中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030413

連中三圓

學校名稱：桃園市立大成國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃宥澄 國二 張宇賢	顏綱威

關鍵詞：切線圓、馬爾法蒂圓

摘要

本文在探討如何利用尺規作圖作出三角形內部三個(含)以上的切線圓及相切圓，以及用三角形三邊長表示圓半徑，並嘗試討論某條件下的圓面積和大小。分析為下列三種條件。

條件一 **三角形內部若有三圓，則任一圓皆需與「一個相異圓及三角形兩邊相切」。**

條件二 **三角形內部若有三圓，則任一圓皆需與「兩個相異圓及三角形其中一邊相切」。**

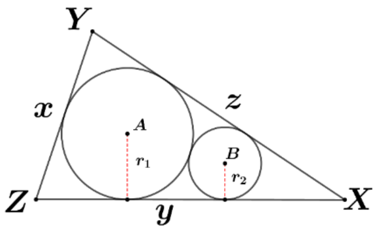
條件三 **三角形內部若有四圓以上(含)，且其中三圓為條件一或條件二，則其它圓必須與任意三圓相切。**

利用尺規完成上述三種條件的作圖，接著討論條件一及條件二的作圖步驟合理性及半徑關係。並發現其中包含**索迪公式第四圓退化成一直線**和**馬爾法蒂圓**。接著利用尺規作出條件三的圖形，最後嘗試找出在直角三角形中的圓面積和大小關係。

壹、研究動機

在某次資優課程的過程中，老師請我們思考一個問題。題目如下：

如圖，一個三角形內部有兩個外切及與三角形三邊長相切的圓，請以三角形三邊長表示圓 A 及圓 B 的半徑分別為何?



當我們解出這個題目後，由於我們剛上完八年級的尺規作圖，就有同學就問老師，那這個圖形怎麼用尺規來作圖呢?老師就請我們思考，如果三角形內只有一個圓呢?當我們想明白第一個內切圓怎麼作圖之後，老師又提出如果再加一個圓呢?如果再往下加，變成三個圓以上呢，是否還能用尺規作圖呢?並且還能利用三角形三邊長表示所有圓的半徑嗎?接著我們就開始思考並討論三角形內部的圓怎麼用尺規來完成。

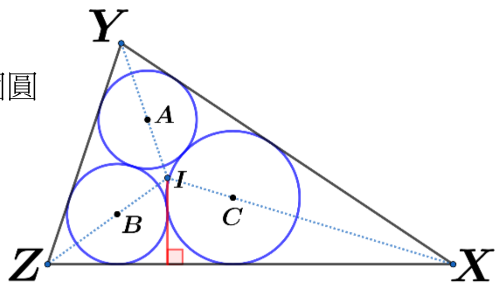
首先我們嘗試去做圖，我們發現原始題目中的第一個圓及第二個圓是容易尺規作圖，但是第三個圓的尺規就遇到困難，然而我們發現第三圓不只有一種情況，就覺得這個題目很有趣，就開啟了我們研究這個題目的動機。研究過程中在翻閱文獻時，發現兩種比較特別的情況，分別為「馬爾法蒂圓」及「索迪公式」中的第四圓退化情形，於是我們就開始嘗試利用尺規作圖來畫出三角形內的切線圓及相切圓和討論其半徑與邊長關係。

貳、研究目的

一、名詞解釋

(一) 馬爾法蒂圓[8]

在一個已知的三角形內畫三個圓，每個圓與其他兩個圓及三角形其中兩邊相切。若△ XYZ三邊長為x、y、z，內部三個切線圓的半徑分別為a、b、c，



令$s = \frac{x+y+z}{2}$，內心為I，內切圓半徑為r，則

$$a = \frac{r}{2(s-y)}(s - r + \overline{IY} - \overline{IX} - \overline{IZ})$$

$$b = \frac{r}{2(s-z)}(s - r + \overline{IZ} - \overline{IX} - \overline{IY})$$

$$c = \frac{r}{2(s-x)}(s - r + \overline{IX} - \overline{IY} - \overline{IZ})$$

二、研究目的

我們將題目分析，發現滿足條件有下列幾種情況，並且歸納出下列三種類型。

第一種：滿足條件一，即三圓皆與三角形兩邊相切，且至少與一圓相切的情形，一共有三種，分別為圖 1(1)、 圖 1(2)、圖 1(3)及圖 2(1)、圖 2(2)及圖 3。

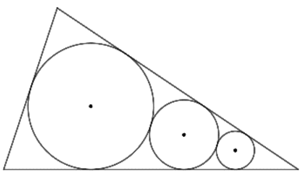


圖1(1)

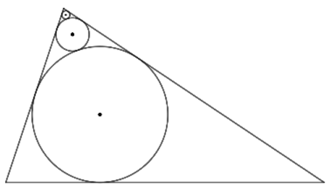


圖1(2)

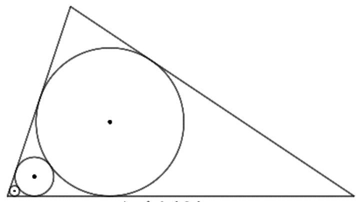


圖1(3)

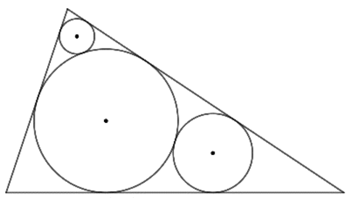


圖2(1)

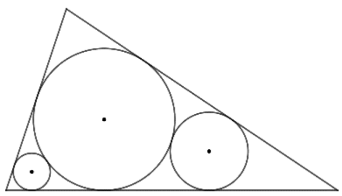


圖2(2)

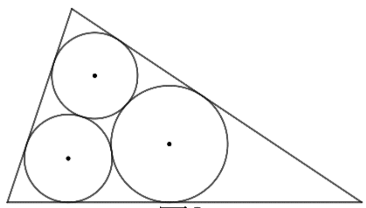


圖3

第二種：滿足條件二，即三圓皆與另外兩個圓外切且至少與三角形一個邊相切的情形也有三種，分別為圖 4(1)、 圖 4(2)和圖 3，其中圖 3 同時滿足條件一與條件二。

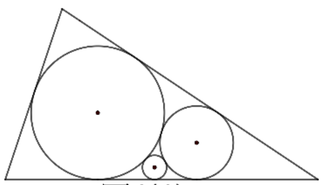


圖4(1)

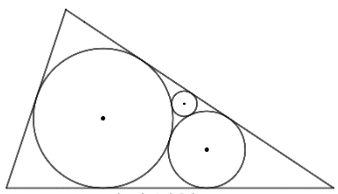


圖4(2)

第三種：滿足條件三，即三角形內部若有四圓以上(含)，且其中三圓為條件一或條件二，

則其它圓必須與任意三圓相切。

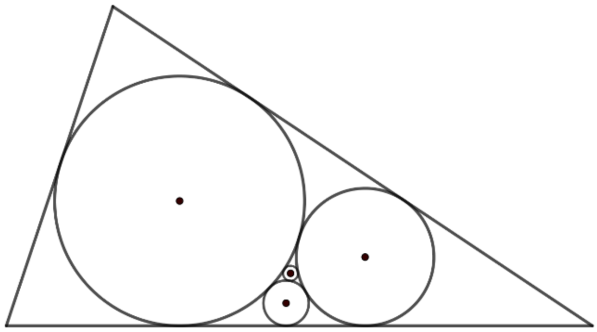


圖5

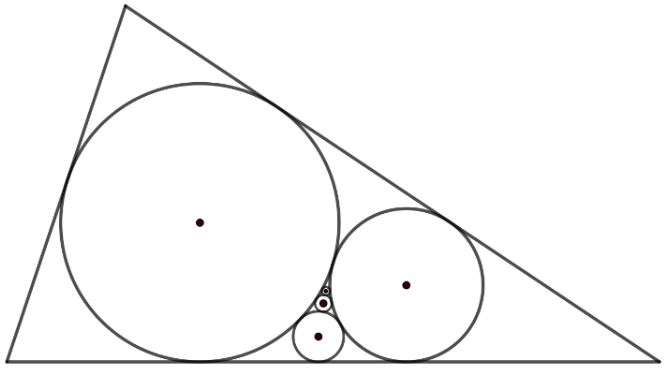


圖6

其中圖 3 為有名的馬爾法蒂圓，圖 4(1)、4(2)為索迪公式第四圓退化的圖形。

接著開始探討如何利用尺規作圖作出上述圖形並用三邊長表示其半徑，並訂定下列幾個研究目的。

研究目的 1

在滿足條件一的情況下，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

研究目的 2

在滿足條件二的情況下，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

研究目的 3

在同時滿足條件一與條件二的情況下，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

研究目的 4

在滿足條件三的情況下，能否尺規作圖作出?

研究目的 5

滿足條件一或條件二的情況下，能否比較其三圓面積和大小。

參、研究器材與設備

硬體部分：紙、筆、圓規、直尺、筆記型電腦。

軟體部分：word、GGB 5.0 傳統版。

肆、研究過程與方法

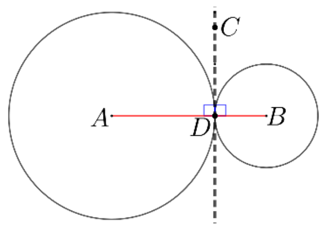
由於本文需要用到下列兩個性質，故先給予兩個引理。

引理 1：**兩個外切的圓，其圓心連線必過切點**。

【說明】

如圖所示，已知$\overleftrightarrow{CD}$為兩圓公切線，可得$\overline{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$、$\overline{BD} \perp \overleftrightarrow{CD}$

則$\angle ADC + \angle BDC = 180°$，故$A$、$B$、$D$在同一直線上。



引理 2：**作兩圓平行切線的直徑，直徑與兩圓周的交點，其對角連線，會通過兩圓切點**。

【說明】

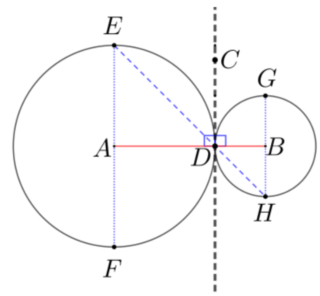
作兩條平行切線$\overline{CD}$的直線且通過兩圓圓心A、B兩點

交圓A、圓B於E、F及G、H，連接$\overline{ED}$與$\overleftrightarrow{HD}$

$\because \overline{AE} : \overline{AD} = \overline{BD} : \overline{BH} = 1 : 1$且$\angle \mathrm{EAD} = \angle \mathrm{HBD} = 90°$

$\therefore \triangle \mathrm{EAD} \sim \triangle \mathrm{HBD}(\mathrm{AA}) \Rightarrow \angle \mathrm{EDA} = \angle \mathrm{HDB}$

$\because$對頂角相等 $\therefore$ E、D、H在同一直線上，故$\overline{EH}$通過切點D。



研究目的 1：滿足條件一

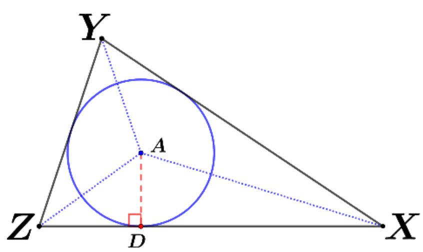
一、在任意已知的三角形內作三圓，其中任一圓皆與三角形兩邊相切，且至少與一圓相切。

我們從九年級數學課本中了解內切圓的圓心會在三個角的角平分線上，因此我們從這個觀念下手，開始做條件一狀況下的三角形內三圓。我們將條件一分成兩種情況。

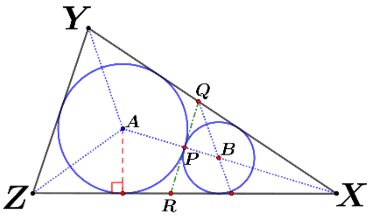
(一) 三圓圓心在同一角平分線上，如圖 1(1)、圖 1(2)、圖 1(3)。

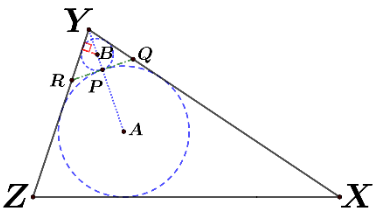
1.【作圖過程】

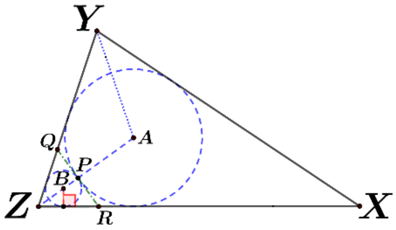
步驟 1：對三內角作角平分線並交於一點A，再作過A點垂直$\overline{XZ}$垂線$\overline{AD}$，以A為圓心、$\overline{AD}$為半徑畫圓，則圓A為第一個內切圓，如右圖。



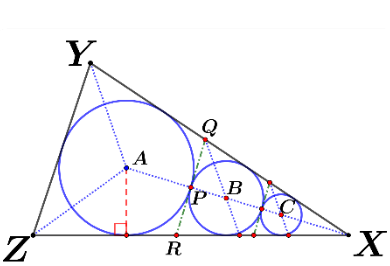
步驟 2：從引理 1 知道外切兩圓的連心線必過切點，則可知第二個圓B的圓心必在$\overleftrightarrow{XA}$上，則圓A與圓B的切點為$\overleftrightarrow{XA}$與圓A的交點P，作過P點切圓A的切線$\overleftrightarrow{RQ}$，接著作$\angle RQX$角平分線交$\overleftrightarrow{XA}$於B點，則B為圓B圓心，$\overline{BP}$為半徑畫圓，即可畫出第二個圓B，同理亦可做出另外兩種情形，如圖所示。

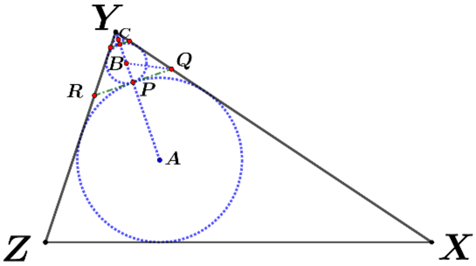


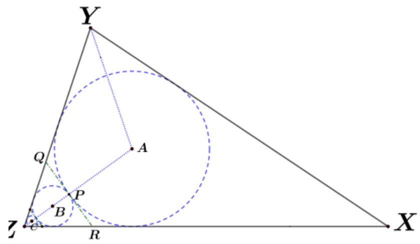




步驟 3：同理步驟 2 作出第三個圓C，如下圖即完成作圖。





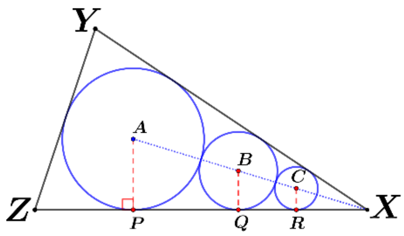


2.【利用三邊長表示半徑】

接著來探討這種情形的半徑關係，讓我們再次整理一下題目：

已知的三角形△ XYZ，其三邊長分別為x、y、z，如圖所示，

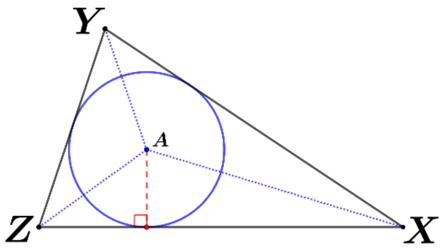
則三圓半徑與邊長的關係?



