中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030415

從莫比烏斯環探討 k 股 n 葉結

學校名稱：桃園市立中興國民中學

作者：	指導老師：
國二 邱奕勝 國二 孫湘淳	張怡雯 李慧玲

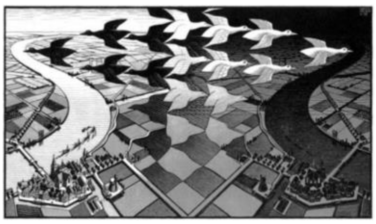
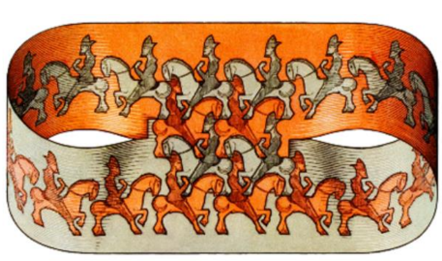
關鍵詞：莫比烏斯環、葉結、數論

摘要

莫比烏斯環是一種只有一個面和一條邊的曲面，可透過紙條自轉半圈製作出來，本研究的出發點為探討紙環在不同的旋轉圈數下，紙條邊緣的結構，並將其延伸到葉結。因紙條會限制自轉的圈數，因此我們利用水管模擬紙條的邊緣，得出自轉圈數×股數=葉數，又因水管有固定長度，導致在不同的股數與自轉圈數下，圖形不一致，因此我們推廣至討論繩子在圓上等分點的繞法，將經過的等分點記錄成迴圈數列，並改寫成同餘數列以利探討同餘之等價關係。本研究旨在證明可以形成 k 股 n 葉結時，k 與 n 必須互質，反之亦成立，又對於所有大於等於 3 的整數 n，必有 $n-1$ 股 n 葉結，故 n 葉結一定存在。最後進一步探討葉結立體結構的幾何性質以及在三維空間中的參數式。

壹、 研究動機

在暑假營隊的鑲嵌課程中，老師介紹很多荷蘭版畫藝術家艾雪(Escher)的鑲嵌作品，包含「白天與黑夜」、「蜥蜴」、「騎士(兵)」，如下表，其中我們對「騎士(兵)」非常好奇，畫中環繞的帶子給人一種無止境循環的感覺，在帶子上的騎士不斷的向前行走，沒有終點，在老師的講解下，我們得知這個神奇的帶子就是莫比烏斯環，它是一種只有一個面和一條邊界的曲面。

		
白天與黑夜	蜥蜴	騎士(兵)

圖片來源：艾薛爾鑲嵌藝術-非想非非想數學網，檢自：http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/2013-09-30-05-53-19

之後，在親職教育日時，學長姊帶領家長體驗莫比烏斯環的課程，利用紙條旋轉不同圈數後把兩端黏上，接著從紙條寬度的二分之一、三分之一處剪一圈，觀察得到的結果，我們發現有些情況下會得到兩個環，有些只會得到一個環，於是便好奇在什麼曲面結構下會剪出什麼個數的環，思考其是否僅有此唯一型態，又或者是有其它變化，因而開始了此次的研究。

貳、　研究目的

一、利用紙條製作自轉指定圈數的紙環，觀察紙條邊緣的結構，初步探討紙環與葉結的關聯。

二、觀察水管自轉圖，討論可以形成葉結需具備的結構，及股數、葉數、自轉圈數三者之間的關係式。

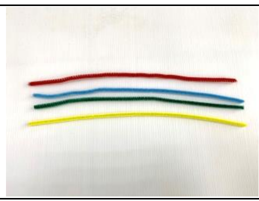
三、利用坐標表示水管自轉圖中內圈與外圈上的點、相接處、上下交疊處在水管相接圖上的相對位置。

四、進一步討論繩子在圓上等分點的繞法，將繩子經過的等分點之編號，記錄成迴圈數列。

五、討論同餘之等價關係將迴圈數列改寫成同餘數列，觀察形成 k 股 n 葉結時，k 與 n 的關係與性質並加以證明。

六、探討葉結立體結構的幾何性質，包含上下交疊、對稱、旋轉等性質，並參考環面紐結寫出符合本研究之 k 股 n 葉結的參數式。

參、　研究設備及器材

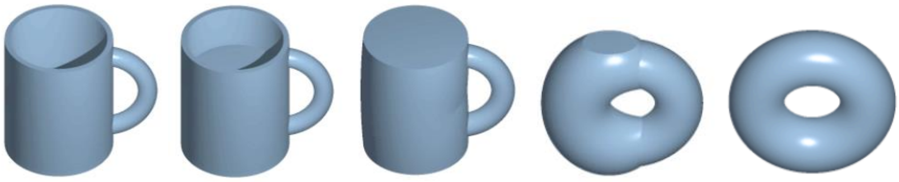
			
紙條	塑膠管	毛根	尼龍繩
			
膠帶	剪刀	附加 AMA 簡報	GeoGeBra 幾何軟體

肆、　文獻探討

一、介紹莫比烏斯環

莫比烏斯環為一僅有一個面（表面）和一條邊界的曲面，是由德國數學家、天文學家莫比烏斯和約翰·李斯丁在 1858 年獨立發現的，這個結構可以用一個紙帶旋轉半圈，再把兩端黏上之後輕而易舉地製作出來。[1]

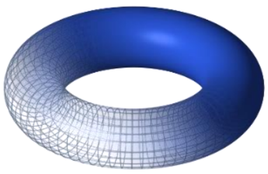
莫比烏斯環是一種重要的拓撲學結構。拓撲學是由幾何學與集合論裡發展出來的學科，研究空間、維度與變換等概念，其中若兩物件在連續變化（如拉伸或彎曲，但不包括剪開或黏合）下維持不變，則稱為拓撲等價。[2]



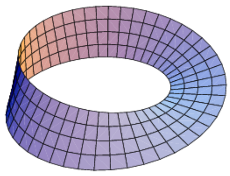
一個杯子和一個麵包圈（實心環面）是拓撲等價

孔是一種只能通過切割和黏合來實現數量增減的性質，這一性質叫做物體的「虧格」。莫比烏斯帶和普通雙面圓環都只有一個孔，虧格理論卻不能夠在拓撲學結構上將兩者區分開來。[3]

歐幾里得空間 R^3 中一個曲面是可定向的如果一個二維圖形沿著曲面移動後回到起點不能使它看起來像它的鏡像。否則曲面是不可定向的。[4]



環面是可定向曲面

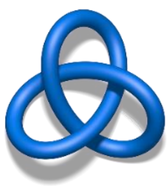


莫比烏斯帶是不可定向曲面

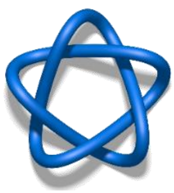
設想一下：在一透明曲面上寫段話，然後在這一曲面上四處行走。一圈下來後，如果那段話還是如此，那麼這一曲面是可定向的。如果一圈下來，文字已經變成了鏡像，只能從右往左讀，那就是不可定向的。莫比烏斯帶具有不可定向性，雙面環則是可定向的，因此莫比烏斯帶和雙面環的拓撲學結構不同。[3]

二、介紹葉結

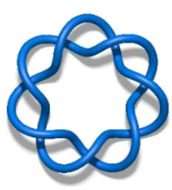
在紐結理論中，三葉結是一種最簡單的非平凡紐結，可以用反手結（單結）連接兩個末端而達成，它是唯一一種有 3 個交叉的紐結。[5]



三葉結



五葉結



七葉結

如果用一段繩子來打結，因為兩端有繩頭可以自由穿梭，所以只要把打結的過程倒著走一遍，繩結便能解開。如果把繩子兩端黏合在一起，繩結就變成一個封閉迴路，產

生了所謂的「紐結」。有些紐結經過適當的操作，可鬆解開成簡單的圓圈，也就是把結解開了。但是有些紐結不管怎麼繞來繞去，在不把繩子扯斷的狀況下，就是無法還原成一個圓圈，最有名又最簡單的「三葉結」便是可以用數學證明解不開的紐結。[6]

三、過去科展之相關研究

查閱過去的科展作品，發現有一些作品與莫比烏斯環有關，像是第 52 屆科展作品名稱：莫比烏斯環和相關紙環[7]，此研究旨在討論莫比烏斯環分割後紙環的改變和變形紙環分割後紙環的相關比較；第 54 屆科展作品名稱：看不見依然存在－莫比烏斯盤的探討[8]，此研究旨在探討莫比烏斯盤的結構與原理。不過較少研究與葉結有關，但還是有與扭結相關的作品，像是第 2016 年台灣國際科展作品名稱：攜手共解圓－扭結理論之探討[9]，此研究從牽手遊戲出發，在兩手相連不分開的情況下，重新變回一個大圓，就像是把結解開一樣，然而我們想做的研究是將莫比烏斯紙環的邊緣結構與葉結做結合，而此葉結是不管怎麼繞來繞去，在不把繩子扯斷的狀況下，就是無法還原成一個圓圈。

伍、　研究過程及方法

一、莫比烏斯環與葉結的關聯

參考書籍動手玩數學[10]，第 16 週單元名稱-莫比烏斯環，我們製作自轉指定圈數的紙環，為了觀察紙條邊緣的結構，因此我們將紙條用不同的顏色呈現，接著將邊緣當作水管，討論頭尾的連接方式，最後與葉結做結合。

(一) 名詞定義：

1. 製作紙環時，會將紙條圍成一個頭尾接起來的環，就像地球繞太陽的軌道一樣，這種環繞我們把它稱作「公轉」。
2. 紙條頭尾接起來的時候，自身也扭轉半圈，這種旋轉則稱作「自轉」。

根據 1.和 2.可得，莫比烏斯環是自轉圈數 0.5、公轉數 1 的環。

3. 將 k 條繩子交纏可成一條「k 股」的繩。
4. 繩子從外側繞至內側(即自轉一圈)會產生一個「葉」。

(二) 自轉 $\frac{1}{2}$ 圈

 圖 1-1	 圖 1-2	 圖 1-3	 圖 1-4
紙條(不分色)	紙條(分色)	水管相接	沿表面$\frac{1}{2}$處剪開

觀察圖 1-2，當紙條自轉$\frac{1}{2}$圈後，紅色頭與藍色尾相接且藍色頭與紅色尾相接，因此若將紙條沿$\frac{1}{2}$處(即紅色與藍色的連接處)剪開，會得到一個大環(如圖 1-4)。

(三) 自轉 1 圈

 圖 2-1	 圖 2-2	 圖 2-3	 圖 2-4
紙條(不分色)	紙條(分色)	水管相接	沿表面$\frac{1}{2}$處剪開

1. 觀察圖 2-2，當紙條自轉 1 圈後，紅色頭與紅色尾相接且藍色頭與藍色尾相接，因此若將紙條沿$\frac{1}{2}$處(即紅色與藍色的連接處)剪開，會得到兩個環。
2. 將紙條邊緣當作繩子，若要形成葉結，繩子必須要滿足從任意點出發皆能一筆畫走完並回到起點，因此由 1.可知自轉 1 圈的莫比烏斯環無法形成葉結。

(四) 自轉$1\frac{1}{2}$圈

 圖 3-1	 圖 3-2	 圖 3-3	 圖 3-4
紙條(不分色)	紙條(分色)	水管相接	兩股三葉結

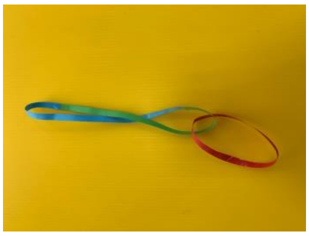
觀察圖 3-2，當紙條自轉$1\frac{1}{2}$圈後，紅色頭與藍色尾相接且藍色頭與紅色尾相接，可以用一條繩子繞出葉結的結構，此葉結為兩股三葉結(如圖 3-4)。

(五) 自轉 2.5 圈

 圖 4-1	 圖 4-2	 圖 4-3	 圖 4-4
紙條(不分色)	紙條(分色)	水管相接	兩股五葉結

觀察圖 4-2，當紙條自轉$2\frac{1}{2}$圈後，紅色頭與藍色尾相接且藍色頭與紅色尾相接，可以用一條繩子繞出葉結的結構，此葉結為兩股五葉結(如圖 4-4)。

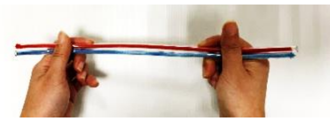
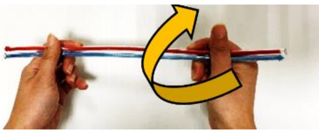
(六) 討論水管個數為 3 的情況

