中華民國第61屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第一名

030411

錐心覓跡-圓錐曲線及其內接四邊形的作圖與幾何性質之探討

學校名稱：臺北市立內湖國民中學

作者：	指導老師：
國三 林士哲	鄭忠興
國三 彭士鳴	林鳳美

關鍵詞：圓內兩交弦定理、

抛物線及其內接四邊形的作圖、

圓錐曲線作圖

得獎感言

無心錐線變有心錐線，圓錐曲線仍是一體的！

國中數學組作品為錐心覓跡-圓錐曲線及其內接四邊形的作圖與幾何性質之探討，這是我們參賽全國科展的第二篇作品,此作品是解決第一篇作品延伸問題,完成後首度順利參賽2021年台灣國際科展，再發展成更完備的這次參賽作品。我們鍥而不舍地努力在研究路上，是為了證明數學猜想能成理論的夢想。當中雖然遇到無數次的困難，但我們都逐一克服了，數學知識上的見解也跟隨逐日增強，因而數學成為我們最酷愛的科目。

研究過程中體會到數學推論是靠數學思考的啟發，作品能持續發展重在研究方法。若能尋覓到一個好的研究方法，就能順利證明推論，得到漂亮的定理。當然研究中常有意外的驚喜，這是支撐我們勇往直前的動力，只要不放棄，就有新的發現，這是研究的可貴之處。

最後十分感謝指導老師以及支持我的師長和家人一路上陪伴與指導，也感謝學校給予我們的協助與支持。

參賽北市科展複審

摘要

在平面上，我們都知道相異五點可決定一圓錐曲線。若給定任意四邊形，是由四邊形的四個頂點及異於此四頂點的第五點來決定圓錐曲線，則稱此四邊形為圓錐曲線內接四邊形。

本研究將四邊形分成平行四邊形、梯形及兩雙對邊皆不平行的四邊形等三種來討論，並同時考慮其為圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形，探討圓錐曲線內接四邊形的作圖及其幾何性質。研究中藉由六個輔助定理(包含圓錐曲線的直徑與定值性質及推廣圓內兩交弦定理)論證出二種拋物線及其內接四邊形的作圖及其判定條件，再進一步推導出圓錐曲線內接四邊形的作圖及其判定條件。也發現圓錐曲線內接四邊形的兩對角線斜率性質，並證明有趣的錐線中心軌跡圖形。

壹、研究動機及研究問題

參賽 2021 年臺灣國際科學展覽會完成一篇作品：「婆羅摩笈多定理推廣至圓錐曲線內接多邊形中之探討」，是藉由二個輔助定理論證出二種拋物線及其內接四邊形的作圖，上述輔助定理談拋物線的情形，事實上可推廣至圓錐曲線，同時也可推廣圓內兩交弦定理。因此，對圓錐曲線及其內接四邊形的性質有更進一步的推論，於是開始我們研究之路。本作品的主要研究問題是：「**圖 1 中圓錐曲線如何作圖呢？**」、「**圖 1 中圓錐曲線必通過四邊形的四個頂點，那麼如何取異於此四頂點的第五點來決定圓錐曲線的種類呢？**」及「**當考慮圓內接或非圓內接之兩種情形的四邊形時，圓錐曲線內接四邊形中的幾何性質有何差異呢？**」

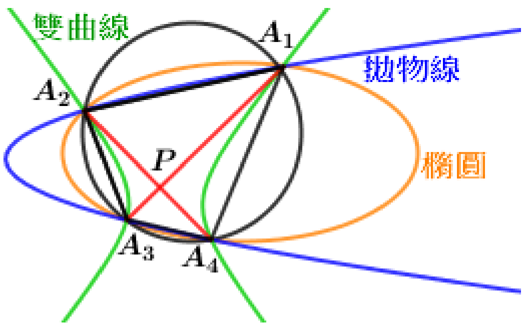


圖 1：圓錐曲線內接四邊形

我們先透過 GeoGebra 繪圖軟體進行作圖，發現圖 1 中拋物線作圖最為困難，所以本作品是從拋物線作圖出發，再利用拋物線作圖延伸推導出圓錐曲線內接四邊形的作圖，並推導出其作圖的判定條件來區分圓錐曲線的種類。