(1) 設三個圓的半徑分別為r_1、r_2、r_3，且令$s=\frac{x+y+z}{2}$

由海龍公式知△ XYZ面積為$\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$

又圓A為△ XYZ內切圓，則△ XYZ面積為$s\times r_1$

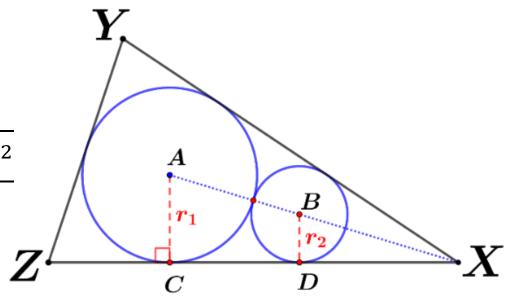


可得$r_1=\frac{\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}}{s}$

$$=\frac{\sqrt{\frac{x+y+z}{2}\times\frac{-x+y+z}{2}\times\frac{x-y+z}{2}\times\frac{x+y-z}{2}}}{\frac{x+y+z}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}。$$

(2) 根據餘弦定理知$\cos X=\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$，則



$$\sin\frac{X}{2}=\sqrt{\frac{1-COSX}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}}{2}}=\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}$$

根據△ ACX~ △ BDX，可知 $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\overline{XA}-(r_1+r_2)}{\overline{XA}}$

$$r_2=r_1\cdot\frac{\overline{XA}-r_1}{\overline{XA}+r_1}=r_1\cdot\frac{\overline{XA}-\overline{XA}sin\frac{X}{2}}{\overline{XA}+\overline{XA}sin\frac{X}{2}}=r_1\cdot\frac{1-sin\frac{X}{2}}{1+sin\frac{X}{2}}=r_1\cdot\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

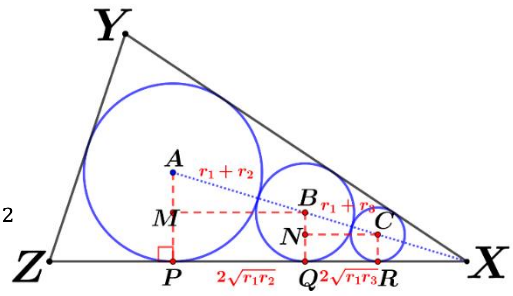
$$=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}\text{ 。}$$

同理，我們可知圖1(2)、圖1(3)的圓B半徑r_2分別為

$$r_2=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}{1+\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}$$

$$r_2=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}{1+\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}$$

(3) ∵△ ABM~ △ BCN



$$\therefore (r_1+r_2):(r_2+r_3)=2\sqrt{r_1r_2}:2\sqrt{r_2r_3}=\sqrt{r_1}:\sqrt{r_3}$$

$$\sqrt{r_1}(r_2+r_3)=\sqrt{r_3}(r_1+r_2)，\quad r_1(r_2+r_3)^2=r_3(r_1+r_2)^2$$

$$r_1{r_2}^2+2r_1r_2r_3+r_1{r_3}^2={r_1}^2r_3+2r_1r_2r_3-{r_2}^2r_3$$

$$r_1{r_3}^2-({r_1}^2+{r_2}^2)r_3+r_1{r_2}^2=0$$

$$r_3=\frac{{r_1}^2+{r_2}^2\pm({r_1}^2-{r_2}^2)}{2r_1}\text{，}r_3=r_1(\text{不合})\text{ 或 }\frac{{r_2}^2}{r_1}$$

$$\text{可得}r_3=\frac{1}{r_1}\times\left(r_1\cdot\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}\right)^2=r_1\times\left(\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}\right)^2$$

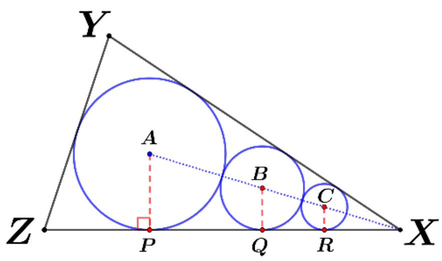
$$=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\left(\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}\right)^2\text{ 。}$$

同理，我們可知圖1(2)、圖1(3)的圓C半徑r_3分別為

$$r_3=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\left(\frac{1-\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}{1+\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}\right)^2$$

$$r_3=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\left(\frac{1-\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}{1+\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}\right)^2$$

由上述可知條件一中圖 1(1)、圖 1(2)、圖 1(3)的情況下，三圓的半徑可以用三角形三邊長來表示，如下所示：



$$r_1=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

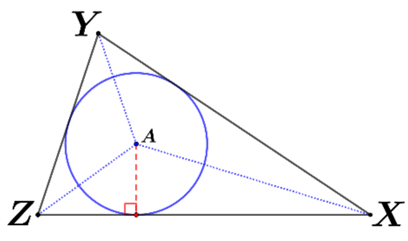
$$r_3=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\left(\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}\right)^2。$$

圖1(2)、圖1(3)，亦相同。

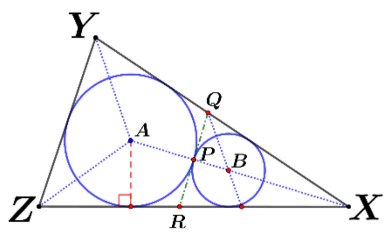
(二) 三圓圓心在兩條角平分線上，如圖 2(1)、圖 2(2)。

1. 【作圖過程】

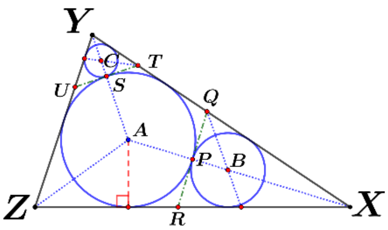
步驟 1：對三內角作角平分線並交於一點A，再作過A點垂直$\overline{XZ}$垂線$\overline{AD}$，以A為圓心、$\overline{AD}$為半徑畫圓，則圓A為第一個內切圓，如右圖。

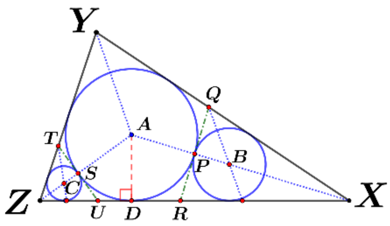


步驟 2：從引理 1 知道外切兩圓的連心線必過切點，則可知第二個圓B的圓心必在$\overleftrightarrow{XA}$上，則圓A與圓B的切點為$\overleftrightarrow{XA}$與圓A的交點P，作過P點切圓A的切線$\overleftrightarrow{RQ}$，接著作$\angle RQX$角平分線交$\overleftrightarrow{XA}$於B點，則B為圓B圓心，$\overline{BP}$為半徑畫圓，如右圖。



步驟 3：從引理 1 知道外切兩圓的連心線必過切點，則可知第三個圓C的圓心必在 $\overleftrightarrow{YA}$、$\overleftrightarrow{ZA}$上，則圓A與圓C的切點為$\overleftrightarrow{YA}$、$\overleftrightarrow{ZA}$與圓A的交點S，做過S點切圓A的切線$\overleftrightarrow{TU}$，接著做$\angle TUY$、$\angle$UTY 角平分線交$\overleftrightarrow{YA}$於C點，則C為圓C圓心，$\overline{CS}$為半徑畫圓，如下圖。





2. 【利用三邊長表示半徑】

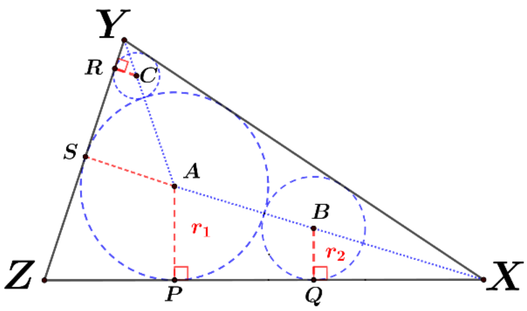
(1) r_1、r_2與(一)相同，表示如下：

$$r_1=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

(2) 根據餘弦定理知$\cos Y=\frac{x^2+z^2-y^2}{2xz}$，

則$\sin\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos Y}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{x^2+z^2-y^2}{2xz}}{2}}=\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}$



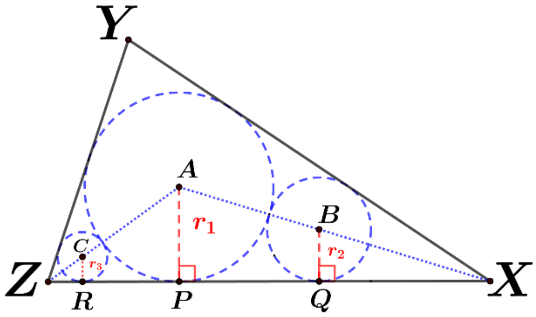
如圖 2(1)，簡易可知△ ASY~ △ CRY，

可知 $\frac{r_3}{r_1}=\frac{\overline{YA}-(r_1+r_3)}{\overline{YA}}$，則

$$r_3=r_1\cdot\frac{\overline{YA}-r_1}{\overline{YA}+r_1}=r_1\cdot\frac{\overline{YA}-\overline{YA}sin\frac{Y}{2}}{\overline{YA}+\overline{YA}sin\frac{Y}{2}}=r_1\cdot\frac{1-sin\frac{Y}{2}}{1+sin\frac{Y}{2}}=r_1\cdot\frac{1-\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}{1+\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}{1+\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}。$$

同理，可知圖 2(2)的圓C半徑。



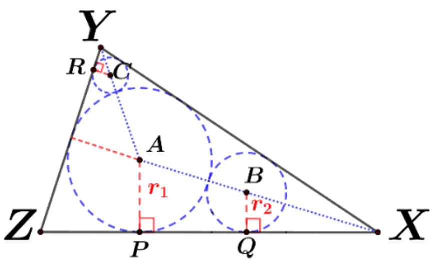
$$r_3 = r_1 \cdot \frac{\overline{ZA} - r_1}{\overline{ZA} + r_1} = r_1 \cdot \frac{\overline{ZA} - \overline{ZA}sin\frac{Z}{2}}{\overline{ZA} + \overline{ZA}sin\frac{Z}{2}}$$

$$= r_1 \cdot \frac{1 - sin\frac{Z}{2}}{1 + sin\frac{Z}{2}} = r_1 \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}{1 + \sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1 - \sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}{1 + \sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}} 。$$

由上述可知條件一中圖 2(1)、圖 2(2)的情況下，三圓的半徑可以用三角形三邊長來表示。

圖 2(1)：

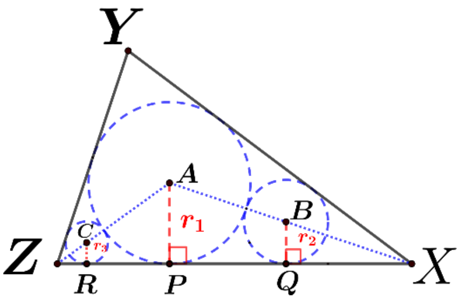


$$r_1 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1 - \sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1 + \sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

$$r_3 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1 - \sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}{1 + \sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}$$

圖 2(2)：



$$r_1 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1 - \sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1 + \sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

$$r_3 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1 - \sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}{1 + \sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}$$

由(一)、(二)可以得知三圓的半徑皆為實數，故皆可以使用尺規作圖來表示，所以只要是三邊長皆為實數的三角形，其內部滿足條件一的三圓，皆可以使用尺規作圖。

研究目的 2：滿足條件二

二、在任意已知的三角形內做三圓，每個圓皆必須與另外兩個圓外切且至少與三角形一個邊相切。

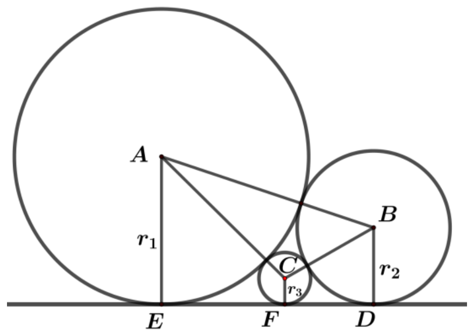
在一次偶然的嘗試中，從GGB中找出滿足條件二的作圖，從文獻中我們可以知道這三個切線圓為「索迪公式第四圓退化成一直線」[3]的圖形，一開始我們無法說明第三圓作圖步驟之間的合理性，後來嘗試反向思考，從結果回推，由代數的方式去思考及推導半徑長度及圓心的位置，再回來說明作圖方法，結果成功的說明作圖步驟的合理性，並發現其它更容易畫出第三圓的方法。

索迪公式第四圓退化成一直線[3]

如圖，已知一直線上有三圓，且三圓兩兩外切時，

三圓的半徑為r_1、r_2、r_3，

則 $\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}=2\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_3}\right)$。



【說明】

如圖，設圓A、圓B、圓C半徑分別為r_1、r_2、r_3

$\overline{DE}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$、　$\overline{DF}=\sqrt{(r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2}=2\sqrt{r_1r_3}$

$\overline{EF}=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2}=2\sqrt{r_2r_3}$，$\because \overline{DE}=\overline{DF}+\overline{FE}$

$\therefore\ 2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_3}+2\sqrt{r_2r_3}$ 同$\times\frac{1}{\sqrt{r_1r_2r_3}}$，可得$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$

$\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{2}{\sqrt{r_1r_2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}-\frac{2}{r_1r_3}-\frac{2}{r_2r_3}+\frac{2}{r_1r_2}=\frac{4}{r_1r_2}$

$$\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}=2\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_3}\right)$$