 圖 5-1	 圖 5-2	 圖 5-3	 圖 5-4
紙條(不分色)	紙條(分色)	水管相接	沿表面$\frac{1}{3}$處剪開

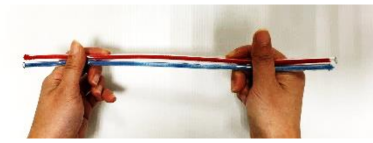
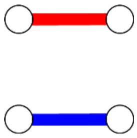
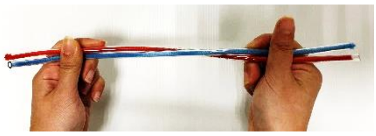
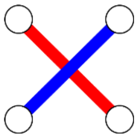
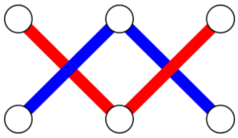
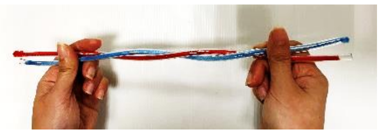
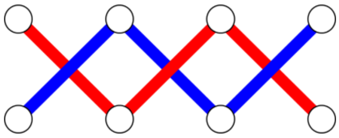
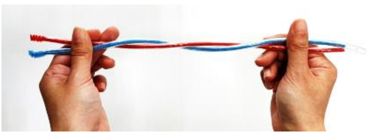
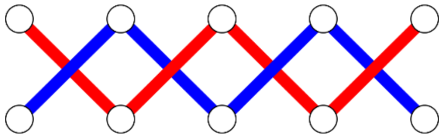
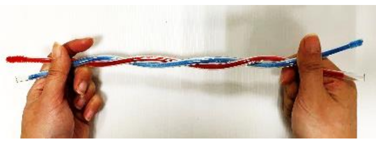
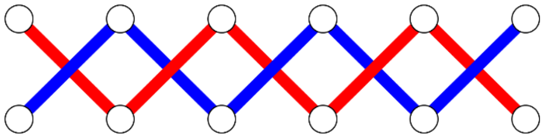
1. 若從莫比烏斯環自轉$\frac{1}{2}$圈的紙環，沿$\frac{1}{3}$處剪開(即紅色與藍色的連接處及紅色與綠色的連接處)，會形成 1 大環+1 小環，大環是由藍色紙條加上綠色紙條，小環則是紅色紙條。
2. 將紙條邊緣當作繩子，若要形成葉結，繩子必須要滿足從任意點出發皆能一筆畫走完並回到起點，由 1.可知沿表面$\frac{1}{3}$處剪開後會形成 1 大環+1 小環，此非葉結的結構，因此我們討論 3 條水管如何連結能一筆畫走完。
3. 我們發現這只是 3 條水管頭尾相結的其中一種情況，因為紙條會限制頭尾的相接點，因此底下我們僅利用水管做進一步討論。

二、水管自轉圖

接下來，我們將水管自轉指定的圈數，拍下照片並畫出對應的示意圖，在照片中，規定左手不動，右手依照順時針方向將水管旋轉，如下圖所示。

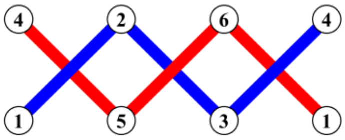
 →  → 

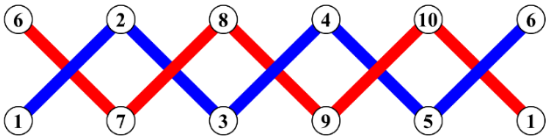
(一) 兩條水管

自轉圈數	照片	示意圖
0		
$\frac{1}{2}$		
1		
$1\frac{1}{2}$		
2		
$2\frac{1}{2}$		

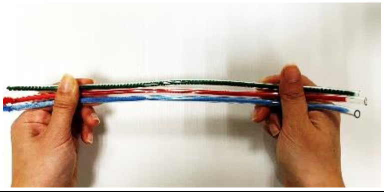
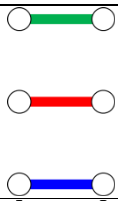
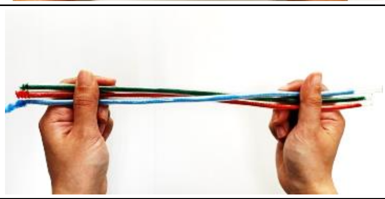
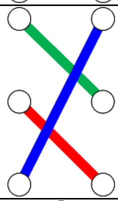
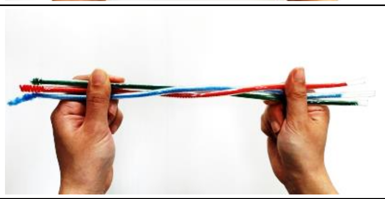
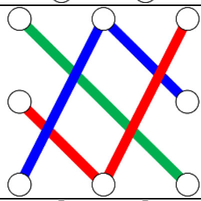
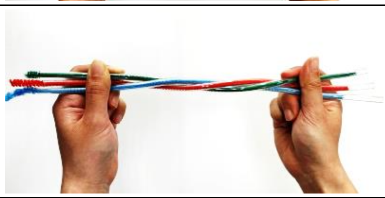
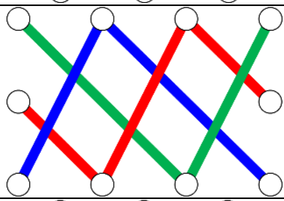
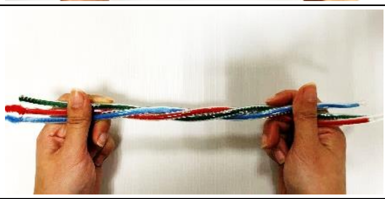
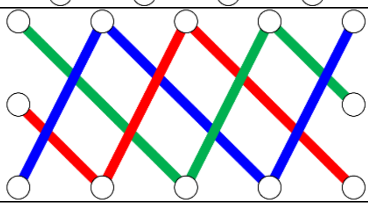
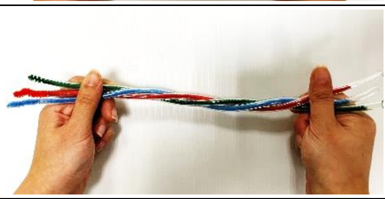
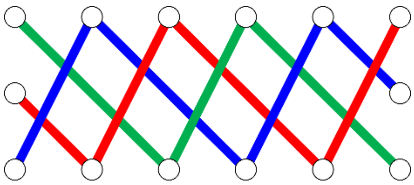
1. 自轉的意思：若兩條水管分別從上排繞到下排、從下排繞到上排，則表示水管自轉了 $\frac{1}{2}$ 圈；若兩條水管分別從上排繞到下排再繞回上排、從下排繞到上排再繞回下排，則表示水管自轉了 1 圈。
2. 水管相接後能否一筆畫走完：當水管相接時，在示意圖中，上排最後一個白色圓圈會接回上排第一個白色圓圈；同理，下排最後一個白色圓圈會接回下排第一個白色圓圈。如果自轉圈數為 0、1、2、…(即整數圈)，則紅色水管接回紅色水管、藍色水管接回藍色水管，形成兩圈，故不能一筆畫走完；如果自轉圈數為 $\frac{1}{2}$ ，雖

然可以一筆畫走完，但是無法形成葉結；如果自轉圈數為$1\frac{1}{2}$，則可依照下左圖中的數字，由小到大一筆畫走完，注意在相接的圓圈中，數字會相同；如果自轉圈數為$2\frac{1}{2}$，則也可依照下右圖中的數字，由小到大一筆畫走完。





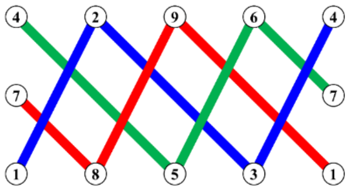
(二) 三條水管

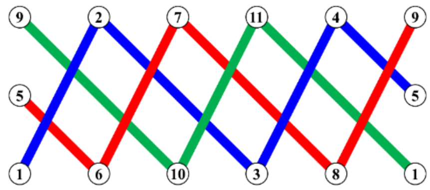
自轉圈數	照片	示意圖
0		
$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$		
1		
$1\frac{1}{3}$		
$1\frac{2}{3}$		

1. 自轉的意思：若三條水管分別從上排繞到中排、中排繞到下排、下排繞到上排，則表示水管自轉了$\frac{1}{3}$圈；若三條水管分別從上排繞到中排再繞到下排、中排繞到

下排再繞到上排、下排繞到上排再繞到中排，則表示水管自轉了$\frac{2}{3}$圈，以此類推。

2. 水管相接後能否一筆畫走完：當水管相接時，在示意圖中，上排最後一個白色圓圈會接回上排第一個白色圓圈；同理，下排最後一個白色圓圈會接回下排第一個白色圓圈，且中排的兩個白色圓圈會相接。如果自轉圈數為 1(即整數圈)，則三條水管會接回同色的水管、形成三圈，故不能一筆畫走完；如果自轉圈數為$\frac{1}{3}$或$\frac{2}{3}$，雖然可以一筆畫走完，但是無法形成葉結；如果自轉圈數為$1\frac{1}{3}$，則可依照下左圖中的數字，由小到大一筆畫走完，注意在相接的圓圈中，數字會相同；如果自轉圈數為$1\frac{2}{3}$，則也可依照下右圖中的數字，由小到大一筆畫走完。





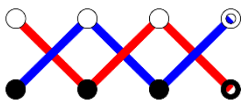
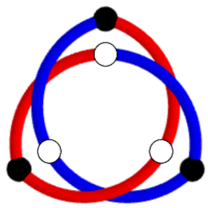
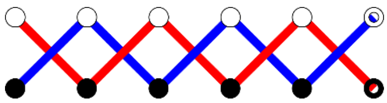
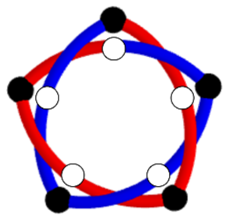
(三) 自轉圈數、股數與葉數之間的關係

自轉圈數×股數=葉數

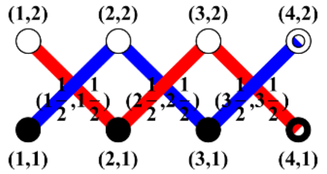
三、水管相接圖

接下來，我們將水管依照指定的自轉圈數轉完後相接，拍下照片，畫出示意圖，並對照自轉示意圖與相接示意圖的相對位置，底下僅呈現可以形成葉結的結構。

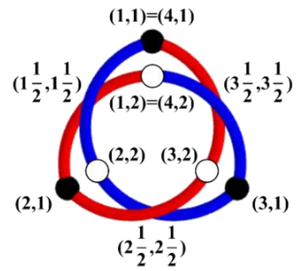
(一) 兩條水管

自轉圈數	自轉照片與示意圖	相接照片	相接示意圖
$1\frac{1}{2}$	 		
$2\frac{1}{2}$	 		

1. 自轉圈數為$1\frac{1}{2}$，自轉示意圖與相接示意圖的相對位置：



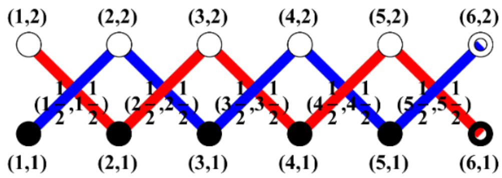
自轉座標示意圖



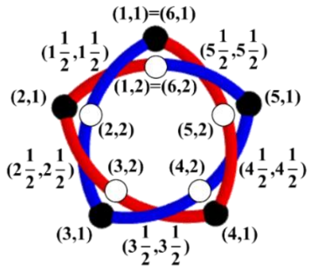
相接座標示意圖

自轉示意圖中，根據點在平面座標上的位置，定義左下角的黑點坐標為(1,1)，依序將其它點標上座標(如左圖)，若將點(4,1)接回點(1,1)、點(4,2)接回點(1,2)，y 座標為 2 的點(白色)留在最內圈，y 座標為 1 的點(黑色)拉至最外圈，且座標不是整數的點為水管上下交疊的地方，則可得到相接示意圖(如右圖)。

2. 自轉圈數為$2\frac{1}{2}$，自轉示意圖與相接示意圖的相對位置：



自轉座標示意圖

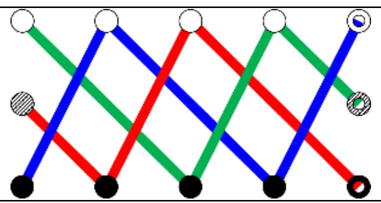
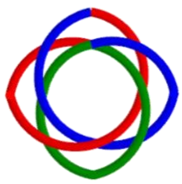
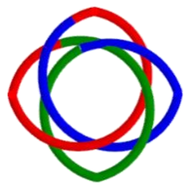


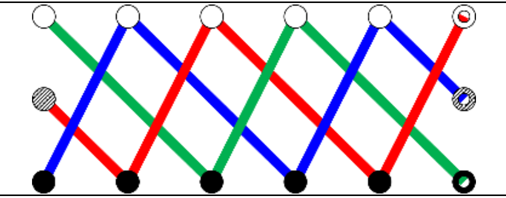
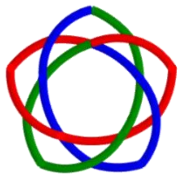
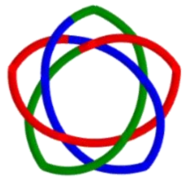
相接座標示意圖

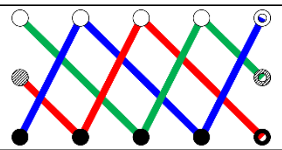
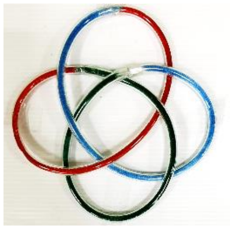
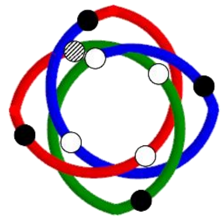
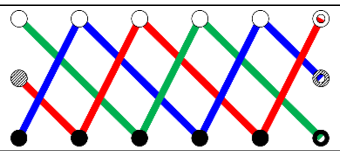
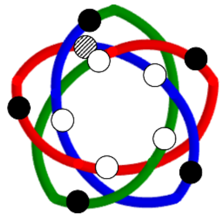
同上 1.，依序將自轉示意圖中所有點標上座標(如左圖)，若將點(6,1)接回點(1,1)、點(6,2)接回點(1,2)，如上述規則，將白色的點留在最內圈，黑色的點拉至最外圈，且座標不是整數的點為水管上下交疊的地方，則可得到相接示意圖(如右圖)。