貳、研究目的

一、由圓錐曲線族性質來探討判定條件來區分圓錐曲線內接平行四邊形中的圓錐曲線種類。

二、證明圓錐曲線及其內接四邊形的作圖之輔助定理及其推廣幾何定理。

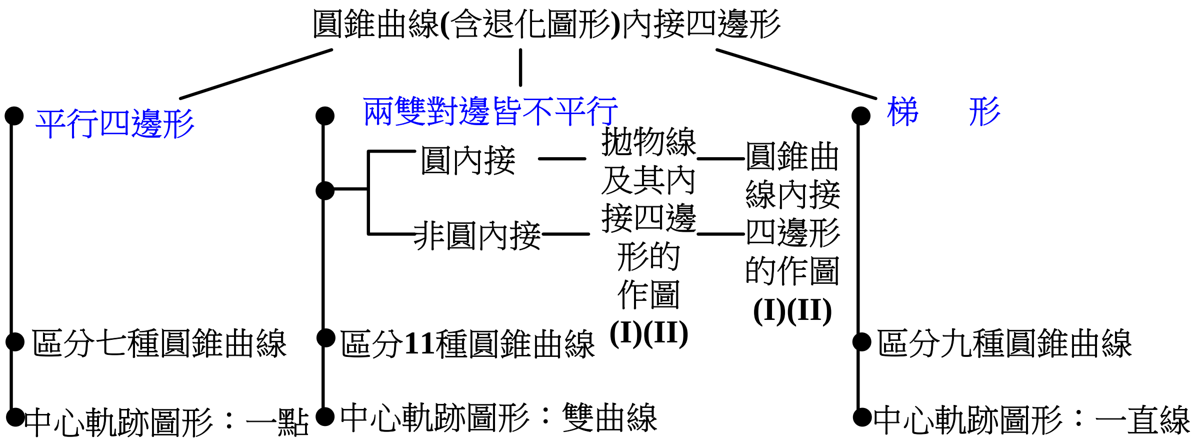
三、給定平面上三點與拋物線的平行軸之直線，探討拋物線及其內接四邊形的作圖。

四、給定圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形，探討如何建構拋物線的平行軸，並且探討拋物線及其內接四邊形的作圖。

五、透過拋物線及其內接四邊形的作圖延伸推導出二種圓錐曲線內接四邊形的作圖，進而探討判定條件來區分圓錐曲線內接四邊形中的圓錐曲線之種類。

六、探討圓錐曲線內接四邊形對角線的斜率性質，進而推導有心錐線的中心軌跡圖形。

參、研究架構



肆、研究過程或方法

一、名詞定義與預備定理

(一)名詞定義

我們知道圓內接四邊形的四個頂點都在同一個圓上，這裡談到圓錐曲線內接四邊形的四個頂點都在同一個圓錐曲線上。本作品特別將通過同一四邊形的四個頂點之圓錐曲線推導出判定條件來區分圓錐曲線的種類。值得一提，在文獻上並無針對圓錐曲線內接四邊形的作圖及其幾何性質作深入探討，這正是本作品研究核心，特別是我們是利用無心錐線(拋物線)作圖去推導有心錐線(橢圓或雙曲線)作圖。

【定義 1】(圓錐曲線內接四邊形，黃家禮[2]及 Keith Kendig [4])

若給定任意四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，是由四邊形的四個頂點及異於此四頂點的第五點(記作點 Q)來決定圓錐曲線，則稱此四邊形為**圓錐曲線內接四邊形**，參見圖 1-3。注意當點 Q 取四邊形的邊或對角線的延長線上一點時，五點 A_1, A_2, A_3, A_4, Q 所決定圖形為**圓錐曲線的退化圖形**。

另外**定義 1** 中的四邊形考慮其為圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形，參見圖 2-3，注意非圓內接四邊形時，點 A_4 必須考慮在拋物線上一點。

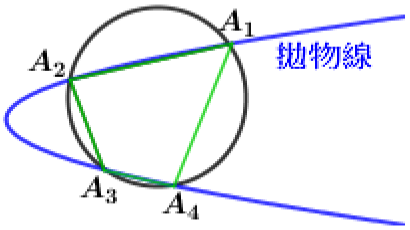


圖 2：拋物線內接四邊形為圓內接四邊形

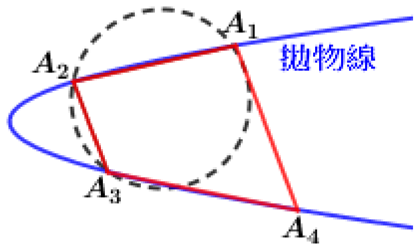


圖 3：拋物線內接四邊形為非圓內接四邊形

考慮拋物線及其內接四邊形的作圖上，提供**兩種觀點**：一是給定平面上三點與拋物線的平行軸之直線決定一拋物線，再決定四邊形的第四個頂點，此作圖稱為**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**，參見第四章。二是給定一四邊形，作過其四個頂點的拋物線，此作圖稱為**拋物線及其內接四邊形的作圖(II)**，參見第四章。由**拋物線及其內接四邊形的作圖**推導出**圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)**，再推導出**圓錐曲線內接四邊形的作圖(II)**，參見第五章。

我們想進一步區分圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線的種類，參見**定義 2**。

【定義 2】(區分圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線的種類，項武義 [1]及 Keith Kendig [4])

設圓錐曲線(包含退化情形)方程式為二次方程式 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 或 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，其中 A,B,C 不全為 0。則前者圖形稱為**標準形**，後者稱為**非標準形**。**標準形**進一步再配方得到(i)~(iii)的分類情形，定義種類名稱為