(一) 索迪公式第四圓退化，圖 4(1)、4(2)。

其中圖4(1)與圖 4(2)是相同的，在此我們對圖 4(1)提供了三個方法作圖。

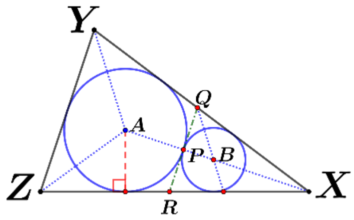
1. 面積法作圖

利用面積推導出第三圓半徑，再利用兩圓外切性質找出圓C圓心，並完成作圖。

【作圖過程】

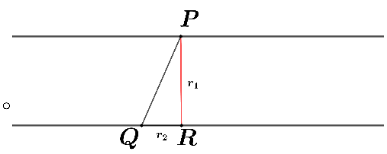
步驟 1：利用角平分線作出圓A與圓B，

並得知圓A與圓B的半徑為r_1 、r_2。



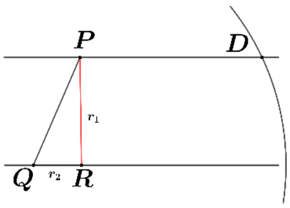
步驟 2：以圓A與圓B的半徑r_1 、r_2為底跟高作

直角三角形△ PQR，作過P點平行$\overleftrightarrow{QR}$直線。

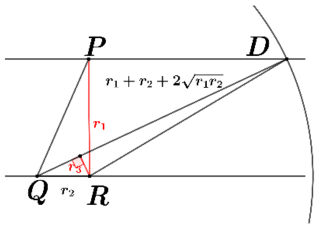


步驟 3：以Q點為圓心，作半徑為$r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}$的弧，

交平行線於D點。

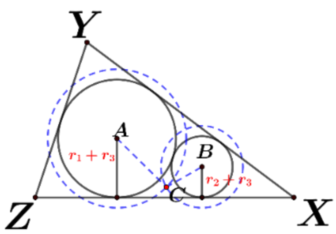


步驟 4：作△ QRD，並作過R點垂直$\overline{QD}$垂線r_3。

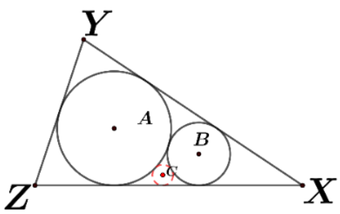


步驟5：分別以A、B為圓心， $r_1 + r_3$ 、$r_2 + r_3$

為半徑畫弧交於C點



步驟6：以C為圓心，r_3為半徑畫圓，即完成做圖。



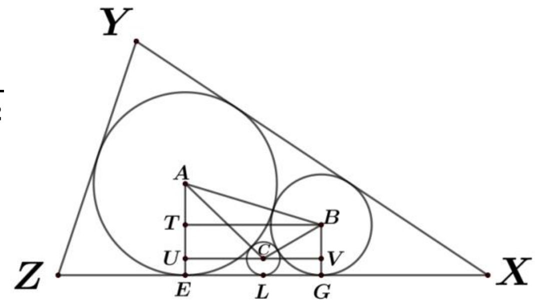
【作圖步驟合理性及利用三邊長表示半徑】

已知△XYZ，其三邊長為x、y、z，若已知圓A圓B在△XYZ內，且兩圓外切並切於底邊$\overline{XZ}$，求作與兩圓皆外切且也切於$\overline{XZ}$的第三圓圓 C。

(1) 步驟1在之前的作圖已經說明過，已經知道步驟是合理的。

(2) 接著是步驟2到步驟4的合理性，為什麼可以這樣做呢? 將題目分析如圖，

作平行$\overline{XZ}$且過圓心B與圓心C直線$\overleftrightarrow{TB}$、$\overline{UV}$，



可知$\overline{AT} = r_1 - r_2$、$\overline{AB} = r_1 + r_2 \Rightarrow \overline{TB} = 2\sqrt{r_1 r_2}$

$\overline{AU} = r_1 - r_3$，$\overline{AC} = r_1 + r_3 \Rightarrow \overline{UC} = 2\sqrt{r_1 r_3}$

$\overline{BV} = r_2 - r_3$，$\overline{BS} = r_2 + r_3 \Rightarrow \overline{VC} = 2\sqrt{r_2 r_3}$

$\Longrightarrow \overline{TB} = \overline{UV} = \overline{EG} = \overline{EL} + \overline{LG} = \overline{UC} + \overline{VC}$

$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_2 r_3}$

$\Rightarrow \sqrt{r_1 r_2} = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})\sqrt{r_3} \Longrightarrow r_1 \cdot r_2 = (r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}) \cdot r_3$

由上式可知作一底為r_2、高為r_1的三角形的面積會與底為$r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}$、高為$r_3$面積相同，所以我們在步驟2到步驟4建構了兩個三角形，並利用面積相等的方式來作出小圓半徑r_3。

(3) 得到r_3後，再利用引理1可知切點必過圓心，以$r_1 + r_3$、$r_2 + r_3$為半徑畫圓交於S點，

則C點即為圓S的圓心，再以S為圓心、r_3為半徑畫圓，即可完成作圖。

(4) $\because r_1 \cdot r_2 = (r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}) \cdot r_3 \therefore r_3 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{r_1 \cdot r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$

所以可知r_3是可以用三角形三邊長表示。

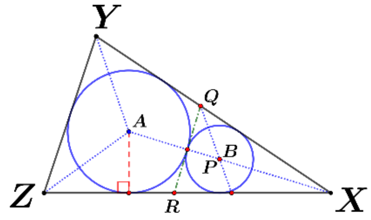
2. 角平分線作圖

接著提供第二種作法，利用圓A與圓B的切點跟$\overline{XZ}$切點，三點所形成的角，作角平分線得到圓C與$\overline{XZ}$切點，再使用引理2得到圓心與半徑。

【作圖過程】

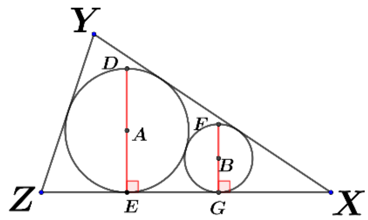
步驟 1：利用角平分線作出圓A與圓B，

並得知圓A與圓B的半徑為r_1、r_2。

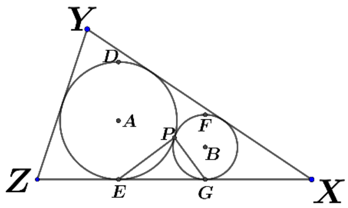


步驟 2：畫出過A和B點的兩條垂直線，

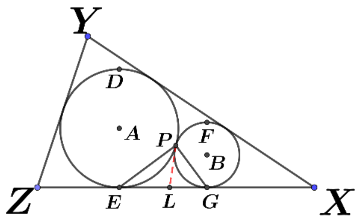
找出D、E、F、G點。



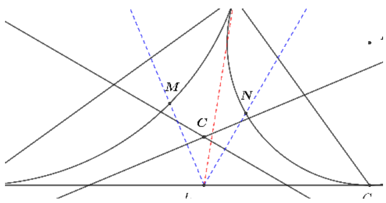
步驟 3：連接$\overline{PE}$和$\overline{PG}$，形成$\angle EPG$。



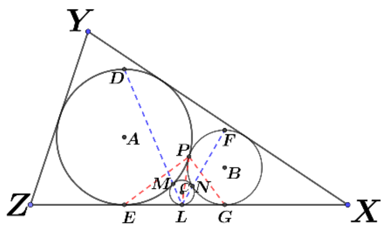
步驟 4：作∠EPG角平分線交$\overline{XZ}$於L，即$\overline{PL}$。



步驟5：作$\overline{ML}$、$\overline{NL}$中垂線交於C點，C點為圓C圓心。



步驟 6：以C為圓心，$\overline{CL}$為半徑畫圓，即完成作圖。



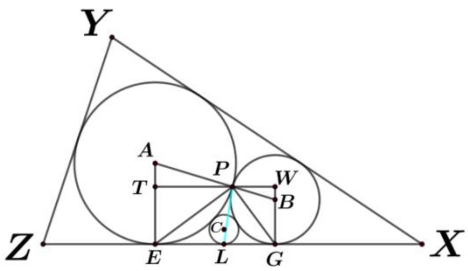
【作圖步驟合理性及利用三邊長表示半徑】

已知△XYZ，其三邊長為x、y、z，若已知圓A圓B在△XYZ內，且兩圓外切並切於底邊$\overline{XZ}$，求作與兩圓皆外切且也切於$\overline{XZ}$的第三圓圓C。

(1) 步驟1在之前的作圖已經說明過，已經知道步驟是合理的。

(2) 為什麼步驟2到步驟4的做法是合理的呢?為什麼$\angle EPG$的角平分線$\overleftrightarrow{PL}$會通過圓C切點L呢?我們嘗試利用內分比性質來說明正確性。

如右圖所示，可以得知



$$\overline{PE}^2=\overline{PT}^2+\overline{TE}^2=\overline{AP}^2-\overline{AT}^2+\overline{TE}^2$$

$$=r_1{}^2-\overline{AT}^2+\left(r_1-\overline{AT}\right)^2=2r_1(r_1-\overline{AT})$$

$$\because \overline{ET}=\overline{WG}\quad \therefore r_1-\overline{AT}=\overline{WB}+r_2\Rightarrow \overline{WB}=r_1-r_2-\overline{AT}$$

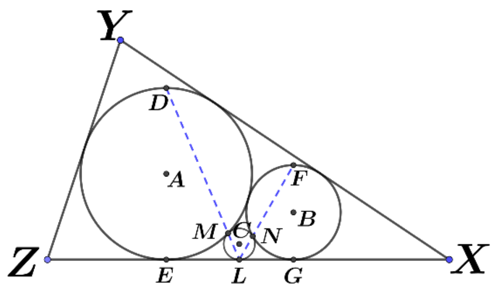
$$\overline{PG}^2=\overline{PW}^2+\overline{WG}^2=r_2{}^2-\overline{WB}^2+(\overline{WB}+r_2)^2=2r_2(r_2+\overline{WB})$$

$$=2r_2(r_2+r_1-r_2-\overline{AT})=2r_2(r_1-\overline{AT})$$

$$\Rightarrow \overline{PE}:\overline{PG}=\sqrt{2r_1(r_1-\overline{AT})}:\sqrt{2r_2(r_1-\overline{AT})}=\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}=\overline{EL}:\overline{LG}$$

⇒ 可知$\overline{PL}$為∠EPG角平分線，故步驟2到步驟4是正確的。

(3) 根據引理2可以知道平行切線且過圓心的直線，其對稱點連線會通過切點，如圖，即$\overline{DL}$會通過圓A和圓C的切點M，$\overline{FL}$會通過圓B和圓C的切點N，則可知$\overline{ML}$、$\overline{NL}$為圓C的兩條弦，做$\overline{ML}$、$\overline{NL}$中垂線交點，即可得圓C圓心，故步驟5到步驟6是合理的。



(4) 以C點為圓心，$\overline{CL}$為半徑畫圓，即完成作圖。

由於角平分線作法只需要在原始的三角形內即可完成，減少作圖的流程，所以我們認為角平分線法作圖比面積法作突來的容易。

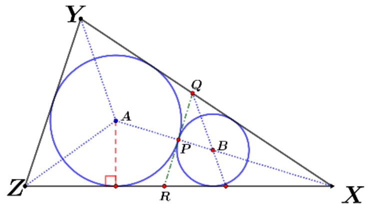
3. 對稱點作圖。

在嘗試作圖的過程中，第一個成功畫出第三圓的方法是接下來的對稱點作圖，對圓A、圓B作平行及垂直圓心的線，並將交點連起來即$\overrightarrow{IJ}$，發現可以找到圓C與$\overline{XZ}$切點L，在利用引理2及相似的概念找出圓C圓心C，即完成作圖。

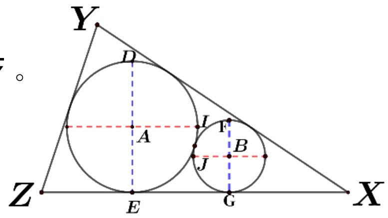
【作圖過程】.

步驟 1：利用角平分線作出圓A與圓B，

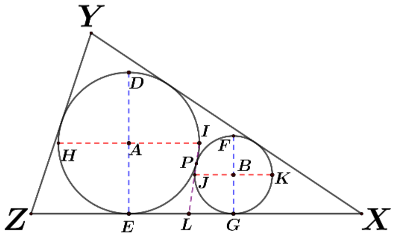
並得知圓A與圓B的半徑為r_1、r_2。



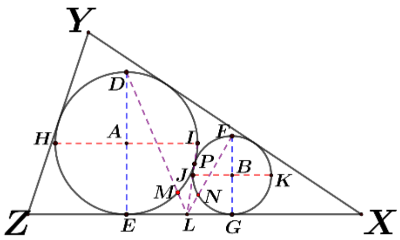
步驟2：過A、B作$\overleftrightarrow{DE}\perp\overline{XZ}$、$\overleftrightarrow{FG}\perp\overline{XZ}$及$\overleftrightarrow{HI}//\overline{XZ}$、$\overleftrightarrow{JK}//\overline{XZ}$。



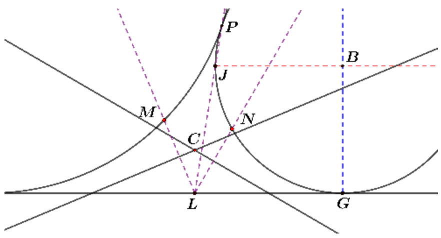
步驟 3：連接$\overrightarrow{IJ}$交$\overline{XZ}$於L點。



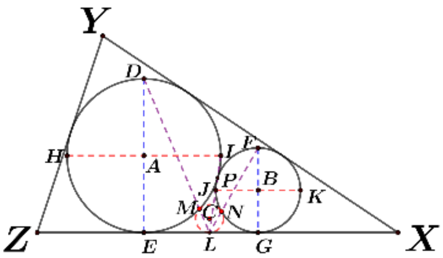
步驟4：連接$\overline{DL}$交圓A於M、連接$\overline{FL}$交圓B於N。



步驟5：作$\overline{ML}$、$\overline{NL}$中垂線交於C點，C點為圓C圓心。



步驟 6：以C為圓心，$\overline{CL}$為半徑畫圓，即完成作圖。

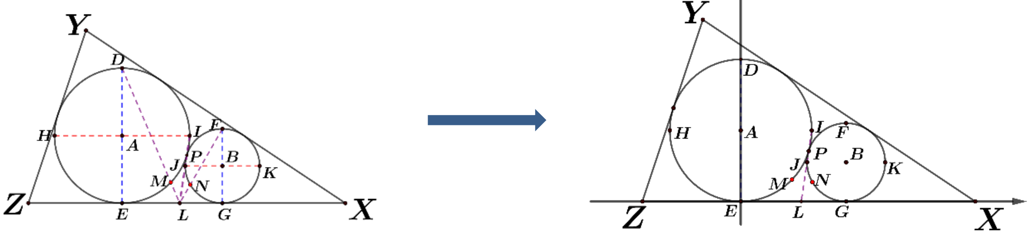


【作圖步驟合理性及利用三邊長表示半徑】

已知△XYZ，其三邊長為x、y、z，若已知圓A圓B在△XYZ內，且兩圓外切並切於底邊$\overline{XZ}$，求作與兩圓皆外切且也切於$\overline{XZ}$的第三圓圓 C。

(1) 步驟1在之前的作圖已經說明過，已經知道步驟是合理的。

(2) 為什麼$\overleftrightarrow{IJ}$會通過圓C切點L呢? 將題目座標化，以$\overleftrightarrow{XZ}$為X軸、$\overleftrightarrow{DE}$為Y軸，如下圖，由面積法作圖中可知，L點若為圓C切點，則我們可之L的座標為$L(2\sqrt{r_1r_3},0)$。若可說明$\overleftrightarrow{IJ}$的斜率與$\overleftrightarrow{IL}$斜率相同，則$\overleftrightarrow{IJ}$會通過L，則得證。



因此將I點、J點、L點，座標化，令圓A半徑為r_1、圓B半徑為r_2、圓C半徑為r_3，則

$I(r_1,r_1)$、$K(r_2+2\sqrt{r_1r_2},r_2)$、$J\left(2\sqrt{r_1r_2}-r_2，r_2\right)$、$L(2\sqrt{r_1r_3},0)$