(二) 三條水管

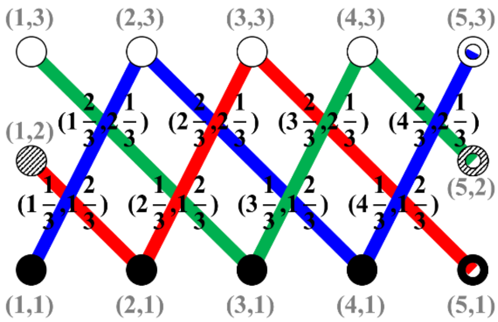
一開始，我們認為的相接圖如下表中的錯誤相接示意圖，但是發現有一些在自轉示意圖中的點，找不到在相接示意圖中的相對位置，原因是因為在錯誤相接示意圖中，三條顏色水管的長度不是相同的，因此正確圖形應該如下表最右欄。

自轉示意圖	錯誤相接示意圖	正確相接示意圖
		

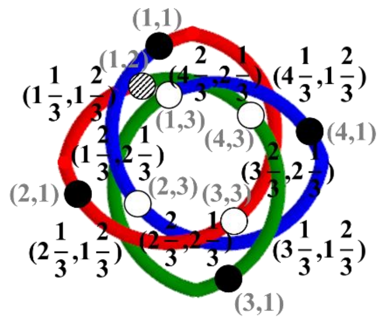
		

自轉圈數	自轉照片與示意圖	相接照片	相接示意圖
$1\frac{1}{3}$	 		
$1\frac{2}{3}$	 		

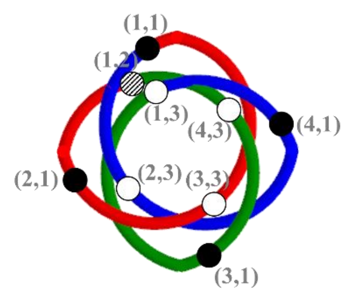
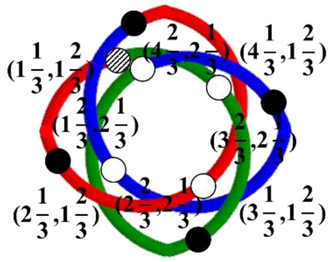
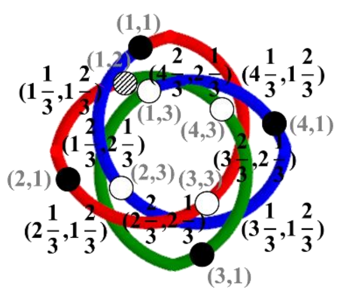
1. 自轉圈數為$1\frac{1}{3}$，自轉示意圖與相接示意圖的相對位置：



自轉座標示意圖



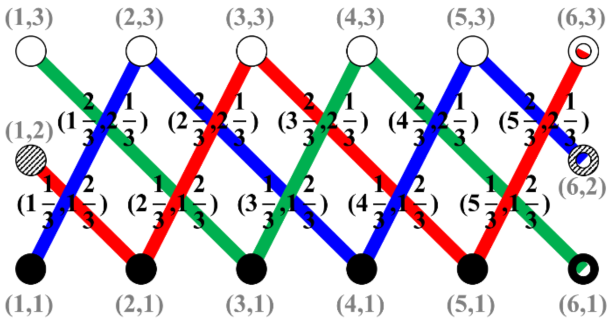
相接座標示意圖

		
整數點(內、外圈+相接處)	非整數點(上下交疊處)	所有點(前兩張圖合併)

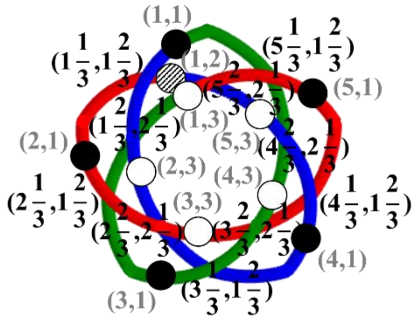
自轉示意圖中，根據點在平面座標上的位置，定義左下角的黑點坐標為(1,1)，依

序將其它點標上座標(如左圖)，若將點(5,1)接回點(1,1)、點(5,2)接回點(1,2) 、點(5,3)接回點(1,3)，y 座標為 3 的點留在內圈，y 座標為 1 的點拉至外圈，且座標不是整數的點為水管上下交疊的地方，則可得到相接示意圖(如右圖)。

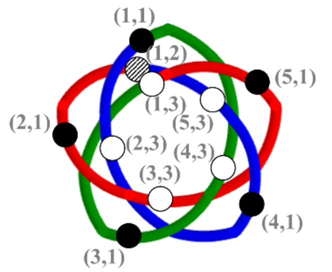
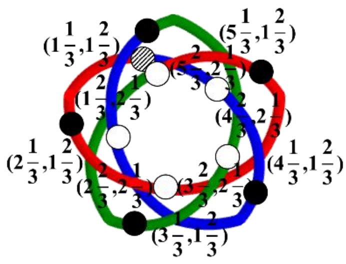
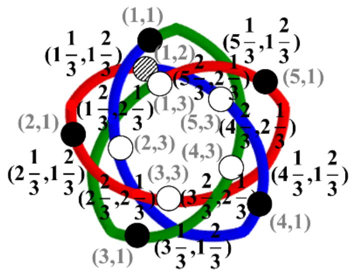
2. 自轉圈數為$1\frac{2}{3}$，自轉示意圖與相接示意圖的相對位置：



自轉座標示意圖



相接座標示意圖

		
整數點(內、外圈+相接處)	非整數點(上下交疊處)	所有點(前兩張圖合併)

自轉示意圖中，根據點在平面座標上的位置，定義左下角的黑點坐標為(1,1)，依序將其它點標上座標(如左圖)，若將點(6,1)接回點(1,1)、點(6,2)接回點(1,2) 、點(6,3)接回點(1,3)，y 座標為 3 的點留在內圈，y 座標為 1 的點拉至外圈，且座標不是整數的點為水管上下交疊的地方，則可得到相接示意圖(如右圖)。

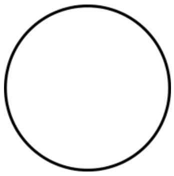
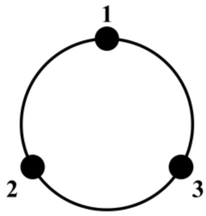
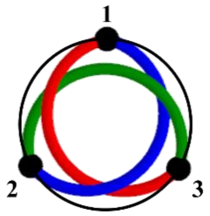
四、圓上等分點

因為水管相接需考量每條顏色的長度要一樣，因此不容易找出相接的精準位置，且在不同的水管數量或不同的自轉圈數下，相接示意圖不一致，故底下將根據圓上等分點做討論，凸顯一致性。

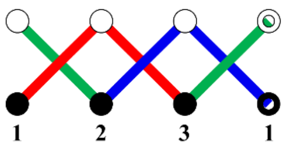
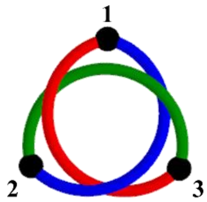
(一) 圓上三等分

在一個圓上，根據起始角度為 90 度，逆時針方向分成三段，標出編號為 1~3

的三個點，想像有一條繩子，要一筆畫繞過所有的點且保持一定的規律，譬如：跳過的點個數固定，討論有哪些情況。

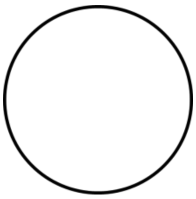
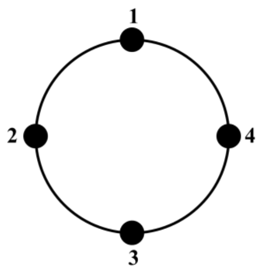
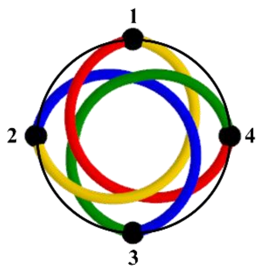
一個圓	圓上分三等分	舉例一筆畫繞法
		

1. 若從 1 出發，先繞到 2，再繞到 3，最後繞回 1，即：1→2→3→1，這樣繞完會形成沒有上下交疊的一圈，無法構成葉結。
2. 若從 1 出發，依照間隔 1 的規律，先繞到 3，再繞到 2，最後繞回 1，即：1→3→2→1，這樣繞完會形成 2 股 3 葉結，並將依序繞過的數字寫成迴圈數列表示，即<1,3,2,1>。

自轉示意圖	相接示意圖	迴圈數列	葉結
		<1,3,2,1>	2 股 3 葉

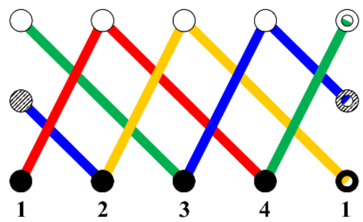
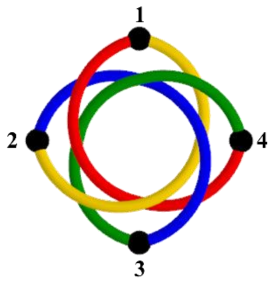
(二) 圓上四等分

在一個圓上，根據起始角度為 90 度，逆時針方向分成四段，標出編號為 1~4 的四個點，討論一筆畫的繞法。

一個圓	圓上分四等分	舉例一筆畫繞法
		

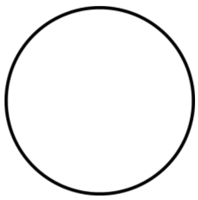
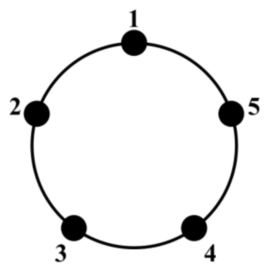
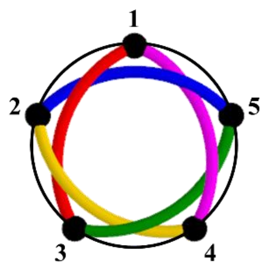
1. 若從 1 出發，先繞到 2，再繞到 3，再繞到 4，最後繞回 1，即：1→2→3→4→1，這樣繞完會形成沒有上下交疊的一圈，無法構成葉結。
2. 若從 1 出發，依照間隔 1 的規律，先繞到 3，接著就會繞回 1，即：1→3→1，這樣繞無法一筆畫繞完所有的點，無法構成葉結。

3. 若從 1 出發，依照間隔 2 的規律，先繞到 4，再繞到 3，再繞到 2，最後繞回 1，即：1→4→3→2→1，這樣繞完會形成 3 股 4 葉結，並將依序繞過的數字寫成迴圈數列表示，即<1,4,3,2,1>。

自轉示意圖	相接示意圖	迴圈數列	葉結
		<1,4,3,2,1>	3 股 4 葉

(三) 圓上五等分

在一個圓上，根據起始角度為 90 度，逆時針方向分成五段，標出編號為 1~5 的五個點，討論一筆畫的繞法。

一個圓	圓上分五等分	舉例一筆畫繞法
		

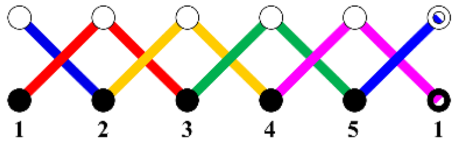
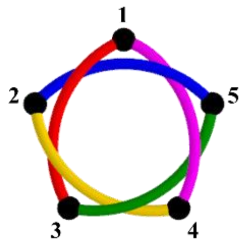
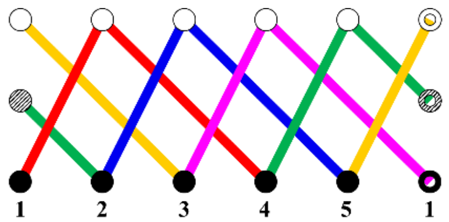
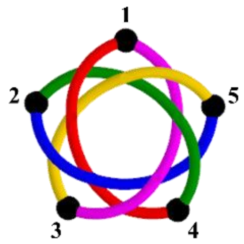
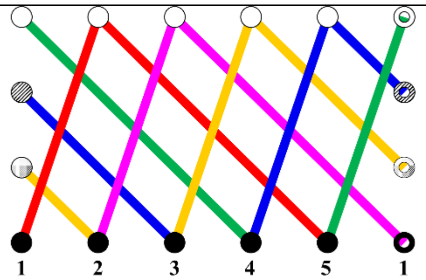
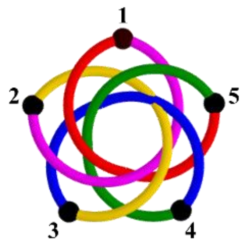
1. 若從 1 出發，先繞到 2，再繞到 3，再繞到 4，再繞到 5，最後繞回 1，即：1→2→3→4→5→1，這樣繞完會形成沒有上下交疊的一圈，無法構成葉結。

2. 若從 1 出發，依照間隔 1 的規律，先繞到 3，再繞到 5，再繞到 2，再繞到 4，最後繞回 1，即：1→3→5→2→4→1，這樣繞完會形成 2 股 5 葉結，並將依序繞過的數字寫成迴圈數列表示，即<1,3,5,2,4,1>。

3. 若從 1 出發，依照間隔 2 的規律，先繞到 4，再繞到 2，再繞到 5，再繞到 3，最後繞回 1，即：1→4→2→5→3→1，這樣繞完會形成 3 股 5 葉結，並將依序繞過的數字寫成迴圈數列表示，即<1,4,2,5,3,1>。