(i)二次方程式滿足 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 或 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 的拋物線分別稱為**左右型拋物線**或**上下型拋物線**，其頂點 (h,k) 且 $|c|$ 為焦距。

(ii)二次方程式滿足 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ 分別稱為**扁型橢圓**或**直立型橢圓**，其中心 $O(h,k)$ 且 $a>b>0$。

(iii)二次方程式滿足 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ 分別稱為**左右型雙曲線**或**上下型雙曲線**，其中心 $O(h,k)$ 且 $a,b>0$。

當考慮雙曲線內接四邊形時，特別分成二種來定義：若四邊形的四個頂點接在雙曲線同一支上，則稱此四邊形為**雙曲線單接四邊形**，參見圖 4。若四邊形的四個頂點接在雙曲線二支上，則稱此四邊形為**雙曲線雙接四邊形**，參見圖 5。另外雙曲線的退化圖形-兩相交直線也有單接與雙接情形，圖 6 為**兩相交直線雙接四邊形**。

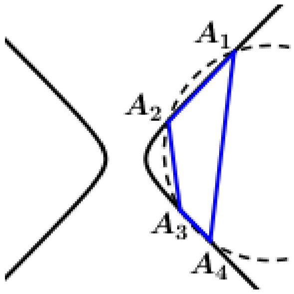


圖 4：雙曲線單接四邊形

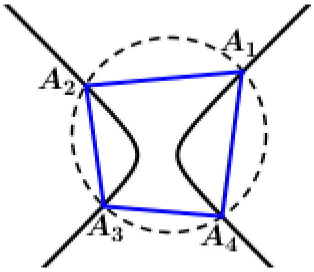


圖 5：雙曲線雙接四邊形

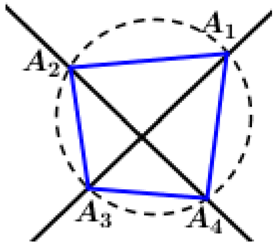


圖 6：兩相交直線雙接四邊形

注意圓錐曲線方程式為二次方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 是可以**透過坐標軸的平移與旋轉方式轉換標準形**，所以同樣可以以(i)~(iii)來分類。

(二)預備定理

【預備定理 1】(判定二次方程式的圖形，項武義 [1]及 Keith Kendig [4])

給定二次方程式為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 時，若判別式 $\delta=B^2-4AC$，則(i)當 $\delta<0$ 時，則其圖形為一橢圓或是其退化情形。(ii)當 $\delta=0$ 時，則其圖形為一拋物線或是其退化情形。(iii)當 $\delta>0$ 時，則稱為其圖形為一雙曲線或是其退化情形。

【預備定理 2】(圓內兩交弦定理，黃家禮[2]及 Coxeter[3])

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 相交於 P，則 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}=\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$，參見圖 1。

本作品將**圓內兩交弦定理**推廣至圓錐曲線，型如

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=t \quad \text{，其中}\, t\, \text{為正實數。}$$

參見**輔助定理 5-6** 及**定理 4**，特別 t 值與圓錐曲線內接四邊形的**兩對角線與其圓錐曲線的對稱軸**有關，與參考文獻資料中黃家禮[3]的推導結果是不同的，它的結果是與**切線**有關。

二、探討圓錐曲線內接平行四邊形

(一)不存在拋物線內接平行四邊形

現在要探討何種圓錐曲線可內接平行四邊形，先證明「不存在拋物線內接平行四邊形」。

【性質 1】(圓錐曲線內接平行四邊形不存在拋物線內接平行四邊形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為一平行四邊形，則不存在拋物線內接平行四邊形。

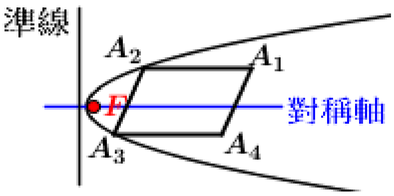


圖 7：不存在拋物線內接平行四邊形

【證明】不失一般性，考慮拋物線方程式為 $y^2=4cx$，若 $A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$ 在拋物線上，

則 $y_2^2=4cx_2,\ y_3^2=4cx_3$，參見圖 7。又四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為一平行四邊形，可令 $A_1(x_1,y_2),$

$A_4(x_4,y_3)$，代入 $y^2=4cx$，得到 $y_2^2=4cx_1,\ y_3^2=4cx_4$，所以 $x_1=x_2, x_3=x_4$，即 A_1,A_2 代表同一點且 A_3,A_4 代表同一點，與已知矛盾。因此，不存在拋物線內接平行四邊形。 ■

(二)區分圓錐曲線的種類

我們知道**相異五點決定一圓錐曲線**，若考慮一圓錐曲線必通過平行四邊形的四頂點 $A_1,A_2,A_3,\ A_4$，那麼在平面上任意取異於四個頂點的一點 Q 後會是何種圓錐曲線呢？

