

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

第三名

030412

垂足多邊形的不變量與分類

學校名稱：新北市立永和國民中學

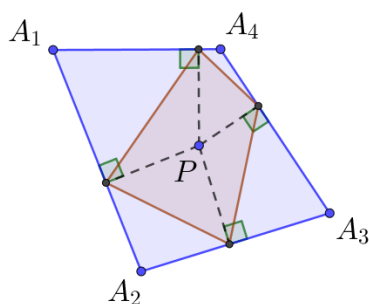
作者： 國二 劉宸瑞 國二 張祐璋 國二 梁芷瑄	指導老師： 徐佳安 陳自瑩
---	-----------------------------

關鍵詞：垂足多邊形、有向面積、等價類

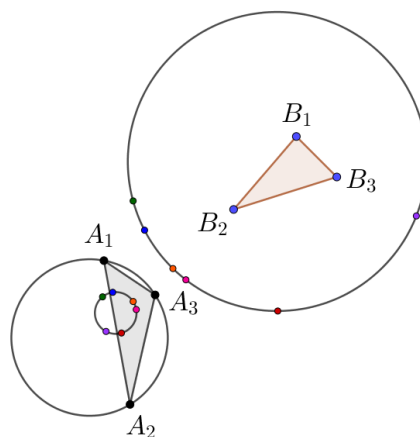
壹、前言

一、摘要

近年關於垂足多邊形的研究，都著重在垂足「三角形」。本研究不限定於三角形：給定任意正整數 $n \geq 3$ ，以及平面上的一個 n 邊形，從平面上一點 P 對該多邊形的 n 個邊(的延長線)作垂足，可得一個「垂足 n 邊形」。我們創新利用三腳架手法，證明：給定三角形 A 、 B ，必定存在一點 P ，使得 P 對 A 的垂足三角形與 B 相似。再將三腳架手法推廣到任意 n 邊形，發現 n 腳架結構中，內、外 n 邊形面積的性質；並將上述結果推回三角形，研究內、外三角形定向關係，以及找出 n 腳架結構中，內 n 邊形面積極小時刻的特殊性質。最後，我們利用垂足性質定義特殊的等價關係，將 n 邊形分類。



圖一



圖二

二、研究動機與文獻探討

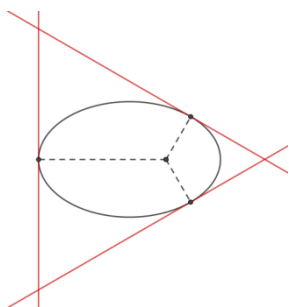
關於垂足「三角形」的文獻非常豐富，但卻沒有文獻對垂足「 n 邊形」的性質有好的刻畫。過往的文獻集中在討論以下問題：給定兩三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 、 $\Delta B_1B_2B_3$ ，想要找一點 P ，使得 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的垂足三角形與 $\Delta B_1B_2B_3$ 相似。我們將點 P 稱為「相似垂足中心」。

這個問題已經被完全解決，文獻中有人用三角函數以及阿波羅尼斯圓的性質，找出滿足上述條件的所有 P 點，一共有 12 個。而這 12 個「垂足中心」會分成兩群(各 6 個點)，兩群分別 6 點共圓，並且兩群點就是「以 $\Delta A_1A_2A_3$ 外接圓做反演變換」的關係，如圖二。另外，

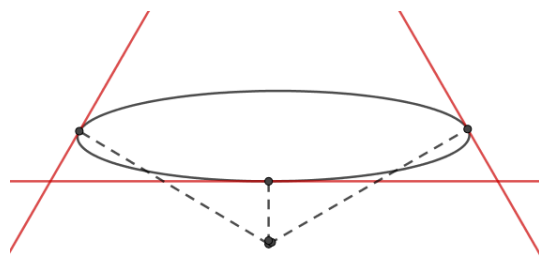
60 屆全國科展作品中，也有人特別研究 $\Delta B_1B_2B_3$ 是正三角形、直角三角形等特殊三角形時，垂足中心 P 的特殊性質。

在我們查到的眾多文獻中，試圖做垂足 n 邊形 ($n \geq 4$) 的人，都沒有什麼好的結果：其結果不是充滿限制(例如只研究圓內接四邊形)，就是沒有精確、漂亮的定理(例如只有給一些不等式的估計)。四邊形以上沒有好結果的主因，一方面是因為垂足三角形本身特殊：給定兩三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 、 $\Delta B_1B_2B_3$ ，「必定存在」一點 P ，使得 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的垂足三角形與 $\Delta B_1B_2B_3$ 相似；這個 P 點在 n 邊形 ($n \geq 4$) 時是不一定存在的。另一方面是因為處理問題的手法侷限。

我們處理問題的策略，主要是將「三腳架構造」(tripod configuration) 離散化。而三腳架構造的靈感源自一個有趣的定理證明：對任意凸的、光滑、封閉平面曲線，其平面上都存在一點 P ，使得「可以從該點做周角三等分線」，使這三條分角線，都在「與曲線相交處」垂直曲線的切線，如圖三、圖四。



圖三



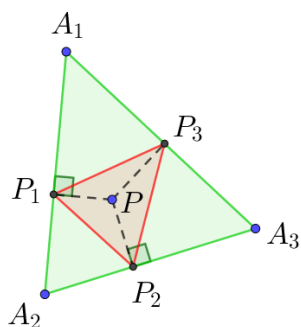
圖四

該性質的證明，是先選定一個固定的向量 v ，並將曲線用「切線與 v 的夾角 α 」來參數化，接著就能利用此參數 α 來構造「三條法線圍出的正三角形」，我們稱其為「內三角形」。再去證明這些「內三角形」中，會有面積 0 者，而此時恰好滿足我們要證明的結果(詳細證明請看附錄)。

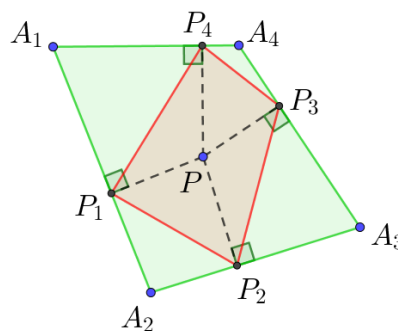
我們將三腳架手法離散化之後，成功將此方法套用在垂足多邊形問題中，並發現許多有趣的、新的性質。

三、名詞定義

定義 1.1 給定正整數 $n \geq 3$ ，以及平面上 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 和一點 P 。所謂 P 對 $A_1A_2 \dots A_n$ 的「垂足 n 邊形」是指 P 點對該多邊形的 n 邊延長線 A_1A_2 、 A_2A_3 、 \dots 、 A_nA_1 依序作垂足點 P_1 、 P_2 、 \dots 、 P_n ，所形成的 n 邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ ，如圖五、圖六。



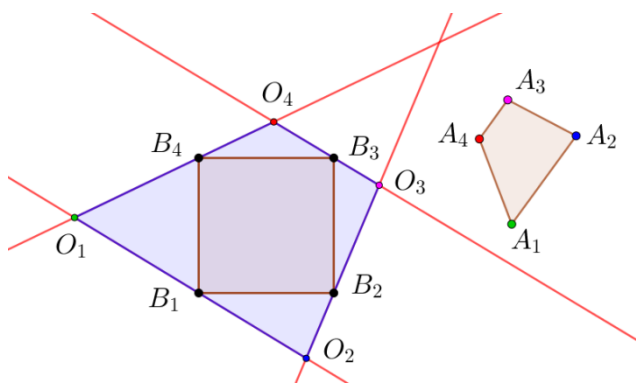
圖五



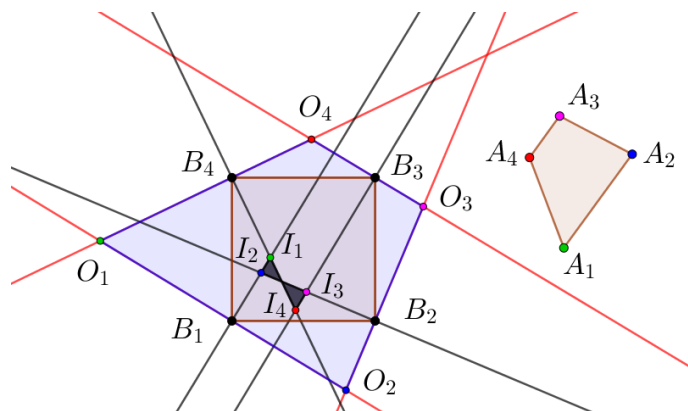
圖六

定義 1.2 給定平面上兩個 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 、 $B_1B_2 \dots B_n$ 。我們可以依序通過 n 邊形 $B_1B_2 \dots B_n$ 的 n 個頂點作直線，得到一個「內角與 $A_1A_2 \dots A_n$ 的內角對應相同」的 n 邊形 $O_1O_2 \dots O_n$ 。我們將 n 邊形 $O_1O_2 \dots O_n$ 稱為「給定 $B_1B_2 \dots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \dots A_n$ 造出的外 n 邊形」，如圖七。

定義 1.3 延續定義 1.2，若我們有「給定 $B_1B_2 \dots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \dots A_n$ 造出的外 n 邊形 $O_1O_2 \dots O_n$ 」。此時可以通過 n 邊形 $B_1B_2 \dots B_n$ 的 n 個頂點，依序作直線「垂直於外 n 邊形 $O_1O_2 \dots O_n$ 的各邊」。此時 n 條垂直線所形成的 n 邊形 $I_1I_2 \dots I_n$ ，稱為「內 n 邊形」，如圖八。注意，點 I_j 是指 $O_1O_2 \dots O_n$ 的邊當中，「通過點 O_j 」的兩條邊，所作垂直線的交點。我們透過上述方法將內、外 n 邊形的頂點作對應。

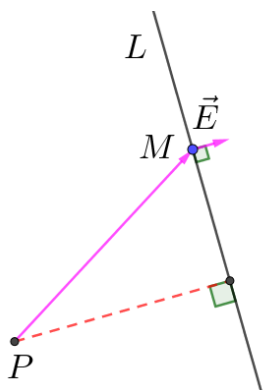


圖七

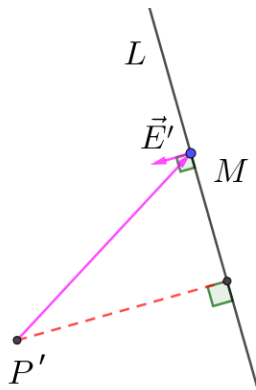


圖八

定義 1.4 給定平面上的一條直線 L 和一點 P ，若在 L 上任取一點 M ，並在 M 上取一個和 L 垂直的單位向量 \vec{E} ，則內積 $\vec{E} \cdot \overrightarrow{PM}$ 的值稱為 P 到 L 的「有向距離」，記作 $d(P, L_{\vec{E}})$ 。注意，有向距離有正有負，且其值不受 M 點選取的影響，但會受到 \vec{E} 選取方向的影響，如圖九中 $d(P, L_{\vec{E}}) > 0$ ；圖十中 $d(P', L_{\vec{E}'}) < 0$ 。有向距離的絕對值就是點 P 到直線 L 的距離。



圖九



圖十

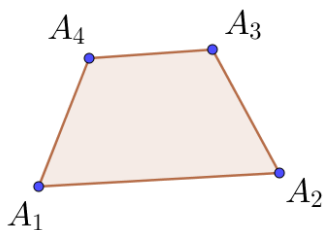
定義 1.5 給定平面上兩點(或兩向量) $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，我們定義符號

$$P \wedge Q := \det(P, Q) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

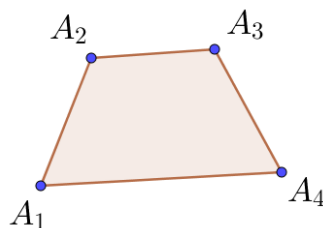
定義 1.6 給定平面上的 n 邊形 $P_1P_2 \cdots P_n$ ，所謂 $P_1P_2 \cdots P_n$ 的「有向面積」，是指

$$\frac{1}{2} [\det(P_1, P_2) + \det(P_2, P_3) + \cdots + \det(P_{n-1}, P_n) + \det(P_n, P_1)]$$

注意，若一個不自交 n 邊形頂點的定向為逆時針，則它的有向面積恰等於它的面積；相對的，若頂點的定向為順時針，則它的有向面積等於負的面積，如圖十一的 4 邊形面積為正、圖十二的 4 邊形面積為負。

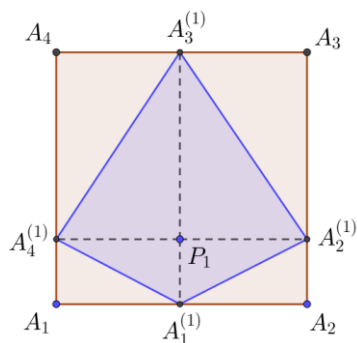


圖十一

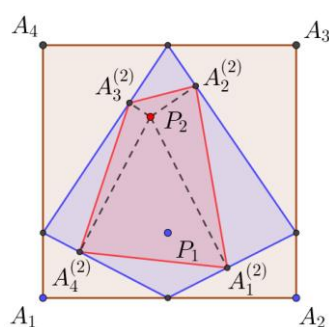


圖十二

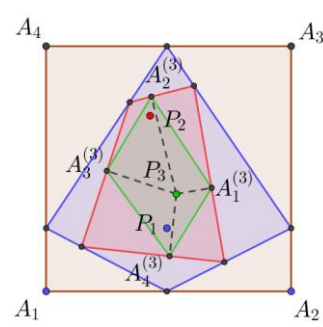
定義 1.7 給定平面上 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 和有順序的點 P_1, P_2, \dots, P_m 。我們可以用 P_1 對 $A_1A_2 \cdots A_n$ 作垂足 n 邊形，得 $A_1^{(1)}A_2^{(1)} \cdots A_n^{(1)}$ ；接著，用 P_2 對 $A_1^{(1)}A_2^{(1)} \cdots A_n^{(1)}$ 作垂足 n 邊形，得 $A_1^{(2)}A_2^{(2)} \cdots A_n^{(2)}$ ；重複上述步驟，最終可得多邊形 $A_1^{(m)}A_2^{(m)} \cdots A_n^{(m)}$ 。我們將 n 邊形 $A_1^{(m)}A_2^{(m)} \cdots A_n^{(m)}$ 稱為「點列 P_1, P_2, \dots, P_m 對 $A_1A_2 \cdots A_n$ 的垂足 n 邊形」，如圖十三到圖十五呈現 3 點列的垂足 4 邊形。



圖十三



圖十四



圖十五

四、研究架構和目的

我們的目的是將垂足三角形的性質推廣到 n 邊形 ($n \geq 4$)。細分為：

- (一) 將內、外三角形的面積性質推廣到 n 邊形 ($n \geq 4$)。
- (二) 將內、外三角形的定向性質推廣到 n 邊形 ($n \geq 4$)。
- (三) 探究內、外 n 邊形 ($n \geq 4$) 面積極值發生時的定向問題。
- (四) 給定正整數 $n \geq 4$ ，在 n 邊形上定義等價關係，並將 n 邊形分類。

我們用以下研究架構與方法來完成上述目標：

- (一) 利用三腳架手法，重新證明：給定兩三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 、 $\Delta B_1B_2B_3$ ，必定存在一點 P ，使得 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的垂足三角形與 $\Delta B_1B_2B_3$ 相似。
- (二) 將三腳架手法推廣到任意 n ($n \geq 3$) 邊形，發現 n 腳架結構中，內、外 n 邊形面積和為定值。
- (三) 將內 n 邊形面積極小狀況進行分類，並研究內 n 邊形縮為一點的狀況。
- (四) 對內 n 邊形頂點定向進行分類。
- (五) 利用點序列造出的垂足 n 邊形，對平面 n 邊形進行分類。

