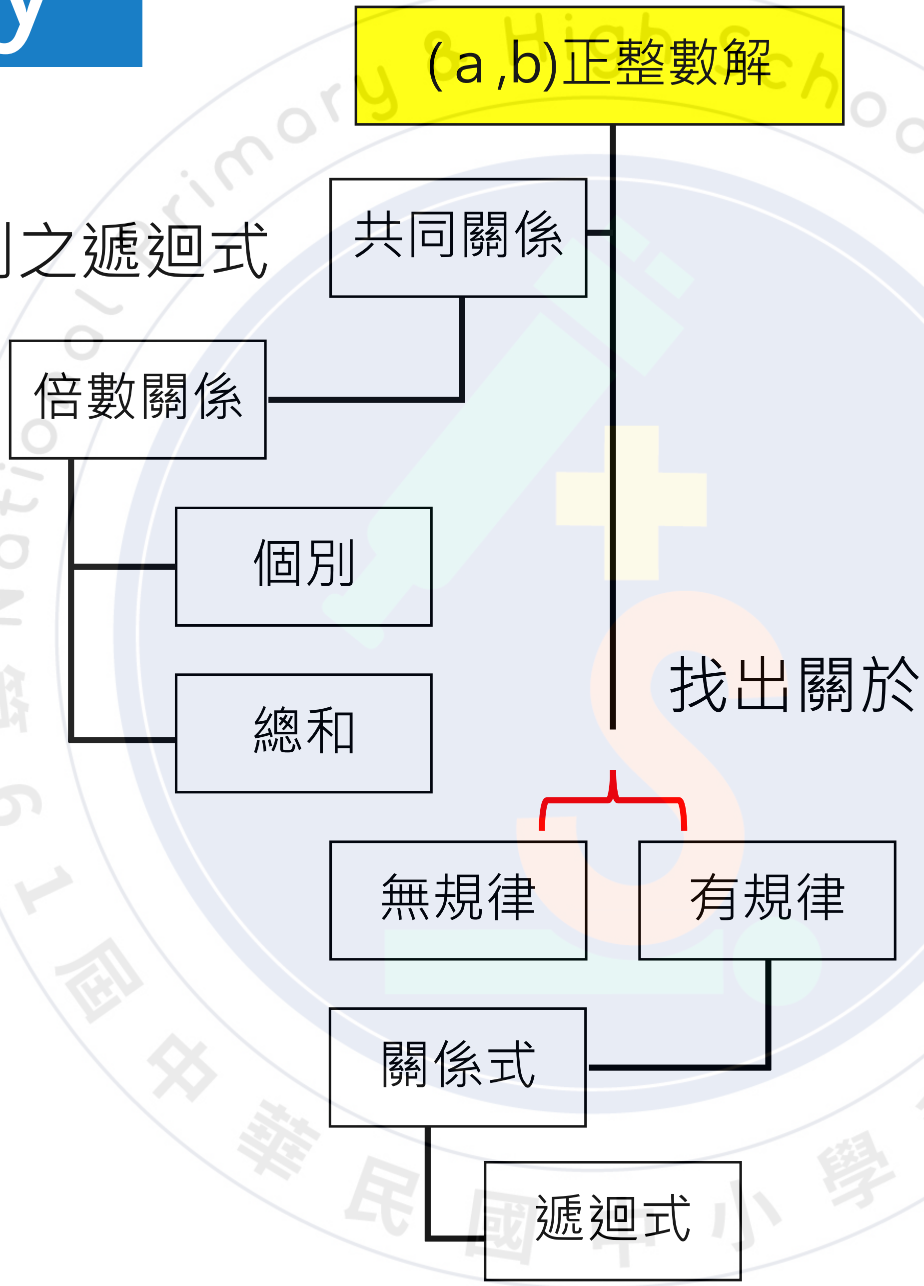
一、$\begin{cases} a^2 - 5 = b \cdot k_1 \\ b^2 - 5 = a \cdot k_2 \end{cases}$ 的正整數起始解，及一組解中每個值的相互關係。

二、找出關於多組解的關係。

研究過程中發現許多國中課本沒提到的著名的數學特有名詞與本研究相關，如:費馬小定理、模數(mod)、丟番圖方程式、牛頓一次因式檢驗法。

Our History

$$\begin{cases} a^2 - 5 = b \cdot k_1 \\ b^2 - 5 = a \cdot k_2 \end{cases}$$ 的正整數解