不失一般性，設平行四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四個頂點 $A_1(s_1+s_2\cot\theta,s_2),A_2(s_2\cot\theta,s_2),A_3(0,0),$ $A_4(s_1,0)$，其中 $\angle A_2A_3A_4=\theta, 0^\circ<\theta\le 90^\circ$，則 $\overleftrightarrow{A_1A_3}:m_1x-y=0,\ \overleftrightarrow{A_2A_4}:m_2x-y-m_2s_1=0,$

$\overleftrightarrow{A_2A_3}:x-\cot\theta\cdot y=0,\ \ \overleftrightarrow{A_1A_4}:x-\cot\theta\cdot y-s_1=0$，其中

$$m_1=m_{\overline{A_1A_3}}=\frac{s_2}{s_1+s_2\cot\theta},\ m_2=m_{\overline{A_2A_4}}=\frac{s_2}{s_2\cot\theta-s_1}$$ ，參見圖 8。

【性質 2】(退化圓錐曲線內接平行四邊形的判定條件)

給定一平行四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設 Q 為平行四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中其四個邊及兩對角線延長線上一點，則五點 Q,A_1,A_2,A_3,A_4 所決定的圖形為**三種：二種兩平行直線及一種兩相交直線**。

【證明】由**圓錐曲線族性質**可設通過四點 A_1,A_2,A_3,A_4 的圓錐曲線方程式為

$$\ell_1(m_2x-y-m_2s_1)(m_1x-y)+\ell_2(x-\cot\theta\cdot y)(x-\cot\theta\cdot y-s_1)=0$$ ，其中 $\ell_1,\ell_2>0$。 (1)

(i)當 $\ell_1\ne 0,\ell_2=0$ 時，(1)式得 $(m_2x-y-m_2s_1)(m_1x-y)=0$，所以

$m_2x-y-m_2s_1=0, m_1x-y=0$，代表兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$，即 Q 點在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 或 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$

上。(ii)當 $\ell_1=0,\ell_2\neq 0$ 時，(1)式得 $(x-\cot\theta\cdot y)(x-\cot\theta\cdot y-s_1)=0$，所以 $x-\cot\theta\cdot y=0,\ x-\cot\theta\cdot y-s_1=0$，代表兩平行直線 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$，即 Q 點在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 或 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 上。同理也可證明(iii) Q 點在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 上，因此，五點 Q,A_1,A_2,A_3,A_4 所決定的圖形為三種退化圓錐曲線：二種兩平行直線及一種兩相交直線。 ■

進一步將(1)式兩邊同除以 ℓ_1 後，以 $\ell=\dfrac{\ell_2}{\ell_1}>0$ 表示為

$$(m_2x-y-m_2s_1)(m_1x-y)+\ell(x-\cot\theta\cdot y)(x-\cot\theta\cdot y-s_1)=0，其中\ \ell\in R\setminus\{0\} \tag{2}$$

將(2)式化簡二次方程式為

$$(m_1m_2+\ell)x^2-(m_1+m_2+2\ell\cot\theta)xy+(\ell\cot^2\theta+1)y^2-(m_1m_2s_1+\ell s_1)x+(m_2s_1+\ell s_1\cot\theta)y=0。\tag{3}$$

【定理 1】(圓錐曲線內接平行四邊形中圓錐曲線的判定條件)

給定通過平行四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中四個頂點的二次方程式為(3)式，則(i)當 $\ell=1+m_1^2$ 時，則其圖形為一圓，其中四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為矩形，其中 $m_1=\dfrac{s_2}{s_1+s_2\cot\theta}$。(ii)當 $\ell>\dfrac{(m_1-m_2)^2}{4\ell(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1)}$ 時，則其圖形為一橢圓。(iii)當 $\ell<\dfrac{(m_1-m_2)^2}{4\ell(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1)}$ 時，則其圖形為一雙曲線，其中當 $\ell=0$ 時，其圖形為兩相交直線。參見圖 8。

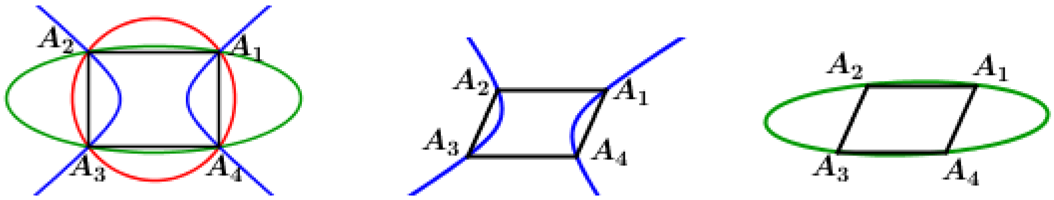


圖 8：圓錐曲線內接平行四邊形

【證明】(i)若四邊形為圓內接平行四邊形，由**泰利斯定理**知 $\angle A_2A_3A_4=\theta=90^\circ$，即 $\cot\theta=0$。