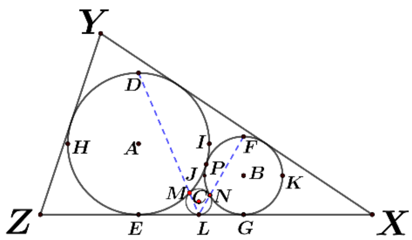
$$m_{IJ}=\frac{r_1-r_2}{r_1-(2\sqrt{r_1r_2}-r_2)}=\frac{r_1-r_2}{r_1-2\sqrt{r_1r_2}+r_2}=\frac{r_1-r_2}{(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2})^2}=\frac{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2}}$$

由索迪公式可知$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}\Rightarrow\sqrt{r_3}=\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}$

$$m_{IL}=\frac{r_1}{r_1-2\sqrt{r_1r_3}}=\frac{r_1}{r_1-2\times\sqrt{r_1}\times\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}}=\frac{r_1(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})}{r_1\sqrt{r_1}+r_1\sqrt{r_2}-2r_1\sqrt{r_2}}=\frac{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2}}$$

$\because m_{\overline{IJ}}=m_{\overline{IL}}$ $\therefore$ 可知 I、J、L 三點共線，故可以說明，步驟2到步驟3是正確的。

(3) 同角平分線作圖步驟，根據引理2，做$\overline{ML}$、$\overline{NL}$中垂線交點，即可得圓C圓心，再以$\overline{CL}$為半徑畫圓，故步驟4到步驟5是合理的。



(4) 以C點為圓心，$\overline{CL}$為半徑畫圓，即完成作圖。

對稱點作圖法中發現只需要將對稱點連接，就可以找出第三個圓，圓C與三角形底邊的切點，再作中垂線即可找出圓心，大幅的降低圓規的使用頻率，因此我們認為這是最簡易的作圖法。

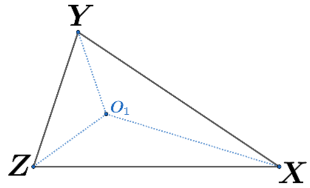
研究目的 3 同時滿足條件一與條件二

三、馬爾法蒂圓

再研究這問題的前期，我們沒有思考過會有這種情形，而我們在做文獻資料查詢的時候發現了這個作圖方法，這個作圖稱為馬爾法蒂圓，他同時滿足條件一與條件二的作圖，文獻中有提供作圖的方法，我們在此呈現如下。

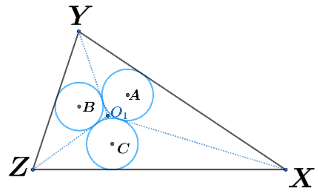
【作圖流程】

步驟 1：作△XYZ的三條角平分線，交於一點O_1。



步驟 2：分別對△XO_1Z、△XO_1Y、△YO_1Z作

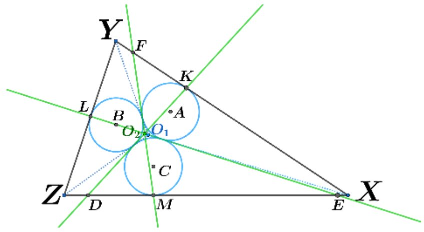
內切圓，圓C、圓A、圓B。



步驟 3：作圓 A 與圓 B、圓 B 與圓 C、圓 C 與圓 A

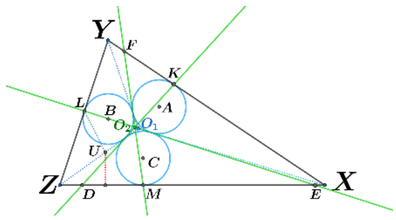
的其中一條切線，依序為$\overline{FM}$、$\overline{KD}$、$\overline{LE}$。

並將其交點命名為O_2。



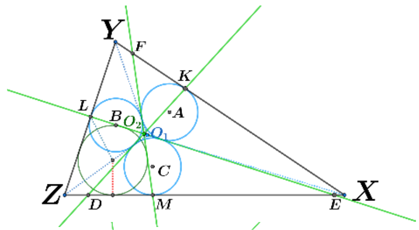
步驟 4：在四邊形 Z MO_2L 內畫出兩條角平分線以找出

圓心 U，再以$\overline{ZX}$做一過 U 點的垂直線。



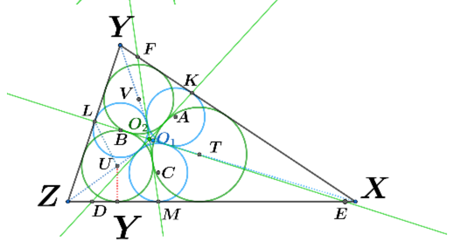
步驟 5：以 U 點作為圓心 垂直線作為半徑做出

四邊形 Z MO_2L 的內切圓。

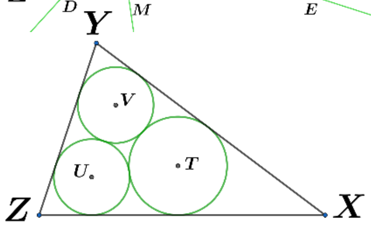


步驟 6：重複步驟 4~5 做出四邊形 XKO_2M

和 YKO_2L 的內切圓 T、V。



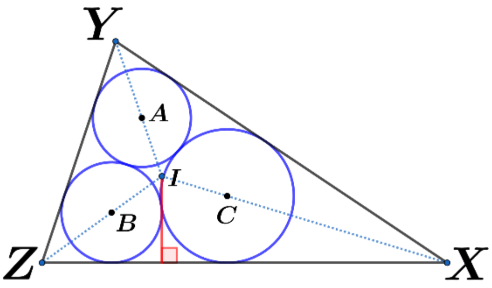
步驟 7：只留下圓T、圓U、圓V，即完成馬爾法蒂圓。



【三邊長表示圓半徑】

在一個已知的三角形內畫三個圓，每個圓與其他兩個圓及三角形其中兩邊相切。若△XYZ三邊長為x、y、z，內部三個切線圓的半徑分別為a、b、c，

令$s=\frac{x+y+z}{2}$，內心為I，內切圓半徑為r，則



$$a=\frac{r}{2(s-y)}(s-r+\overline{IY}-\overline{IX}-\overline{IZ})$$

$$b=\frac{r}{2(s-z)}(s-r+\overline{IZ}-\overline{IX}-\overline{IY})$$

$$c=\frac{r}{2(s-x)}(s-r+\overline{IX}-\overline{IY}-\overline{IZ})$$

$\boxed{\text{研究目的 4}}$滿足條件三

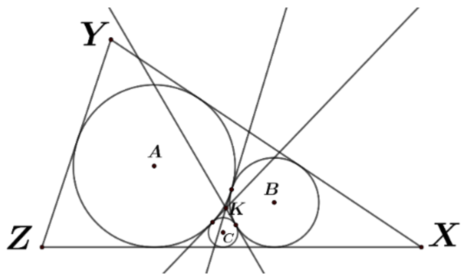
四、三角形內部若有四圓以上(含)，且其中三圓為條件一或條件二，則其它圓必須與任意三圓相切。

接著探討三角形的第四、五圓的作圖方法，我們在經過反覆嘗試後得到可以作出滿足條件三的作圖方法，作出第四圓的方法，共有兩種尺規作法。

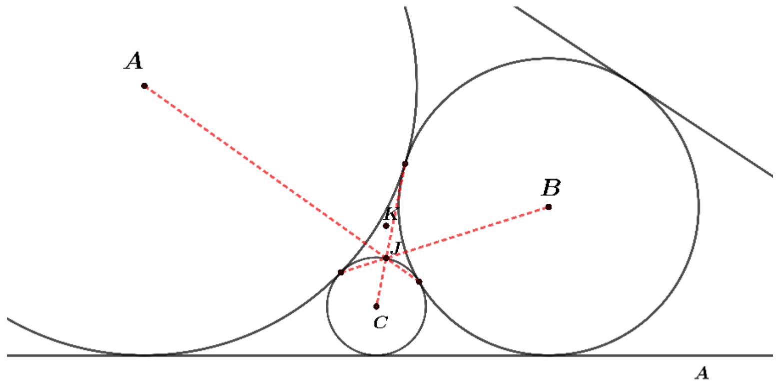
(一) 符合索迪公式第四圓退化情形的第四圓

【作圖流程】

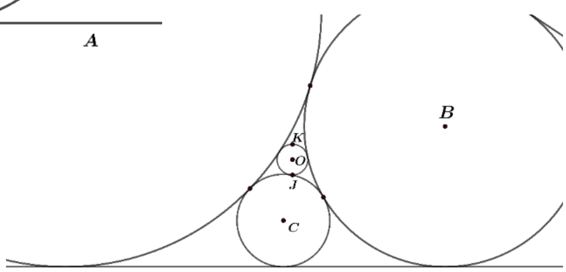
步驟 1：畫出三圓交點的切線，找出交點 K。



步驟 2：作圓心 A 與圓 B、圓 C 交點的連線、和圓心 B 與圓 A、圓 C 交點的連線、和圓心 C 與圓 A、圓 B 交點的連線 找出三條連線的交點 J



步驟 3：以$\overline{JK}$為直徑畫圓，即完成第四圓。



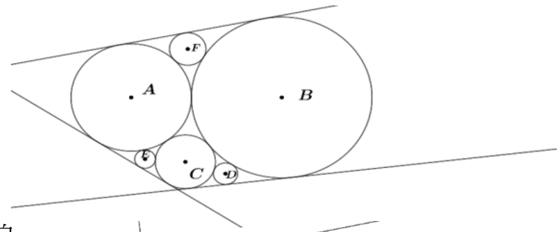
我們之後反覆測試好幾組三角形，發現都能成功畫出第四圓，接著嘗試用一樣的方法畫第五圓，發現無法作出，我們發現在不是索迪公式的的四圓退化的情形下，就無法成功。

因此我們猜測這方法只適用於三圓切於一直線的情況，由於我們尚未證實這個想法，所以我們只能在此提出第四圓的作圖方法。

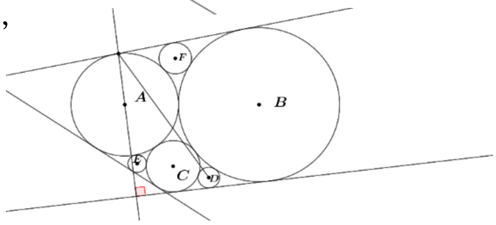
(二) 三角形內三圓相切的內切圓

我們反覆測試都是成功，我們猜測這是能適用於所有三圓相切的第四圓尺規作法。

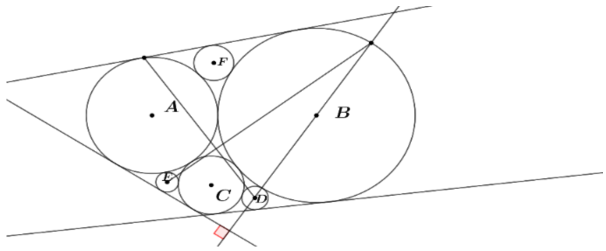
步驟 1：作出三圓兩兩的切線並作出三圓兩兩的索迪第四圓退化的圖形。



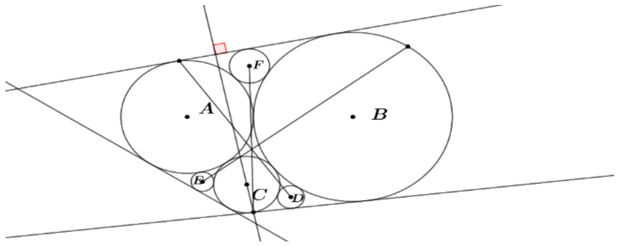
步驟 2：作垂直 B、C 圓切線並過圓心 A 的垂直線，將其與圓周的交點和圓心 D 連線。



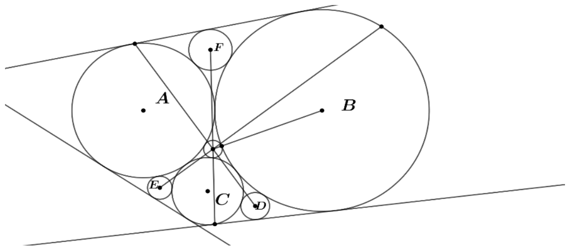
步驟 3：作垂直 A、C 圓切線並過圓心 B 的垂直線，將其與圓周的交點和圓心 E 連線。



步驟 4：作垂直 A、B 圓切線並過圓心 C 的垂直線，將其與圓周的交點和圓心 F 連線。



步驟 5：找出步驟二到步驟四三條連線的交點 O 並將點 O 和點 A、B、C 任意點連起 找出其與圓周的交點其交點與點 O 的距離為半徑點 O 為圓心畫圓。



上述兩個方法，我們都經過反覆測試，但都並未證實步驟間的合理性，如果我們猜測為真，我們就能在三角形內不斷畫出符合我們條件的第 N 圓，所以我們把證明這兩個方法，訂為日後目標。

研究目的 5

五、滿足條件一或條件二的情況下，能否比較其三圓面積和大小。

推測給定三角形內的任何三個不相交的圓是馬爾法蒂圓總面積和最大。使用GGB作圖，嘗試驗證這個結論的正確性，但發現三角形的種類眾多，所以先將三角形邊長固定為整數的直角三角形與等腰三角形，並計算圖1、圖2、圖3、圖4的圓面積和，其中圖 3 為馬爾法蒂圓，並比較它與其他情況下的圓面積和大小。

(一) 直角三角形

1. 當三邊長為3 、4 、5的直角三角形，在圖1、圖2、圖3、圖4的圓面積總和分別為：

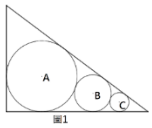


圖1：圓A面積約為：3.14159、圓B面積約為：0.45835

圓C面積約為：0.06687、面積和約為：4.21823

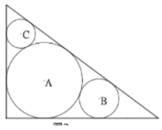


圖2：圓A面積約為：3.14159、圓B面積約為：0.84783

圓C面積約為：0.09670、面積和約為：4.44778

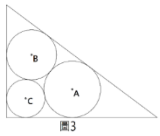


圖3：圓A面積約為：1.77658、圓B面積約為：1.3888

圓C面積約為：0.81052、面積和約為：3.97595

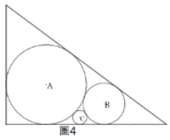


圖4：圓A面積約為：3.14159、圓B面積約為：0.84783

圓C面積約為：0.09670、面積和約為：4.08613

我們發現圖2的面積最大，馬爾法蒂圓的圖3面積反而最小。

2. 當三邊長為5 、12 、13的直角三角形時：

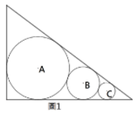


圖1：圓A面積約為：12.56637、圓B面積約為：5.67610

圓C面積約為：2.56383、面積和約為：20.80630

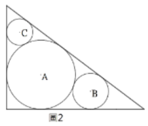


圖2：圓A面積約為：12.56637、圓B面積約為：5.67610

圓C面積約為：1.03091、面積和約為：19.27338

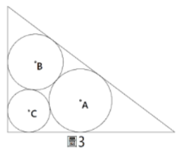


圖3：圓A面積約為：8.82893、圓B面積約為：4.14748

圓C面積約為：3.22010、面積和約為：16.52052

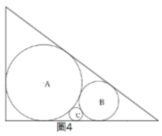


圖4：圓A面積約為：12.56637、圓B面積約為：5.67610

圓C面積約為：0.51755、面積和約為：18.76002

我們發現圖1的面積最大，馬爾法蒂圓的圖3的面積最小。

3. 當三邊長為20、21、29的直角三角形時：

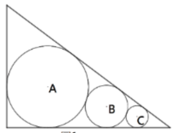


圖1

圖1：圓A面積約為：113.09734、圓B面積約為：23.76247

圓C面積約為：4.99265、面積和約為：141.85246

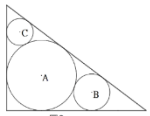


圖2

圖2：圓A面積約為：113.09734、圓B面積約為：23.76247

圓C面積約為：21.38149、面積和約為：158.24130

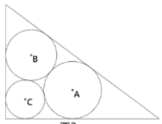


圖3

圖3：圓A面積約為：57.75710、圓B面積約為：55.36551

圓C面積約為：29.20781、面積和約為：142.33043

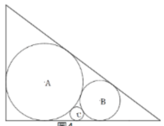


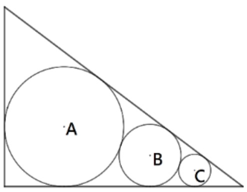
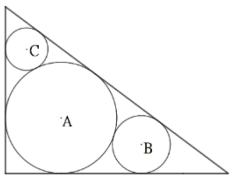
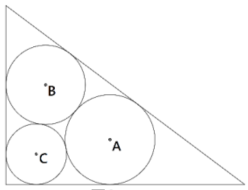
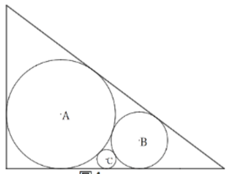
圖4