4. 若從 1 出發，依照間隔 3 的規律，先繞到 5，再繞到 4，再繞到 3，再繞到 2，最後繞回 1，即：1→5→4→3→2→1，這樣繞完會形成 4 股 5 葉結，並將依序繞過

的數字寫成迴圈數列表示，即<1,5,4,3,2,1>。

自轉示意圖	相接示意圖	迴圈數列	葉結
		<1,3,5,2,4,1>	2 股 5 葉
		<1,4,2,5,3,1>	3 股 5 葉
		<1,5,4,3,2,1>	4 股 5 葉

五、同餘之等價關係

(一) 定義迴圈數列與同餘數列

1. 迴圈數列：將 k 股 n 葉結的迴圈數列記做 $\langle a_i \rangle_{i=1}^{n+1}$，舉例：2 股 3 葉結的迴圈數列為 $\langle a_i \rangle_{i=1}^{4} =< 1,3,2,1 >$；2 股 5 葉結的迴圈數列為 $\langle a_i \rangle_{i=1}^{6} =< 1,3,5,2,4,1 >$。

   注意：我們將立體結構旋轉與鏡射相同者視為同一種迴圈數列，譬如<3,2,1,3>和<1,2,3,1>都是 2 股 3 葉結，為了統一，我們從 1 出發，按照數字編號順序往逆時針方向繞，所以 2 股 3 葉結的迴圈數列以<1,3,2,1>來表示。

2. 同餘數列：按照以下兩個步驟定義出新的數列，記做同餘數列 $\langle b_j \rangle_{j=1}^{n}$，

   步驟 1：扣掉迴圈數列的首項。

   步驟 2：將迴圈數列剩下的每一項改寫成除以 n 的同餘數，且 $0 \le b_j \le n-1$。

舉例：2 股 3 葉結的同餘數列為 $\left\langle b_j \right\rangle_{j=1}^{3} = <0,2,1>$；2 股 5 葉結的同餘數列為 $\left\langle b_j \right\rangle_{j=1}^{5} = <3,0,2,4,1>$。

3. 圓上等分點個數為 3~8，可以形成葉結的迴圈數列與同餘數列整理如下表：

圓上等分點	迴圈數列 $\left\langle a_i \right\rangle_{i=1}^{n+1}$	同餘數列 $\left\langle b_j \right\rangle_{j=1}^{n}$	k 股 n 葉
3	<1,3,2,1>	<0,2,1>	2 股 3 葉
4	<1,4,3,2,1>	<0,3,2,1>	3 股 4 葉
5	<1,3,5,2,4,1>	<3,0,2,4,1>	2 股 5 葉
	<1,4,2,5,3,1>	<4,2,0,3,1>	3 股 5 葉
	<1,5,4,3,2,1>	<0,4,3,2,1>	4 股 5 葉
6	<1,6,5,4,3,2,1>	<0,5,4,3,2,1>	5 股 6 葉
7	<1,3,5,7,2,4,6,1>	<3,5,0,2,4,6,1>	2 股 7 葉
	<1,4,7,3,6,2,5,1>	<4,0,3,6,2,5,1>	3 股 7 葉
	<1,5,2,6,3,7,4,1>	<5,2,6,3,0,4,1>	4 股 7 葉
	<1,6,4,2,7,5,3,1>	<6,4,2,0,5,3,1>	5 股 7 葉
	<1,7,6,5,4,3,2,1>	<0,6,5,4,3,2,1>	6 股 7 葉
8	<1,4,7,2,5,8,3,6,1>	<4,7,2,5,0,3,6,1>	3 股 8 葉
	<1,6,3,8,5,2,7,4,1>	<6,3,0,5,2,7,4,1>	5 股 8 葉
	<1,8,7,6,5,4,3,2,1>	<0,7,6,5,4,3,2,1>	7 股 8 葉

(二) 同餘數列與股數、葉數的關係

從 1 開始，加上股數(k)後，算出此數除以葉數(n)的同餘數，且介於 0 到 $n-1$ 之間(包含 0 與 $n-1$)；接著再將此同餘數重複剛剛的步驟，直到算出的數字回到 1，最後將每一次得到的同餘數寫下來，就可以得到同餘數列。底下舉幾個例子：

$$\text{2 股 3 葉：}\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & = & 3 & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ 0 & + & 2 & = & 2 & \equiv & 2 & \pmod 3 \\ 2 & + & 2 & = & 4 & \equiv & 1 & \pmod 3 \end{array}$$

加上股數；除以葉數	將同餘數重複步驟，得到同餘數列

$1+\boxed{2}=3\equiv 0\pmod{\boxed{3}}$ $0+\boxed{2}=2\equiv 2\pmod{\boxed{3}}$ $2+\boxed{2}=4\equiv 1\pmod{\boxed{3}}$ 2 股　　3 葉	$1+2=3\equiv \boxed{0}\pmod{3}$ $0+2=2\equiv \boxed{2}\pmod{3}$ $2+2=4\equiv \boxed{1}\pmod{3}$ 同餘數列

3 股 4 葉：
$$\begin{aligned}1+3&=4\equiv 0\pmod 4\\0+3&=3\equiv 3\pmod 4\\3+3&=6\equiv 2\pmod 4\\2+3&=5\equiv 1\pmod 4\end{aligned}$$
；3 股 5 葉：
$$\begin{aligned}1+3&=4\equiv 4\pmod 5\\4+3&=7\equiv 2\pmod 5\\2+3&=5\equiv 0\pmod 5\\0+3&=3\equiv 3\pmod 5\\3+3&=6\equiv 1\pmod 5\end{aligned}$$

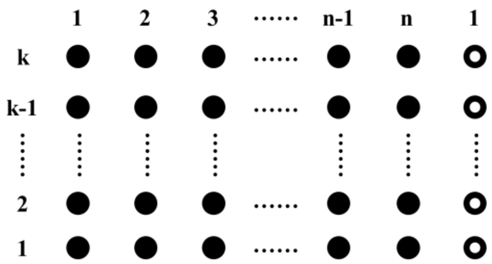
綜合以上，可以得到以下兩個性質：

【性質 1-1】因為圓上等分點每個點都要繞到，故同餘數列的項數為葉數。

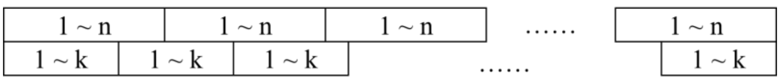
【性質 2-1】同餘數列的數值為除以葉數的所有餘數，且每個餘數只出現一次。

(三) k 股 n 葉結的性質與證明

回顧上述提到的水管自轉圖，k 股 n 葉結會有 n 個圓上等分點且每個圓上等分點都有 k 層，如下圖，其中最右邊的空心點就等於第 1 個圓上等分點，

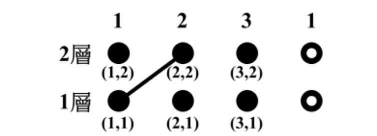
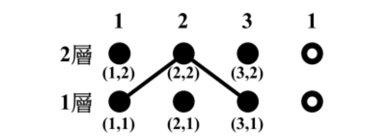
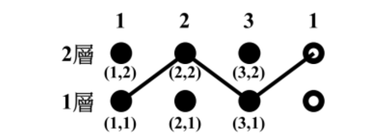


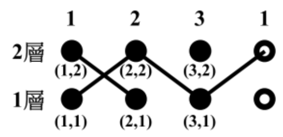
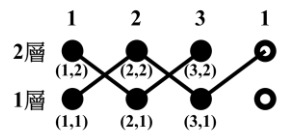
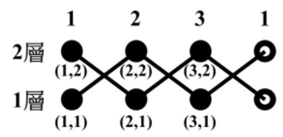
從第 1 層的第 1 個圓上等分點開始繞，即坐標(1,1)，每一次往下一層及下一個等分點繞，繞到第 k 層後再繞回第 1 層；繞到第 n 個等分點後再繞回第 1 個等分點，也就是如果目前繞到(a, b)，下一個點會繞到$(a+1 \pmod n, b+1 \pmod k)$。總共有 $n\times k$ 個點，且每個圓上等分點都會經過每一層，即繩結會一筆畫不重複繞過所有的點。



舉例一：2 股 3 葉

繞過點的順序：(1,1) → (2,2) → (3,1) → (1,2) → (2,1) → (3,2)

(1,1) → (2,2)	(2,2) → (3,1)	(3,1) → (1,2)
		

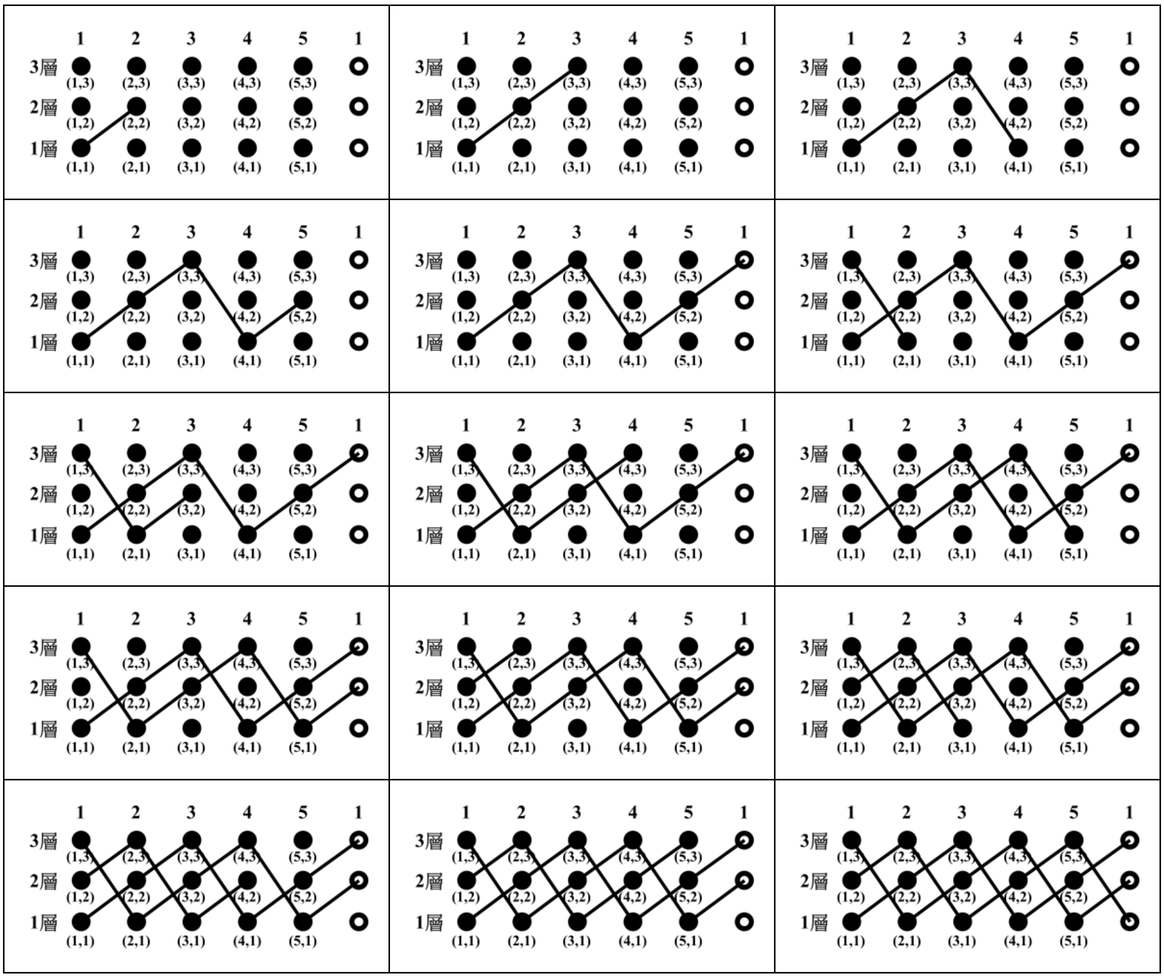
(1,2) → (2,1)	(2,1) → (3,2)	回到起始點
		

紀錄成下表，會發現每個圓上等分點都會經過每一層，譬如下表中的第 3 個等分點，在繞的過程中會先經過第 1 層再經過第 2 層。

圓上等分點 x	1	2	3	1	2	3
層 y	1	2	1	2	1	2

舉例二：3 股 5 葉

繞過點的順序：(1,1) → (2,2) → (3,3) → (4,1) → (5,2) → (1,3) → (2,1) → (3,2) → (4,3) → (5,1) → (1,2) → (2,3) → (3,1) → (4,2) → (5,3)



紀錄成下表，可以看到第 5 個等分點在繞的過程中會先經過第 2 層，再經過第 1 層，最後經過第 3 層，每一層都有繞到。

x	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
y	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

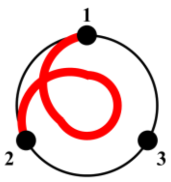
底下將證明此篇研究的兩個重要性質，

【性質 2-1】已知 k、n 為整數滿足 $n>k$ 且 $k\geq 2$、$n\geq 3$，如果可以形成 k 股 n 葉結，則 k 與 n 必須互質；反之亦成立，如果 k 與 n 互質，則可以形成 k 股 n 葉結。