所以平行四邊形為矩形，再**預備定理 1** 知 $m_1+m_2+2\ell\cot\theta=0$ 且 $m_1m_2+\ell=\ell\cot^2\theta+1$，

故 $m_1+m_2=0$ 且 $m_1m_2+\ell=1$，即 $\ell=1-m_1m_2=1-m_1(-m_1)=1+m_1^2$，其中 $m_1=\dfrac{s_2}{s_1+s_2\cot\theta}$。

進一步推導(3)式為 $x^2+y^2-s_1x-s_2y=0$，即圓方程式為 $\left(x-\dfrac{s_1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{s_2}{2}\right)^2=\dfrac{s_1^2+s_2^2}{4}$。

接著由**預備定理 1** 來判定(3)式的圖形，考慮判別式 $\delta=B^2-4AC$，化簡得到

$$\delta=(m_1-m_2)^2-4\ell(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1) \text{ 。} \tag{4}$$

因為 $0^\circ<\theta\le 90^\circ, m_1>0, m_2<0$，所以 $\cot\theta>0$ 且 $m_1\cot\theta-1<0, m_2\cot\theta-1<0$，得

$$(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1)>0 \text{ 。}$$

(ii)由**預備定理 1** 知當 $\delta<0$ 時，則其圖形為一橢圓，(4)式小於零，故

$$\ell>\frac{(m_1-m_2)^2}{4\ell(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1)} \text{ 。}$$

(iii)由**預備定理 1** 知當 $\delta>0$ 時，則其圖形為一雙曲線，(4)式大於零，故

$\ell<\dfrac{(m_1-m_2)^2}{4\ell(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1)}$。由**性質 2** 知當 $\ell=0$ 時，(3)式的圖形為兩相交直線。 ■

三、探討圓錐曲線內接四邊形的作圖之輔助定理及斜率性質

探討圓錐曲線內接四邊形的作圖，需要藉助輔助定理及四邊形中兩對角線的斜率性質。

(一)拋物線的直徑及定值性質

【輔助定理 1】(拋物線的直徑性質)

設 M_1 為拋物線中斜率為 m 的弦 $\overline{A_1A_2}$ 之中點，則所有斜率為 m 的弦的中點形成的軌跡必定平行對稱軸，參見圖 9。

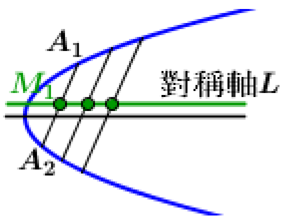


圖 9：拋物線的直徑性質

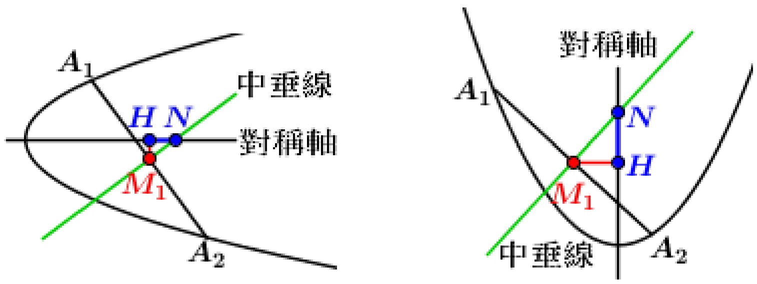


圖 10：$\overline{HN}$ 為定值(拋物線的定值性質)

【證明】(i)不失一般性，以對稱軸為平行 x 軸的拋物線來證明。

設拋物線方程式為 $(y-k')^2=4c(x-h')$，若 $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2)$，則

中點 M_1 的坐標為 $(x',y')=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ 且 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

又 $(y_1-k')^2=4c(x_1-h'), (y_2-k')^2=4c(x_2-h')$，兩式相減化簡得 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4c}{2y'-2k'}$。

所以 $\overline{A_1A_2}$ 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4c}{2y'-2k'}$ 且 $y'=\dfrac{2c}{m}+k'$。 (5)

由於 m、k' 與 c 均為定值，弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點的 y 坐標等於 $\dfrac{2c}{m}+k'$ 為定值，故所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定平行對稱軸。同理可推導出當對稱軸平行 y 軸的拋物線時，所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定平行對稱軸。 ■

【輔助定理 2】(拋物線中弦的中垂線與軸的交點 N，與弦中點到軸的垂足點 H，$\overline{HN}$ 為定值)

設 $M_1(x',y')$ 為拋物線 Γ_1 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_1A_2}$ 之中點，且過 M_1 作垂直線交對稱軸於 H 且作 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線與對稱軸交於 N，參見圖 10，則 $\overline{HN}=2|c|$，其中 $|c|$ 為焦距。