找出重複數值的數列之遞迴式

找出遞迴式之一般式

找出關於遞迴式解的正確假說

PyThon程式驗證

探討: a² - 5是b的倍數，而且b² - 5是a的倍數，正整數(a ,b)解的特性。

代入法求解

代入法找出正整數(a ,b)，讓a² - 5是b的倍數，而且b² - 5是a的倍數。

先將題目找出多少組正整數(a ,b)，讓a² - 5是b的倍數，而且b² - 5是a的倍數，轉譯為以下聯立方程式。

求$\begin{cases} a^2-5=b\cdot k_1 \\ b^2-5=a\cdot k_2 \end{cases}$的正整數解，$a,b,k_1,k_2 \in^+$ ，$a,b \geq 3$。

a	b	k_1	k_2	$a+b$	$\lvert a-b\rvert$	k_1+k_2	$\lvert k_1-k_2\rvert$
4	11	1	29	15	7	30	28
5	5	4	4	10	0	8	0
5	10	2	19	15	5	21	17
5	20	1	79	25	15	80	78
10	95	1	902	105	85	903	901
11	29	4	76	40	18	80	72
20	395	1	7801	415	375	7802	7800
29	76	11	199	105	47	210	188
55	755	4	10364	810	700	10368	10360
110	205	59	382	315	95	441	323
…	…	…	…	…	…	…	…

從表格中之數據做出以下假設

1. (a,b)正整數解有無限多組解。
2. $a+b$為5的倍數。
3. a、b各與3互質。
4. 這類問題若有無限多組正整數解，所有的解一定可以由(一個或多個)二階的線性遞迴數列的初始值對應的是一組基本解。
6. 利用Markoff Equation推廣的不定方程做相關的討論。（尚未完成）

Idea

定理一 若a^2-5是b的倍數且b^2是a的倍數，則正整數a、b各與3互 質。

證明：若a^2-5是b的倍數且b^2-5是a的倍數。a與3互質。同理可證，b與3互質

定理二 若a^2-5是b的倍數且b^2-5是a的倍數，則a^2≡1(mod 3) 且b^2≡1(mod 3)(a、b∈N)

證明：由定理一可知，正整數a、b各與3互質。

探討k_1與k_2的關係：假設$k_1 = k_2$

∵ 5為質數且a^2-5>0 (k_1 、$x \in z^+$) ∴ a- k_1=1， x=5

a=5，k_1=4 唯一解

(a ,b) = (5 ,5) ， k_1=4 ， k_2=4

探討k_1與k_2的關係

故當 $k_1 = k_2$時，$\begin{cases} a^2 - 5 = b \cdot k_1 \\ b^2 - 5 = a \cdot k_2 \end{cases}$ 有唯一解

$(a\,,b\,) = (5\,,5\,)$，$k_1 = 4$ ，$k_2 = 4$

如果 $k_1 \neq k_2$，$\begin{cases} a^2 - 5 = b \cdot k_1 \\ b^2 - 5 = a \cdot k_2 \end{cases}$ 則有無限多組解

PyThon程式解方程式

找出多少組正整數(a ,b)，a^2-5是b的倍數，而且b^2-5是a的倍數，係利用PyThon程式解方程式去求解，如下表所示。

編號	a	b	k_1	k_2
1	4	11	1	29
2	5	5	4	4
3	5	10	2	19
4	5	20	1	79
…	…	…	…	…

main.py

```python
from scipy.optimize import fsolve
def solve_function(unsolved_value):
  a,b,k1,k2=unsolved_value[0],unsolved_value[1],
  unsolved_value[2],unsolved_value[3]
  return [
      a**2-5-k1*b,
      b**2-5-k2*a,
      a-4,
      b-11,
  ]
solved=fsolve(solve_function,[0,0,0,0])
print(solved)
print("Program done!")
```

Console　Shell

```
[ 4. 11.  1. 29.]
Program done!
```

PyThon程式解方程式

由上述關係中得知這些數值出現有一定規律 $k_2 \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow k_1$ 將這些數值提出，我們找到一組遞迴數列

$$\begin{cases} c_1 = 1, c_2 = 4 \\ c_{n+2} = \dfrac{{c_{n+1}}^2 - 5}{c_n}, n \in N \end{cases}$$