貳、 研究工具

一、研究工具

紙、筆、電腦、Geogebra 軟體。

參、 研究方法與結果

一、外、內多邊形作圖與變動

(一) 外、內 n 邊形作圖

表一 外、內 n 邊形的構造步驟

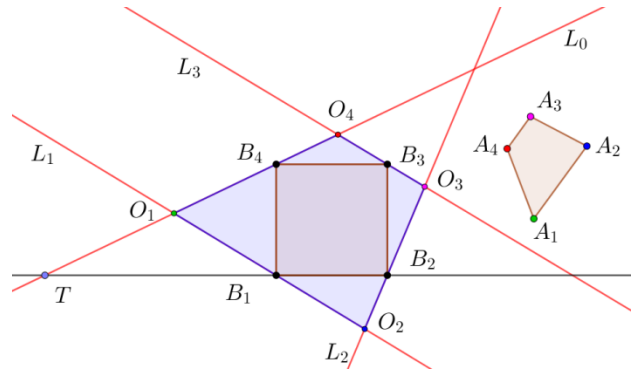
構造方法	圖例
<p>【步驟一】 任意給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$、$B_1B_2 \cdots B_n$，我們先將線段 $\overline{B_1B_2}$ 延長為直線，並在上面隨意取一點 T。接著將 T、B_n 兩點連成直線 L_0。</p>	
<p>【步驟二】 此時有唯一的直線 L_1，通過 B_1，使得有向角 $\angle B_1O_1B_n = \angle A_1$ 其中 O_1 是 L_1 與直線 L_0 的交點。</p>	
<p>【步驟三】 此時有唯一的直線 L_2，通過 B_2，使得有向角 $\angle B_2O_2B_1 = \angle A_2$ 其中 O_2 是 L_2 與直線 L_1 的交點。</p>	

【步驟四】

重複上述步驟，最後一條直線為 L_{n-1} ，其通過 B_{n-1} ，使得有向角

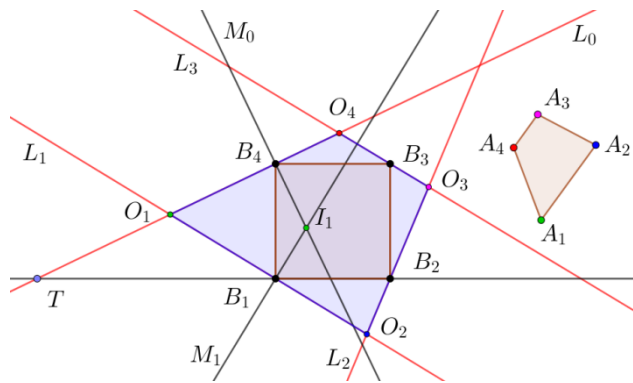
$$\angle B_{n-1}O_{n-1}B_{n-2} = \angle A_{n-1}$$

其中 O_{n-1} 是 L_{n-1} 與直線 L_{n-2} 的交點。再令 O_n 為 L_{n-1} 與 L_0 的交點，此時 n 邊形 $O_1O_2 \cdots O_n$ 的內角會與 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 的內角對應相等，即是外 n 邊形。



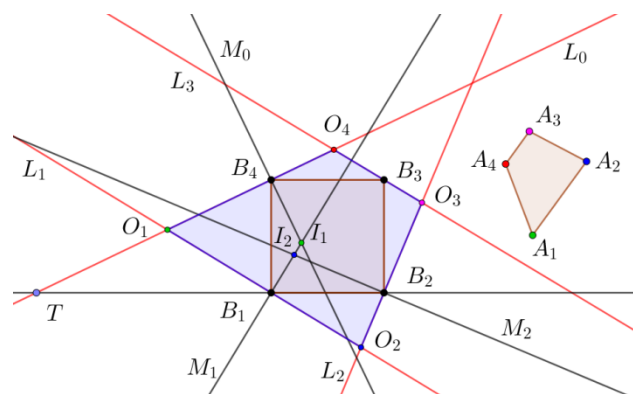
【步驟五】

接著，通過 B_n 作 L_0 的垂直線 M_0 ，並通過 B_1 作 L_1 的垂直線 M_1 ，我們令直線 M_0 、 M_1 的交點為 I_1 。



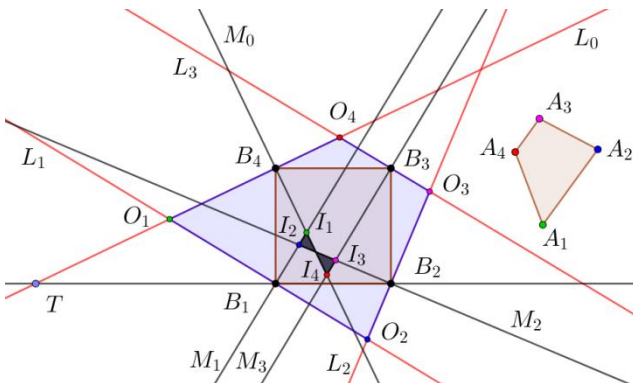
【步驟六】

通過 B_2 作 L_2 的垂直線 M_2 ，令直線 M_1 、 M_2 的交點為 I_2 。



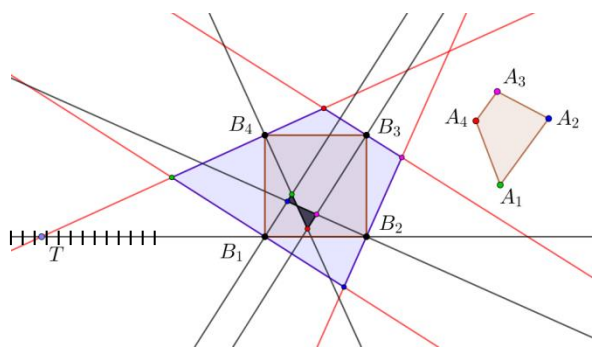
【步驟七】

重複上述步驟，最後通過 B_{n-1} 作 L_{n-1} 的垂直線 M_{n-1} ，令直線 M_{n-1} 、 M_{n-2} 的交點為 I_{n-1} 。再令 M_{n-1} 和 M_0 的交點為 I_n 。此時 n 邊形 $I_1I_2 \cdots I_n$ 即為內 n 邊形。

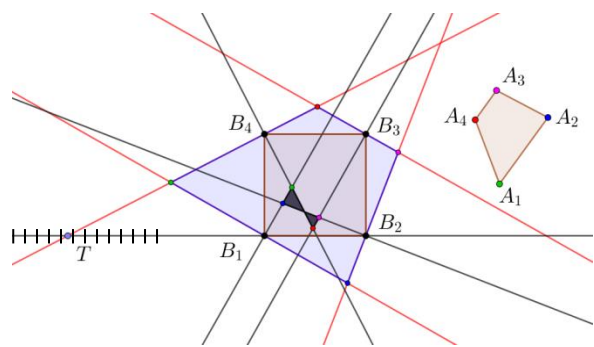


(二) 外、內 n 邊形的變動

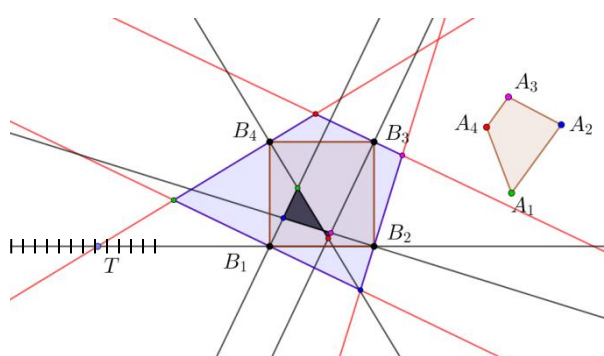
依照上述的作圖方法，我們知道作圖起始選擇的點 T 可以是任意的，更進一步的說，當點 T 在直線 $\overrightarrow{B_1B_2}$ 上移動時，外、內 n 邊形會隨著點 T 的移動進行「旋轉」。圖十六到圖十九呈現點 T 向右移動時，外、內 n 邊形的變化。



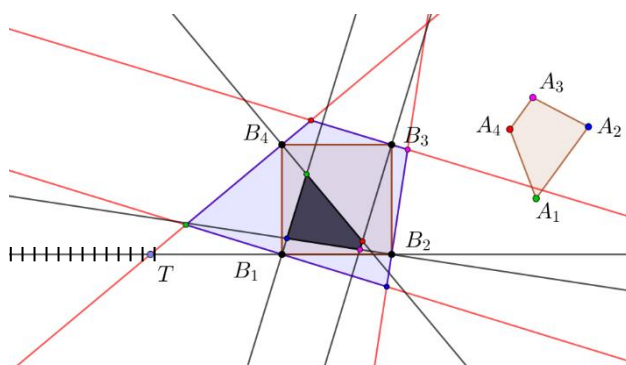
圖十六



圖十七



圖十八



圖十九

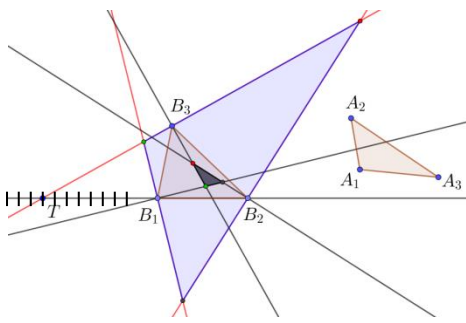
二、外、內多邊形的性質

(一) 用三腳架手法證明三角形的相似垂足中心存在性

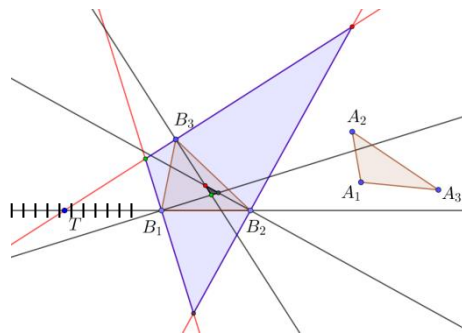
給定兩三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 和 $\Delta B_1B_2B_3$ ，我們想要證明相似垂足中心的存在性，也就是想要找一點 P ，使得點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 作的垂足三角形與 $\Delta B_1B_2B_3$ 相似。

為了證明該點存在，我們先作「給定 $\Delta B_1B_2B_3$ 下，用 $\Delta A_1A_2A_3$ 造的外三角形」。注意，當點 T 在直線 $\overrightarrow{B_1B_2}$ 上移動時，旋轉的外三角形 $\Delta O_1O_2O_3$ 無時無刻都與 $\Delta A_1A_2A_3$ 對應角度相同，故相似。同理，內三角形 $\Delta I_1I_2I_3$ 也與 $\Delta A_1A_2A_3$ 相似。

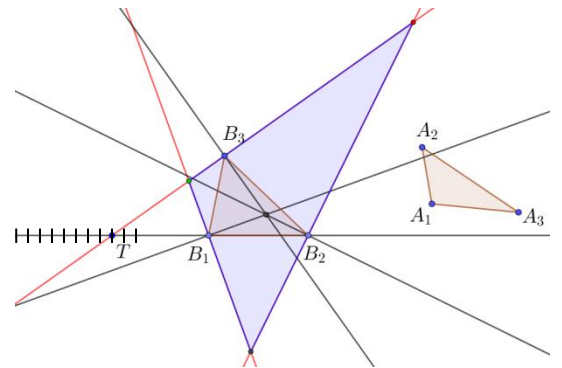
很顯然的，若我們可以證明：點 T 在直線 $\overrightarrow{B_1B_2}$ 上移動時，有某個時刻會使內三角形 $\Delta I_1I_2I_3$ 縮成一點，則我們就成功證明三角形垂足中心的存在性。圖二十到二十二呈現點 T 移動時，內三角形 $\Delta I_1I_2I_3$ 縮成一點的過程。我們現在開始證明：內三角形必定會縮成一個點。



圖二十



圖二十一



圖二十二

引理 1.1 給定三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ ，以及平面上任一點 P 。若我們分別在直線 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overrightarrow{A_3A_1}$ 上取「朝外的單位向量」 \vec{E}_1 、 \vec{E}_2 、 \vec{E}_3 ，則 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積可以表示為

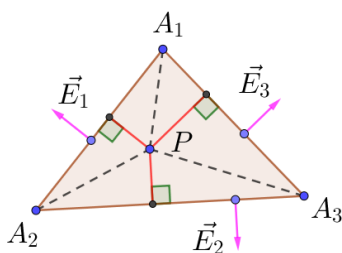
$$\frac{1}{2} \left[\overline{A_1A_2} \times d(P, \overrightarrow{A_1A_2}_{\vec{E}_1}) + \overline{A_2A_3} \times d(P, \overrightarrow{A_2A_3}_{\vec{E}_2}) + \overline{A_3A_1} \times d(P, \overrightarrow{A_3A_1}_{\vec{E}_3}) \right]$$

證明：以圖二十三為例，若 P 點在 $\Delta A_1A_2A_3$ 內部，則有向距離 $d(P, \overrightarrow{A_1A_2}_{\vec{E}_1})$ 、 $d(P, \overrightarrow{A_2A_3}_{\vec{E}_2})$ 、 $d(P, \overrightarrow{A_3A_1}_{\vec{E}_3})$ 均正，此時

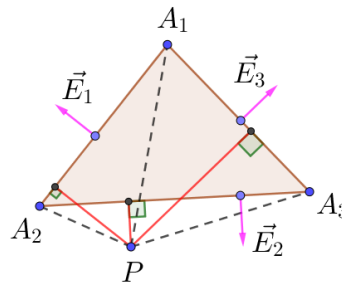
$$A(P) := \frac{1}{2} \left[\overline{A_1A_2} \times d(P, \overrightarrow{A_1A_2}_{\vec{E}_1}) + \overline{A_2A_3} \times d(P, \overrightarrow{A_2A_3}_{\vec{E}_2}) + \overline{A_3A_1} \times d(P, \overrightarrow{A_3A_1}_{\vec{E}_3}) \right]$$

就是在計算 ΔPA_1A_2 、 ΔPA_2A_3 、 ΔPA_3A_1 的面積和，得證。

若 P 點在 $\Delta A_1A_2A_3$ 外部，我們以圖二十四為例，此時有向距離 $d(P, \overrightarrow{A_1A_2}_{\vec{E}_1}) > 0$ 、 $d(P, \overrightarrow{A_2A_3}_{\vec{E}_2}) < 0$ 、 $d(P, \overrightarrow{A_3A_1}_{\vec{E}_3}) > 0$ ，故 $A(P)$ 就是在計算 ΔPA_1A_2 面積，減去 ΔPA_2A_3 面積，再加上 ΔPA_3A_1 的面積。其餘狀況也可以透過類似的方法得證。



圖二十三



圖二十四

定理 1.2 給定兩三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 以及 $\Delta B_1B_2B_3$ ，則給定 $\Delta B_1B_2B_3$ 下，用 $\Delta A_1A_2A_3$ 造的內三角形面積，會隨著點 T 的移動在某時刻變成 0。

證明: 如圖二十五，我們在外、內三角形作圖上架座標，不失一般性假設 $B_1(0,0)$ 、 $B_2(1,0)$ 、 $B_3(a,b)$ 。接著，我們令直線 $\overrightarrow{TB_3}$ 與 x 軸所夾的有向角為 θ 。我們要將整個圖形用 θ 參數化。

首先 $\overrightarrow{E_2}$ 和 $\overrightarrow{O_1O_3}$ 平行，且 $\overrightarrow{O_1O_3}$ 與 x 軸所夾的有向角為 θ ，所以取

$$\overrightarrow{E_2} = (\cos \theta, \sin \theta);$$

再來，因為 $\overrightarrow{E_3}$ 和 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 平行，且 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 與 x 軸所夾的有向角為 $\theta - \angle A_1$ ，所以取

$$\overrightarrow{E_3} = (-\cos(\theta - \angle A_1), -\sin(\theta - \angle A_1));$$

最後，因為 $\overrightarrow{E_1}$ 和 $\overrightarrow{O_2O_3}$ 平行，且 $\overrightarrow{O_2O_3}$ 與 x 軸所夾的有向角為 $\theta - \angle A_1 - \angle A_2$ ，所以取

$$\overrightarrow{E_1} = (\cos(\theta - \angle A_1 - \angle A_2), \sin(\theta - \angle A_1 - \angle A_2))。$$