圖4：圓A面積約為：113.09734、圓B面積約為：23.76247

圓C面積約為：3.00418、面積和約為：139.86398

我們發現圖2的面積最大，圖4的面積最小，但是圖3的馬爾法蒂圓並不是最小。

我們發現在邊長為 3、4、5 的直角三角形中，馬爾法蒂圓並不是面積和最大值，反而還是這四種作法中最小的，我們猜測馬爾法蒂圓的面積可能為最小值，接著再試幾組畢氏數，發現在邊長為20、21、29的直角三角形中，馬爾法蒂圓不是最小值，接著整理幾個邊長為整數的直角三角形，利用GGB作圖，並計算三角形內部三圓的面積和，如表(一)。

圖形 / 邊長	 圖1	 圖2	 圖3	 圖4
	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和
3、4、5	4.2183	**4.44778**	3.97595	4.08613
5、12、13	**20.8063**	19.27338	16.52052	18.76002
8、15、17	**42.6869**	41.68147	36.48148	39.8267
7、24、25	53.3232	**46.03929**	38.23875	45.588
11、60、61	**171.15385**	136.94331	109.70201	137.24041
12、35、37	**139.8161**	124.49507	104.87754	122.46115
13、84、85	**257.42358**	201.32206	159.51875	202.30873
15、112、113	**362.20958**	278.39332	218.74317	280.26912
16、63、65	**304.20426**	256.23502	210.3628	254.86676
20、21、29	141.8526	**158.2413**	142.33043	139.86398

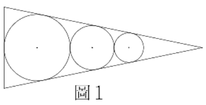
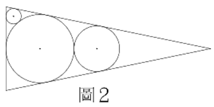
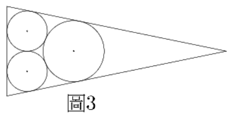
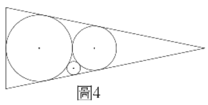
28、45、53	448.78503	453.51869	401.29926	426.59902
33、56、65	658.7541	657.66276	579.80312	622.26284
36、77、85	976.28484	926.6284	802.24523	894.88471

表(一)

從表(一)中我們可以找出反例說明馬爾法蒂圓的面積和沒有任何一次是最大的，但也不全都是最小的，我們就猜測馬爾法蒂圓在三角形內的三個切線圓面積和不會是最大值，查閱文獻發現，在 1930 年，數學家 Lob 和 Richmond 已經發現馬爾法蒂圓不會是最大值，並且在 1968 年，數學家 Gabai 和 Liban 對這一事實進行了嚴格的數學證明[9]，因此我們得知在已知的三角形中作三個切線圓，馬爾法蒂圓面積總和不會是最大的。

(二) 等腰三角形

我們一樣做出多組等腰三角形，並比較四種不同作圖方法下的圓面積和大小關係，嘗試將底邊長與腰長求比值，並嘗試找出比值與面積和大小是否有關，如表(二)。

圖形 ＼ 邊長	 圖 1	 圖 2	 圖3	 圖4	底長/腰長
	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	
1、4、4	1.20395	1.00577	0.83247	1.00986	0.25
2、4、4	2.80783	2.67248	2.40045	2.63196	0.50
3、4、4	4.01339	4.1339	3.92814	3.96133	0.75
4、4、4	4.70592	5.11963	5.05072	4.7294	1.00
5、4、4	4.7853	5.48179	5.54524	4.82269	1.25
6、4、4	4.12331	5.04294	5.1923	4.14449	1.50
7、4、4	2.57709	3.50067	3.65089	2.58159	1.75
1、5、5	1.36037	1.09771	0.89062	1.10546	0.20
2、5、5	3.43895	3.13141	2.73147	3.11073	0.40
3、5、5	5.22969	5.16031	4.75335	5.03185	0.60
4、5、5	6.55646	6.83467	6.55181	6.50674	0.80
5、5、5	7.35301	7.99943	7.89176	7.38968	1.00
6、5、5	7.53798	8.54166	8.60359	7.59764	1.20
7、5、5	7.00947	8.32758	8.51929	7.05489	1.40

8、5、5	5.65486	7.16126	7.41565	5.67582	1.60
9、5、5	3.35758	4.70559	4.9163	3.36161	1.80
1、6、6	1.48105	1.16504	0.93208	1.17541	0.17
2、6、6	3.97302	3.49304	2.98064	3.48766	0.33
3、6、6	6.31762	6.01309	5.401	5.92192	0.50
4、6、6	8.24668	8.30509	7.76376	8.03894	0.67
5、6、6	9.68821	10.1769	9.80923	9.64451	0.83
6、6、6	10.58833	11.51917	11.36413	10.64114	1.00
7、6、6	10.87742	12.23951	12.54308	10.9627	1.17
8、6、6	10.47131	12.23031	12.95768	10.54689	1.33
9、6、6	9.27744	11.34661	12.37206	9.3251	1.50
10、6、6	7.19948	9.37443	10.47103	7.21956	1.67
11、6、6	4.1397	5.94476	6.7601	4.14335	1.83
3、2、2	1.03083	1.26073	1.29808	1.03612	1.50
3、7、7	7.29054	6.7295	5.92197	6.66944	0.43
6、7、7	13.40882	14.15994	13.69931	13.3741	0.86
8、7、7	14.80427	16.57624	16.60824	14.92056	1.14
4、10、10	13.75578	12.52562	10.9259	12.44293	0.40
4、8、8	11.23132	10.68993	9.600178	10.52785	0.50
9、10、10	28.10203	29.95131	29.16149	28.11175	0.90
10、11、11	34.17661	36.49547	35.57893	34.29698	0.91
79、100、100	2600.86062	2704.83396	2588.4851	2578.49599	0.79
78、100、100	2578.61056	2675.29341	2555.7927	2553.70465	0.78
77、100、100	2555.83905	2645.252	2522.6554	2528.32669	0.77

表(二)

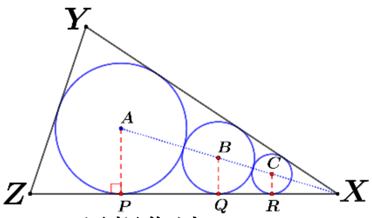
在表(二)中我們發現當底邊長兩腰長的比值小於 0.77 時，馬爾法蒂圓得面積和是最小，比值超過 1 的馬爾法蒂圓的面積和最大，因此我們猜測兩腰夾角大於$60°$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最大的，而兩腰夾角小於$\cos^{-1}\frac{14071}{20000}$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最小的。

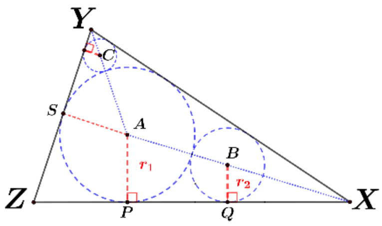
伍、研究結果

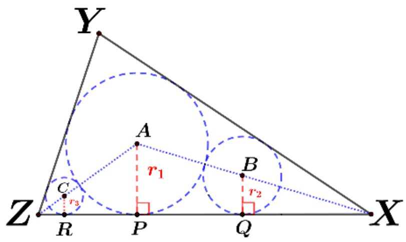
研究結果 1

一、 三角形內部三個圓中，每個圓皆需與三角形其中兩個邊相切且至少與另一相異圓外切。能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

(一) 圖形







(二) 尺規作法

1. 作三角形三內角平分線，做圓A。
2. 圓A與角平分線交點為圓B和圓C的切點。
3. 再作角平分線交B 、C，作圓B、圓C，即完成作圖。

(三) 三圓半徑

1. 圓A半徑r_1及圓B半徑r_2，可用三角形三邊長x、y、z表示

$$r_1 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

2. 圓C半徑

(1) 圖一，$r_3 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \left(\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}\right)^2$ 。

(2) 圖二，$r_3 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1-\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}{1+\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}$

(3) 圖三，$r_3 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1-\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}{1+\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}$

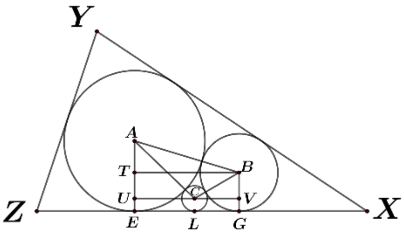
(四) 由(三)可知三圓的半徑皆為實數，故皆可以使用尺規來作圖，因此我們得知，

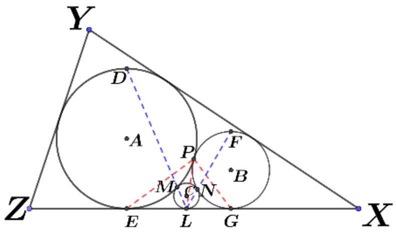
若三角形三邊長皆為實數，其內部滿足條件一的三圓，皆可以尺規作圖。

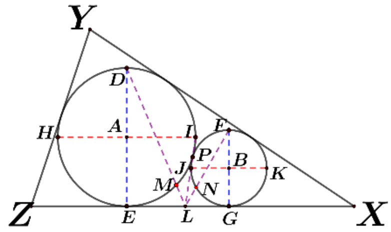
研究結果 2

二、 三角形內部三個圓中，每個圓皆需與另外兩個圓外切且至少與三角形一個邊相切。能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

(一) 圖形







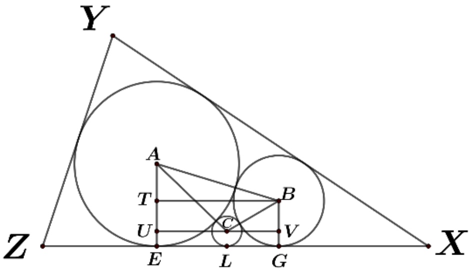
(二) 尺規作法

1. 作三角形三內角平分線，做圓A及圓B。

2. 三種方法。

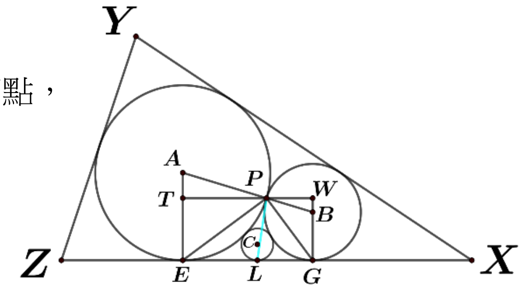
(1) 等面積法求r_3。

以A、B為圓心，r_1+r_3、r_2+r_3為半徑畫弧交於圓C的圓心C，r_3為半徑畫圓，即可完成作圖。



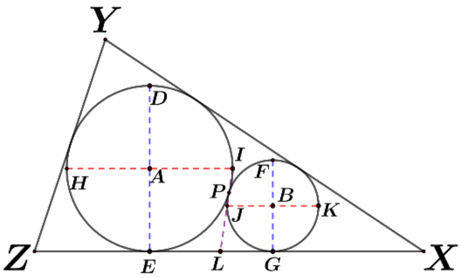
(2) 角平分線求圓C切點L。

如圖，$\angle EPG$平分線會通過圓C與底邊$\overline{XZ}$切點，所以我們可以利用角平分線做出切點L，並且找出圓心C及半徑r_3。



(3)對稱點求圓C切點L。

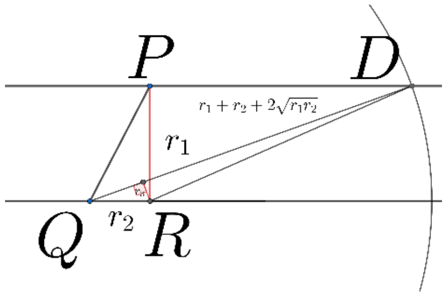
如圖，兩條平行底邊的直徑與圓A、圓B交點I、J，$\overleftrightarrow{IJ}$會通過切點L，並且找出圓心C及半徑r_3



(三) 三圓半徑及作法合理性

1. 等面積法

圓C半徑$r_3 = \frac{r_1 \cdot r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$



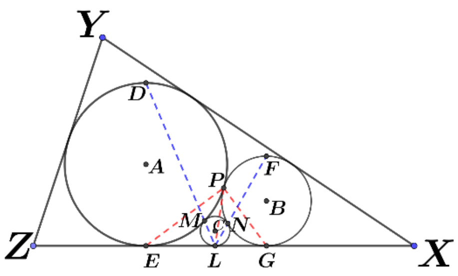
2. 角平分線作法

如圖，已知L為圓C與$\overline{XZ}$切點

$\because \overline{PE} : \overline{PG} = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2} = \overline{EL} : \overline{LG}$

根據內分比性質

$\therefore \overline{PL}$為角平分線，故作法正確。



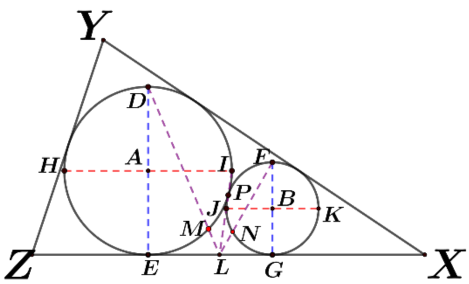
3. 對稱點作法

如圖，已知L為圓C與$\overline{XZ}$切點

$\because m_{\overline{IJ}} = m_{\overline{IL}}$

斜率相同，表示為同一直線

∴ 可知 I、J、L 三點共線，故做法正確。



(四) 對稱點法是三種作法中步驟最簡單的。

(五) 圓A半徑r_1及圓B半徑r_2，可用三角形三邊長x、y、z表示

$$r_1 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)} \times \frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