依序帶入k_2 、 b 、 a 、 k_1，得到下表

在(a ,b)解的列表，序號1到13為在表三推論得知。

且目前得出的(a ,b)解亦滿足我們在一開始的直觀假設：

1. a+b為5的倍數
2. a 、 b與3互質。
3. $a^2 \equiv 1(mod\ 3)$且$b^2 \equiv 1(mod\ 3)$

並從表中，找到部份解的規律性，列出如表四：

a^2-5是b的倍數， b^2-5是a的倍數， (a ,b)遞迴關係特殊解

編號	a			
1	4			
2	11			
8	29			
10	76			
12	199			
13	521	1364	199	3571
…	…	…	…	…

編號	a	b	k_1	k_2
C1	4	11	1	29
C2				
C3				
C4				
C5				
C6				
C7				
C8				
C9				
C10				
C11				
C12				
C13				
C14				
C15				
…	…	…	…	…

探討a^2 −m是b的倍數，而且 $b^2 - m$是a的倍數，正整數(a ,b)解的特性。

$$\begin{cases} a^2 - m = b \cdot k_1 \cdots (1) \\ b^2 - m = a \cdot k_2 \cdots (2) \end{cases}$$ a ,b , k_1,k_2 $\in^+$ a，b ≥ 3。

(1)-(2)得$a^2 - b^2 = -k(a-b)$

$(a+b)(a-b) = -k(a-b) \cdots (3)$

$\boldsymbol{a = b}$

(a ,b)顯然為方程式的解，由(1)$a^2 - m = k_1 a$，$a(a-k_1) = m$

$\boldsymbol{k_1 = k_2}$

若a=b ，m為質數，則(a ,b)= (m , m) ，$k_1 = k_2$=m-1 唯一解。

若a=b ，m為合數則(a ,b)= $\left(\frac{k_1\sqrt{{k_1}^2+4m}}{2}, \frac{k_1\sqrt{{k_1}^2+4m}}{2}\right)$ ，

${k_1}^2 + 4m$為完全平方數。

若a≠ b，則(a ,b)無解。

探討a^2-m是b的倍數，而且 b^2-m是a的倍數，正整數(a ,b)解的特性。

$$\begin{cases} a^2-m=b\cdot k_1\cdots(1) \\ b^2-m=a\cdot k_2\cdots(2) \end{cases}$$ a ,b , k_1,k_2 $\in^+$ a，b$\geq$ 3。

(1)-(2)得$a^2-b^2=-k(a-b)$

$(a+b)(a-b)=-k(a-b)\cdots(3)$

$\boldsymbol{a=b}$

(a ,b)顯然為方程式的解，由(1)$a^2-m=k_1a$，$a(a-k_1)=m$

$\boldsymbol{k_1=k_2}$

若a=b ，m為質數，則(a ,b)= (m , m) ，$k_1=k_2$=m-1 唯一解。

若a=b ，m為合數則(a ,b)= $\left(\frac{k_1\sqrt{{k_1}^2+4m}}{2},\frac{k_1\sqrt{{k_1}^2+4m}}{2}\right)$，