而根據正弦定理， $\overline{I_2I_3} = f(\theta) \sin \angle A_1$ 、 $\overline{I_1I_3} = f(\theta) \sin \angle A_2$ 、 $\overline{I_1I_2} = f(\theta) \sin \angle A_3$ ，其中 $f(\theta)$ 是個隨著 θ 變動的比率。因此，根據引理 1.1，取 P 為原點，得知 $\Delta I_1I_2I_3$ 的面積為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ f(\theta) \sin \angle A_1 \times [(1,0) \cdot (\cos(\theta - \angle A_1 - \angle A_2), \sin(\theta - \angle A_1 - \angle A_2))] \\ & + f(\theta) \sin \angle A_2 \times [(a,b) \cdot (\cos \theta, \sin \theta)] + f(\theta) \sin \angle A_3 \times 0 \} \end{aligned}$$

化簡可得

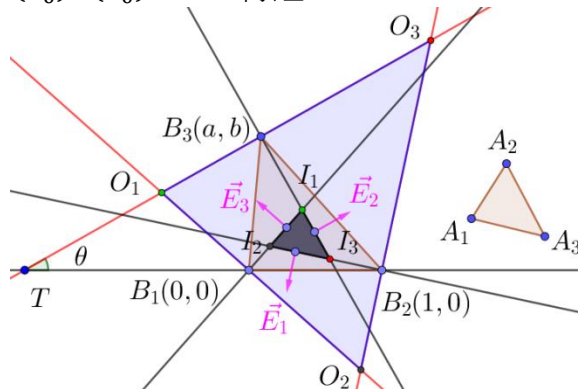
$$\frac{1}{2} f(\theta) \{ \sin \angle A_1 \cdot \cos(\theta - \angle A_1 - \angle A_2) + \sin \angle A_2 \cdot (a \cos \theta + b \sin \theta) \} =: \frac{1}{2} f(\theta) A(\theta)$$

注意 $A(\theta) = \mathcal{A}'(\theta)$ ，其中

$$\mathcal{A}(\theta) = \sin \angle A_1 \cdot \sin(\theta - \angle A_1 - \angle A_2) + \sin \angle A_2 \cdot (a \sin \theta - b \cos \theta)。$$

又因為 $\mathcal{A}(\theta)$ 為週期函數，故存在極值。所以存在 θ_0 ，使得 $A(\theta_0) = \mathcal{A}'(\theta_0) = 0$ ，所以此時

內三角形面積為 $\frac{1}{2} f(\theta_0) A(\theta_0) = 0$ ，得證。



圖二十五

注意，面積為 0 的三角形不見得會是一個點，例如三點共線時也會面積 0。不過，在前面我們有說明內三角形必定會與 $\Delta A_1A_2A_3$ 相似，故不存在內三角形三頂點共線的狀況。因此，定理 1.2 中面積 0 的情形，就是指內三角形三頂點重合，這等價於相似垂足中心存在。

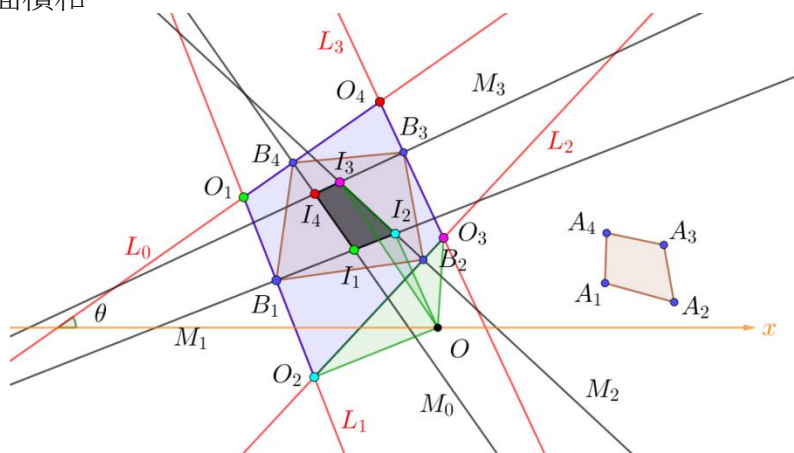
用三腳架手法證明了相似垂足中心的存在性後，我們透過 *Geogebra* 軟體作圖發現：「內三角形面積 0」與「外三角形面積最大」恰好發生在同一個時刻。我們試圖將這個結果推廣到 n 邊形 ($n \geq 4$)，換言之，我們猜測：「內 n 邊形面積最小」與「外 n 邊形面積最大」恰好發生在同一個時刻，然而用 *Geogebra* 作圖卻發現上述推測不對。最終我們發現問題出在面積的定向上，當我們將上面敘述中的「面積」都改成「有向面積」後，*Geogebra* 作圖就成立了。特別在此說明：*Geogebra* 作圖只會顯示多邊形的「有向面積絕對值」，我們是自己手算修正面積的定向，才發現此性質。

(二) 外、內 n 邊形的有向面積和恆定

要證明「內 n 邊形有向面積最小」與「外 n 邊形有向面積最大」恰好發生在同一個時刻，可以透過證明：「外、內 n 邊形的有向面積和為定值」來完成。我們開始證明：

定理 1.3 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ ，則給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的「外、內 n 邊形」有向面積和為定值。

證明：如圖二十六，我們接續外、內 n 邊形的作圖。令 O 為原點，為了證明外、內 n 邊形有向面積和為定值，我們只需要證明「 ΔOO_2O_3 和 ΔOI_2I_3 的有向面積和為定值」即可，如圖中的綠色三角形。能夠如此簡化證明是因為 n 邊形的有向面積能夠透過「測量師公式」簡化為 n 個三角形的有向面積和。



圖二十六

假設各點座標如下: $B_1(x_1, y_1)$ 、 $B_2(x_2, y_2)$ 、 $B_3(x_3, y_3)$ ；並假設直線 L_1 的斜率為 $f = \tan(\theta - \angle A_1)$ 、此時直線 L_2 的斜率為 $g = \tan(\theta - \angle A_1 - \angle A_2)$ 、直線 L_3 的斜率為 $h = \tan(\theta - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle A_3)$ ；最後我們假設直線 M_1 的斜率為 $\alpha = -\frac{1}{f}$ 、直線 M_2 的斜率為 $\beta = -\frac{1}{g}$ 、直線 M_3 的斜率為 $\delta = -\frac{1}{h}$ 。

透過簡單的直線方程式計算，我們可以將 O_2 、 O_3 、 I_2 、 I_3 四點的座標表示如下：

$$O_2 \left(\frac{fx_1 - y_1 - gx_2 + y_2}{f-g}, \frac{-fgx_2 + fy_2 + fgx_1 - gy_1}{f-g} \right), O_3 \left(\frac{gx_2 - y_2 - hx_3 + y_3}{g-h}, \frac{-ghx_3 + gy_3 + ghx_2 - hy_2}{g-h} \right),$$

$$I_2 \left(\frac{\alpha x_1 - y_1 - \beta x_2 + y_2}{\alpha - \beta}, \frac{-\alpha \beta x_2 + \alpha y_2 + \alpha \beta x_1 - \beta y_1}{\alpha - \beta} \right), I_3 \left(\frac{\beta x_2 - y_2 - \delta x_3 + y_3}{\beta - \delta}, \frac{-\beta \delta x_3 + \beta y_3 + \beta \delta x_2 - \delta y_2}{\beta - \delta} \right)$$

我們只需要證明 $\mathcal{A}(\theta) := \det(O_2, O_3) + \det(I_2, I_3)$ 為定值即可。換言之，我們希望 $\mathcal{A}(\theta)$ 化簡後，所有的「符號 θ 」都能互相抵消，計算如下：

$$\det(O_2, O_3) = \frac{A}{(f-g)(g-h)}, \det(I_2, I_3) = \frac{B}{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}$$

其中

$$A = fghx_1x_2 - fhx_1y_2 - ghx_2y_1 + hy_1y_2 + g^2hx_2x_3 - g^2x_2y_3 - g^2hx_2^2 + 2ghx_2y_2 - ghx_3y_2$$

$$+ gy_2y_3 - hy_2^2 + fg^2x_2^2 - 2fgx_2y_2 - fghx_2x_3 + fgx_2y_3 + fy_2^2 + fhx_3y_2 - fy_2y_3$$

$$- fg^2x_1x_2 + fgx_1y_2 + g^2x_2y_1 - gy_1y_2 ;$$

$$B = \alpha\beta\delta x_1x_2 - \alpha\delta x_1y_2 - \beta\delta x_2y_1 + \delta y_1y_2 + \beta^2\delta x_2x_3 - \beta^2x_2y_3 - \beta^2\delta x_2^2 + 2\beta\delta x_2y_2 - \beta\delta x_3y_2$$

$$+ \beta y_2y_3 - \delta y_2^2 + \alpha\beta^2 x_2^2 - 2\alpha\beta x_2y_2 - \alpha\beta\delta x_2x_3 + \alpha\beta x_2y_3 + \alpha y_2^2 + \alpha\delta x_3y_2 - \alpha y_2y_3$$

$$- \alpha\beta^2 x_1x_2 + \alpha\beta x_1y_2 + \beta^2 x_2y_1 - \beta y_1y_2 .$$

因此

$$\mathcal{A}(\theta) = \det(O_2, O_3) + \det(I_2, I_3) = \frac{\alpha\beta A - \alpha\delta A - \beta^2 A + \beta\delta A + fgB - fhB - g^2 B + ghB}{(f-g)(g-h)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)} .$$

我們將上式右側分子的八項化簡，以表格依序呈現如下：

$\alpha\beta A$	$hx_1x_2 + \beta hx_1y_2 + \alpha hx_2y_1 + \alpha\beta hy_1y_2 - \alpha ghx_2x_3 + \alpha gx_2y_3 + \alpha ghx_2^2 - 2\alpha hx_2y_2$ $+ \alpha hx_3y_2 - \alpha y_2y_3 - \alpha\beta hy_2^2 + \alpha gx_2^2 - 2x_2y_2 - hx_2x_3 + x_2y_3 - \beta y_2^2$ $- \beta hx_3y_2 + \beta y_2y_3 - gx_1x_2 + x_1y_2 - \alpha gx_2y_1 + \alpha y_1y_2$
-----------------	--

$-\alpha\delta A$	$-gx_1x_2 + x_1y_2 - agx_2y_1 + \alpha y_1y_2 + \alpha g^2x_2x_3 + \alpha\delta g^2x_2y_3 - \alpha g^2x_2^2 + 2agx_2y_2$ $-agx_3y_2 - \alpha\delta gy_2y_3 - \alpha y_2^2 + \delta g^2x_2^2 - 2\delta gx_2y_2 + gx_2x_3 + \delta gx_2y_3 + \delta y_2^2$ $-x_3y_2 - \delta y_2y_3 - \delta g^2x_1x_2 + \delta gx_1y_2 - \alpha\delta g^2x_2y_1 + \alpha\delta gy_1y_2$
$-\beta^2 A$	$\beta fhx_1x_2 + \beta^2 fhx_1y_2 - \beta hx_2y_1 - \beta^2 hy_1y_2 - hx_2x_3 + x_2y_3 + hx_2^2 + 2\beta hx_2y_2$ $-\beta hx_3y_2 + \beta y_2y_3 + \beta^2 hy_2^2 - fx_2^2 - 2\beta fx_2y_2 - \beta fhx_2x_3 + \beta fx_2y_3 - \beta^2 fy_2^2$ $-\beta^2 fhx_3y_2 + \beta^2 fy_2y_3 + fx_1x_2 + \beta fx_1y_2 - x_2y_1 - \beta y_1y_2$
$\beta\delta A$	$fx_1x_2 + \beta fx_1y_2 - x_2y_1 - \beta y_1y_2 + gx_2x_3 + \delta gx_2y_3 - gx_2^2 + 2x_2y_2$ $-x_3y_2 - \delta y_2y_3 + \beta y_2^2 - \delta fgx_2^2 + 2\delta fx_2y_2 - fx_2x_3 - \delta fx_2y_3 + \beta\delta fy_2^2$ $-\beta fx_3y_2 - \beta\delta fy_2y_3 + \delta fgx_1x_2 - \delta fx_1y_2 - \delta gx_2y_1 + \delta y_1y_2$
fgB	$\delta x_1x_2 + \delta gx_1y_2 + \delta fx_2y_1 + \delta fgy_1y_2 - \beta\delta fx_2x_3 + \beta fx_2y_3 + \beta\delta fx_2^2 - 2\delta fx_2y_2$ $+ \delta fx_3y_2 - fy_2y_3 - \delta fgy_2^2 + \beta x_2^2 - 2x_2y_2 - \delta x_2x_3 + x_2y_3 - gy_2^2$ $-\delta gx_3y_2 + gy_2y_3 - \beta x_1x_2 + x_1y_2 - \beta fx_2y_1 + fy_1y_2$
$-fhB$	$-\beta x_1x_2 + x_1y_2 - \beta fx_2y_1 + fy_1y_2 + \beta^2 fx_2x_3 + \beta^2 fhx_2y_3 - \beta^2 fx_2^2 + 2\beta fx_2y_2$ $-\beta fx_3y_2 - \beta fhy_2y_3 - fy_2^2 + \beta^2 hx_2^2 - 2\beta hx_2y_2 + \beta x_2x_3 + \beta hx_2y_3 + hy_2^2$ $-x_3y_2 - hy_2y_3 - \beta^2 hx_1x_2 + \beta hx_1y_2 - \beta^2 fhx_2y_1 + \beta fhy_1y_2$
$-g^2B$	$\alpha\delta gx_1x_2 + \alpha\delta g^2x_1y_2 - \delta gx_2y_1 - \delta g^2y_1y_2 - \delta x_2x_3 + x_2y_3 + \delta x_2^2 + 2\delta gx_2y_2$ $-\delta gx_3y_2 + gy_2y_3 + \delta g^2y_2^2 - \alpha x_2^2 - 2agx_2y_2 - \alpha\delta gx_2x_3 + \alpha gx_2y_3 - \alpha g^2y_2^2$ $-\alpha\delta g^2x_3y_2 + \alpha g^2y_2y_3 + \alpha x_1x_2 + \alpha gx_1y_2 - x_2y_1 - gy_1y_2$
ghB	$\alpha x_1x_2 + \alpha gx_1y_2 - x_2y_1 - gy_1y_2 + \beta x_2x_3 + \beta hx_2y_3 - \beta x_2^2 + 2x_2y_2$ $-x_3y_2 - hy_2y_3 + gy_2^2 - \alpha\beta hx_2^2 + 2ahx_2y_2 - \alpha x_2x_3 - ahx_2y_3 + aghy_2^2$ $-\alpha gx_3y_2 - \alpha ghy_2y_3 + \alpha\beta hx_1x_2 - ahx_1y_2 - \beta hx_2y_1 + hy_1y_2$

將表格中「相同顏色」的項合併後，可得

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{11} \Phi_i}{(f-g)(g-h)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)} =: \frac{\sum_{i=1}^{11} \Phi_i}{\Gamma}$$

其中

$$\Phi_1 = x_1x_2(h - 2g - \delta g^2 + \beta fh + 2f + \delta fg + \delta - 2\beta - \beta^2 h + \alpha\delta g + 2\alpha + \alpha\beta h) ;$$

$$\Phi_2 = x_1 y_2 (2\beta h + 4 + 2\delta g + \beta^2 f h + 2\beta f - \delta f + \alpha \delta g^2 + 2\alpha g - \alpha h) ;$$

$$\Phi_3 = x_2 y_1 (\alpha h - 2\alpha g - \alpha \delta g^2 - 2\beta h - 4 - 2\delta g + \delta f - 2\beta f - \beta^2 f h) ;$$

$$\Phi_4 = y_1 y_2 (\alpha \beta h + 2\alpha + \alpha \delta g - \beta^2 h - 2\beta + \delta + \delta f g + 2f + \beta f h - \delta g^2 - 2g + h) ;$$

$$\Phi_5 = x_2 x_3 (-\alpha g h - 2h + \alpha g^2 + 2g - \beta f h - f - \beta \delta f - 2\delta + \beta^2 f + 2\beta - \alpha \delta g - \alpha) ;$$

$$\Phi_6 = x_2 y_3 (2\alpha g + 4 + \alpha \delta g^2 + 2\delta g + 2\beta f - \delta f + \beta^2 f h + 2\beta h - \alpha h) ;$$

$$\Phi_7 = x_2^2 (\alpha g h - \alpha g^2 + \delta g^2 + h - f - \delta f g + \beta \delta f - \beta^2 f + \beta^2 h + \delta - \alpha - \alpha \beta h) ;$$

$$\Phi_8 = 0 ;$$

$$\Phi_9 = x_3 y_2 (\alpha h - 2\beta h - 2\alpha g - 4 - \beta^2 f h - 2\beta f + \delta f - 2\delta g - \alpha \delta g^2) ;$$

$$\Phi_{10} = y_2 y_3 (-\alpha + 2\beta - \alpha \delta g - 2\delta + \beta^2 f - \beta \delta f - f + 2g - \beta f h - 2h + \alpha g^2 - \alpha g h) ;$$

$$\Phi_{11} = y_2^2 (-\alpha \beta h - \alpha + \delta + \beta^2 h - \beta^2 f + \beta \delta f - \delta f g - f + h + \delta g^2 - \alpha g^2 + \alpha g h) .$$