【證明】不失一般性，先以對稱軸為平行 x 軸的拋物線來證明。由(5)式知弦 $\overline{A_1A_2}$ 的斜率為 $m=\dfrac{4c}{2y'-2k'}$，所以 $\overline{A_1A_2}$ 中垂線方程式為 $y-y'=-\dfrac{2y'-2k'}{4c}\left(x-x'\right)$ 且軸方程式為 $y=k'$。

求 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線與對稱軸的交點 N，即令 $y=k'$，解得 $x=x_0+2c$，

故 $\overline{HN}=\left|x-x_0\right|=2|c|$，因此，$\overline{HN}=2|c|$，其中焦距為 $|c|$。

同理可推導出當對稱軸為平行 y 軸的拋物線時，$\overline{HN}=2|c|$，其中焦距為 $|c|$。 ■

(二)圓、橢圓及雙曲線的直徑及定值性質

不失一般性，令圓、橢圓及雙曲線的方程式為 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$，其中心為 (h,k)。

【輔助定理 3】(圓、橢圓與雙曲線的直徑性質)

設 M_2 為圓錐曲線 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中點，則所有斜率為 m 的弦的中點形成的軌跡必定通過 Γ 的中心，參見圖 11。

【證明】若 $A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$，則中點 M_2 的坐標為 (x_0,y_0)，其中 $x_0=\dfrac{x_2+x_3}{2},y_0=\dfrac{y_2+y_3}{2}$

且 $m=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$。又 $a'(x_2-h)^2+b'(y_2-k)^2=1, a'(x_3-h)^2+b'(y_3-k)^2=1$，兩式相減化簡得

$\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-\dfrac{a'}{b'}\left(\dfrac{x_0-h}{y_0-k}\right)$。所以斜率 $m=-\dfrac{a'}{b'}\left(\dfrac{x_0-h}{y_0-k}\right)$ 且 $-\dfrac{a'}{mb'}=\dfrac{y_0-k}{x_0-h}$。 (6)

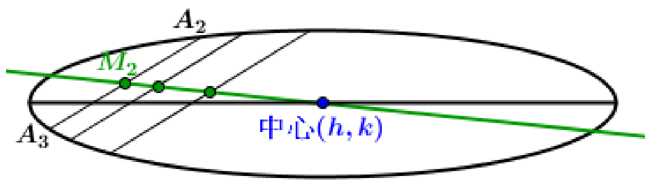


圖　11：橢圓的直徑性質

由於 m、 a'與b'均為定值，所以弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點與中心(h,k)的斜率等於$-\dfrac{a'}{mb'}$為定值，

故所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定通過Γ的中心(h,k)。 ■

將**輔助定理 2** 中 $\overline{HN}=2|c|$推至圓錐曲線 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$的情形。為了區分，將橢圓中弦 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與軸的交點 N_2，與弦 $\overline{A_2A_3}$ 的中點到軸的垂足點 H_2，推導出 $\overline{H_2N_2}$ **定值**；圓、雙曲線分別推導出 $\overline{H_1N_1}$ **及** $\overline{H_3N_3}$ **值**，參見**輔助定理 4**，在證明時，統一記作 $\overline{H'N'}$。

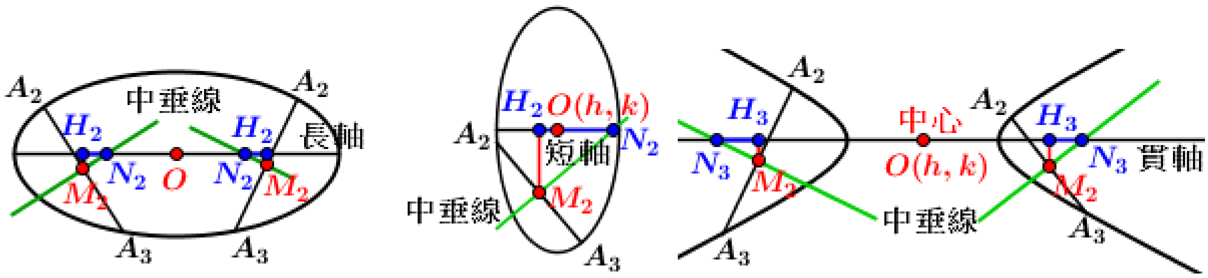


圖　12： $\overline{H_2N_2}$ 及 $\overline{H_3N_3}$

【輔助定理 4】(圓中 $\overline{H_1N_1}$ 、橢圓中 $\overline{H_2N_2}$ 及雙曲線中 $\overline{H_3N_3}$ 皆為定值)

設 $M_2(x_0,y_0)$為圓錐曲線 $\Gamma: a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$中斜率為 m 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中點，且過 M_2 作垂直線交對稱軸： $y=k$ 於 H' 且作 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與對稱軸： $y=k$ 交於 N'，則 $\overline{H'N'}=\left|\dfrac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$，參見圖　12。**【註 1】**(i)當$\Gamma$為扁型橢圓或左右型雙曲線時，$\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$。(i)當$\Gamma$為直立型橢圓$(a'<b')$或上下型雙曲線時，$\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\dfrac{a^2}{b^2}|x_0-h|$。另外圓是橢圓特例，由於 $a=b$，所以 $\overline{H_1N_1}=|x_0-h|$。