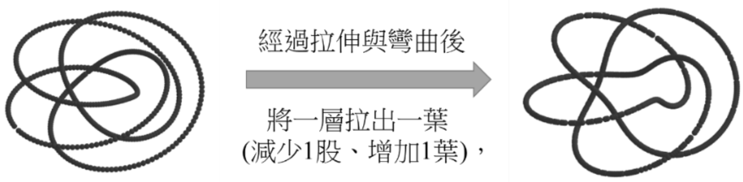
條件說明：$n>k$

舉例：4 股 3 葉，即 k=4、n=3，

觀察圓上等分點的繞法，從 1 開始，依照間隔 3 的規律，會繞到 2，但是過程中會多繞一圈，如下中圖。

同餘數列與股數、葉數的關係	圓上等分點 1 繞到 2	4 股 3 葉平面圖
$1+4=5\equiv 2 \pmod 3$ $2+4=6\equiv 0 \pmod 3$ $0+4=4\equiv 1 \pmod 3$		

將 4 股 3 葉的外層扭曲後向外拉出一葉，可以得到 3 股 4 葉，此具有拓撲等價。



因為當 n 大於 k 時，在圓上等方點繞時會多繞圈數，若將可拉伸的圈數拉開後，會得到其他拓撲等價的葉結結構，因此我們定義 $n>k$。

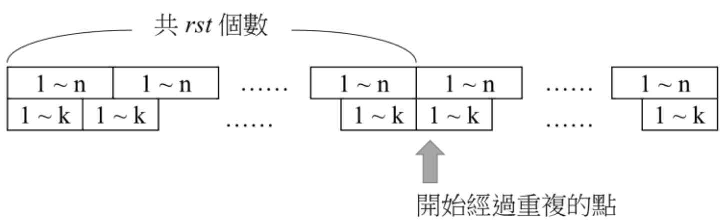
條件說明：$k\geq 2$、$n\geq 3$

如果 k=1，不符合不管怎麼繞來繞去，在不把繩子扯斷的狀況下，無法還原成一個圓圈的葉結結構。又因為 $n>k$ 且 $k\geq 2$，所以 $n\geq 3$。

證明 (⇒)：已知 k、n 為整數滿足 $n>k$ 且 $k\geq 2$、$n\geq 3$，如果可以形成 k 股 n 葉結，則 k 與 n 必須互質。

利用反證法來證明：假設 k 與 n 不互質，令 $\gcd(k,n)=r$，

則可假設 $k=rs$、$n=rt$，其中 $\gcd(s,t)=1$，故 $\operatorname{lcm}(k,n)=rst$，



如果從第 1 層的第 1 個圓上等分點開始繞，在繞到第 rst+1 個點時，繩子就會繞回第 1 層的第 1 個圓上等分點，開始經過重複的點，也就是有一些圓上等分點不會繞到，因此會無法形成 n 葉結。

由反證法得知，如果可以形成 k 股 n 葉結，則 k 與 n 必須互質。■

證明 (⇐)：已知 k、n 為整數滿足 $n>k$ 且 $k\geq 2$、$n\geq 3$，如果 k 與 n 互質，則可以形成 k 股 n 葉結。

計算每一層的第 n 個圓上等分點除以 k 的餘數，可以用如下等式來表示：

$$\begin{array}{ccccc} n & \equiv & r_1 & (\bmod k) & \\ 2n & \equiv & r_2 & (\bmod k) & \\ 3n & \equiv & r_3 & (\bmod k) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \text{，其中 } 0<r_1,r_2,r_3,\ldots,r_{k-2},r_{k-1}<k \text{ ，} \\ (k-2)n & \equiv & r_{k-2} & (\bmod k) & \\ (k-1)n & \equiv & r_{k-1} & (\bmod k) & \\ kn & \equiv & k & (\bmod k) & \end{array}$$

如果上式有兩層除以 k 有相同的餘數，即存在 $i<j<k$，使得 $in\equiv jn \pmod k$，則 $(j-i)n\equiv 0 \pmod k$，因為 k 與 n 互質，所以 $k\,|\,j-i$，但是 $j-i<k$，產生矛盾。

表示在上方 k 條式子中，$r_1,r_2,r_3,\ldots,r_{k-2},r_{k-1}$ 為除以 k 後的所有餘數，且兩兩不重複。根據(三)一開始討論的繞點特性，因為滿足每個圓上等分點都會經過每一層，故可以形成 k 股 n 葉結。■

【性質 2-2】因為一定有 $n-1$ 股 n 葉結，又最小葉結的葉數為 3，故對於所有大於等於 3 的整數 n，n 葉結一定存在。

證明：先證明對於所有大於等於 2 的整數 n，n 與 $n-1$ 必定互質。

方法 1：反證法

如果 n 與 $n-1$ 不互質，令 p 為質數且為兩數的公因數，則 n 與 $n-1$ 可以表示為 $n=ap$、$n-1=bp$，其中 a、b 為正整數，且 $a>b$，將兩數相減得到 $n-(n-1)=ap-bp=(a-b)p>p>1 \;\Rightarrow\; 1>1$，產生矛盾，因此 n 與 $n-1$ 互質。

方法 2：輾轉相除法

拿 n 除以 $n-1$，根據除法原理可得 $n=(n-1)\cdot 1+1$，

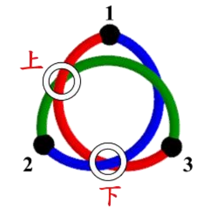
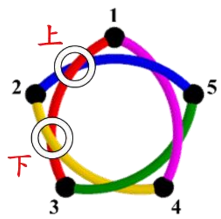
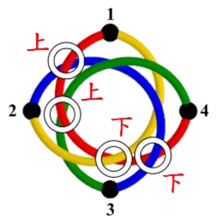
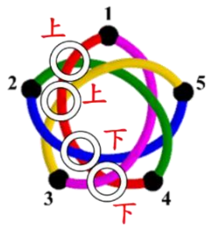
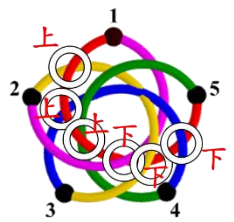
再根據輾轉相除法，得到 $\gcd(n, n-1) = \gcd(n-1, 1) = 1$，故 n 與 $n-1$ 互質。

根據【性質 2-1】的逆向，即如果 k 與 n 互質，則可以形成 k 股 n 葉結，因為 n 與 $n-1$ 互質，所以一定有 $n-1$ 股 n 葉結，又最小葉結的葉數為 3，故對於所有大於等於 3 的整數 n，n 葉結一定存在。■

六、k 股 n 葉結立體結構之幾何探討

(一) 圓上等分點相接示意圖中的交疊關係

下表僅針對 3 葉~5 葉結，觀察圓上等分點相接示意圖中的交疊關係。

k 股	k 股 n 葉	從 1 出發的紅色路徑與其他顏色路徑的交疊關係			交疊總數
		圓上等分點圖示	交疊數	上下順序	
2 股	2 股 3 葉		2	上下	$\frac{2\times 3}{2}=3$
	2 股 5 葉		2	上下	$\frac{2\times 5}{2}=5$
3 股	3 股 4 葉		4	上上下下	$\frac{4\times 4}{2}=8$
	3 股 5 葉		4	上上下下	$\frac{4\times 5}{2}=10$
4 股	4 股 5 葉		6	上上上下下下	$\frac{6\times 5}{2}=15$

1. $\boxed{\text{2 股}}$：在 2 股 3 葉結中，1→3 的紅色路徑與其他顏色路徑共交疊 2 次，上下順序

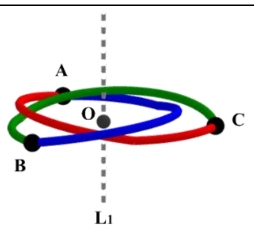
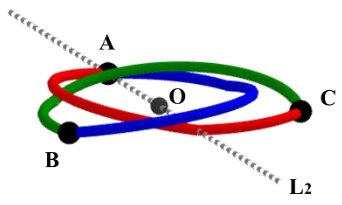
為「上下」，三條顏色路徑皆與其他顏色路徑交疊 2 次，但是會重複算一次，因此交疊總數為 $\frac{2\times 3}{2}=3$；在 2 股 5 葉結中，1→3 的紅色路徑與其他顏色路徑一樣交疊 2 次，上下順序同樣為「上下」，五條顏色路徑皆與其他顏色路徑交疊 2 次，但是會重複算一次，因此交疊總數為 $\frac{2\times 5}{2}=5$。

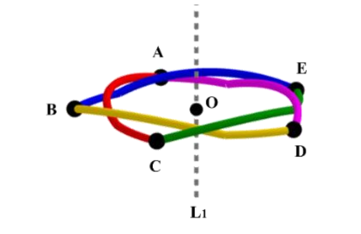
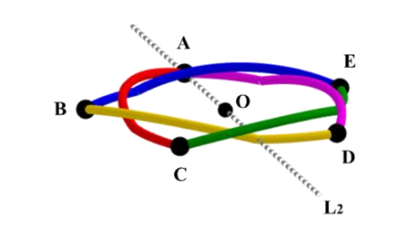
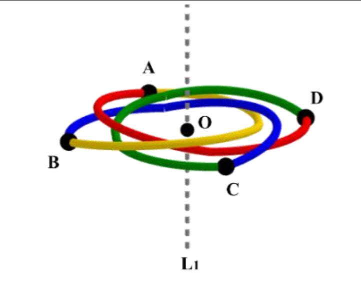
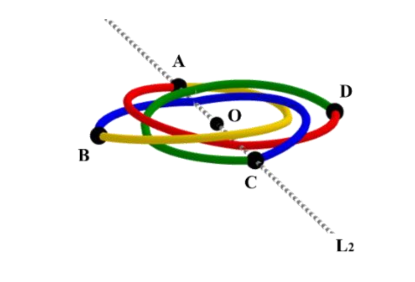
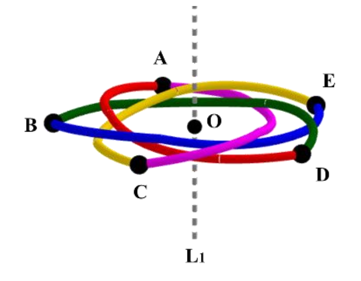
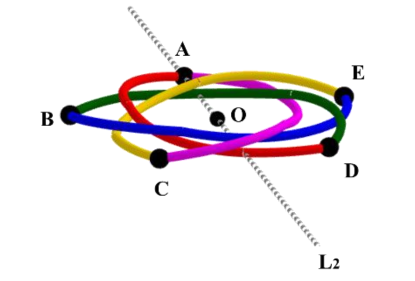
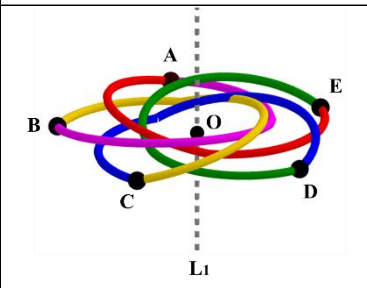
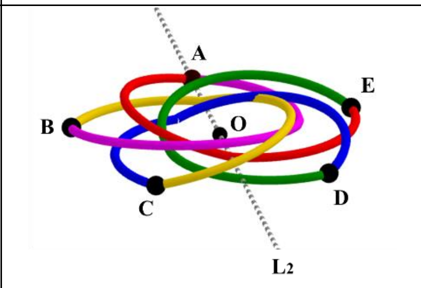
2. $\boxed{\text{3 股}}$：在 3 股 4 葉結中，1→4 的紅色路徑與其他顏色路徑共交疊 4 次，上下順序為「上上下下」，四條顏色路徑皆與其他顏色路徑交疊 4 次，但是會重複算一次，因此交疊總數為 $\frac{4\times 4}{2}=8$；在 3 股 5 葉結中，1→4 的紅色路徑與其他顏色路徑一樣交疊 4 次，上下順序同樣為「上上下下」，五條顏色路徑皆與其他顏色路徑交疊 4 次，但是會重複算一次，因此交疊總數為 $\frac{4\times 5}{2}=10$。
3. $\boxed{\text{4 股}}$：在 4 股 5 葉結中，1→5 的紅色路徑與其他顏色路徑一樣交疊 6 次，上下順序同樣為「上上上下下下」，五條顏色路徑皆與其他顏色路徑交疊 6 次，但是會重複算一次，因此交疊總數為 $\frac{6\times 5}{2}=15$。
4. 綜合以上討論，k 股 n 葉結的交疊總數為 $\frac{2(k-1)\times n}{2}=(k-1)\times n$。

(二) 葉結幾何結構上的旋轉性質

以下僅針對 3 葉~5 葉結，探討其在圓上等分點環繞之幾何結構的旋轉性質。

1. 旋轉軸 L_1 為通過圓心 O 與圓上等分點所在之平面垂直的直線，將 k 股 n 葉結沿著旋轉軸 L_1 旋轉角度 θ_1 後，會回到原來的立體結構(不計顏色)；
2. 旋轉軸 L_2 為通過圓心 O 與圓上等分點 A 的直線，將 k 股 n 葉結沿著旋轉軸 L_2 旋轉角度 θ_2 後，一樣會回到原來的立體結構(不計顏色)。

k 股 n 葉	旋轉軸 L_1	θ_1	旋轉軸 L_2	θ_2
2 股 3 葉		120°		180°

2 股 5 葉		72°		180°
3 股 4 葉		90°		180°
3 股 5 葉		72°		180°
4 股 5 葉		72°		180°

3. 由上表中可知，若要沿著旋轉軸 L_1 旋轉後回到原來的立體結構，3 葉結需旋轉 120°，4 葉結需旋轉 90°，5 葉結需旋轉 72°。因此，n 葉結需旋轉 $\dfrac{360^{\circ}}{n}$。