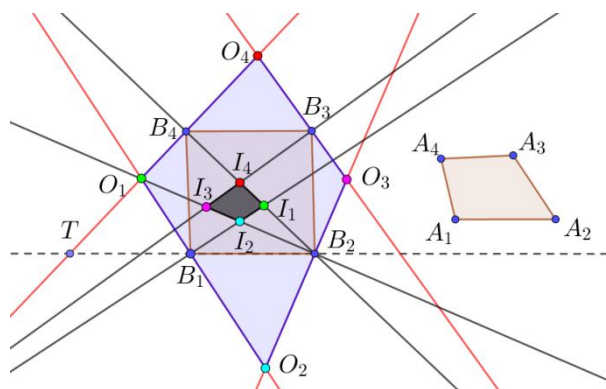
可以證明對每個 i ， $\frac{\Phi_i}{\Gamma}$ 都是常數。我們以有代表性的 Φ_1 、 Φ_2 為例示範證明，其餘九式作法相似，我們僅將化簡結果放在附錄。

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_2}{\Gamma} &= \frac{x_1 y_2 (2\beta h + 4 + 2\delta g + \beta^2 f h + 2\beta f - \delta f + \alpha \delta g^2 + 2\alpha g - \alpha h)}{(f - g)(g - h)(\alpha - \beta)(\beta - \delta)} \\ &= \frac{x_1 y_2 (2\beta h + 4 + 2\delta g + \beta^2 f h + 2\beta f - \delta f + \alpha \delta g^2 + 2\alpha g - \alpha h)}{2\beta h + 4 + 2\delta g + \beta^2 f h + 2\beta f - \delta f + \alpha \delta g^2 + 2\alpha g - \alpha h} \\ &= x_1 y_2 \end{aligned}$$

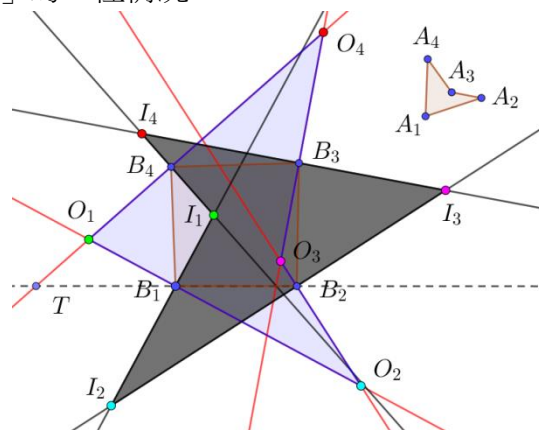
$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1}{\Gamma} &= \frac{x_1 x_2 (h - 2g - \delta g^2 + \beta f h + 2f + \delta f g + \delta - 2\beta - \beta^2 h + \alpha \delta g + 2\alpha + \alpha \beta h)}{(f - g)(g - h)(\alpha - \beta)(\beta - \delta)} \\ &= x_1 x_2 \cdot \frac{\left(\frac{h}{fg} - \frac{fg}{h}\right) + \left(\frac{g^2}{h} - \frac{h}{g^2}\right) + \left(\frac{g}{fh} - \frac{fh}{g}\right) + 2\left(f - \frac{1}{f}\right) - 2\left(g - \frac{1}{g}\right) + \left(h - \frac{1}{h}\right)}{(f - g)(g - h)\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{g}\right)} \\ &= x_1 x_2 \cdot \frac{gh^2 - f^2 g^3 + fg^4 - fh^2 + g^3 - f^2 gh^2 + 2(f^2 g^2 h - g^2 h) - 2(fg^3 h - fgh) + (fg^2 h^2 - fg^2)}{f^2 g^2 - 2f^2 gh + f^2 h^2 - 2fg^3 + 4fg^2 h - 2fgh^2 + g^4 - 2g^3 h + g^2 h^2} \\ &= x_1 x_2 \cdot \frac{(g - h)^2 (g - f)(fg + 1)}{(f - g)^2 (g - h)^2} = x_1 x_2 \cdot \frac{1 + gf}{g - f} \\ &= x_1 x_2 \cdot \frac{1 + \tan(\theta - \angle A_1 - \angle A_2) \tan(\theta - \angle A_1)}{\tan(\theta - \angle A_1 - \angle A_2) - \tan(\theta - \angle A_1)} = \frac{x_1 x_2}{\tan(-\angle A_2)} \end{aligned}$$

到此，我們確認 $\frac{\Phi_1}{\Gamma}$ 以及 $\frac{\Phi_2}{\Gamma}$ 中，均無參數 θ 存在，得證。

現在，我們知道了外、內 n 邊形有向面積和為定值。換言之，就是外 n 邊形有向面積最大時，內 n 邊形有向面積最小。特別注意，在這個「內 n 邊形有向面積最小」的時刻，其有向面積值可能為正、也可能為負。圖二十七呈現「內 4 邊形有向面積最小為負數」的一種情況；圖二十八呈現「內 4 邊形有向面積最小為正數」的一種情況。

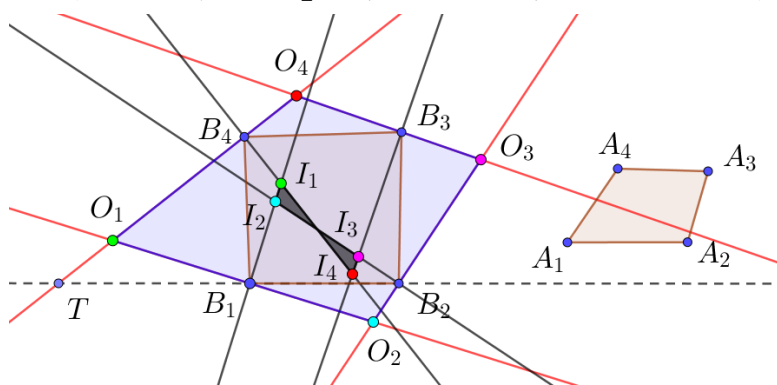


圖二十七



圖二十八

回歸原始的問題，我們想要找出「垂足中心」，也就是希望內 n 邊形能「縮成一個點」。特別注意，在內 n 邊形旋轉的歷程中，其對應頂點兩邊夾的角，與 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 的對應角相等。不幸的是，只有角度相同，並不能確定兩個 n 邊形相似，因此我們不能確定「面積為 0」等價於「縮成一個點」，如圖二十九，此時內 4 邊形的面積為 0，而顯然此時內 4 邊形並非一個點。因此，我們將「縮成一點」的狀況獨立出來討論，說明如下：



圖二十九

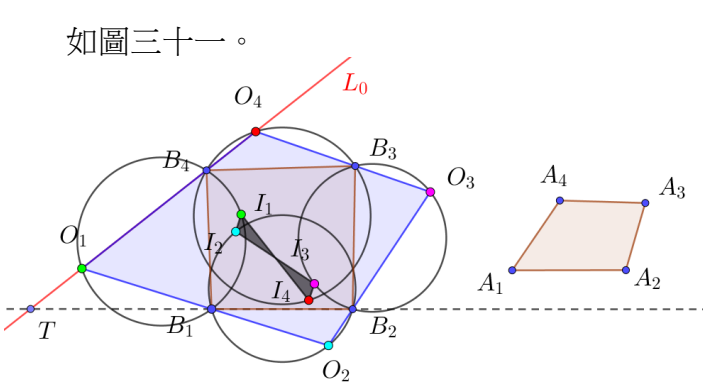
(三) 內 n 邊形的有向面積極小情形討論

我們知道外 n 邊形有向面積最大時，內 n 邊形有向面積最小。而內 n 邊形有向面積為 0 也不一定是面積最小的時刻(可能有負)。有意思的是：若「內 n 邊形有一個時刻縮成一點」，則「此時就是有向面積最小值」。詳細說明如下：

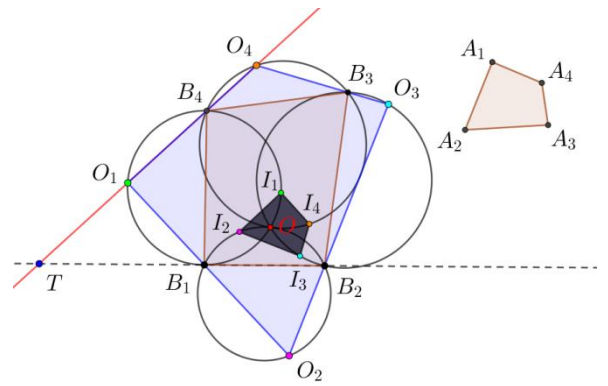
引理 1.4 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 。若給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的內 n 邊形有一個時刻會縮成一點，則在整個變動的過程中，外 n 邊形 $O_1O_2 \cdots O_n$ 與內 n 邊形 $I_1I_2 \cdots I_n$ 必定同時相似於某 n 邊形 \mathcal{P} 。

證明: 我們首先觀察，因為外 n 邊形 $O_1O_2 \cdots O_n$ 在旋轉的歷程中，其內角都與 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 內角對應相等，由此可知外 n 邊形的 n 個頂點 O_1 、 O_2 、 \cdots 、 O_n 「分別在一個圓上移動」，如圖三十，我們將點 O_i 通過的圓稱為「圓 C_i 」。除此之外，根據內 n 邊形的構造方法，可以得知「內 n 邊形的頂點 I_i 會落在圓 C_i 上」，且 $\overline{O_iI_i}$ 即是圓 C_i 的直徑。

接著，我們假設引理 1.4 的條件成立，由於「內 n 邊形有一個時刻會縮成一點」，且「內 n 邊形的頂點 I_i 會落在圓 C_i 上」，由此可以推論「 n 個圓 C_1 、 C_2 、 \cdots 、 C_n 必定交於一點 O 」，如圖三十一。

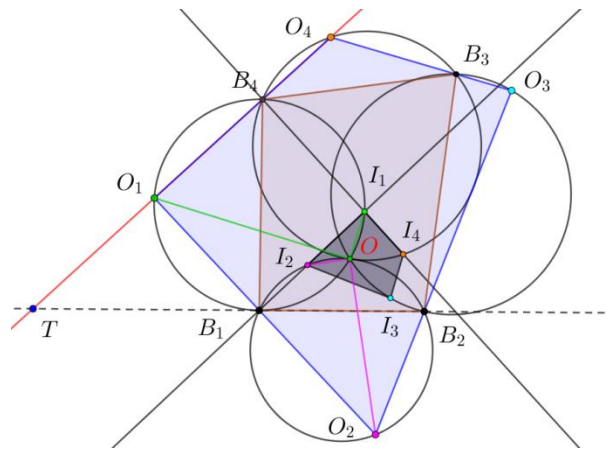


圖三十



圖三十一

我們觀察 ΔOI_1I_2 以及 ΔOO_1O_2 ，如圖三十二。因為 I_1 、 O_1 、 B_1 、 O 四點共圓，故由圓周角性質可得 $\angle OI_1I_2 = \angle OO_1O_2$ ；同理，因為 I_2 、 O_2 、 B_2 、 O 四點共圓，故由圓周角性質可得 $\angle OI_2I_3 = \angle OO_2O_3$ 。又因為 $\angle I_1I_2I_3 = \angle O_1O_2O_3$ ，因此 $\angle OI_2I_1 = \angle OO_2O_1$ ，所以 ΔOI_1I_2 相似於 ΔOO_1O_2 。同理我們可以證明 $\Delta OI_2I_3 \sim \Delta OO_2O_3$ 、 \cdots 、 $\Delta OI_nI_1 \sim \Delta OO_nO_1$ ，最後合併各三角形，得證。



圖三十二

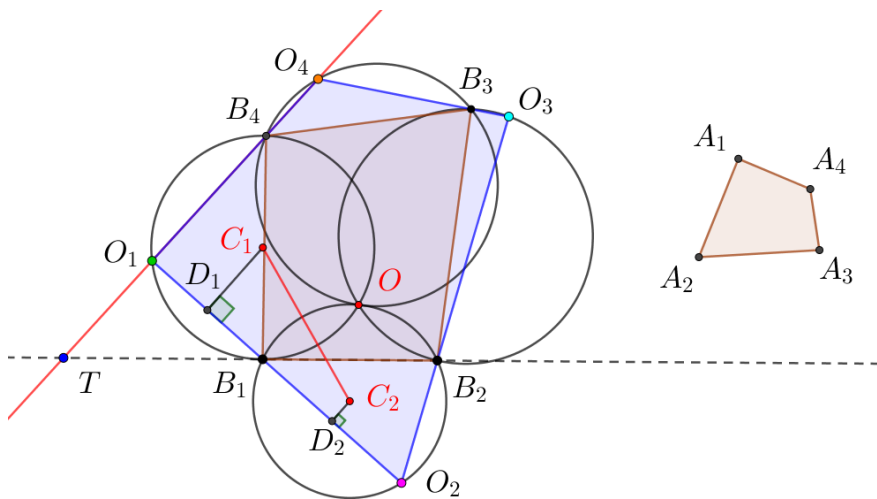
定理 1.5 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 。若給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的內 n 邊形有一個時刻會縮成一點，則外 n 邊形面積最大時，恰為內 n 邊形縮成一點。

證明: 接續引理 1.4 的符號。假設定理 1.5 的條件成立，根據引理 1.4，我們知道內、外 n 邊形旋轉的歷程中，必定同時相似於某 n 邊形 \mathcal{P} 。故外 n 邊形面積最大時，即為「對應邊長最長的時刻」。因此，我們只需要證明「對應邊長最長的時刻」內 n 邊形「恰縮成一點」。

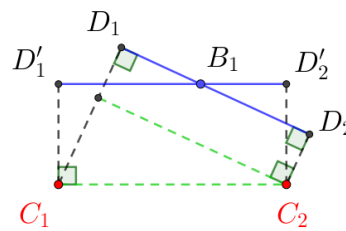
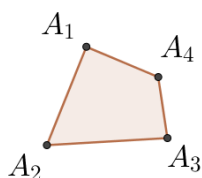
特別注意，在 T 點移動的狀況下，外 n 邊形會旋轉，而圓 C_i 都是固定的。現在我們通過點 C_1 、 C_2 作 $\overline{O_1O_2}$ 的垂足 D_1 、 D_2 ，則我們有 $\overline{D_1D_2} = \frac{1}{2}\overline{O_1O_2}$ ，如圖三十三。因此 $\overline{O_1O_2}$ 發生最大值的時刻，就是 $\overline{D_1D_2}$ 發生最大值的時刻。

而 $\overline{D_1D_2}$ 是通過 B_1 ，和 $\overline{C_1D_1}$ 、 $\overline{C_2D_2}$ 都垂直的線段。如圖三十四，因為直角三角形斜邊長必定大於任一股，所以 $\overline{D_1D_2}$ 的最大值發生在「 $\overline{D_1D_2}$ 和 $\overline{C_1C_2}$ 平行的時候」。

又因為 C_1 、 C_2 為圓心，故 $\overline{D_1D_2}$ 和 $\overline{C_1C_2}$ 平行的時候，「過 B_1 點和 $\overline{O_1O_2}$ 垂直的直線」會通過 O 點，即「內 n 邊形的一邊延長線 M_1 」會通過 O 點。同理可以證明「內 n 邊形的任一邊延長線 M_i 」都會通過 O 點，故內 n 邊形為一點，證畢。