${k_1}^2+4m$為完全平方數。

若a$\neq b$，則(a ,b)無解。

探討a^2 −m是b的倍數，而且 $b^2 - m$是a的倍數，正整數(a ,b)解的特性。

$\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$

若a有正整數解，則a的值最大可能為$|m^2 - m{k_1}^2|$

因為可知若k_1有正整數解，則k_1的最大值為$(m^6 - 2m^2 + 1)$

$$C_3 = 11 = 2 \times 4 + 3$$

$$3^2 - 5 = 9 - 5 = 4 = 1 \times 4$$

$$C_4 = 29 = 2 \times 11 + 7$$

$$7^2 - 5 = 49 - 5 = 44 = 4 \times 11$$

$$C_5 = 76 = 2 \times 29 + 18$$

$$18^2 - 5 = 324 - 5 = 319 = 11 \times 29$$

$$C_6 = 199 = 2 \times 72 + 47$$

$$47^2 - 5 = 2209 - 5 = 2204 = 29 \times 76$$

$$C_7 = 521 = 2 \times 199 + 123$$

$$123^2 - 5 = 15129 - 5 = 15124 = 76 \times 199$$

$$(a, b) = \left({k_1}^2 - 1, \frac{\text{[illegible]}}{k_1}\right)$$

當$m > 1$時，$-m^6 + 2m^3 - 1 < 0$

藉由$\begin{cases} k_2 = \dfrac{m^3{k_1}^6 - 3m^4{k_1}^4 + (3m^5 - 2m^2){k_1}^2 - (m^6 - 2m^3 + 1)}{{k_1}^2} \\ a = m{k_1}^2 - m^2 \\ b = \dfrac{a^2 - m}{k_1} \end{cases}$

進而可推論k_2、a、b的值為有限個。可得以下推論 當$m < {k_1}^2$，$a = m{k_1}^2 - m^2$為聯立方程式的解時，

$1 \leq k_1 \leq m^6 - 2m^3 + 1$。

在表3中，發現到第15組之前的解之值都為正整數。但遞迴式為分數型態，極小機率會為正整數，故我們便思考為什麼c_{n+1}會被c_n整除。

定理三 $\{c_1 = 1, c_2 = 4\ c_{n+2} = 2 \cdot c_{n+1} + \sqrt{c_n \cdot c_{n+1} + 5}, n \in N$

為了證明$c_{n+2} = \frac{{c_{n+1}}^2 - 5}{c_n}$必為正整數，故我們將$c_{n+1}$分解得$2 \cdot c_n + m$($m$為偏差值)，

平方後為$4 \cdot {c_n}^2 + 4 \cdot c_n \cdot m + m^2$

${c_{n+1}}^2 - 5$中不一定會被c_n整除的部分為$m^2 - 5$。

以下為$c_3 \sim c_7$的$m^2 - 5$

結論與探討

1. a^2-5是b的倍數，而且b^2-5是a的倍數，正整數(a,b)為

$\begin{cases} a^2-5=k_1b \\ b^2-5=k_2a \end{cases}$，$a$、$b$、$k_1$、$k_2\in Z^+$的解。

(1) 當$k_1=k_2$時，有唯一解$(a,b)=(5,5)$，$k_1=k_2=4$

(2) 當$k_1\neq k_2$，若a有解，則a為$|25-5{k_1}^2|$的正因數。

$k_2=\frac{a^4-10a^2+25-5{k_1}^2}{{k_1}^2a}$、$b=\frac{a^2-5}{k_1}$。

(3) 若$a=|5{k_1}^2-25|$時有解，則k_1的最大值為15376。

(4) 正整數(a,b)無限多組解。

(5) a、b各與3互質。

(6) $a^2\equiv 1(mod\ 3)$且$b^2\equiv 1(mod\ 3)$。

2. a^2-m是b的倍數，而且b^2-m是a的倍數，正整數(a,b)為

$\begin{cases} a^2-m=k_1b \\ b^2-m=k_2a \end{cases}$，$a$、$b$、$m$、$k_1$、$k_2\in Z^+$的解。

(1) 當$k_1=k_2$時，

若$a=b$，m為質數，則$(a,b)=(m,m)$，$k_1=k_2=m-1$唯一解。

若$a=b$，m為合數，則$(a,b)=(\frac{k_1+\sqrt{{k_1}^2+4m}}{2},\frac{k_1+\sqrt{{k_1}^2+4m}}{2})$，

${k_1}^2+4m$為完全平方數。

若$a\neq b$，則(a,b)無解。

(2) 當$k_1\neq k_2$時，解$a^4-2ma^2-{k_1}^2k_2a+(m^2-m{k_1}^2)=0$。

a若有解，必為$|m^2-m{k_1}^2|$的因數，其最大值為$|m^2-m{k_1}^2|$。

(3) 正整數(a,b)無限多組解。

(4) 若$a=|m^2-m{k_1}^2|$時有解，則k_1的最大值為$|m^6-2m^3+1|$。

3.透過PyThon程式解方程式找出「a^2-m是b的倍數，而且b^2-m是a的倍數」正整數(a,b)解的演算法與程式解方程式。

4.遞迴關係式，$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$。

References

1.國立台灣科學教育館

2.《科學研習月刊56卷12期 森棚教官的數學題：〈互相牽制〉》

3.PyThon官網