4. 由上表中可知，不管是哪一種葉結，若要沿著旋轉軸 L_2 旋轉後回到原來的立體結構，都是旋轉 180°。

   注意：因為葉結有上下交疊的情況，因此不會是鏡射對稱的關係。

(三) 迴圈數列中的對稱性質

當股數大於等於 5 時，因為葉結結構的旋轉性質，詳見上方(二)，將 k 股 n 葉結沿著旋轉軸 L_2 旋轉 180°後，會回到原來的立體結構，因此我們在迴圈數列中發現了以下規律：

1. 如果迴圈數列的項數為奇數，則此數列有中間項，以數列之中項為分界線，將左右兩邊的數字依序加起來，會得到相同的數字和，即把往左 1 項與往右 1 項的數

字加起的值來會等於把往左 2 項與往右 2 項的數字加起來的值，舉例 5 葉如下表。

2. 如果迴圈數列的項數為偶數，則沒有中間項，以中間兩數之間的逗號當作分界線，將左右兩邊的數字依序加起來，也會得到相同的數字和，舉例 6 葉如下表。

k 股 n 葉	迴圈數列與分界線	數字和相等之規律
3 股 5 葉	< 1 , 4 , 2 | 5 , 3 , 1 >	2+5=7 < 1 , 4 , 2 , 5 , 3 , 1 > 4+3=7
5 股 6 葉	< 1 , 6 , 5 , | 4 , 3 , 2 , 1 >	5+3=8 < 1 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 > 6+2=8

(四) 三維空間中 k 股 n 葉結的參數式

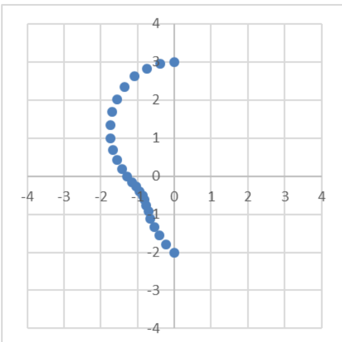
參考維基百科環面紐結（torus knot）[8]，k 股 n 葉結的參數式如下：

$$\text{參數式：}\begin{cases} x=\left[2+\cos(n\cdot\dfrac{t}{k})\right]\cdot\cos(\dfrac{\pi}{2}+t) \\ y=\left[2+\cos(n\cdot\dfrac{t}{k})\right]\cdot\sin(\dfrac{\pi}{2}+t) \\ z=\sin(n\cdot\dfrac{t}{k}) \end{cases}\quad,\quad 0\le t\le k\cdot 2\pi$$

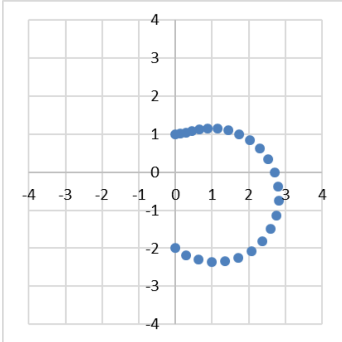
1. 為了跟在討論圓上等分點的繞法順序一致，即起始角度為 90°，我們將參數式中 x 坐標後面改成乘以 $\cos(\dfrac{\pi}{2}+t)$；y 坐標後面改成乘以 $\sin(\dfrac{\pi}{2}+t)$。

2. 因為對所有的角度 θ 而言，$\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 的範圍為 $-1\le\sin\theta\le 1$、$-1\le\cos\theta\le 1$，因此在參數式 x 和 y 裡，$1\le 2+\cos(n\cdot\dfrac{t}{k})\le 3$，得到 $2+\cos(n\cdot\dfrac{t}{k})>0$，故會由 $\cos(\dfrac{\pi}{2}+t)$ 決定 x 的正負；由 $\sin(\dfrac{\pi}{2}+t)$ 決定 y 的正負。舉例來說，2 股 3 葉：

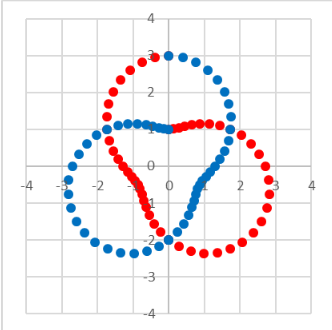
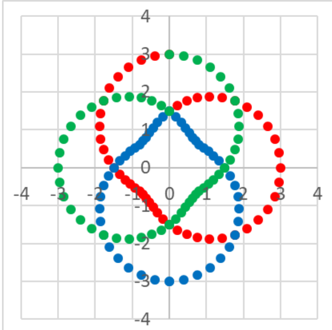
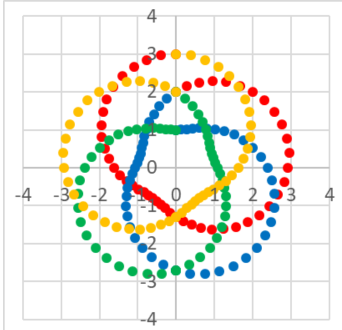
(1) 角度從 90° 到 270°，因為 cos 從 0 遞減到 -1 再遞增到 0，所以圖形中的 x 坐標會從 0 跑到 x 軸的負向再回到 0；且因為 sin 從 1 遞減到 0 再遞減到 -1，所以圖形中的 y 坐標會從 y 軸的正向跑到 0 再到 y 軸的負向，如右圖。



(2) 角度從 270°到 450°，因為 cos 從 0 遞增到 1 再遞減到 0，所以圖形中的 x 坐標會從 0 跑到 x 軸的正向再回到 0；且因為 sin 從−1 遞增到 0 再遞增到 1，所以圖形中的 y 坐標會從 y 軸的負向跑到 0 再到 y 軸的正向，如右圖。剩下圖形以此類推。

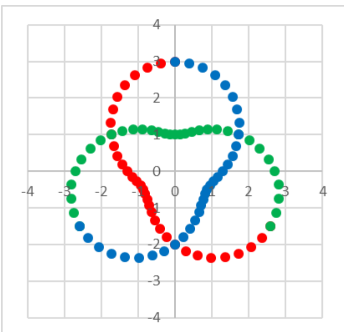


3. 因為 k 股表示繩結繞了 k 圈，一圈為 360°=2 π，所以 k 股所轉的角度就會是 k×2 π，因此參數 t 的範圍為 0~k×2 π。舉例如下：

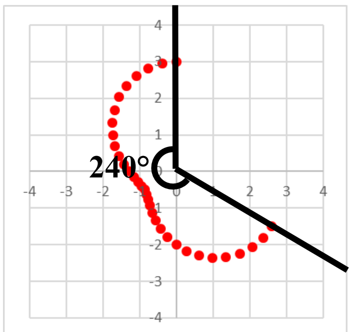
		
2 股 3 葉→2×2 π	3 股 4 葉→3×2 π	4 股 5 葉→4×2 π

4. 因為繩結從外側繞道內側再繞到外側會形成一葉，外側與原點的距離最遠，內側與原點距離最近，又當角度從 0°到 360°，cos 的值會從 1 到−1 再回到 1，剛好是從最大值(外側)到最小值(內側)再回到最大值(外側)。

舉例，2 股 3 葉結的第一葉是從第一個圓上等分點繞到第三個圓上等分點，相鄰兩個圓上等分點所夾的角度為 120°，故從第一到第三總共轉了 240°，對照 cos 的值，轉換 0°~240°變成 0°~360°，乘以的倍數為 $\frac{360^\circ}{240^\circ}=\frac{3}{2}$。



3 葉



第一葉共轉了 240°

推至一般式，k 股 n 葉結的第一葉是從第一個圓上等分點繞到第 1+k 個圓上等分

點，相鄰兩個圓上等分點所夾的角度為$\frac{360^{\circ}}{n}$，故從第一到第 1+k 總共轉了$k\times\frac{360^{\circ}}{n}$，轉換 $0^{\circ}\sim k\times\frac{360^{\circ}}{n}$ 變成 $0^{\circ}\sim360^{\circ}$，乘以的倍數為$\frac{n}{k}$，因此在參數式 x 和 y 裡前面倍數為$2+\cos(n\cdot\frac{t}{k})$，其中可以調整加上的數字來改變增減幅度。

5. 因為葉結具有上下交疊的立體結構，因此參數式中的 z 坐標利用了三角函數 sin 的週期性，製造出波峰、波谷，對應葉結不同層(股)的效果。

陸、 研究結果與討論

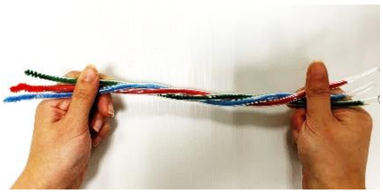
一、過去的研究多為探討莫比烏斯環的結構與原理，我們希望能從莫比烏斯紙環的邊緣結構進一步討論並與葉結做結合，在第 2016 年台灣國際科展作品名稱：攜手共解圓－扭結理論之探討這一篇研究中，提到可以變成一個大圓的紐結結構，而此篇研究的旨在探討不管怎麼繞來繞去，在不把繩子扯斷的狀況下，無法還原成一個圓圈的葉結結構。

利用紙條製作自轉圈數為$0.5x$的紙環，如果 x 為奇數且$x\geq3$，觀察紙條邊緣的結構，其為一條可一筆畫走完的迴圈，即 2 股 x 葉結；如果 x 為偶數，計算出自轉圈數$0.5x$為整數，則所形成的紙條會有兩條邊，邊不能一筆劃走完，因此無法形成葉結。

二、自轉圈數、股數與葉數可以寫出底下關係式：

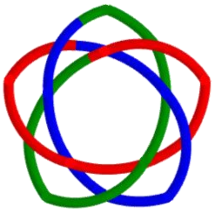
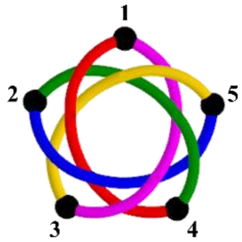
自轉圈數×股數=葉數

三、如果用紙條製作紙環來討論紙條邊緣與葉結的關聯，自轉圈數會限制在$0.5x$，其中$x\in$□，則無法討論其餘自轉圈數(舉例：$1\frac{1}{3}$、$1\frac{1}{4}$......)的情形，因此我們利用多條水管扭轉後頭尾相接的方式做進一步討論。



舉例：自轉圈數為$1\frac{2}{3}$

接著又受限於每一條水管的長度相同，以至於在不同的水管數量或不同的自轉圈數下，相接示意圖不一致，因此我們改成討論圓上等分點的繞法，

水管相接： 圓上等分點：

舉例：3 股 5 葉

最後利用圓上等分點的繞法寫出迴圈數列。

四、迴圈數列紀錄了繩子在圓上等分點繞時，依序經過的數字標號，因為繩子會繞回起始點，因此迴圈數列的第 1 項與最後一項會相等，故在改寫成同餘數列時，我們扣掉迴圈數列的首項，並將迴圈數列剩下的每一項改寫成除以 n 的同餘數，以利後續的討論。

得到兩個性質：(1) 因為圓上等分點每個點都要繞到，故同餘數列的項數為葉數。(2) 同餘數列的數值為除以葉數的所有餘數，每個餘數只出現一次。

舉例：2 股 3 葉

k 股 n 葉	迴圈數列 $\langle a_i \rangle_{i=1}^{n+1}$	同餘數列 $\langle b_j \rangle_{j=1}^{n}$	同餘數列與股數、葉數的關係
2 股 3 葉	<1,3,2,1>	<0,2,1>	$1+2=3\equiv 0 \pmod 3$ $0+2=2\equiv 2 \pmod 3$ $2+2=4\equiv 1 \pmod 3$

五、觀察 k 股 n 葉結的自轉示意圖，有 n 個圓上等分點且每個圓上等分點都有 k 層，根據其繞點的特性，可證明出以下兩個性質：(1) 已知 k、n 為整數滿足 $n>k$ 且 $k\geq 2$、$n\geq 3$，如果可以形成 k 股 n 葉結，則 k 與 n 必須互質；反之亦成立，如果 k 與 n 互質，則可以形成 k 股 n 葉結。(2) 對於所有大於等於 2 的整數 n，n 與 $n-1$ 必定互質，因此一定有 $n-1$ 股 n 葉結，又最小葉結的葉數為 3，故對於所有大於等於 3 的整數 n，n 葉結一定存在。

六、觀察葉結上下交疊的情況，得到 k 股 n 葉結的交疊總數為 $(k-1)\times n$。接著，進一步探討葉結立體結構的幾何特性，因為葉結有上下交疊的情況，因此不會是鏡射對稱的關係，而是將葉結沿著指定直線旋轉，會回到原來的立體結構。

根據其旋轉性質得到在迴圈數列有以下規則：如果迴圈數列的項數為奇數，以數列之中項為分界線，將左右兩邊的數字依序加起來，會得到相同的數字和；同理，如果迴圈數列的項數為偶數，則改為以中間兩數之間的逗號當作分界線。

根據環面紐結，k 股 n 葉結參數式可以表示：$\begin{cases} x=\left[2+\cos(n\cdot\frac{t}{k})\right]\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+t) \\ y=\left[2+\cos(n\cdot\frac{t}{k})\right]\cdot\sin(\frac{\pi}{2}+t) \\ z=\sin(n\cdot\frac{t}{k}) \end{cases}$, $0\le t\le k\cdot 2\pi$