【證明】由(6)式知弦 $\overline{A_2A_3}$ 的斜率$m=-\dfrac{a'}{b'}\left(\dfrac{x_0-h}{y_0-k}\right)$，其中 $x_0=\dfrac{x_2+x_3}{2}, y_0=\dfrac{y_2+y_3}{2}$。

所以 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線方程式為 $y-y_0=\frac{b'}{a'}\left(\frac{y_0-k}{x_0-h}\right)(x-x_0)$ 且對稱軸方程式為 $y=k'$。

求 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與對稱軸的交點 N'，即令 $y=k'$，解得 $x-x_0=\frac{a'}{b'}(h-x_0)$，

故 $\overline{H'N'}=|x-x_0|=\left|\frac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$，因此，$\overline{H'N'}=\left|\frac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$。 ■

(三)推廣圓內兩交弦定理

【輔助定理 5】(圓內兩交弦定理推廣至拋物線)

給定一拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P，設 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸的交點，參見圖 13，則(i) $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$。(ii)若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**圓內接四邊形**，則 $\overline{PI}=\overline{PJ}$。

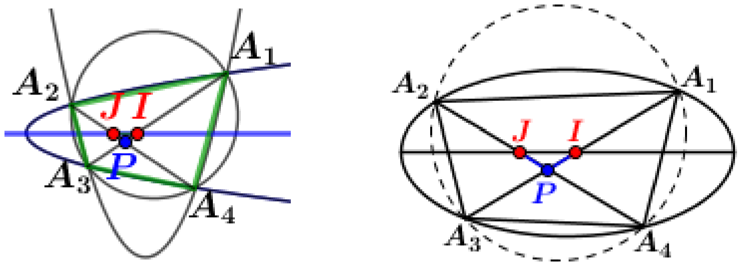


圖 13：拋物線或橢圓內接四邊形的兩對角線與對稱軸性質

【證明】(i)不失一般性，可設拋物線方程式為 $(y-y_0)^2=4c(x-x_0)$，其中頂點為 (x_0,y_0) 且 $P(0,0)$，$\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的斜率分別為 m_1,m_2，則 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的方程式為 $y=m_1x,\ y=m_2x$，可令 $A_1(x_1,m_1x_1),\ A_2(x_2,m_2x_2),\ A_3(x_3,m_1x_3),\ A_4(x_4,m_2x_4)$，則 A_1,A_3 顯然為 $(y-y_0)^2=4c(x-x_0)$ 與 $y=m_1x$ 聯立的解，即

$(m_1x-y_0)^2=4c(x-x_0)$ 化簡得 $m_1^2x^2-2(m_1y_0+2c)x+y_0^2+4cx_0=0$，所以 $x_1x_3=\frac{y_0^2+4cx_0}{m_1^2}$。

同理可知 $x_2x_4=\frac{y_0^2+4cx_0}{m_2^2}$，故 $\frac{x_1x_3}{x_2x_4}=\frac{m_2^2}{m_1^2}$。

因為 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{\sqrt{x_1^2+m_1^2x_1^2}\cdot\sqrt{x_3^2+m_1^2x_3^2}}{\sqrt{x_2^2+m_2^2x_2^2}\cdot\sqrt{x_4^2+m_2^2x_4^2}}=\frac{\sqrt{x_1^2x_3^2(m_1^2+1)^2}}{\sqrt{x_2^2x_4^2(m_2^2+1)^2}}=\frac{-x_1x_3(m_1^2+1)}{-x_2x_4(m_2^2+1)}=\frac{x_1x_3(m_1^2+1)}{x_2x_4(m_2^2+1)}$

又 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{m_2^2}{m_1^2}$ ，故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}$ 。

因為 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸 $y=y_0$ 的交點，所以

$I\left(\dfrac{y_0}{m_1},y_0\right),J\left(\dfrac{y_0}{m_2},y_0\right)$ ，推得 $\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{\left(\dfrac{y_0}{m_1}\right)^2+y_0^2}{\left(\dfrac{y_0}{m_2}\right)^2+y_0^2}=\dfrac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}$。因此， $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

(ii)因為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，所以由**圓內兩交弦定理**知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=1$，所以 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=1$，因此，$\overline{PI}=\overline{PJ}$。 ■

【定理 2】(圓錐曲線內接四邊形的兩對角線斜率性質)

給定圓錐曲線方程式為 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (A,C 至少有一個不為零)且圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P ，若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且 m_1,m_2 為對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的斜率，則 $m_1+m_2=0$ ，參見圖 13。

【證明】考慮拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的情形。由**輔助定理 5** 中證明知

當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形時， $\overline{PI}=\overline{PJ}$ ，即 $\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}=1$ ，所以