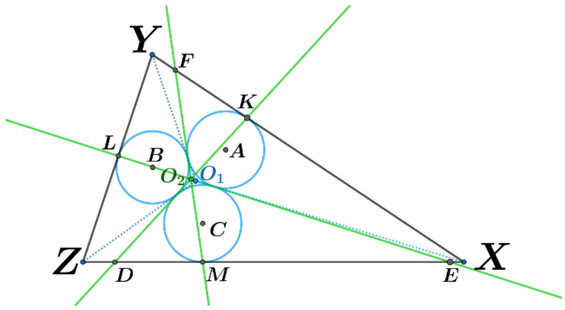
且圓C半徑r_3與圓A半徑r_1圓B半徑r_2關係式為 $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$

研究結果 3

三、 在同時滿足條件一與條件二的情況下，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

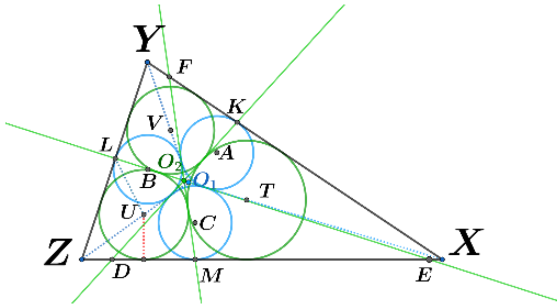
研究目的 3 的部份，我們根據文獻記載找到作圖方法還有三圓半徑與三角形三邊長。

步驟 1：作△ XYZ的三條角平分線，交於一點O_1。

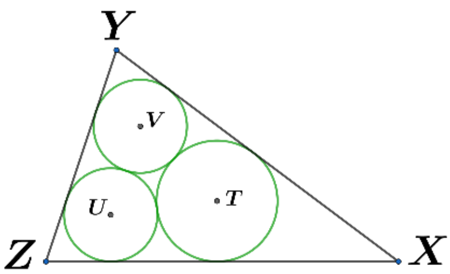


步驟 2：分別對△ XO_1Z、△ XO_1Y、△ YO_1Z作內切圓，圓C、圓A、圓B。

步驟 3：作圓 A 與圓 B、圓 B 與圓 C、圓 C 與圓 A 的其中一條切線，依序為$\overline{FM}$、$\overline{KD}$、$\overline{LE}$。並將其交點命名為O_2。

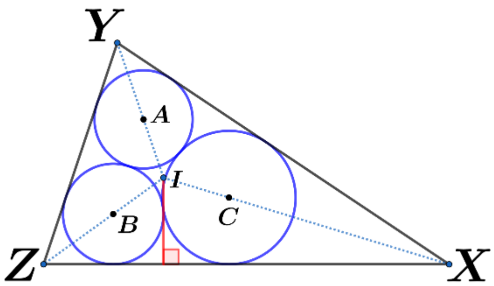


步驟 4：在四邊形 ZMO_2L、XKO_2M、YKO_2L 作出內切圓圓T、圓U、圓V。



步驟 5：只留下圓T、圓U、圓V，即完成馬爾法蒂圓。

如下圖，一個已知的三角形內畫三個圓，每個圓與其他兩個圓及三角形其中兩邊相切。若△ XYZ三邊長為x、y、z，內部三個切線圓的半徑分別為a、b、c，令$s=\frac{x+y+z}{2}$，內心為I，內切圓半徑為r，則



$a=\frac{r}{2(s-y)}(s-r+\overline{IY}-\overline{IX}-\overline{IZ})$、

$b=\frac{r}{2(s-z)}(s-r+\overline{IZ}-\overline{IX}-\overline{IY})$、

$$c=\frac{r}{2(s-x)}(s-r+\overline{IX}-\overline{IY}-\overline{IZ})$$

研究結果 4

四、 三角形內部若有四圓以上(含)，且其中三圓為條件一或條件二，則其它圓必須與任意三圓相切。能否尺規作圖作出?

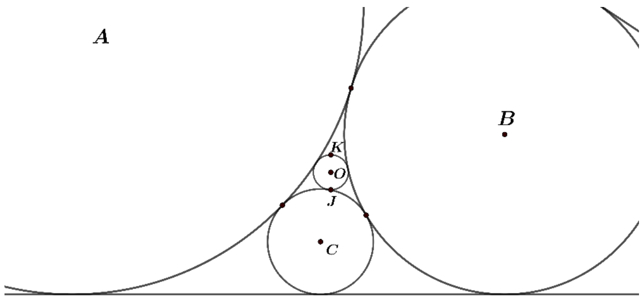
下列兩個方法，雖然我們無法運用數學理論說明，但我們在很多種情況下嘗試過，結果都為成功，所以我們在此提出對於這兩個作圖方法的猜測。

(一) 用於三圓相切於一直線的圖形

步驟一：畫出三圓交點的切線，找出交點 K。

步驟二：作圓心 A 與圓 B、圓 C 交點的連線、和圓心 B 與圓 A、圓 C 交點的連線，和圓心 C 與圓 A、圓 B 交點的連線，找出三條連線的交點 J。

步驟三：以$\overline{JK}$為直徑畫圓。



(二) 用於任何三圓兩兩相切的圖形。

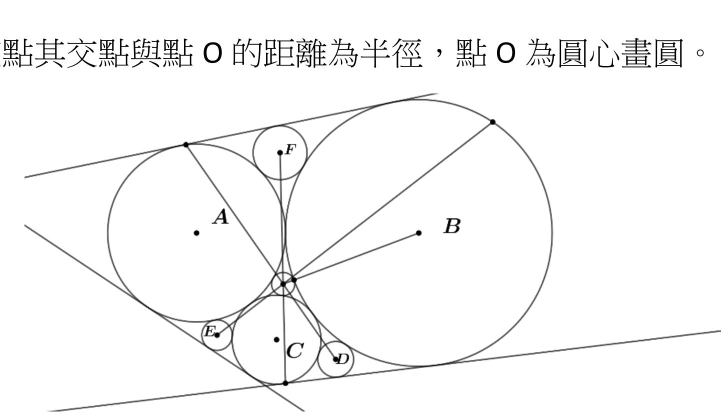
步驟一：作出三圓兩兩的切線並作出三圓兩兩的索迪第四圓退化的圖形。

步驟二：作垂直 B、C 圓切線並過圓心 A 的垂線，將與圓周的交點和圓心 D 連線。

步驟三：作垂直 A、C 圓切線並過圓心 B 的垂線，將與圓周的交點和圓心 E 連線。

步驟四：作垂直 A、B 圓切線並過圓心 C 的垂線，將與圓周的交點和圓心 F 連線。

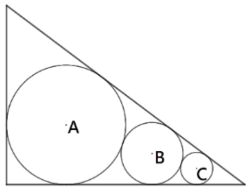
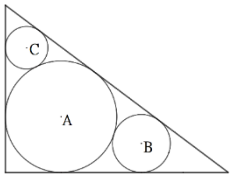
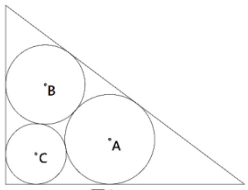
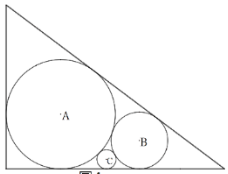
步驟五：找出步驟二到步驟四三條連線的交點 O 並將點 O 和點 A、B、C 任意點連起 找出其與圓周的交點其交點與點 O 的距離為半徑，點 O 為圓心畫圓。



研究結果 5

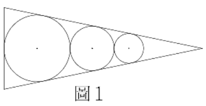
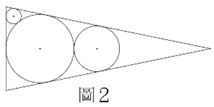
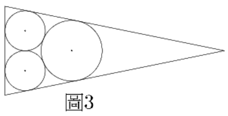
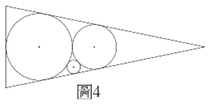
五、 滿足條件一或條件二的情況下，能否比較其三圓面積和大小。

(一) 直角三角形

圖形 / 邊長	 圖1	 圖2	 圖3	 圖4
	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和
3、4、5	4.2183	4.44778	3.97595	4.08613
5、12、13	20.8063	19.27338	16.52052	18.76002
20、21、29	141.8526	158.2413	142.33043	139.86398

由文獻中我們可以得知，數學家 Gabai 和 Liban 在 1968 年提出的論文中，表示馬爾法蒂問題中的圓面積和不會是最大值[6]，因此我們做了十三組的資料的比較，我們發現在邊長為 3、4、5 的直角三角形中就可以知道，馬爾法蒂圓的面積和不會是最大值，但卻是我們比較的四個情況中最小，但在 20、21、29 中的直角三角形，馬爾法蒂圓並不會是最小，我們發現沒特定規律可以比較出三圓面積和的大小關係，但發現若兩股長越接近時，馬爾法蒂圓的面積和越接近四種情況中的最大值。

(二) 等腰三角形

圖形 / 邊長	 圖 1	 圖 2	 圖3	 圖4	底長 / 腰長
	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	
3、4、4	**4.01339**	**4.1339**	**3.92814**	**3.96133**	0.75
4、4、4	**4.70592**	**5.11963**	**5.05072**	**4.7294**	1.00
5、4、4	**4.7853**	**5.48179**	**5.54524**	**4.82269**	1.25
4、5、5	**6.55646**	**6.83467**	**6.55181**	**6.50674**	0.80
5、5、5	**7.35301**	**7.99943**	**7.89176**	**7.38968**	1.00
6、5、5	**7.53798**	**8.54166**	**8.60359**	**7.59764**	1.20
5、6、6	**9.68821**	**10.1769**	**9.80923**	**9.64451**	0.83
6、6、6	**10.58833**	**11.51917**	**11.36413**	**10.64114**	1.00
7、6、6	**10.87742**	**12.23951**	**12.54308**	**10.9627**	1.17
77、100、100	**2555.83905**	**2645.252**	**2522.6554**	**2528.32669**	0.77

在表中我們發現當底邊長兩腰長的比值小於 0.77 時，馬爾法蒂圓的面積和最小，比值超過 1 的馬爾法蒂圓的面積和最大，因此我們猜測兩腰夾角當大於$60°$時馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最大的，而兩腰夾角小於$\cos^{-1}\frac{14071}{20000}$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最小的。

陸、未來展望

一、雖然在馬爾法蒂圓部分，我們從文獻中可以知道馬爾法蒂圓永遠不會是三角形內三個切線圓面積和最大值，但根據我們的數據推測，在等腰三角形中，兩腰夾角大於$60°$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最大的，而兩腰夾角小於$\cos^{-1}\frac{14071}{20000}$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最小的，我們將運用算式證明我們的推測列為以後的目標之一。

二、在尺規作圖的部分，目前無法使用數學理論說明我們對於第四、五圓的猜測，但我們在好幾種不同的三圓內測試過了，皆能畫出第四、第五圓，因此更加讓我們確信這個猜測，所以我們打算將證明第四、五圓作法訂為日後研究目標。

柒、參考資料

[1]李承軒、翁如宣。2016。圓圓不絕的涉及三個內切圓的一個有趣結論三角問題。臺灣國際科學展覽會。

[2]鄒黎明。涉及三個內切圓的一個有趣結論。數學傳播 40 卷 1 期，p.p. 87-90。

[3]黃俊瑋、朱舢樺、程紘琪。從一道算額問題到數學科展。台北市立和平高中。HPM 通訊第二十二卷第二期第一版。

[4]海因里希·德里。100 個著名初等數學問題歷史與解答，凡異，p.p. 174-178。

[5] Baker, H. F. *(1925)*, "II.Ex.8: Solution of Malfatti's Problem", Principles of Geometry, Vol. IV: Higher Geometry, Cambridge University Press, pp. 68–69.

[6] Gabai, Hyman; Liban, Eric (1968)。 "On Goldberg's inequality associated with the Malfatti problem"

[7] According to Stevanović (2003)。these formulae were discovered by Malfatti and published posthumously by him in 1811.

[8] Milorad R. Stevanovic。Triangle Centers Associated with the Malfatti Circles。Forum Geometricorum Volume 3 (2003) 83–93.

【評語】030413

在三角形已給定的情況下，如何以尺規作圖的方式畫出這三個圓？作者們對於所有可能的情況作了討論，給出了解答。惟有些論述的過程稍嫌冗長了些，感覺上是在討論同樣的內容，但卻被當成是兩個不同的情況重複討論。如果能以引理的方式呈現，應該可以讓論述看起來更為清楚而且精簡。後半部關於三個圓在不同狀況下面積和的大小比較和原本要討論的主題似乎沒有太大的關連性，而除了說明由計算所觀察到的現象，好像也無法給出太多理論上的論述。對於直角三角形、等腰三角形及正三角形可嘗試找出面積及周長等的一些特性或規律性。

作品簡報

連中三圓

摘要

本文在探討如何利用尺規作圖作出三角形內部三個(含)以上的切線圓及相切圓，並且用三角形三邊長表示三圓半徑，討論在某條件下的圓面積和。分析為下列三種條件。

條件一、**三角形內部若有三圓，則任一圓皆需與「一個相異圓及三角形兩邊相切」。**

條件二、**三角形內部若有三圓，則任一圓皆需與「兩個相異圓及三角形其中一邊相切」。**

條件三、**三角形內部若有四圓以上(含)，且其中三圓為條件一或條件二，則其它圓必須與任意三圓相切。**

利用尺規完成上述三種條件的作圖，接著找出條件一及條件二半徑和三角形三邊長的關係。並發現其中包含**索迪公式第四圓退化成一直線**和**馬爾法蒂圓**。然後嘗試利用尺規作出條件三的圖形，嘗試找出在直角、等腰三角形中的圓面積和大小關係。

依照上述三個條件，我們整理出六種圖形，如圖所示

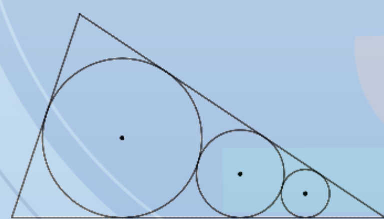


圖1(1)

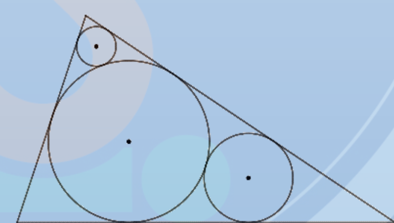


圖2(1)

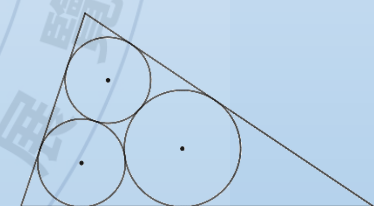


圖3

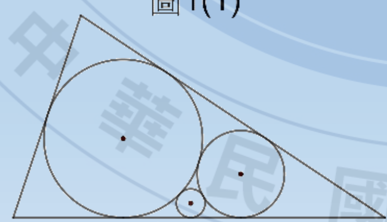


圖4(1)


圖5

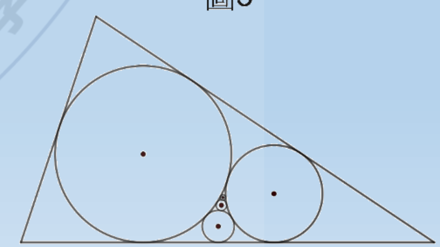


圖6

研究目的

1 ：滿足條件一的情況下，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

2 ：滿足條件二的情況下，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

3 ：滿足條件一與條件二的情況下(馬爾法蒂圓)，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

4 ：滿足條件三的情況下，能否尺規作圖作出?