利用三角函數的週期性質、各象限的正負關係以及角度之間的轉換，可以觀察出參數式如何呈現 k 股 n 葉結的圖形結構。

柒、　結論暨未來展望

一、結論

(一) 如果可以形成葉結，自轉圈數一定不是整數。

(二) 自轉圈數×股數=葉數。

(三) 同餘數列的項數為葉數，且同餘數列的數值為除以葉數的所有餘數。

(四) 已知 k、n 為整數滿足 $n>k$ 且 $k\geq 2$、$n\geq 3$，如果可以形成 k 股 n 葉結，則 k 與 n 必須互質，即 $\gcd(k,n)=1$；反之亦成立，如果 k 與 n 互質，則可以形成 k 股 n 葉結。

(五) 對於所有大於等於 3 的整數 n，因為 n 與 $n-1$ 必定互質，因此有 $n-1$ 股 n 葉結，故 n 葉結一定存在。

(六) k 股 n 葉結的交疊總數為 $(k-1)\times n$。

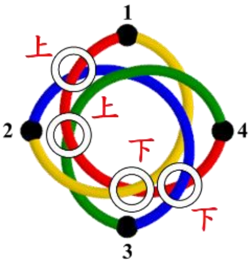
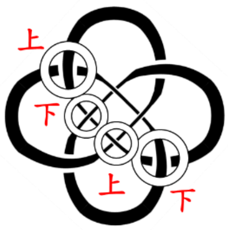
(七) 迴圈數列以中項(若項數為奇數)或著以中間兩數之間的逗號(若項數為偶數)當作分界線，將左右兩邊的數字依序加起來，會得到相同的數字和。

(八) 本研究 k 股 n 葉結的參數式：$\begin{cases} x=\left[2+\cos(n\cdot\frac{t}{k})\right]\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+t) \\ y=\left[2+\cos(n\cdot\frac{t}{k})\right]\cdot\sin(\frac{\pi}{2}+t) \\ z=\sin(n\cdot\frac{t}{k}) \end{cases}$,　$0\le t\le k\cdot 2\pi$

二、未來展望

(一) 葉結與環面紐結相關，此研究最後根據網路上環面紐結的參數式寫出符合本研究葉結的參數式，未來可以進一步改變參數式中的變數，探索其會如何影響圖形的呈現。

(二) 素紐結也是不能分解的紐結，但其交疊情況與本研究的葉結不一樣(下表舉例 3 股 4 葉與其長相相近的素紐結)，未來可以進一步探索各種紐結的異同處。

3 股 4 葉	素紐結
	

(三) 在製作葉結時，發現繩子往前繞與往後繞(即增加 1 股)形成葉結的葉數會有不同的公差，如下左圖，從 2 股 3 葉往前繞 1 圈會得到 3 股 4 葉，再繞 1 圈會得到 4 股 5 葉，此葉數的公差為 1；但如果往後繞 1 圈會得到 3 股 5 葉，再繞 1 圈會得到 4 股 7 葉，此葉數的公差為 2。下右圖亦可看到從 2 股 5 葉往前繞與往後繞形成葉數的公差分別為 2 和 3。

從 2 股 3 葉往前繞與往後繞	從 2 股 5 葉往前繞與往後繞
	

我們臆測出下表的公差規則，未來可以進一步歸納與驗證，甚至找出不在下表規則中的葉結(譬如：5 股 7 葉、5 股 8 葉)應出現在哪個數列中。

2 股 3 葉		2 股 5 葉		2 股 7 葉	
3 股 4 葉	3 股 5 葉	3 股 7 葉	3 股 8 葉	3 股 10 葉	3 股 11 葉
4 股 5 葉	4 股 7 葉	4 股 9 葉	4 股 11 葉	4 股 13 葉	4 股 15 葉
5 股 6 葉	5 股 9 葉	5 股 11 葉	5 股 14 葉	5 股 16 葉	5 股 19 葉
6 股 7 葉	6 股 11 葉	6 股 13 葉	6 股 17 葉	6 股 19 葉	6 股 23 葉
公差 1	公差 2	公差 2	公差 3	公差 3	公差 4

捌、　參考文獻資料及其他

1. 維基百科（2021 年 2 月 8 日）。莫比烏斯帶。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%B8%A6
2. 維基百科（2021 年 2 月 10 日）。拓撲學。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%93%E6%89%91%E5%AD%A6
3. David Gunderman, Richard Gunderman（2018 年 12 月 16 日）。莫比烏斯帶開闢的數學研究：奇妙的單側曲面。BBC 英倫網。檢自：https://www.bbc.com/ukchina/trad/vert-fut-46582804
4. 維基百科（2020 年 6 月 2 日）。可定向性。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%AF%E5%AE%9A%E5%90%91%E6%80%A7
5. 維基百科（2021 年 2 月 10 日）。三葉結。檢自：https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E4%B8%89%E5%8F%B6%E7%BB%93
6. 李國偉（2008 年 2 月 1 日）。「不解」之解，是解耶。科學人知識庫。檢自：https://sa.ylib.com/MagArticle.aspx?id=3640
7. 莫比烏斯環和相關紙環。第 52 屆中小學科學展覽會，國中組，數學科。
8. 看不見依然存在－莫比烏斯盤的探討。第 54 屆中小學科學展覽會，國小組，數學科。
9. 攜手共解圓－扭結理論之探討。第 2016 年臺灣國際科學展覽會，數學科。
10. 洪明譽。動手玩數學（主題六－甜甜圈的遐想，第 16 週－莫比烏斯環，頁 109-117）。台南市：南一書局企業股份有限公司。
11. 維基百科（2020 年 3 月 10 日）。環面紐結。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%8E%AF%E9%9D%A2%E7%BA%BD%E7%BB%93

【評語】030415

本作品的出發點是探討紙環在不同的旋轉圈數下，觀察紙條邊緣的結構與葉結的關聯性，接著利用水管模擬紙條的邊緣，最後推廣至討論繩子在圓上等分點的繞法。將繩子經過的等分點記錄成迴圈數列與同餘數列，藉此證明形成 k 股 n 葉時的充要條件是 k 與 n 互質，最後則探討葉結立體結構的幾何性質。整體的內容與論證完整值得肯定。

作品簡報

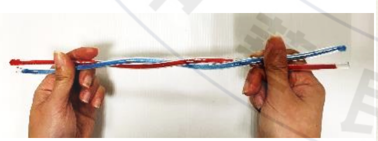
從莫比烏斯環探討k股n葉結

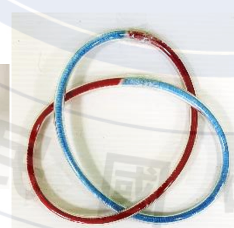
國中組　數學

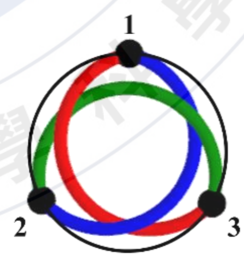
摘要

莫比烏斯環是一種只有一個面和一條邊的曲面，可透過紙條自轉半圈製作出來，本研究的出發點為探討紙環在不同的旋轉圈數下，紙條邊緣的結構，並將其延伸到葉結。因紙條會限制自轉的圈數，因此我們利用水管模擬紙條的邊緣，得出自轉圈數×股數=葉數，又因水管有固定長度，導致在不同的股數與自轉圈數下，圖形不一致，因此我們推廣至討論繩子在圓上等分點的繞法，將經過的等分點記錄成迴圈數列，並改寫成同餘數列以利探討同餘之等價關係。本研究旨在證明可以形成k股n葉結時，k與n必須互質，反之亦成立，又對於所有大於等於3的整數n，必有$n-1$股n葉結，故n葉結一定存在。最後進一步探討葉結立體結構的幾何性質以及在三維空間中的參數式。

2股3葉結



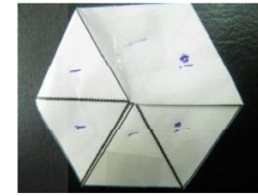


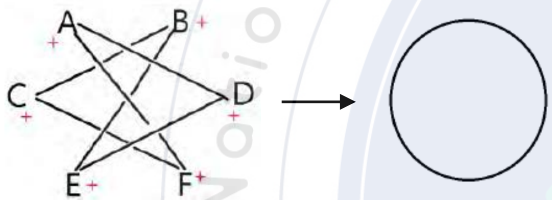


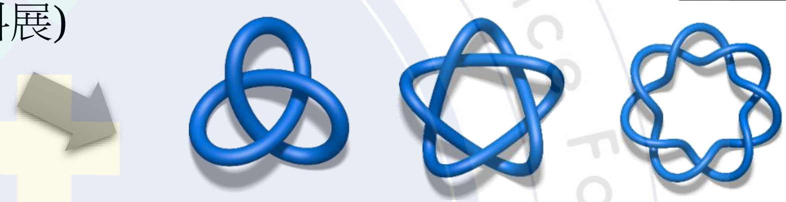
迴圈數列	同餘數列
<1,3,2,1>	<0,2,1>

研究動機與文獻探討

- 荷蘭藝術家艾雪的鑲嵌作品「騎士」。
- 莫比烏斯環和相關紙環 (第52屆科展)
- 看不見依然存在－莫比烏斯盤的探討 (第54屆科展)
- 攜手共解圓－扭結理論之探討 (2016年國際科展)







葉結：不管怎麼繞來繞去，無法還原成一個圓圈。

研究目的

一. 利用紙條製作自轉指定圈數的紙環，觀察紙條邊緣的結構，探討紙環與葉結的關聯。

二. 觀察水管自轉圖，討論形成葉結的結構，及股數、葉數、自轉圈數三者之間的關係式。

三. 利用坐標表示水管自轉圖中內外圈的點、相接處、交疊處在水管相接圖上的相對位置。

四. 進一步討論繩子在圓上等分點的繞法，將繩子經過的等分點之編號，記錄成迴圈數列。

五. 討論同餘之等價關係，觀察形成k股n葉結時，k與n的關係與性質並加以證明。

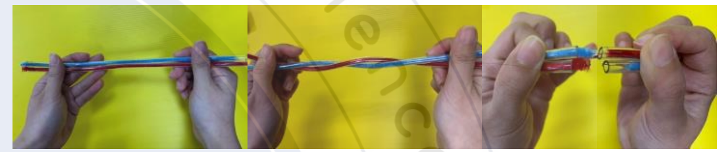
六. 探討葉結立體結構的幾何性質，並參考環面紐結寫出符合本研究之k股n葉結的參數式。

研究過程與方法

一、莫比烏斯環與葉結的關聯

利用紙條製作自轉指定圈數的紙環，觀察紙條邊緣的結構，探討紙環與葉結的關聯。

- k條繩子交纏→一條「k股」的繩。
- 繩子從外側繞至內側→一個「葉」。



2股

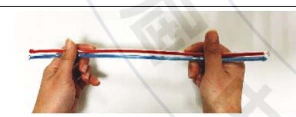
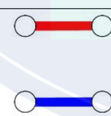
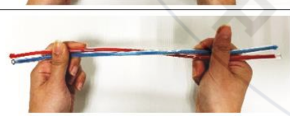
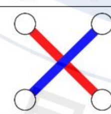
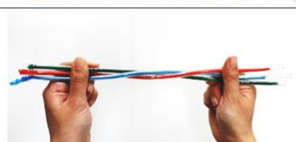
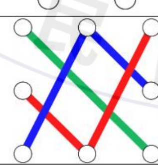
3葉

自轉 $1\frac{1}{2}$ 圈

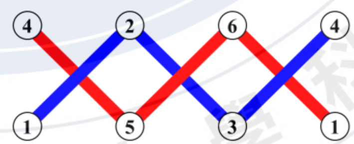
			
圖 3-1	圖 3-2	圖 3-3	圖 3-4
紙條(不分色)	紙條(分色)	水管相接	兩股三葉結

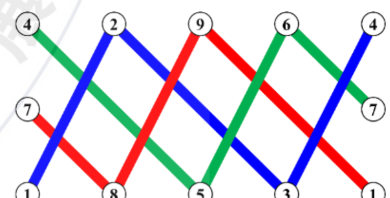
二、水管自轉圖

觀察水管自轉圖，討論形成葉結的結構，及股數、葉數、自轉圈數三者之間的關係式。

水管	自轉圈數	照片	示意圖
兩條	0		
兩條	$\frac{1}{2}$		
三條	$\frac{2}{3}$		

2股→自轉 $1\frac{1}{2}$ 圈→ 3葉





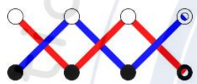
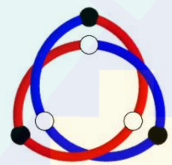
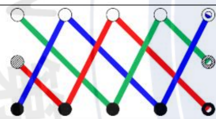
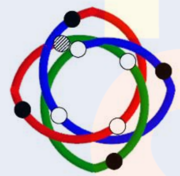
3股→自轉 $1\frac{1}{3}$ 圈→ 4葉