圖三十三



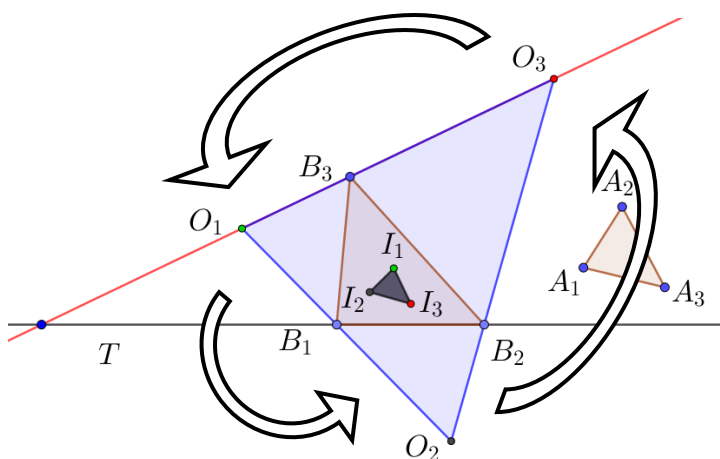
圖三十四

定理 1.5 告訴我們，若內 n 邊形有一個時刻會縮成一點，則此時外 n 邊形「無向」面積最大。又因為外、內 n 邊形的有向面積和為定值，我們不失一般性的假設外 n 邊形有向面積最大值為正，則此時可以推論內 n 邊形的有向面積 0 為最小值。

若我們考慮 $n = 3$ 的情形，有個有趣的小性質，我們寫成推論如下:

推論 1.6 給任意兩個三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 、 $\Delta B_1B_2B_3$ ，則給定 $\Delta B_1B_2B_3$ 下，用 $\Delta A_1A_2A_3$ 造的內、外三角形三頂點的順、逆時針定向相同，如圖三十五。

證明: 接續上述說明，我們不失一般性的假設外三角形的有向面積最大值為正。因為「內三角形必定有縮成一點的時刻」，由定理 1.5，此時外三角形無向面積最大。而由定理 1.3 可知，內、外三角形有向面積和為定值，所以此時即為內三角形有向面積最小值。因此「內三角形的有向面積」與「外三角形的有向面積」不可能異號。換句話說，就是「任意內、外三角形的頂點定向必定相同」，證畢。



圖三十五

定理 1.5 表示: 若內 n 邊形有一個時刻會縮成一點，則此時內 n 邊形有向面積 0 恰為變動下的極值。我們透過大量作圖發現定理 1.5 的逆敘述應該也會成立，但因為暫時想不到證明方法，先寫為猜想如下:

猜想 1.7 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 。若給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的內 n 邊形有向面積極值為 0，則此時內 n 邊形必定縮成一個點。

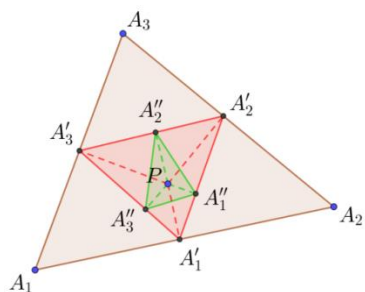
三、垂足多邊形中的等價關係與分類

在此先強調: 本節中，所有提到的「 n 邊形」，都要求連續三頂點不共線。

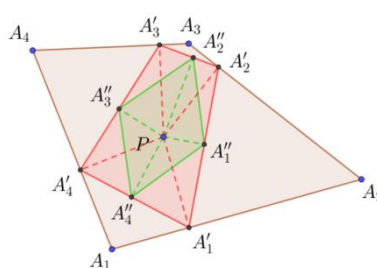
(一) 點列垂足 n 邊形下的等價關係

我們先看一個連續操作: 給定一個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 以及一個點 P ，若我們通過 P 點作

$A_1A_2 \cdots A_n$ 各邊延長線的垂足，可以形成一個垂足 n 邊形 $A_1'A_2' \cdots A_n'$ 。若我們接著通過 P 點作 $A_1'A_2' \cdots A_n'$ 各邊延長線的垂足，可以形成另一個垂足 n 邊形 $A_1''A_2'' \cdots A_n''$ 。重複上述步驟，可以不斷循環操作下去。我們將「第 m 次作出的垂足 n 邊形」稱為「第 m 垂足 n 邊形」，記作 $A_1^{(m)}A_2^{(m)} \cdots A_n^{(m)}$ 。如圖三十六、圖三十七。我們先看一個文獻中有人做過的簡單性質：



圖三十六



圖三十七

引理 2.1 給定任意一個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 以及一點 P ，若 P 對 $A_1A_2 \cdots A_n$ 所做的第 n 垂足多邊形連續三頂點均不共線，則第 n 垂足 n 邊形「必定與原 n 邊形相似」。

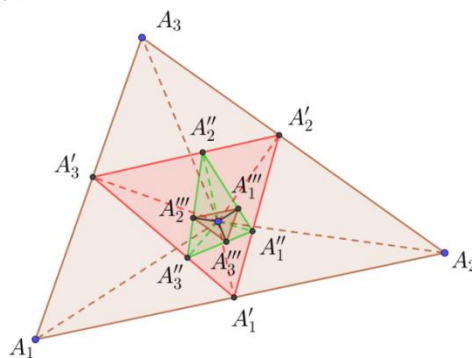
證明: 如圖三十八，我們假設垂足中心為 P ，則透過 n 組四點共圓，我們可以得到:

$$\begin{cases} \angle PA_1A_2 = \angle PA_n'A_1' = \angle PA_{n-1}''A_n'' = \cdots = \angle PA_1^{(n)}A_2^{(n)} \\ \angle PA_2A_1 = \angle PA_2'A_1' = \angle PA_2''A_1'' = \cdots = \angle PA_2^{(n)}A_1^{(n)} \end{cases}$$

因此，我們可以得知 ΔPA_1A_2 相似於 $\Delta PA_1^{(n)}A_2^{(n)}$ 。同理，我們可以證明

$$\Delta PA_2A_3 \sim \Delta PA_2^{(n)}A_3^{(n)}、\Delta PA_3A_4 \sim \Delta PA_3^{(n)}A_4^{(n)}、\cdots、\Delta PA_nA_1 \sim \Delta PA_n^{(n)}A_1^{(n)}$$

最後再將此 n 組相似三角形合併即得證。



圖三十八

注意，滿足引理 2.1 條件的 P 點存在。事實上， P 點不要選在多邊形邊的延長線上，或任三頂點(或邊的延長線交點)的外接圓上即可。

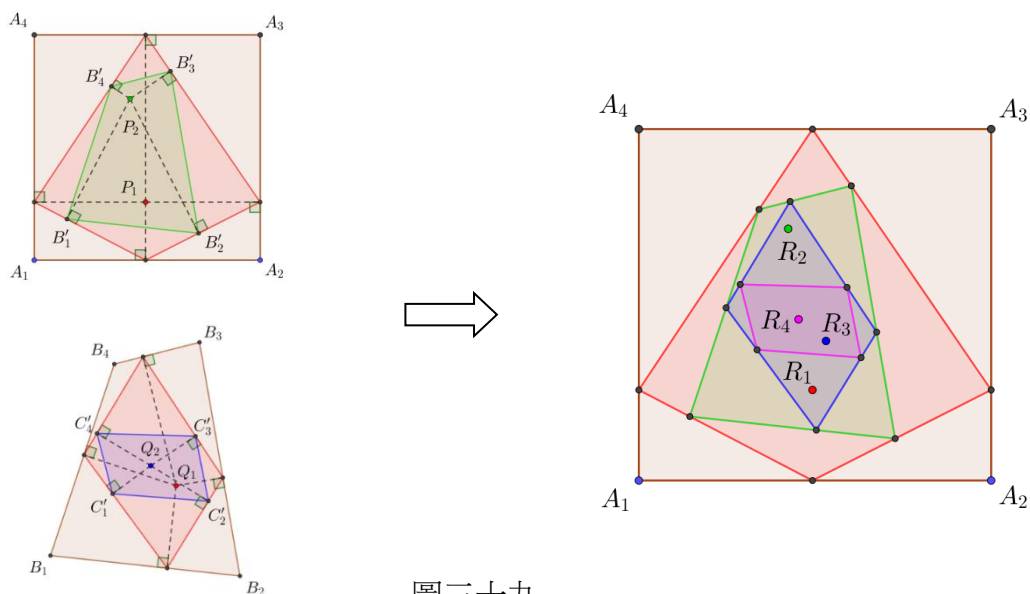
現在我們修改一下設定，不要求每次作垂足時都從 P 點出發，而是可以「換點」。換句話說，就是要考慮「點列 $P_1、P_2、\dots、P_m$ 對 $A_1A_2 \dots A_n$ 的垂足 n 邊形」。注意，以下我們所取的點 P_i 都要使垂足多邊形連續三頂點不共線。這種點列作出的垂足 n 邊形有幾個特殊性質，分別描述如下：

引理 2.2 給定一個 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ ，存在點列 $P_1、P_2、\dots、P_m$ ，使得該點列對 $A_1A_2 \dots A_n$ 作的垂足 n 邊形，恰與 $A_1A_2 \dots A_n$ 自身相似。

證明：取 $m = n$ ，並取 $P_1 = P_2 = \dots = P_m$ 為任意一個能使 P_1 對 $A_1A_2 \dots A_n$ 作的垂足多邊形，連續三頂點不共線的點。再套用引理 2.1，即可得證。

引理 2.3 給定三個 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n、B_1B_2 \dots B_n、C_1C_2 \dots C_n$ 。若存在兩組點列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 和 $\{Q_i\}_{i=1}^k$ 使得 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 對 $A_1A_2 \dots A_n$ 作的垂足 n 邊形與 $B_1B_2 \dots B_n$ 相似；且 $\{Q_i\}_{i=1}^k$ 對 $B_1B_2 \dots B_n$ 作的垂足 n 邊形與 $C_1C_2 \dots C_n$ 相似，則存在點列 $\{R_i\}_{i=1}^{m+k}$ ，使得 $\{R_i\}_{i=1}^{m+k}$ 對 $A_1A_2 \dots A_n$ 作的垂足 n 邊形與 $C_1C_2 \dots C_n$ 相似。

證明：假設引理條件成立，我們想要找一個點列 $\{R_i\}$ ，使得 $\{R_i\}$ 對 $A_1A_2 \dots A_n$ 作的垂足 n 邊形與 $C_1C_2 \dots C_n$ 相似。此時只需要令點列 $\{R_i\}$ 的前 m 項與 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 相同，這樣作 m 次垂足後會得到一個 n 邊形 $A_1^{(m)}A_2^{(m)} \dots A_n^{(m)}$ 與 $B_1B_2 \dots B_n$ 相似；接著在點列 $\{R_i\}_{i=1}^m$ 後面再依序接上 k 個點 $\{R_i\}_{i=m+1}^{m+k}$ ，滿足「 $\{R_i\}_{i=m+1}^{m+k}$ 與 $A_1^{(m)}A_2^{(m)} \dots A_n^{(m)}$ 形成的圖形」與「 $\{Q_i\}_{i=1}^k$ 與 $B_1B_2 \dots B_n$ 形成的圖形」相似，此時造出的點列即為所求，如圖三十九。

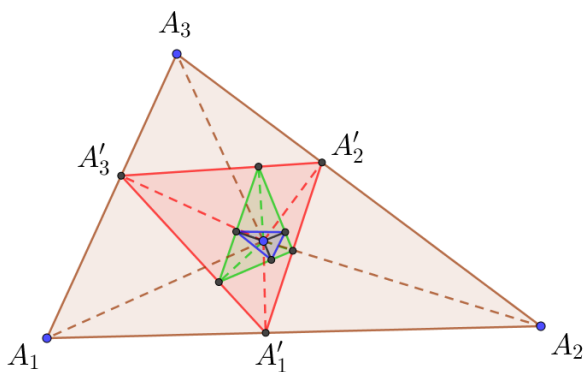


引理 2.4 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 。若存在點列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ ，使得 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 對 $A_1A_2 \cdots A_n$ 作的垂足 n 邊形與 $B_1B_2 \cdots B_n$ 相似，則存在點列 $\{Q_i\}_{i=1}^k$ ，使得 $\{Q_i\}_{i=1}^k$ 對 $B_1B_2 \cdots B_n$ 作的垂足 n 邊形與 $A_1A_2 \cdots A_n$ 相似。

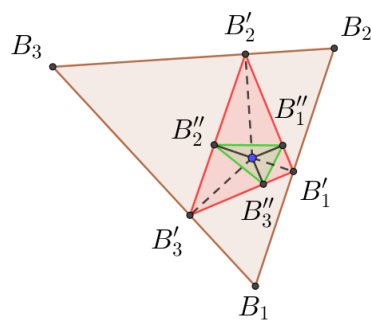
證明: 首先，根據引理 2.1，我們知道任一點 P ，所作出的第 n 垂足 n 邊形「必定與原 n 邊形相似」。因此，若某一點 P 對 n 邊形 A 作的垂足 n 邊形 A' 與 B 相似，則我們可以在 B 的平面上取點列 $\{Q_i\}_{i=1}^{n-1}$ ，其中每個 Q_i 均取同一點 \bar{P} ，使得圖形「 P 與 A' 」以及圖形「 \bar{P} 與 B 」相似。此時點列 $\{Q_i\}_{i=1}^{n-1}$ 對 B 作的垂足 n 邊形 B' 會與 A 相似，如圖四十與圖四十一。

現在我們開始證明引理 2.4: 給定兩個 n 邊形 $A := A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B := B_1B_2 \cdots B_n$ ，並假設存在點列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ ，使得 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 對 A 作的垂足 n 邊形 $A^{(m)}$ 與 B 相似。我們要找點列 $\{Q_i\}_{i=1}^k$ ，使得 $\{Q_i\}_{i=1}^k$ 對 B 作的垂足 n 邊形與 A 相似。

我們模仿上述手法(以 $P = P_m$)，我們可以先取點列 $\{Q_i\}_{i=1}^{n-1}$ ，使 $\{Q_i\}_{i=1}^{n-1}$ 對 B 的垂足 n 邊形 B' 和 $A^{(m-1)}$ 相似；接著(以 $P = P_{m-1}$)，我們可以取點列 $\{Q_i'\}_{i=1}^{n-1}$ ，使 $\{Q_i'\}_{i=1}^{n-1}$ 對 B' 的垂足 n 邊形 B'' 和 $A^{(m-2)}$ 相似；重複上述步驟，並將所取的所有點列串聯起來，可以得到一個點列 $\{Q_i\}_{i=1}^{m(n-1)}$ ，使得 $\{Q_i\}_{i=1}^{m(n-1)}$ 對 B 的垂足 n 邊形 $B^{(m)}$ 與 A 相似，證畢。



圖四十



圖四十一

現在，我們定義一個平面上 n 邊形的關係如下: 我們說兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 有「垂足關係」,是指存在點列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ ，使得 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 對 $A_1A_2 \cdots A_n$ 作的垂足 n 邊形與 $B_1B_2 \cdots B_n$ 相似，記作 $A_1A_2 \cdots A_n \sim_P B_1B_2 \cdots B_n$ 。引理 2.2 證明了這個關係有反身性、引理 2.3 證明了這個關係有遞移性、引理 2.4 證明了這個關係有對稱性。因此，我們可以知道這是一個「等價

關係」。我們將此結果寫為定理:

定理 2.5 垂足關係 \sim_P 是平面 n 邊形的等價關係。

給定正整數 $n \geq 3$ 以及平面 n 邊形 A ，我們定義 A 的等價類為集合

$$[A] := \{B \mid B \text{ 為平面 } n \text{ 邊形, 滿足 } B \sim_P A\}$$

則根據等價關係的性質，集合 $\{[A] \mid A \text{ 為任意平面 } n \text{ 邊形}\}$ 會將平面 n 邊形「分割」。也就是說: 若我們把「有關係的 n 邊形都放入一個集合」，則這些集合(等價類)會將平面上所有 n 邊形作到互斥分類，即「任意 n 邊形都有被分類到某個集合中」且「任意兩個等價類不是完全相等就是完全互斥」。

到此，我們已經用垂足關係對平面 n 邊形作了一個好的分類，以下我們來看一些特殊的狀況:

(二) 特殊等價類的討論

首先我們觀察 $n = 3$ 的情況: 由定理 1.2，我們知道給定任意兩個三角形 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 、 $\Delta B_1 B_2 B_3$ ，我們都可以找到一點 P ，使得 P 對 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 作的垂足三角形與 $\Delta B_1 B_2 B_3$ 相似，換言之，任意兩個三角形 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 、 $\Delta B_1 B_2 B_3$ ，都滿足 $\Delta A_1 A_2 A_3 \sim_P \Delta B_1 B_2 B_3$ ，也就是說: 任意兩個三角形都是同一類。我們寫成定理:

定理 2.6 平面三角形在垂足關係 \sim_P 下的等價類僅有一個。

四邊形以上的等價類分析就不那麼簡單，因為任意兩個四邊形不一定能透過「一次垂足」變為相似關係。以正方形為例，平面上任選一點 P 對正方形作的垂足四邊形一定會「對角線互相垂直」，如圖四十二。因此，正方形無法透過一次垂足造出任意的長方形。然而，給定一個正方形 A 以及任意一個長方形 B ，我們都能找到點列 $\{P_i\}_{i=1}^2$ ，使得該點列對 A 作的垂足四邊形與 B 相似，證明如下:

引理 2.7 給定一個正方形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 以及任意一個長方形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ ，我們都能找到點列 $\{P_i\}_{i=1}^2$ ，使得該點列對 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 作的垂足四邊形 $A_1^{(2)} A_2^{(2)} A_3^{(2)} A_4^{(2)}$ 與 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 相似。

證明: 假設正方形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的邊長為 2，並在 $\overline{A_2 A_3}$ 中垂線上取一點 P_1 落在正方形內部。假設此點到 $\overline{A_1 A_4}$ 的距離為 n ，其中 $0 < n < 2$ ，則我們可以架座標: $P_1(0,0)$ 、 $A_1(-1,n)$ 、

$A_2(-1, n-2)$ 、 $A_3(1, n-2)$ 、 $A_4(1, n)$ 。而 P_1 對 $A_1A_2A_3A_4$ 作的垂足四邊形頂點滿足：

$A_1^{(1)}(-1, 0)$ 、 $A_2^{(1)}(0, n-2)$ 、 $A_3^{(1)}(1, 0)$ 、 $A_4^{(1)}(0, n)$ ，如圖四十二。

我們首先會證明：無論 n 取值為何，都會存在唯一的點 P_2 ，使得 P_2 對 $A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_3^{(1)}A_4^{(1)}$ 作的垂足四邊形 $A_1^{(2)}A_2^{(2)}A_3^{(2)}A_4^{(2)}$ 恰為長方形，如圖四十三。接著我們會證明「給任一個正數 a 」，我們都能找到適當的數字 n ，使得上述方法造的垂足四邊形 $A_1^{(2)}A_2^{(2)}A_3^{(2)}A_4^{(2)}$ 是一個邊長比為 $a : 1$ 的長方形。

我們開始證明 P_2 的存在唯一性：在 $\overline{A_2^{(1)}A_4^{(1)}}$ 上取一動點 $Q(0, t)$ ，如圖四十四。通過簡單的直線方程計算，我們得到 Q 分別對 $\overline{A_4^{(1)}A_1^{(1)}}$ 以及 $\overline{A_1^{(1)}A_2^{(1)}}$ 作的垂足點 x 坐標為

$$R_4(x) = \frac{nt-n^2}{n^2+1}; R_1(x) = \frac{(n-2)t-(n-2)^2}{(n-2)^2+1}$$

為了得到圖四十三的結果，解方程式 $R_4(x) = R_1(x)$ ，得唯一解 $t = \frac{2(n-1)}{-n^2+2n+1}$ ，代表僅有一點 Q ，

使得 R_4 、 R_1 的 x 坐標相同，此時四邊形 $R_1R_2R_3R_4$ 即為矩形。

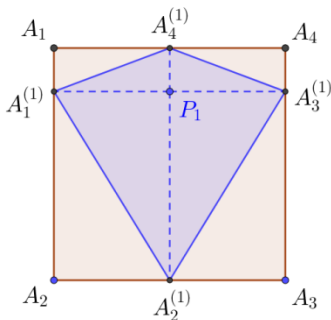
最後，關於 n 值的取法，我們先計算出 $R_1R_2R_3R_4$ 為矩形時的頂點座標如下：

$$R_1\left(\frac{n(n-2)}{-n^2+2n+1}, \frac{n-2}{-n^2+2n+1}\right); R_3\left(\frac{-n(n-2)}{-n^2+2n+1}, \frac{n}{-n^2+2n+1}\right)$$

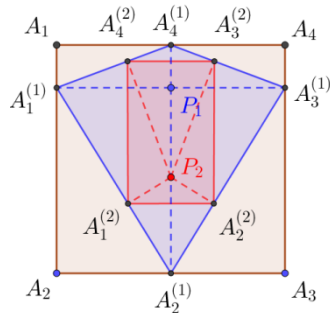
故矩形 $R_1R_2R_3R_4$ 的邊長比為 $\frac{-2n(n-2)}{-n^2+2n+1} : \frac{2}{-n^2+2n+1}$ ，其比值為

$$r(n) := -n(n-2) = -(n-1)^2 + 1$$

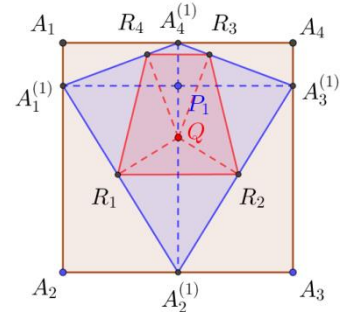
因此當 n 在區間 $(0, 2)$ 變動時， $r(n)$ 的值域為 $(0, 1]$ ，代表矩形 $R_1R_2R_3R_4$ 的長、寬比例最大為 1，小可以任意小，得證。



圖四十二



圖四十三

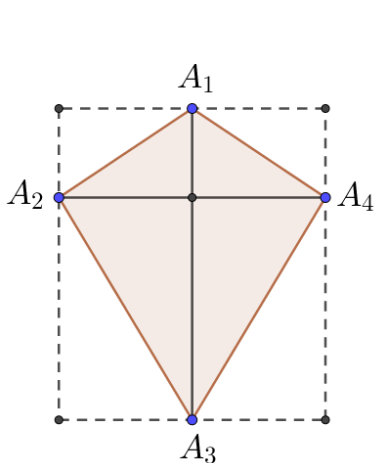


圖四十四

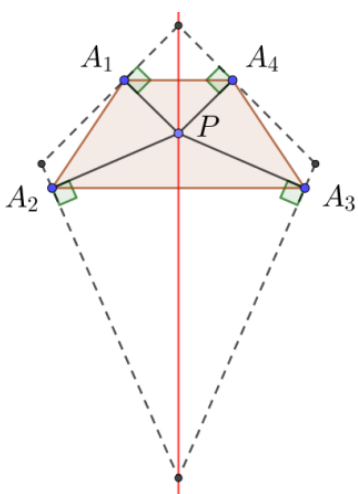
引理 2.7 告訴我們: 垂足關係 \sim_P 下, 任意的矩形(和正方形)都落在同一個等價類中。又因為通過任意箏形的頂點作「對角線的平行線」可以得到箏形的「外接長方形」, 如圖四十五。因此, 「所有矩形」向內作「垂足箏形」可以得到所有種類的箏形。也就是說, 任意的箏形和任意矩形都落在同一個等價類中。

同理, 從任意等腰梯形的對稱軸上選一點 P , 在分別通過此等腰梯形的每一個頂點 A_i , 作「垂直線段 $\overline{PA_i}$ 」的直線, 我們可以得到等腰梯形的「外接箏形」, 如圖四十六。因此, 「所有箏形」向內作「垂足等腰梯形」可以得到所有種類的等腰箏形。也就是說, 任意的等腰梯形和任意箏形都落在同一個等價類中。我們將這些結果寫成引理如下:

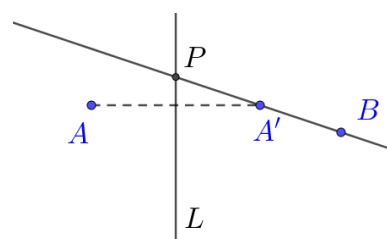
引理 2.8 任意的等腰梯形、任意箏形、和任意矩形, 在垂足關係 \sim_P 下落在同一個等價類中。



圖四十五



圖四十六



圖四十七

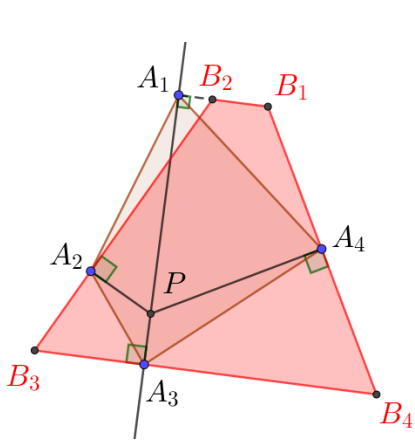
接下來, 我們準備來證明「任意不自交四邊形都和某個等腰梯形落在同一個等價類之中」。注意, 若此敘述成立, 再配合引理 2.8, 我們就能推論「任意不自交四邊形都落在同一個等價類中」, 換言之, 就是垂足等價關係會將所有平面不自交四邊形分在同一類。我們先看最後一個簡單的引理:

引理 2.9 給定平面上一直線 L 以及不落在 L 上的兩點 A 、 B , 則直線 L 上存在一點 P , 使得 \overline{AP} 和 \overline{BP} 與直線 L 的夾角相同。

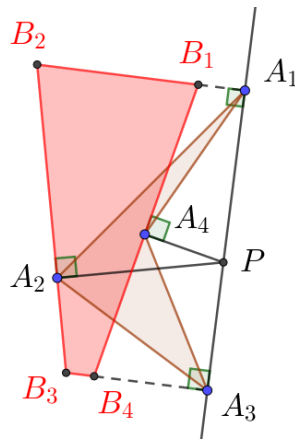
證明: 如圖四十七, 作點 A 對直線 L 的鏡射點 A' , 再作直線 $\overleftrightarrow{A'B}$, 並取 $\overleftrightarrow{A'B}$ 和 L 的交點 P , 則此點 P 即為所求。

定理 2.10 給定平面上任意不自交四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，必定存在等腰梯形 $B_1B_2B_3B_4$ 以及點 P ，使得點 P 對 $B_1B_2B_3B_4$ 作的垂足四邊形與 $A_1A_2A_3A_4$ 相似。

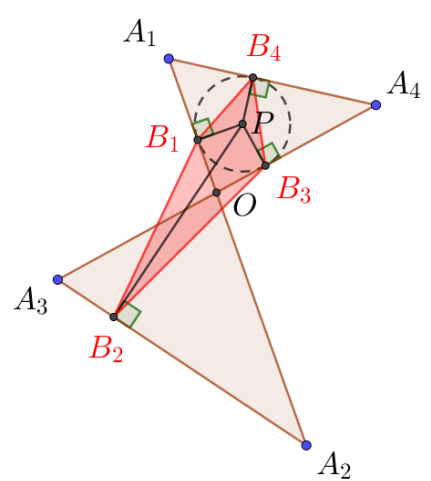
證明: 如圖四十八、圖四十九, 由引理 2.9, 在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 上取一點 P , 使得 $\angle A_2PA_3 = \angle A_4PA_3$ 。接著, 分別通過四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的頂點 A_i , 作垂直 $\overline{PA_i}$ 的直線, 令此四條直線所形成的四邊形為 $B_1B_2B_3B_4$, 則 $A_1A_2A_3A_4$ 即為點 P 對 $B_1B_2B_3B_4$ 作的垂足四邊形。注意, 因為四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 有一雙對邊同時垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$, 故該雙對邊平行, 所以 $B_1B_2B_3B_4$ 是梯形; 而 $\angle A_2PA_3 = \angle A_4PA_3$ 會使梯形 $B_1B_2B_3B_4$ 的兩底角相等, 故等腰。



圖四十八



圖四十九



圖五十

到此, 我們已經確定「任意不自交四邊形都落在同一個等價類中」。我們再來證明「任意一個自交四邊形, 都和某個不自交四邊形同類」:

定理 2.11 給定平面上任意自交四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 必定存在點 P , 使得點 P 對 $A_1A_2A_3A_4$ 作的垂足四邊形是不自交的。

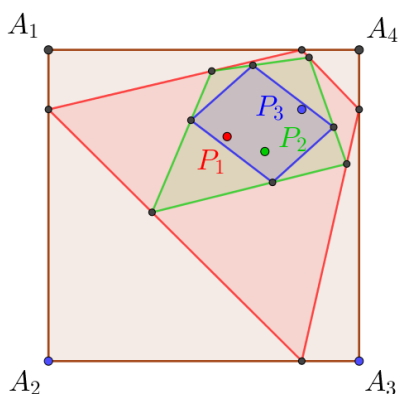
證明: 給定平面上自交四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 令自交的點為 O 。因為自交四邊形必定形成兩個三角形的區域, 我們在其中一個區域 ΔA_1OA_4 中, 取其內心 P , 如圖五十。若我們作點 P 對 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂足四邊形 $B_1B_2B_3B_4$, 則必有三點落在 ΔA_1OA_4 的內切圓上, 如圖五十的 B_1 、 B_3 、 B_4 。注意, 此時最後一個垂足點 B_2 必定落在「直線 $\overleftrightarrow{B_1B_3}$ 分割的半平面」中「和 B_4 異側」的區域, 故四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 不自交。

定理 2.10 和定理 2.11 合併後，我們可以推論所有平面四邊形都是同一類，結果如下：

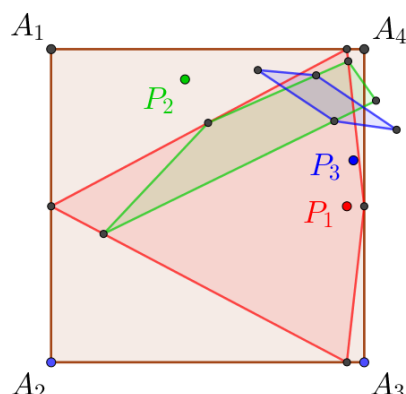
推論 2.12 平面四邊形在垂足關係 \sim_P 下的等價類僅有一個。

推論 2.12 告訴我們，給定任意兩個平面四邊形 A 、 B ，我們都能找到點列 P_1, P_2, \dots, P_n ，使得 A 用該點列作出的垂足四邊形與 B 相似。值得注意的是，我們唯一確定的事情是點列的存在性，以及點列中，點的數量是有限的。對於點列中，所需要的點的最少數量仍然未知。

舉例來說，若想找點列，將正方形作垂足變成特定的平行四邊形，依照推論 2.12 的證明方法，給出的點列數量是 6 個點(第 1 個點將正方形變成長方形、第 2 個點將長方形變成箏形、第 3 個點將箏形變成等腰梯形、最後用 3 個點將等腰梯形變成平行四邊形)。而圖五十一和圖五十二顯示「正方形」可以透過 3 個點的點列作出特定平行四邊形。



圖五十一



圖五十二

另外，關於五邊形以上的等價類數量，也仍然未知，我們僅寫一個猜想如下：

猜想 2.13 給定正整數 $n \geq 3$ ，平面 n 邊形在垂足關係 \sim_P 下的等價類僅有一個。

肆、 結論

本研究將「三腳架構造」(tripod configuration) 離散化，利用此手法來處理垂足多邊形相關的問題。相較於近年相關研究，本研究提供一個新的方向：給定兩個 n 邊形，我們能夠透過單參數 T ，來製造外、內 n 邊形(n 腳架)。此兩個 n 邊形會隨著參數 T 的變動而旋轉。主要發現性質如下：

一、三腳架構造與垂足三角形的關係

給定兩三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 以及 $\Delta B_1B_2B_3$ ，則給定 $\Delta B_1B_2B_3$ 下，用 $\Delta A_1A_2A_3$ 造的內三角形面積，會隨著點 T 的移動在某時刻變成 0。此性質等價於三角形的相似垂足中心存在。