5 ：滿足條件一或條件二的情況下，能否比較其三圓面積和大小。

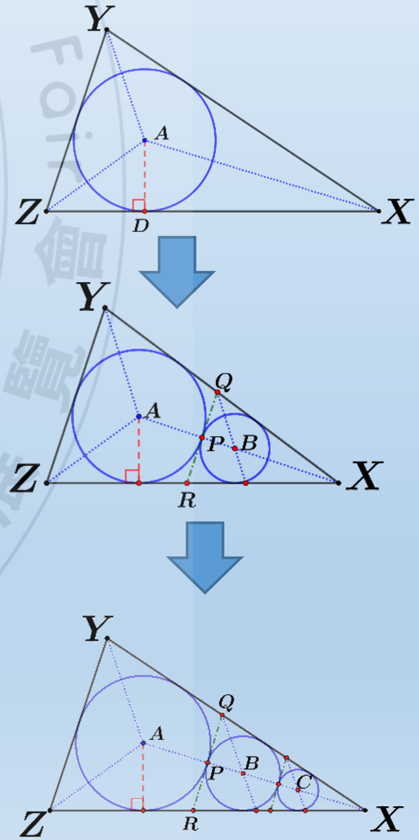
研究過程

【條件一】

步驟1：作三內角角平分線找出交點A，以A點為圓心A點到任意邊的垂直距離為半徑畫圓，則圓A為第一個內切圓，如右圖。

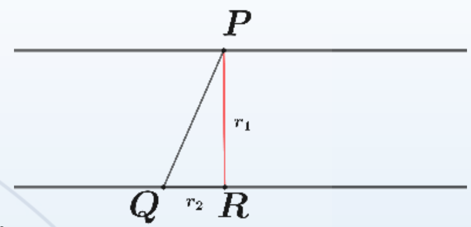
步驟2：由於外切兩圓的連心線必過切點，則可知第二個圓B的圓心必在$\overleftrightarrow{XA}$上，則圓 A與圓B的切點為$\overleftrightarrow{XA}$與圓A的交點P，作過P點切圓A的切線$\overleftrightarrow{RQ}$，接著作$\angle RQX$角平分線交$\overleftrightarrow{XA}$於B點，則B為圓B圓心，$\overline{BP}$為半徑畫圓，即可畫出第二個圓B，如圖所示。

步驟3：同理步驟2作出第三個圓C，如下圖即完成作圖。



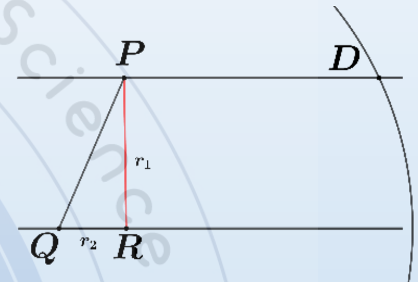
【條件二】 三種作法

一、面積法作圖



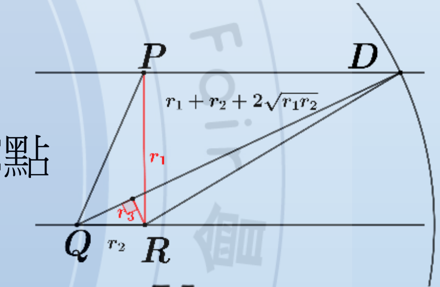
步驟1：以圓A與圓B的半徑r_1、r_2為底跟高作直角三角形△ PQR，

作過P點平行$\overleftrightarrow{QR}$直線。



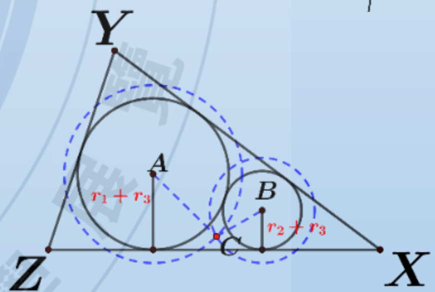
步驟2：以Q點為圓心，作半徑為$r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}$的弧，

交平行線於D點。

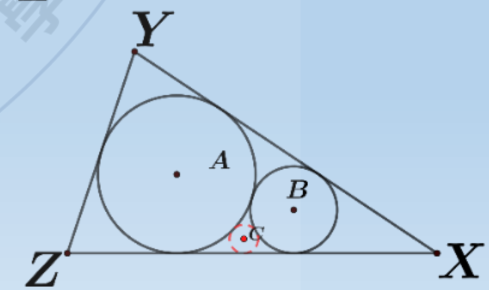


步驟3：作△ QRD，並作過R點垂直$\overline{QD}$垂線r_3。

步驟4：分別以A、B為圓心， $r_1 + r_3$、$r_2 + r_3$為半徑畫弧交於C點



步驟5：以C為圓心，r_3為半徑畫圓，即完成做圖。



作法解釋

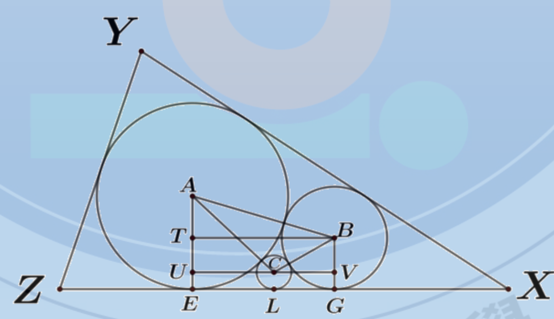
$$\overline{TB} = \overline{UV} = \overline{EG} = \overline{EL} + \overline{LG}$$

$$= \overline{UC} + \overline{VC}$$

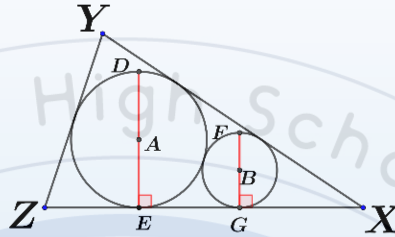
$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_2 r_3}$$

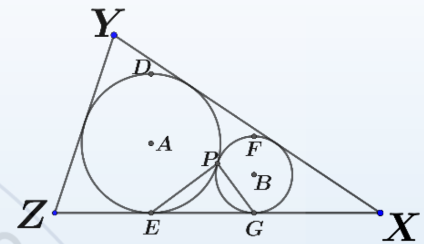
$$\Rightarrow \sqrt{r_1 r_2} = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})\sqrt{r_3}$$

$$\Rightarrow r_1 \cdot r_2 = (r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}) \cdot r_3$$



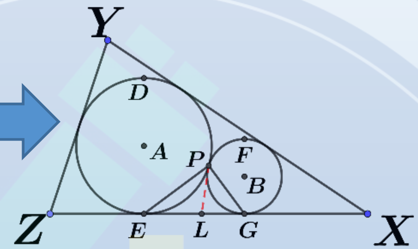
二、角平分線作圖

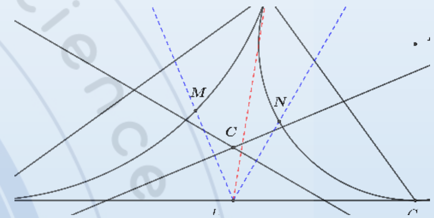




步驟1：畫出過A和B點的兩條垂直線，

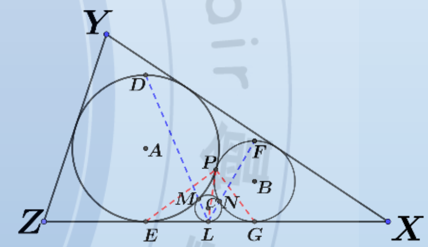
找出D、E、F、G點。





步驟2：連接$\overline{PE}$和$\overline{\mathrm{PG}}$，形成$\angle EPG$。

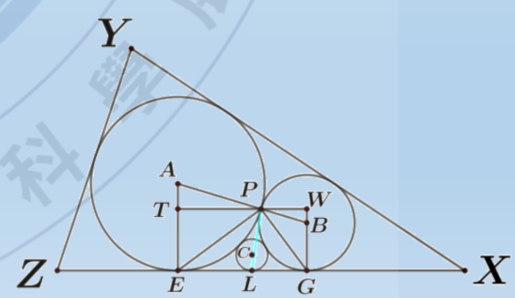
步驟3：作∠EPG角平分線交$\overline{XZ}$於L，即$\overline{PL}$。



步驟4：作$\overline{ML}$、$\overline{NL}$中垂線交於C點，C點為圓C圓心。

步驟5：以C為圓心，$\overline{CL}$為半徑畫圓，即完成作圖。

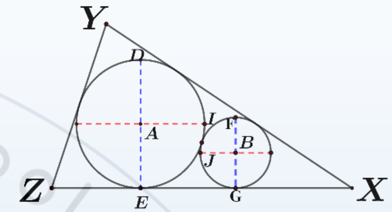
作法解釋



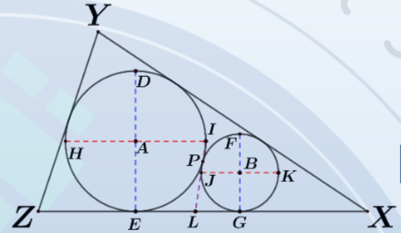
$$\overline{PE}:\overline{PG}=\sqrt{2r_1(r_1-\overline{AT})}:\sqrt{2r_2(r_1-\overline{AT})}$$

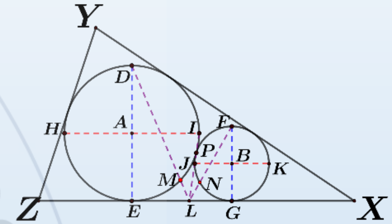
$$=\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}=\overline{EL}:\overline{LG}$$

三、對稱點作圖



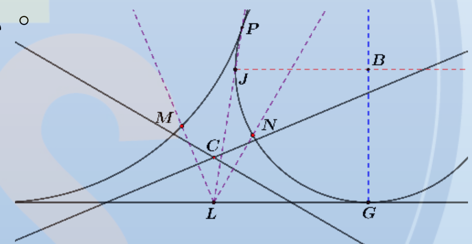
步驟1：過A、B作$\overleftrightarrow{DE} \perp \overline{XZ}$、$\overleftrightarrow{FG} \perp \overline{XZ}$及$\overleftrightarrow{HI} // \overline{XZ}$、$\overleftrightarrow{JK} // \overline{XZ}$。



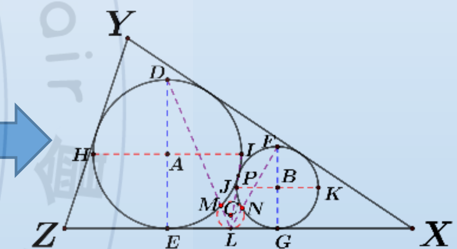


步驟2：連接$\overleftrightarrow{IJ}$交$\overline{XZ}$於L點。

步驟3：連接$\overline{DL}$交圓A於M、連接$\overline{FL}$交圓B於N。

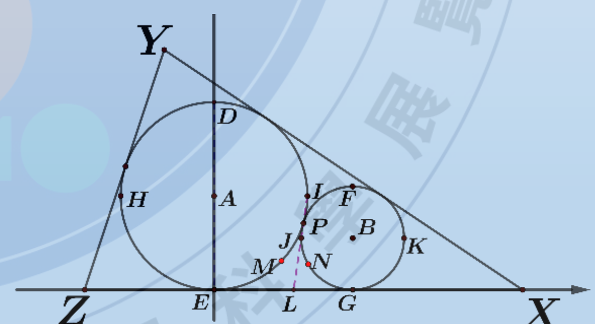


步驟4：作$\overline{ML}$、$\overline{NL}$中垂線交於C點，C點為圓C圓心。



步驟5：以C為圓心，$\overline{CL}$為半徑畫圓，即完成作圖。

作法解釋



$$m_{IL} = \frac{r_1}{r_1 - 2\sqrt{r_1 r_3}} = \frac{r_1}{r_1 - 2 \times \sqrt{r_1} \times \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}}$$

$$= \frac{r_1(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})}{r_1\sqrt{r_1} + r_1\sqrt{r_2} - 2r_1\sqrt{r_2}} = \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}$$

$$m_{IJ} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - (2\sqrt{r_1 r_2} - r_2)} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2} = \frac{r_1 - r_2}{(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2})^2} = \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}$$

【同時滿足條件一及條件二】馬爾法蒂圓

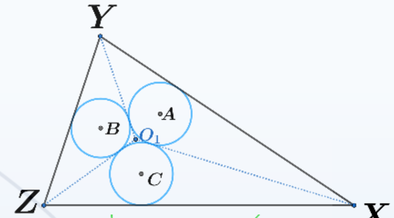
步驟1：作$\triangle XYZ$的三條角平分線，交於一點O_1，分別對$\triangle XO_1Z$、$\triangle XO_1Y$、$\triangle YO_1Z$作內切圓，圓C、圓A、圓B。

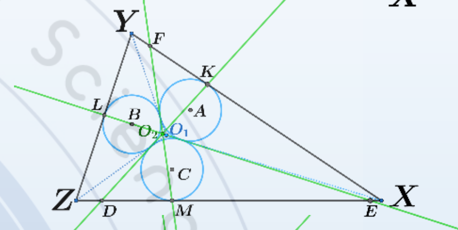
步驟2：作圓A與圓B、圓B與圓C、圓C與圓A的其中一條切線，依序為$\overline{FM}$、$\overline{KD}$、$\overline{LE}$，並將其交點命名為O_2。

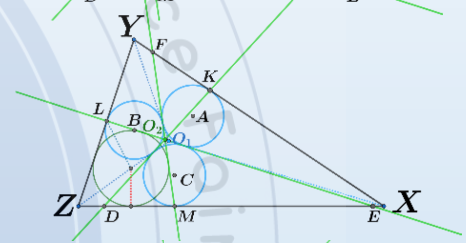
步驟3：在四邊形ZMO_2L內畫出兩條角平分線以找出圓心U，再以$\overline{ZX}$做一過U點的垂直線，以U點作為圓心 垂直線作為半徑做出四邊形ZMO_2L的內切圓。