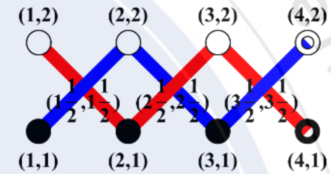
結論：自轉圈數×股數=葉數

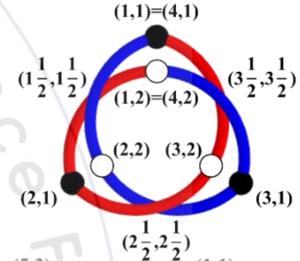
研究過程與方法

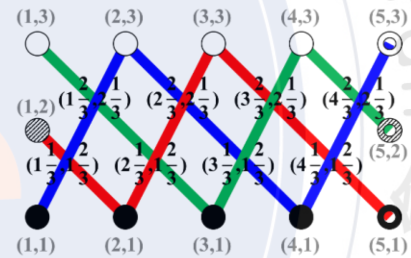
三、水管相接圖

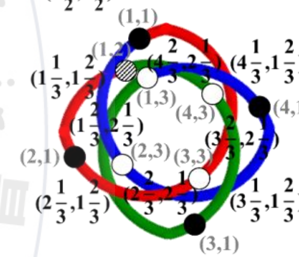
利用坐標表示水管自轉圖中內外圈的點、相接處、交疊處在水管相接圖上的相對位置。

水管	自轉圈數	自轉照片與示意圖	相接照片	相接示意圖
兩條	$1\frac{1}{2}$	 		
三條	$1\frac{1}{3}$	 		





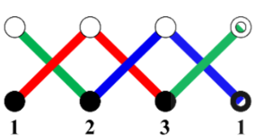
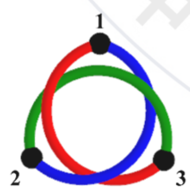




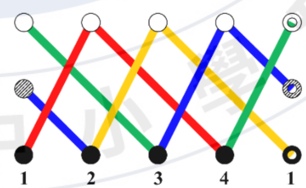
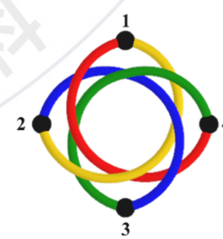
四、圓上等分點

進一步討論繩子在圓上等分點的繞法，將繩子經過的等分點之編號，記錄成迴圈數列。

- 圓上三等分：

自轉示意圖	相接示意圖	迴圈數列	葉結
		<1,3,2,1>	2 股 3 葉

- 圓上四等分：

自轉示意圖	相接示意圖	迴圈數列	葉結
		<1,4,3,2,1>	3 股 4 葉

研究過程與方法

五、同餘之等價關係

討論同餘之等價關係，觀察形成*k*股*n*葉結時，*k*與*n*的關係與性質並加以證明。

- 同餘數列：

  步驟1：扣掉迴圈數列的首項。

  步驟2：將迴圈數列剩下的每一項改寫成除以*n*的同餘數。

加上股數；除以葉數

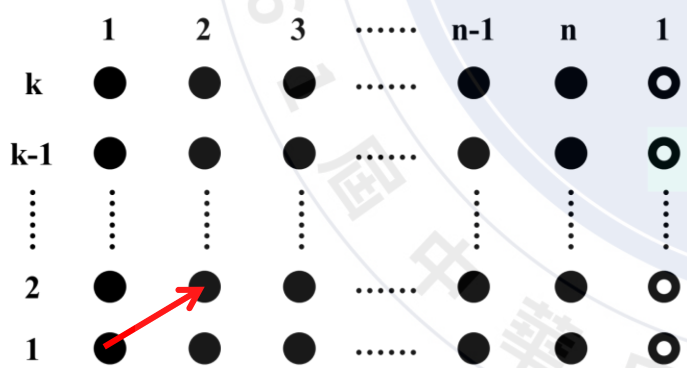
$$1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$$
$$0 + 2 = 2 \equiv 2 \pmod 3$$
$$2 + 2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$$

2 股　　3 葉

【性質1-1】因為圓上等分點每個點都要繞到，故同餘數列的項數為葉數。

【性質1-2】同餘數列的數值為除以葉數的所有餘數，且每個餘數只出現一次。

- *k*股*n*葉結的性質：



*k*層，*n*個圓上等分點

✓ 每一次往下一層及下一個等分點繞。

✓ 繞到第*k*層後再繞回第1層。

✓ 繞到第*n*個等分點後再繞回第1個等分點。

✓ 如果目前繞到(a, b)，下一個點會繞到$(a+1 \pmod n, b+1 \pmod k)$。

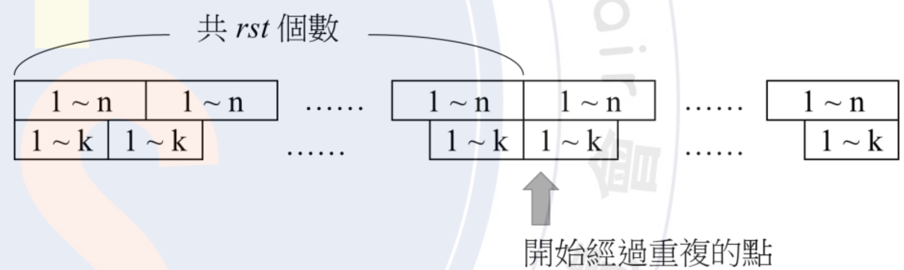
✓ 每個圓上等分點都會經過每一層，繩結會一筆畫不重複繞過所有的點。

五、同餘之等價關係

【性質2-1】已知*k*、*n*為整數滿足*n*>*k*且*k*≥2、*n*≥3，如果可以形成*k*股*n*葉結，則*k*與*n*必須互質；反之亦成立，如果*k*與*n*互質，則可以形成*k*股*n*葉結。

證明 (⇒)：如果可以形成*k*股*n*葉結，則*k*與*n*必須互質。

利用反證法來證明：假設*k*與*n*不互質，令$(k, n)=r$，$k=rs$、$n=rt$，則$[k, n]=rst$，在繞到第$rst+1$個點時，繩子就會開始經過重複的點，也就是有一些圓上等分點不會繞到，因此會無法形成*n*葉結。



證明 (⇐)：如果*k*與*n*互質，則可以形成*k*股*n*葉結。

如果有兩層除以*k*有相同的餘數，即存在$i<j<k$，使得$in \equiv jn \pmod{k}$，則$(j-i)n \equiv 0 \pmod{k}$，因為*k*與*n*互質，所以$k \mid j-i$，但是$j-i<k$，矛盾。表示在右方*k*條式子中，$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{k-2}, r_{k-1}$為除以*k*後的所有餘數，且兩兩不重複。因為滿足每個圓上等分點都會經過每一層，故可以形成*k*股*n*葉結。

$$
\begin{array}{cccc}
n & \equiv & r_1 & \pmod{k} \\
2n & \equiv & r_2 & \pmod{k} \\
3n & \equiv & r_3 & \pmod{k} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(k-2)n & \equiv & r_{k-2} & \pmod{k} \\
(k-1)n & \equiv & r_{k-1} & \pmod{k} \\
kn & \equiv & k & \pmod{k}
\end{array}
$$

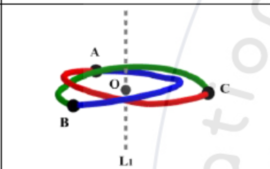
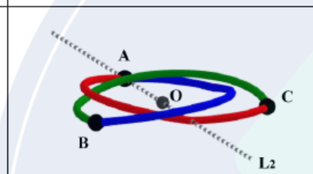
其中$0<r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{k-2}, r_{k-1}<k$

研究過程與方法

六、立體結構之幾何探討

探討葉結立體結構的幾何性質，並參考環面紐結寫出符合本研究之k股n葉結的參數式。

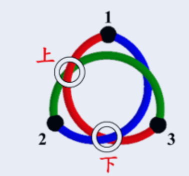
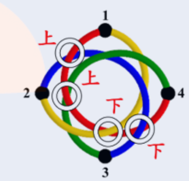
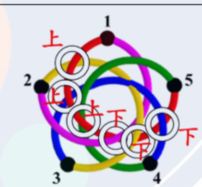
- 葉結幾何結構上的旋轉性質：

k 股 n 葉	旋轉軸 L_1	θ_1	旋轉軸 L_2	θ_2
2 股 3 葉		120°		180°

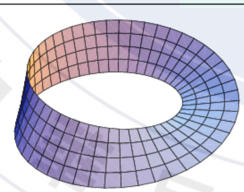
- 迴圈數列中的對稱性質：

k 股 n 葉	迴圈數列與分界線	數字和相等之規律
3 股 5 葉	<1,4,2 | 5,3,1>	2+5=7 <1,4,2,5,3,1> 4+3=7
5 股 6 葉	<1,6,5,4,3,2,1>	5+3=8 <1,6,5,4,3,2,1> 6+2=8

- k股n葉結的交疊總數為 $(k-1)\times n$

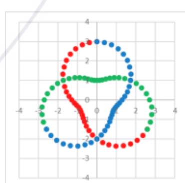
k 股 n 葉	從 1 出發的紅色路徑與其他顏色路徑的交疊關係			交疊總數
	圓上等分點圖示	交疊數	上下順序	
2 股 3 葉		2	上下	$\frac{2\times 3}{2}=3$
3 股 4 葉		4	上上下下	$\frac{4\times 4}{2}=8$
4 股 5 葉		6	上上上下下下	$\frac{6\times 5}{2}=15$

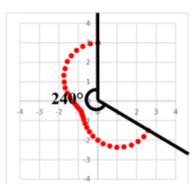
- 莫比烏斯環的參數式：



$$\begin{cases} x=\left[1+\dfrac{v}{2}\cos(\dfrac{u}{2})\right]\cos(u) \\ y=\left[1+\dfrac{v}{2}\cos(\dfrac{u}{2})\right]\sin(u) \quad , \quad 0\le u\le 2\pi,\ -1\le v\le 1 \\ z=\dfrac{v}{2}\sin(\dfrac{u}{2}) \end{cases}$$

- k股n葉結的參數式：





$$\begin{cases} x=\left[2+\cos(n\cdot\dfrac{t}{k})\right]\cdot\cos(\dfrac{\pi}{2}+t) \\ y=\left[2+\cos(n\cdot\dfrac{t}{k})\right]\cdot\sin(\dfrac{\pi}{2}+t) \quad , \quad 0\le t\le k\cdot 2\pi \\ z=\sin(n\cdot\dfrac{t}{k}) \end{cases}$$

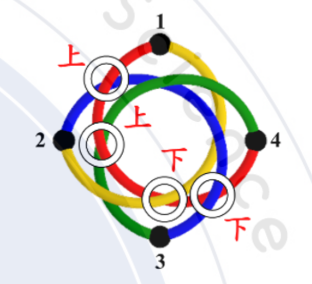
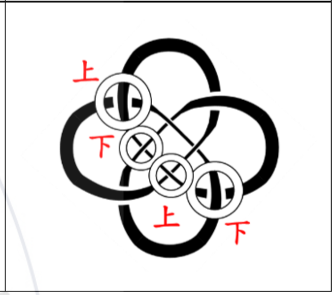
研究結論

- 如果可以形成葉結，自轉圈數一定不是整數。
- 自轉圈數×股數=葉數。
- 同餘數列的項數為葉數，且同餘數列的數值為除以葉數的所有餘數。
- 已知k、n為整數滿足$n>k$且$k\geq 2$、$n\geq 3$，如果可以形成k股n葉結，則k與n必須互質；反之亦成立，如果k與n互質，則可以形成k股n葉結。
- 因為n與$n-1$必定互質，對於所有$n\geq 3$ ，必有$n-1$股n葉結，故n葉結一定存在。
- k股n葉結的交疊總數為$(k-1)\times n$。
- 迴圈數列以中項(若項數為奇數)或著以中間兩數之間的逗號(若項數為偶數)當作分界線，將左右兩邊的數字依序加起來，會得到相同的數字和。
- 本研究k股n葉結的參數式：

$$\begin{cases} x=\left[2+\cos(n\cdot\frac{t}{k})\right]\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+t) \\ y=\left[2+\cos(n\cdot\frac{t}{k})\right]\cdot\sin(\frac{\pi}{2}+t) \qquad , \quad 0\leq t\leq k\cdot 2\pi \\ z=\sin(n\cdot\frac{t}{k}) \end{cases}$$

未來展望

- 素紐結也是不能分解的紐結，但其交疊情況與本研究的葉結不一樣(表中舉例3股4葉與其長相相近的素紐結)，未來可以進一步探索各種紐結的異同處。

3 股 4 葉	素紐結
	

- 在製作葉結時，發現繩子往前繞與往後繞(即增加1股)形成葉結的葉數會有不同的公差。

從 2 股 3 葉往前繞與往後繞	從 2 股 5 葉往前繞與往後繞
	

2股3葉		2股5葉		2股7葉	
3股 4葉	3股 5葉	3股 7葉	3股 8葉	3股 10葉	3股 11葉
4股 5葉	4股 7葉	4股 9葉	4股 11葉	4股 13葉	4股 15葉
5股 6葉	5股 9葉	5股 11葉	5股 14葉	5股 16葉	5股 19葉
6股 7葉	6股 11葉	6股 13葉	6股 17葉	6股 19葉	6股 23葉
公差 1	公差 2	公差 2	公差 3	公差 3	公差 4

參考文獻資料

- 艾薛爾鑲嵌藝術-非想非非想數學網。檢自：http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/2013-09-30-05-53-19
- 維基百科（2021年2月8日）。莫比烏斯帶。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%B8%A6
- 莫比烏斯環和相關紙環。第 52 屆中小學科學展覽會，國中組，數學科。
- 看不見依然存在－莫比烏斯盤的探討。第 54 屆中小學科學展覽會，國小組，數學科。
- 攜手共解圓－扭結理論之探討。第 2016 年臺灣國際科學展覽會，數學科。
- 維基百科（2021年2月10日）。三葉結。檢自：https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E4%B8%89%E5%8F%B6%E7%BB%93
- 洪明譽。動手玩數學（主題六－甜甜圈的遐想，第16週－莫比烏斯環，頁109-117）。台南市：南一書局企業股份有限公司。
- 維基百科（2020年3月10日）。環面紐結。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%8E%AF%E9%9D%A2%E7%BA%BD%E7%BB%93