二、外、內 n 邊形的有向面積和恆定

- (一) 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ ，則給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的「外、內 n 邊形」有向面積和為定值。而內 n 邊形的有向面積極小值可能為負。
- (二) 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 。若給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的內 n 邊形有一個時刻會縮成一點，則在整個變動的過程中，外 n 邊形 $O_1O_2 \cdots O_n$ 與內 n 邊形 $I_1I_2 \cdots I_n$ 必定同時相似於某 n 邊形 \mathcal{P} 。
- (三) 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 。若給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的內 n 邊形有一個時刻會縮成一點，則此時為內 n 邊形有向面積的最小值，而此時外 n 邊形面積最大。
- (四) 給任意兩個三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 、 $\Delta B_1B_2B_3$ ，則給定 $\Delta B_1B_2B_3$ 下，用 $\Delta A_1A_2A_3$ 造的內、外三角形三頂點的順、逆時針定向相同。

三、垂足關係

- (一) 我們定義兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 有「垂足關係」，是指存在點列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ ，使得 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 對 $A_1A_2 \cdots A_n$ 作的垂足 n 邊形與 $B_1B_2 \cdots B_n$ 相似。則此關係為平面 n 邊形的等價關係。
- (二) 在垂足等價關係下，所有三角形都是同一類；而所有四邊形也都是同一類。

伍、 討論與未來展望

本研究在使用 n 腳架手法，處理垂足多邊形問題時，發現幾個現象，既想不出證明也找不到反例。主要有以下三個問題：

- (一) 給定兩個 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 、 $B_1B_2 \cdots B_n$ 。若給定 $B_1B_2 \cdots B_n$ 下，用 $A_1A_2 \cdots A_n$ 造出的內 n 邊形有向面積「極值」為 0，能否確定此極值時刻，內 n 邊形縮成一個點？
- (二) 了解將四邊形 A 作垂足變成四邊形 B 所需要的最少點數量。

(三) 對於平面 n 邊形($n \geq 5$)的垂足等價類個數的刻劃。

關於第一個問題，我們發現「隨著參數 T 的變動，若內 n 邊形並非以一個點的形式達到有向面積 0，則下一個時刻必定產生異號的有向面積」。而對於問題三，我們試圖推廣四邊形的證明手法：嘗試以角度、長度、面積等幾何量為基準，希望找到一個特殊 n 邊形作為垂足變換下的中繼圖形，目前尚未找到夠好的一般化圖形。我們正持續進行以上兩個問題的研究，期待能有更進一步的突破。

陸、 參考文獻

- [1] Eric Chena, Nick Lourie(2015). *Tripod configurations of curves*.
- [2] Daniela Ferrarello, Maria Flavia Mammana, Mario Pennisi(2013). *Pedal Polygons*.
- [3] Georgi Ganchev, Gyulbeyaz Ahmed, Marinella Petkova(2012). *Points, Whose Pedal Triangles Are Similar To The Given Triangle*.
- [4] Serge Tabachnikov(1995). *The Four – Vertex Theorem Revisited – Two Variations On The Old Theme*.
- [5] 黃靖堯、梁家瑋、李敏威(2020)。那裡就是你。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
- [6] 李品萱、劉垣紋
(2017)。多邊形自守點曲線上的翻滾。中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
- [7] 國中數學課本第四冊第二章：平面幾何圖形。南一書局
- [8] 國中數學課本第五冊第二章：圓的性質。南一書局

柒、 附錄

一、光滑版本的三腳架架構

定理 3.1 對任意凸的、光滑、封閉平面曲線 γ ，其平面上都存在一點 P ，使得「可以從該點做周角三等分線」，使這三條分角線，都在「與曲線 γ 相交處」垂直曲線的切線。

證明: 令 $\gamma(s)$ 是曲線 γ 的弧長參數化，且原點 O 在 γ 內部。接著，在平面上取一固定向量 v ，定義 $\alpha(s)$ 為 v 和 $\gamma'(s)$ 的夾角。因為曲線 γ 是凸的，我們可以用 α 重新參數化 γ ，其中

$$\alpha'(s) = |\gamma''(s)|$$

再定義 $l(s)$ 是通過 $\gamma(s)$ 和 $\gamma'(s)$ 垂直的直線。並定義 $p(s)$ 為 O 到 $l(s)$ 的有向距離，即

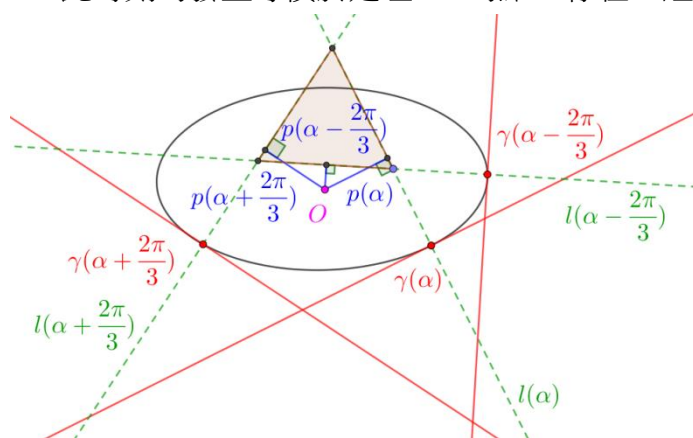
$$p = \frac{\gamma \wedge \gamma''}{|\gamma''|}$$

此時我們考慮 $f(\alpha) = p\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + p(\alpha) + p\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，即原點 O 分別到直線 $l\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$ 、 $l(\alpha)$ 、 $l\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的有向距離和。注意 $l\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$ 、 $l(\alpha)$ 、 $l\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ 三條直線會圍出一個正三角形，故 $f(\alpha)$ 代表原點 O 到此正三角形三邊有向距離和，如圖四十八。

最後我們考慮 $q := \gamma \wedge \gamma'$ ，則我們有

$$\frac{dq(s(\alpha))}{d\alpha} = \frac{dq(s)}{ds} \frac{ds(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\gamma(\alpha) \wedge \gamma''(\alpha)}{|\gamma''(\alpha)|} = p(\alpha)$$

因此 $F(\alpha) = q\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + q(\alpha) + q\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ 滿足 $F'(\alpha) = f(\alpha)$ 。又因為 $F(\alpha)$ 是光滑的週期函數，所以存在 α_0 使得 $0 = F'(\alpha_0) = f(\alpha_0)$ 。而此時 $l\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$ 、 $l(\alpha)$ 、 $l\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ 三條直線圍出的正三角形面積為 0，此時刻的發生等價於定理 3.1 的點 P 存在，證畢。



圖四十八

二、定理 1.3 證明 (ϕ_i 化簡結果)

定理 1.3 的證明中，我們計算

$$\mathcal{A}(\theta) = \det(O_2, O_3) + \det(I_2, I_3) = \frac{\sum_{i=1}^{11} \phi_i}{\Gamma}$$

並需要證明 $\mathcal{A}(\theta)$ 是 θ 的常數函數。對於 $i \in \{1, 2, \dots, 11\}$ ，下表為 ϕ_i/Γ 的化簡結果：

$\frac{\phi_1}{\Gamma} = \frac{-x_1x_2}{\tan \angle A_2}$	$\frac{\phi_2}{\Gamma} = x_1y_2$
$\frac{\phi_3}{\Gamma} = -x_2y_1$	$\frac{\phi_4}{\Gamma} = \frac{-y_1y_2}{\tan \angle A_2}$
$\frac{\phi_5}{\Gamma} = \frac{-x_2x_3}{\tan \angle A_3}$	$\frac{\phi_6}{\Gamma} = x_2y_3$
$\frac{\phi_7}{\Gamma} = x_2^2 \frac{\sin(\angle A_2 + \angle A_3)}{\sin \angle A_2 \cdot \sin \angle A_3}$	$\frac{\phi_8}{\Gamma} = 0$
$\frac{\phi_9}{\Gamma} = -x_3y_2$	$\frac{\phi_{10}}{\Gamma} = \frac{-y_2y_3}{\tan \angle A_3}$
$\frac{\phi_{11}}{\Gamma} = y_2^2 \frac{\sin(\angle A_2 + \angle A_3)}{\sin \angle A_2 \cdot \sin \angle A_3}$	

因此我們得到

$$\mathcal{A}(\theta) = (x_2^2 + y_2^2) \frac{\sin(\angle A_2 + \angle A_3)}{\sin \angle A_2 \cdot \sin \angle A_3} + \sum_{j=2}^3 \left[(x_{j-1}y_j - x_jy_{j-1}) + \frac{-x_{j-1}x_j - y_{j-1}y_j}{\tan \angle A_j} \right]$$

為 θ 的常數函數。一般而言，若我們定義 $\mathcal{A}_i(\theta) := \det(O_i, O_{i+1}) + \det(I_i, I_{i+1})$ ，則內、外 n 邊形的有向面積和為

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ (x_i^2 + y_i^2) \frac{\sin(\angle A_i + \angle A_{i+1})}{\sin \angle A_i \cdot \sin \angle A_{i+1}} + \sum_{j=i}^{i+1} \left[(x_{j-1}y_j - x_jy_{j-1}) + \frac{-x_{j-1}x_j - y_{j-1}y_j}{\tan \angle A_j} \right] \right\}$$

其中 $A_{n+1} = A_1$ 。注意此式也是 θ 的常數函數，故定理 1.3 成立。

【評語】 030412

本作品主要推廣三角形相似垂足中心的概念，給出外、內 n 邊形及垂足 n 邊形的定義。主要結果是得到外、內 n 邊形的作圖與證明，外、內 n 邊形的有向面積與相似性相關的幾何性質以及利用垂足 n 邊形定義 n 邊形上的等價關係。特別是證明了三角形與四邊形在這樣的垂足關係下僅有一個等價類。內容中的論證過程完整，是個相當不錯的作品。

作品簡報

垂足多邊形的不變量與分類

組別：國中組

科別：數學科

前言

研究動機：垂足多邊形

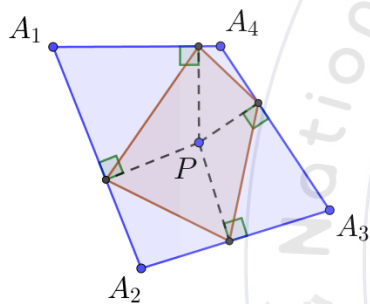


圖1：垂足四邊形

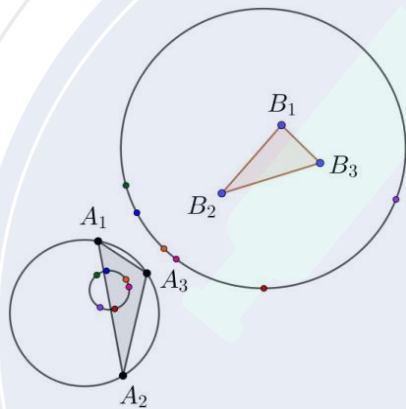


圖2：相似垂足中心

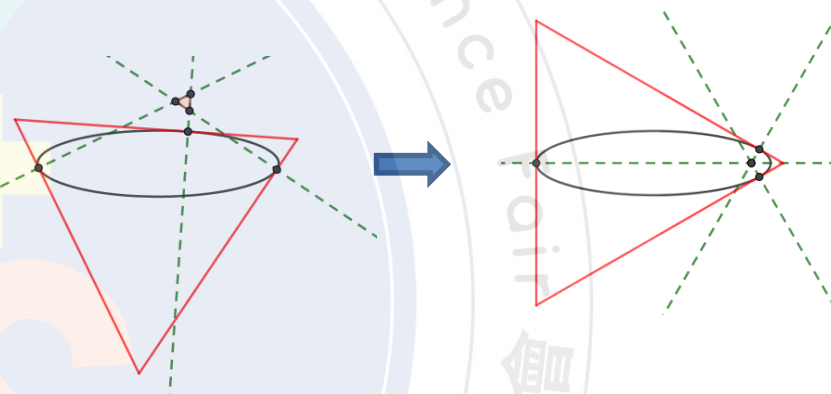


圖3：三腳架架構

研究問題與目標

- 用三腳架架構重新證明三角形相似垂足中心存在。
- 研究三腳架架構推廣到垂足 n 邊形的性質 ($n \geq 3$)。
- 給定兩個 n 邊形 A 、 B ，研究 B 是否是 A 的垂足 n 邊形。

名詞定義

- 外多邊形：對兩個 n 邊形 A 、 B 。若 O 是 B 的外接多邊形，且內角與 A 的內角對應相等，則 O 稱「 A 對 B 的外 n 邊形」。
- 內多邊形：對 n 邊形 A 、 B ，令 O 是 A 對 B 的某外 n 邊形。通過 B 的頂點依序作 O 各邊的垂直線，其交點構成多邊形 I 稱為「對應 O 的內 n 邊形」。

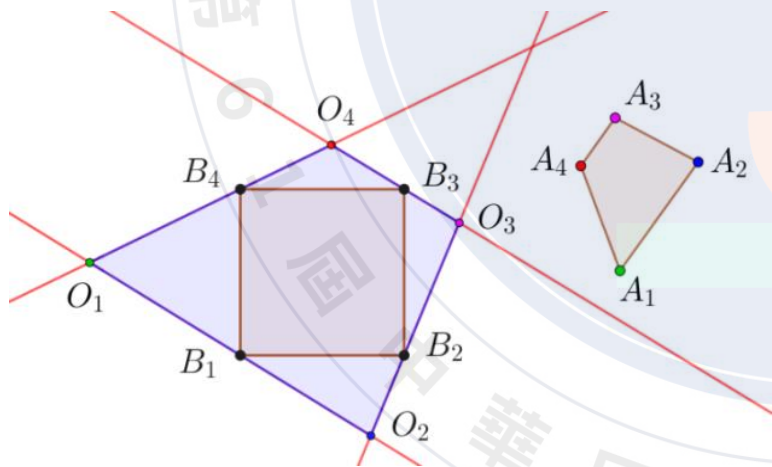


圖4: A 對 B 的外四邊形

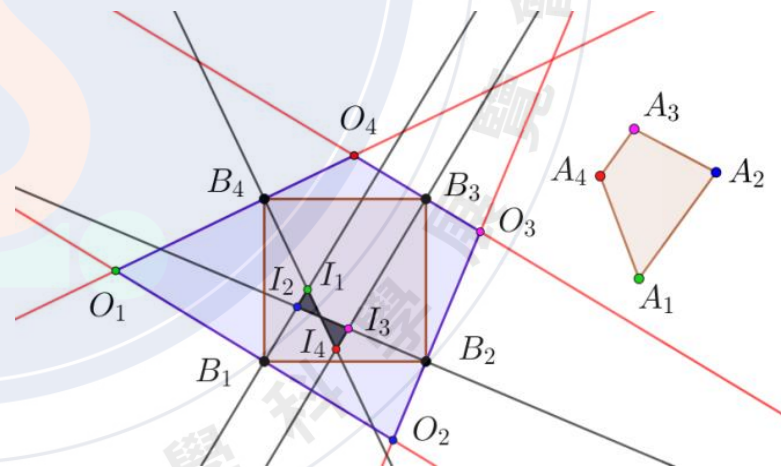


圖5: 對應 O 的內四邊形

定理1：三角形相似垂足中心存在

給定兩個三角形 A 、 B ，則 A 對 B 的內三角形面積，會隨著外三角形的旋轉而在一個時刻變為 0。

- 架座標，並用外三角形的一邊與 x 軸夾角 θ 將外、內三角形頂點參數化。
- 將內三角形面積用 θ 表示為 $A(\theta)$ 。
- $A(\theta)$ 的反導函數 $\mathcal{A}(\theta)$ 是可微的週期函數，故存在 θ_0 使得 $\mathcal{A}'(\theta_0) = 0$ 。