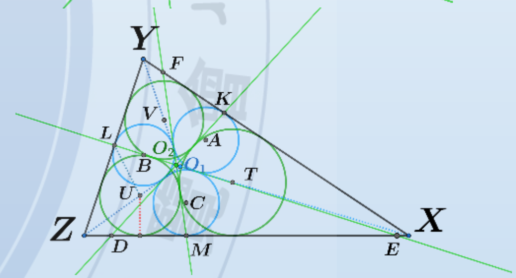
步驟4：重複步驟4~5做出四邊形XKO_2M和YKO_2L的內切圓T、V。

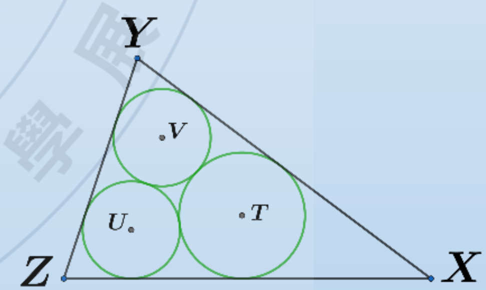
步驟5：只留下圓T、圓U、圓V，即完成馬爾法蒂圓。











【三邊長表示圓半徑】

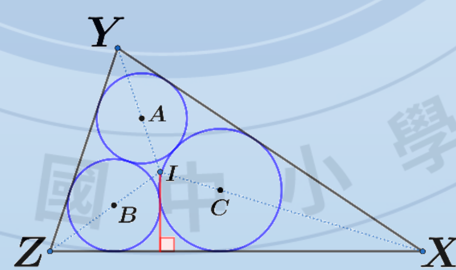
若$\triangle XYZ$三邊長為x、y、z，內部三個切線圓的半徑分別為

a、b、c，令$s=\frac{x+y+z}{2}$，內心為I，內切圓半徑為r，則

$$a=\frac{r}{2(s-y)}(s-r+\overline{IY}-\overline{IX}-\overline{IZ})$$

$$b=\frac{r}{2(s-z)}(s-r+\overline{IZ}-\overline{IX}-\overline{IY})$$

$$c=\frac{r}{2(s-x)}(s-r+\overline{IX}-\overline{IY}-\overline{IZ})$$



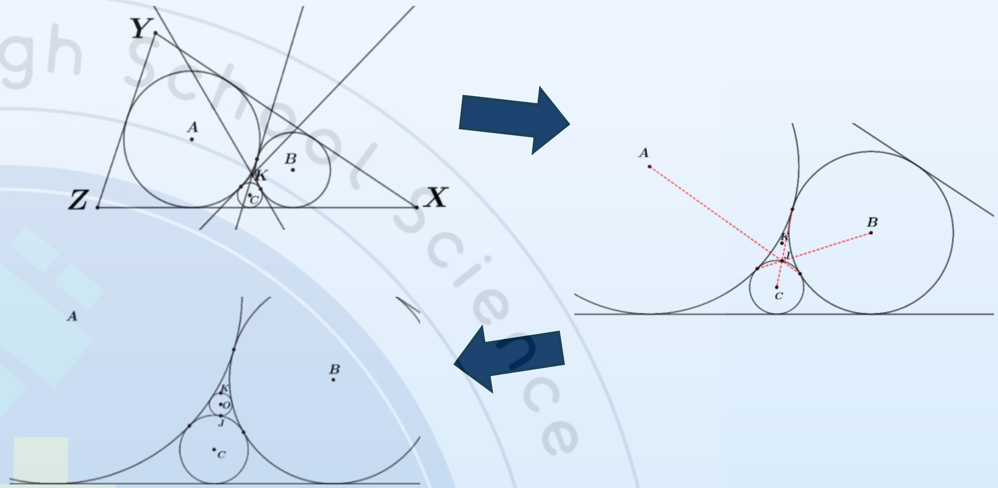
【條件三】

一、符合索迪公式第四圓退化情形的第四圓

步驟1：畫出三圓交點的切線，找出交點K。

步驟2：作一圓圓心與另兩圓的交點之連線並找出三條連線的交點J。

步驟3：以$\overline{JK}$為直徑畫圓，即完成第四圓。



二、三角形內三圓相切的內切圓

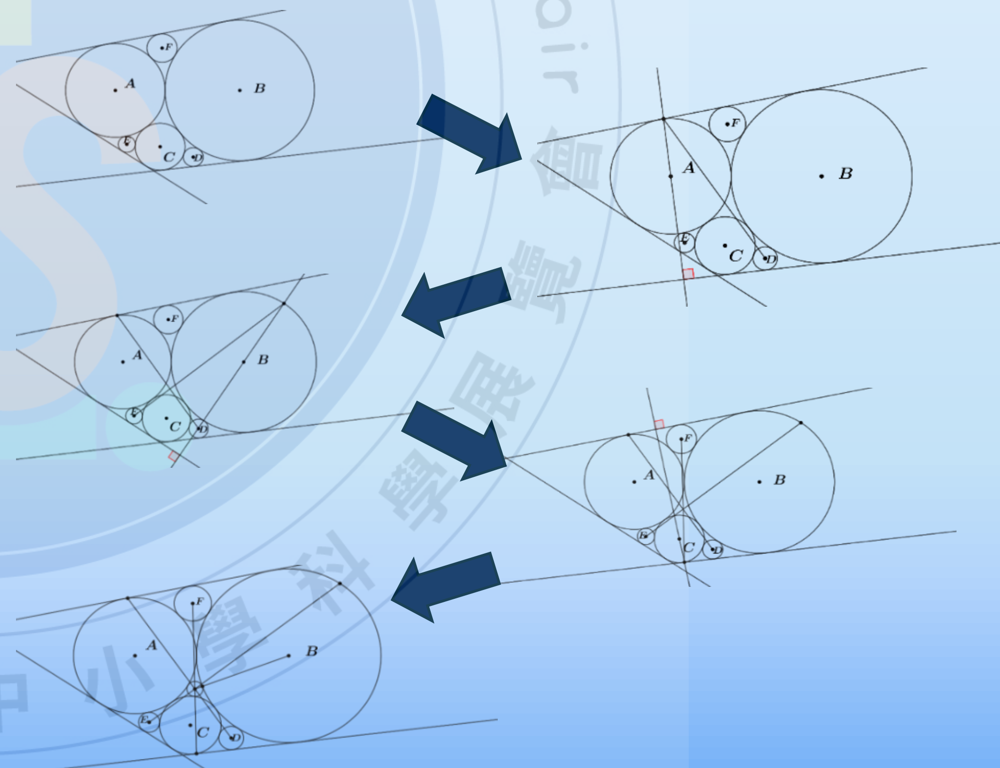
步驟1：作出三圓兩兩的切線並作出三圓兩兩的索迪第四圓退化的圖形。

步驟2：作垂直B、C圓切線並過圓心A 的垂直線，將其與圓周的交點和圓心D連線。

步驟3：作垂直A、C圓切線並過圓心B的垂直線，將其與圓周的交點和圓心E連線。

步驟4：作垂直A、B圓切線並過圓心C的垂直線，將其與圓周的交點和圓心F連線。

步驟5：找出步驟二到步驟四三條連線的交點O並將點O和點A、B、C任意點連起找出其與圓周的交點其交點與點O的距離為半徑點O為圓心畫圓。



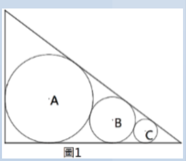
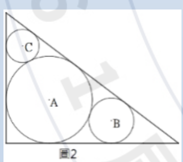
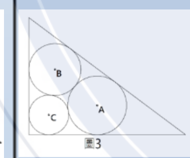
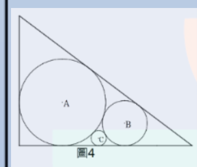
【滿足條件一或條件二中三圓面積和大小】

(一)直角三角形

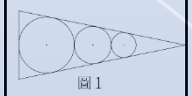
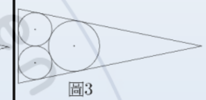
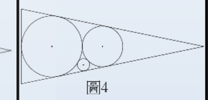
當三邊長為3、4、5的直角三角形我們發現圖2的面積最大，馬爾法蒂圓的面積最小。

當三邊長為5、12、13的直角三角形時我們發現圖1的面積最大，馬爾法蒂圓的面積最小。

當三邊長為20、21、29的直角三角形時我們發現圖2的面積最大，圖4的面積最小，但是馬爾法蒂圓並不是最小。

圖形 / 邊長	 圖1	 圖2	 圖3	 圖4
	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和
3、4、5	4.2183	4.44778	3.97595	4.08613
5、12、13	20.8063	19.27338	16.52052	18.76002
20、21、29	141.8526	158.2413	142.33043	139.86398

(二)等腰三角形

圖形 / 邊長	 圖1	 圖2	 圖3	 圖4	底長/腰長
	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	三圓面積和	
3、4、4	4.01339	4.1339	3.92814	3.96133	0.75
4、4、4	4.70592	5.11963	5.05072	4.7294	1.00
5、4、4	4.7853	5.48179	5.54524	4.82269	1.25
4、5、5	6.55646	6.83467	6.55181	6.50674	0.80
5、5、5	7.35301	7.99943	7.89176	7.38968	1.00
6、5、5	7.53798	8.54166	8.60359	7.59764	1.20
5、6、6	9.68821	10.1769	9.80923	9.64451	0.83
6、6、6	10.58833	11.51917	11.36413	10.64114	1.00
7、6、6	10.87742	12.23951	12.54308	10.9627	1.17
78、100、100	2578.61056	2675.29341	2555.7927	2553.70465	0.78
77、100、100	2555.83905	2645.252	2522.6554	2528.32669	0.77

我們猜測兩腰夾角大於60°的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最大的，而兩腰夾角小於$\cos^{-1}\frac{14071}{20000}$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最小的。

研究結果

一、三角形內部三個圓中，每個圓皆需與三角形其 中兩個邊相切且至少與另一相異圓外切。能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

(一)三圓半徑

1.圓A半徑r_1及圓B半徑r_2，可用三角形三邊長 x、y、z 表示

$$r_1=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

2.圓C半徑

$$r_3=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\left(\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}\right)^2。$$

$$r_3=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}{1+\sqrt{\frac{y^2-(x-z)^2}{4xz}}}$$

$$r_3=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}{1+\sqrt{\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}}}$$

(二)可知三圓的半徑皆為實數，故皆可以使用尺規來作圖，因此我們得知，若三角形三邊長皆為實數，其內部滿足條件一的三圓，皆可以尺規作圖。

二、三角形內部三個圓中，每個圓皆需與另外兩個圓外切且至少與三角形一個邊相切。能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

(一)三圓半徑及作法合理性

1. 等面積法

圓C半徑$r_3=\frac{r_1\cdot r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$

2. 角平分線作法

已知L為圓C與$\overline{XZ}$切點

$\because \overline{PE}:\overline{PG}=\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}=\overline{EL}:\overline{LG}$根據內分比性質

$\therefore \overline{PL}$為角平分線，故作法正確。

3. 對稱點作法

已知L為圓C與$\overline{XZ}$切點

$\because m_{\overleftrightarrow{IJ}}=m_{\overleftrightarrow{IL}}$ 斜率相同，表示為同一直線

$\therefore$ 可知I、J、L三點共線，故做法正確。

4. 圓A半徑r_1及圓B半徑r_2，可用三角形三邊x、y、z表示

$$r_1=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}$$

$$r_2=\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2(x+y+z)}\times\frac{1-\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}{1+\sqrt{\frac{x^2-(y-z)^2}{4yz}}}$$

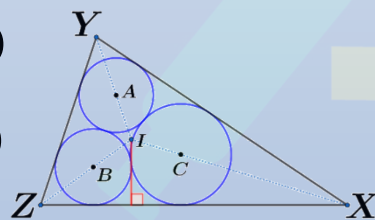
圓C半徑r_3與圓A半徑r_1圓B半徑r_2關係式為

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

三、在同時滿足條件一與條件二的情況下，能否尺規作圖作出?能否利用三角形三邊長表示其半徑?

如下圖，一個已知的三角形內畫三個圓，每個圓與其他兩個圓及三角形其中兩邊相切。若$\triangle XYZ$三邊長為x、y、z，內部三個切線圓的半徑分別為a、b、c，令$s=\frac{x+y+z}{2}$，內心為I，內切圓半徑為r，則:

$$a=\frac{r}{2(s-y)}(s-r+\overline{IY}-\overline{IX}-\overline{IZ})$$
$$b=\frac{r}{2(s-z)}(s-r+\overline{IZ}-\overline{IX}-\overline{IY})$$
$$c=\frac{r}{2(s-x)}(s-r+\overline{IX}-\overline{IY}-\overline{IZ})$$



四、三角形內部若有四圓以上(含)，且其中三圓為條件一或條件二，則其它圓必須與任意三圓相切。能否尺規作圖作出?

我們找出兩個方法，雖然目前無法運用數學理論說明，但在很多種情況下嘗試做圖，結果皆可成功作出第四第五圓，因次我們認為作法是正確的。

五、滿足條件一或條件二的情況下，能否比較其三圓面積和大小。

(一)直角三角形

由文獻中我們可以得知，數學家Gabai 和 Liban在1968年提出的論文中，表示馬爾法蒂問題中的圓面積和不會是最大值[6]，因此我們做了幾組資料的比較，我們發現在邊長為3、4、5的直角三角形中可以知道，馬爾法蒂圓的面積和不會是最大值，但卻是我們比較的四種情況中最小，但在20、21、29中的直角三角形，馬爾法蒂圓並不會是最小，我們發現沒特定規律可以比較出三圓面積和的大小關係，但發現若兩股長越接近時，馬爾法蒂圓的面積和越接近四種情況中的最大值，因此我們在嘗試作等腰三角形。

(二)等腰三角形

我們發現當底邊長與兩腰長的比值小於0.77時，馬爾法蒂圓的面積和最小，比值超過1的馬爾法蒂圓的面積和最大，因此我們猜測兩腰夾角當大於60°時馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最大的，而兩腰夾角小於$\cos^{-1}\frac{14071}{20000}$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最小的。

未來展望

一、在馬爾法蒂圓部分，我們從文獻中可以知道馬爾法蒂圓永遠不會是三角形內三個切線圓面積和最大值，但根據我們的數據推測，在等腰三角形中，兩腰夾角大於60°的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最大的，而兩腰夾角小於$\cos^{-1}\frac{14071}{20000}$的情況下馬爾法蒂圓面積會是四種情況下最小的，我們將運用算式證明我們的推測列為以後的目標之一。

二、在尺規作圖的部分，無法使用數學理論說明我們對於第四、五圓的做圖步驟的合理性，但我們嘗試做了好幾種不同的三圓內做圖，皆能畫出第四、第五圓，因此更加讓我們確信這個猜測，所以我們打算將證明第四、五圓作法訂為日後研究目標。

參考資料

[1]李承軒、翁如宣。2016。圓圓不絕的涉及三個內切圓的一個有趣結論三角問題。
臺灣國際科學展覽會。
[2]鄒黎明。涉及三個內切圓的一個有趣結論。數學傳播 40卷1期，p.p. 87-90。
[3]黃俊瑋、朱舢樺、程紘琪。從一道算額問題到數學科展。台北市立和平高中。
HPM 通訊第二十二卷第二期第一版。
[4]海因里希·德里。100個著名初等數學問題歷史與解答，凡異，p.p. 174-178。
[5] Baker, H. F. *(1925)*, "II.Ex.8: Solution of Malfatti's Problem", Principles of Geometry, Vol. IV: Higher Geometry, Cambridge University Press, pp. 68–69.
[6] Gabai, Hyman; Liban, Eric (1968)。 "On Goldberg's inequality associated with the Malfatti problem"
[7] According to Stevanović (2003)。these formulae were discovered by Malfatti and published posthumously by him in 1811.
[8] Milorad R. Stevanovic。Triangle Centers Associated with the Malfatti Circles。Forum Geometricorum Volume 3 (2003) 83–93.