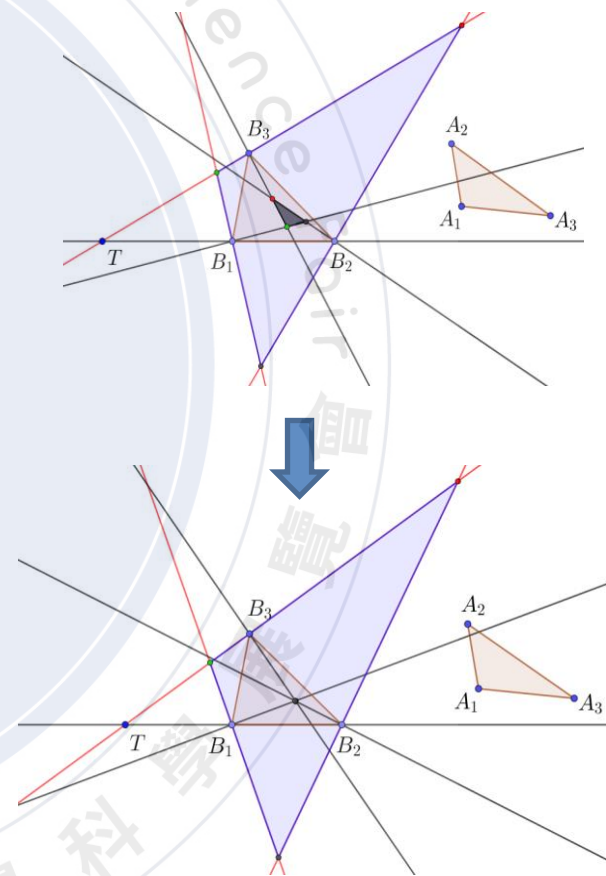


圖6：內三角形旋轉為面積 0

定理2：內外多邊形有向面積

給定兩個 n 邊形 A 、 B ，則 A 對 B 的「外、內 n 邊形」有向面積和，在旋轉下為定值。

- 架座標，並令原點為 O 。由測量師公式，僅須證明

$$\Delta OO_i O_{i+1} + \Delta OI_i I_{i+1}$$

為定值。

- 用外 n 邊形一邊與 x 軸夾角 θ 將外、內 n 邊形頂點參數化。

- 將 $\Delta OO_i O_{i+1} + \Delta OI_i I_{i+1}$ 用 θ 表示，證明其為常數函數。

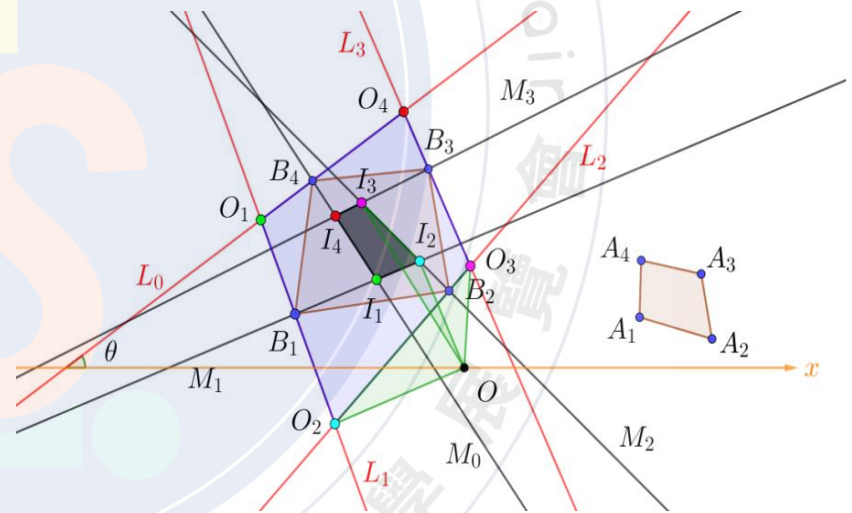


圖7：內外四邊形有向面積和

定理3：內外多邊形面積極值探討

給定兩個 n 邊形 A 、 B 。若 A 對 B 的內 n 邊形有一個時刻縮成一點，則此時外 n 邊形面積最大。

- 在外多邊形旋轉時，其頂點軌跡為圓 C_i ，故定理條件下，這些圓交於一點 O ，且內、外多邊形會相似。

- 若某時刻外多邊形面積最大，此時對應邊長最長。推得外多邊形的邊 O_iO_{i+1} 平行 C_iC_{i+1} 。

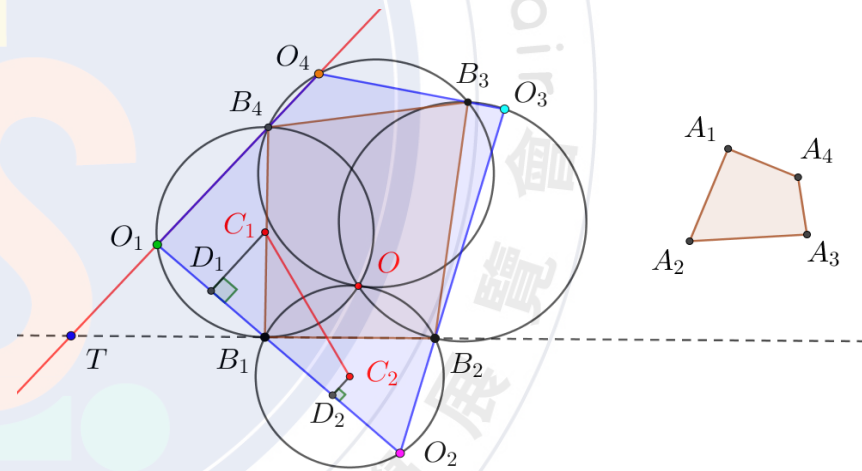


圖8：外四邊形頂點軌跡

- 推得內多邊形的邊必須通過 O 。

定義與符號

- 「點列」造的垂足多邊形：給定平面上 n 邊形 A 和有順序的點 P_1, P_2, \dots, P_m 。我們可以用 P_1 對 A 作垂足 n 邊形，得 $A^{(1)}$ ；接著，用 P_2 對 $A^{(1)}$ 作垂足 n 邊形，得 $A^{(2)}$ ；重複上述步驟，最終可得多邊形 $A^{(m)}$ 。

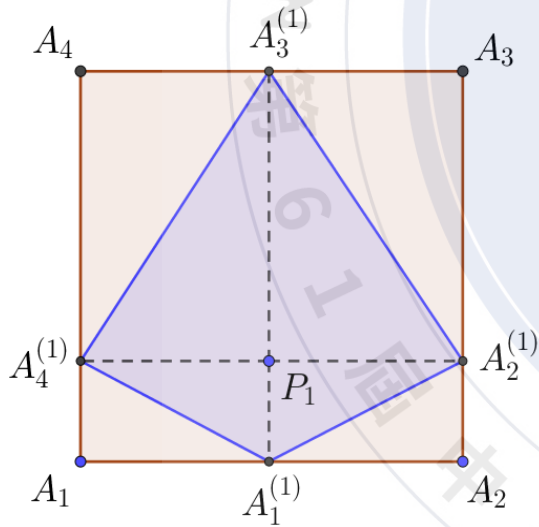


圖9: $A^{(1)}$ 示意圖

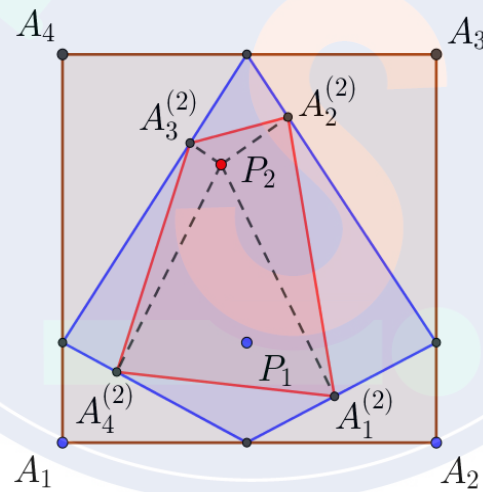


圖10: $A^{(2)}$ 示意圖

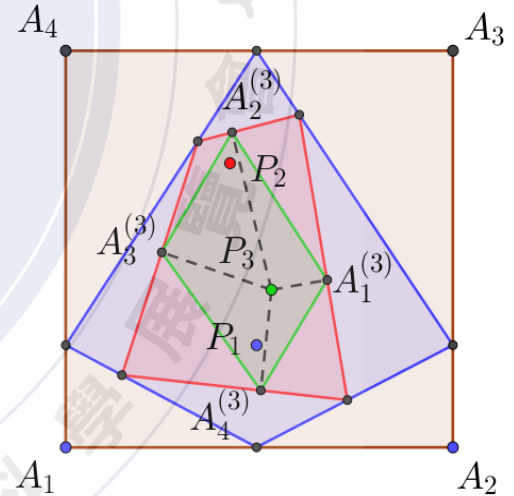


圖11: $A^{(3)}$ 示意圖

引理4：垂足關係的性質

給定兩個 n 邊形 A 、 B ，我們定義 A 與 B 有垂足關係，是指存在點列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ ，使得該點列對 A 作的垂足 n 邊形與 B 相似。

垂足關係是等價關係。

- 由四點共圓，可知對任意 n 邊形 A 以及平面上一點 P ，點列 $\{P\}_{i=1}^n$ 對 A 作的垂足 n 邊形與 A 相似。故垂足關係有反身性
- 對稱性也是由上述性質，一次逆推一層可得。遞移性顯然。

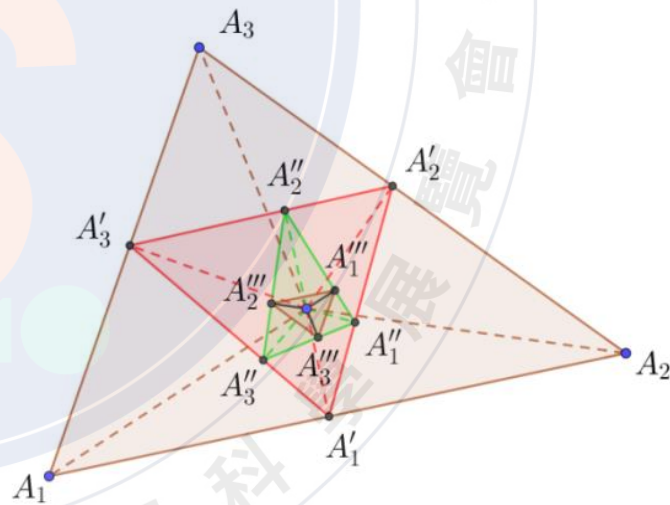


圖12：三角形3次垂足

引理5：任意兩個長方形有垂足關係

給定一個正方形 A 以及任意一個長方形 B ，我們都能找到點列 $\{P_i\}_{i=1}^2$ ，使得該點列對 A 作的垂足四邊形 $A^{(2)}$ 與 B 相似。

- 在正方形 A 一邊的中垂線上選任意點 P_1 ，則 P_1 對 A 作的垂足四邊形為箏形。
- 架座標，用解析幾何證明：選定 P_1 的情況下，會有唯一的點 P_2 ，使得 $\{P_i\}_{i=1}^2$ 對 A 作的垂足四邊形為矩形。
- 最後計算證明 P_1 在中垂線上移動時，矩形 $A^{(2)}$ 的邊長比跑遍 $(0,1]$ 區間。

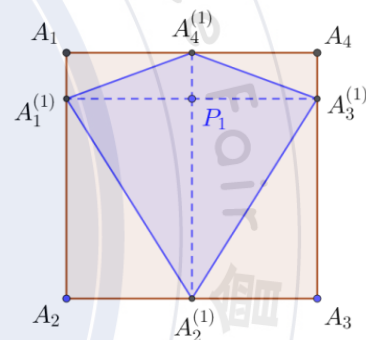


圖13：垂足箏形 $A^{(1)}$

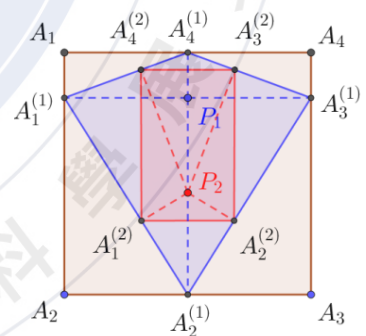


圖14：垂足長方形 $A^{(2)}$

定理6：任意兩個四邊形有垂足關係

對任意四邊形 A 、 B ，都能找到點列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ ，使得該點列對 A 作的垂足四邊形與 B 相似。

- 由引理5，任意矩形有垂足關係。而任意箏形都是某矩形的垂足四邊形；任意等腰梯形都是某箏形的垂足四邊形。
- 任意簡單四邊形 A 都是某個等腰梯形的垂足四邊形；且任意自交四邊形，都存在垂足簡單四邊形。

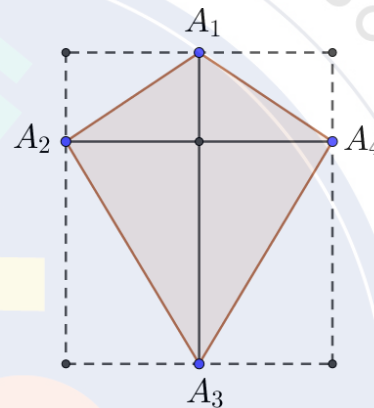


圖15：垂足箏形

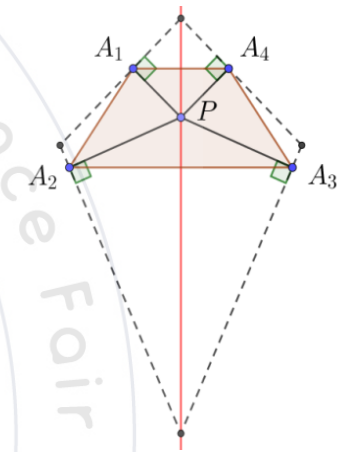


圖16：垂足等腰梯形

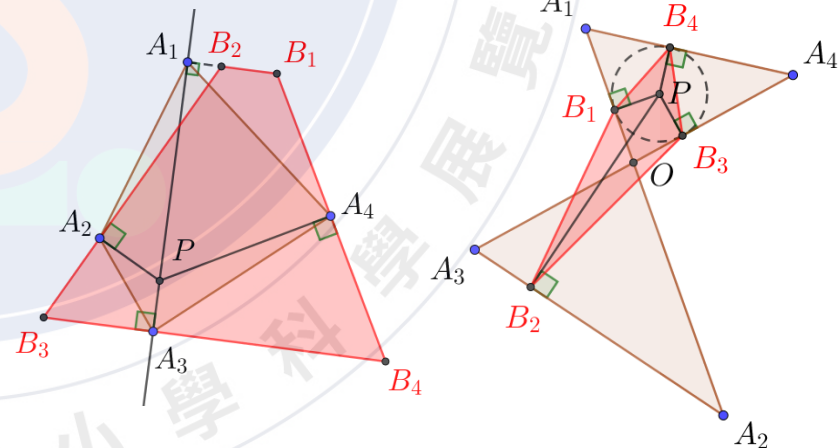


圖17：任意四邊形的垂足關係

結論

- 三腳架架構能夠用來證明三角形相似垂足中心的存在性。
- n 角架架構中，內、外 n 邊形有向面積和為定值。
- 若 n 角架架構中，內 n 邊形會收斂成一點，則此時外 n 邊形面積最大。
- 垂足關係是等價關係。
- 三角形、四邊形都只有一個等價類。即對於任意兩個四邊形(三角形) A 、 B ，可以對 A 作有限次作垂足四邊形(三角形)來得到與 B 相似的多邊形。

猜想：對任意正整數 $n \geq 3$ ，垂足關係的等價類個數均為 1。

參考文獻

- [1] Eric Chen and Nick Lourie. Tripod congruences of curves. *Journal of Geometry and Physics*, 89: 1 – 16, 2015.
- [2] Daniela Ferrarello, Maria Flavia Mammana, and Mario Pennisi. Pedal polygons. In *Forum Geom*, volume 13, pages 153 – 164, 2013.
- [3] Georgi Ganchev, Gyulbeyaz Ahmed, and Marinella Petkova. Points, whose pedal triangles are similar to the given triangle. *arXiv preprint arXiv: 1210.2929*, 2012.
- [4] Serge Tabachnikov. The four – vertex theorem revisited two variations on the old theme. *The American Mathematical Monthly*, 102(10): 912 – 916, 1995.
- [5] 黃靖堯、梁家瑋、李敏威。那裡就是你。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會(2020)。
- [6] 李品萱、劉垣妘。多邊形自守點曲線上的翻滾。中華民國第 57 屆中小學科學展覽會(2017)。