$m_2^2(m_1^2+1)=m_1^2(m_2^2+1)$ ，得 $m_2^2=m_1^2\Rightarrow m_1=\pm m_2$ ，但 $m_1\neq m_2$ ，故 $m_1+m_2=0$ 。

僅要考慮一組對邊不平行的四邊形，必存在拋物線內接四邊形，所以當考慮其餘圓錐曲線內接四邊形也保有 $m_1+m_2=0$ 此性質。 ■

【輔助定理 6】(圓內兩交弦定理推廣至橢圓或雙曲線)

給定圓錐曲線 $\Gamma: a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 且圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P ，設 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸的交點，參見圖 13，則

(i)**扁型橢圓(及左右型雙曲線)**或 **直立型橢圓(及上下型雙曲線)**：

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\frac{(a'+b'm_2^2)m_1^2}{(a'+b'm_1^2)m_2^2}\right)\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}\ \text{或}\ \frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\frac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}\right)\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}\ 。$$

(ii)若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**圓內接四邊形**，則 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 。

【證明】(i)不失一般性，可設 $P(0,0)$ 且 m_1,m_2 分別為 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的斜率，則 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的方程式為 $y=m_1x,\ y=m_2x$ ，可令 $A_1(x_1,m_1x_1),A_2(x_2,m_2x_2),A_3(x_3,m_1x_3),A_4(x_4,m_2x_4)$ ，

則 A_1,A_3 顯然為 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 與 $y=m_1x$ 聯立的解，即

$a'(x-h)^2+b'(m_1x-k)^2=1$ ，化簡得 $(a'+b'm_1^2)x^2-2(a'h+b'm_1k)x+a'h^2+b'k^2-1=0$ ，

所以 $x_1x_3=\dfrac{a'h^2+b'k^2-1}{a'+b'm_1^2}$ 。同理可得 $x_2x_4=\dfrac{a'h^2+b'k^2-1}{a'+b'm_2^2}$ ，故 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}$ 。

因為

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{\sqrt{x_1^2+m_1^2x_1^2}\cdot\sqrt{x_3^2+m_1^2x_3^2}}{\sqrt{x_2^2+m_2^2x_2^2}\cdot\sqrt{x_4^2+m_2^2x_4^2}}=\frac{\sqrt{x_1^2x_3^2(m_1^2+1)^2}}{\sqrt{x_2^2x_4^2(m_2^2+1)^2}}=\frac{-x_1x_3(m_1^2+1)}{-x_2x_4(m_2^2+1)}=\frac{x_1x_3(m_1^2+1)}{x_2x_4(m_2^2+1)}$$

又 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}$ ，故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(a'+b'm_2^2)(m_1^2+1)}{(a'+b'm_1^2)(m_2^2+1)}$ 。

扁型橢圓及左右型雙曲線：I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、$\overline{A_2A_4}$ 與長軸(或貫軸)：$y=k$ 的交點，所以 $I\left(\dfrac{k}{m_1},k\right),J\left(\dfrac{k}{m_2},k\right)$ ，推得 $\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{\left(k/m_1\right)^2+k^2}{\left(k/m_2\right)^2+k^2}=\dfrac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}$ 。

故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(a'+b'm_2^2)(m_1^2+1)}{(a'+b'm_1^2)(m_2^2+1)}=\left(\dfrac{(a'+b'm_2^2)m_1^2}{(a'+b'm_1^2)m_2^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

直立型橢圓及上下型雙曲線： I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與長軸(或貫軸)：$x=h$ 的交點，所以 $I\left(h,m_1h\right),J\left(h,m_2h\right)$ ，推得 $\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{h^2+(m_1h)^2}{h^2+(m_2h)^2}=\dfrac{m_1^2+1}{m_2^2+1}$ 。

故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(a'+b'm_2^2)(m_1^2+1)}{(a'+b'm_1^2)(m_2^2+1)}=\left(\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

(ii)因為 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，所以由**圓內兩交弦定理**知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=1$，並且

由**定理 3** 知 $m_1+m_2=0$，所以

扁型橢圓及左右型雙曲線：$1=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\dfrac{(a'+b'm_2^2)m_1^2}{(a'+b'm_1^2)m_2^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$，故 $\overline{PI}=\overline{PJ}$。

直立型橢圓及上下型雙曲線：$1=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$，故 $\overline{PI}=\overline{PJ}$。

因此，$\overline{PI}=\overline{PJ}$。 ■

【定理 3】(圓內兩交弦定理推廣更一般的圓錐曲線)

給定圓錐曲線方程式為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$(A,B,C 至少有一個不為零)且圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P，設 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸:$y=m_3x+\gamma$ 的交點，則(i) $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(A+Bm_2+Cm_2^2)(m_1-m_3)^2}{(A+Bm_1+Cm_1^2)(m_2-m_3)^2}\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$。

(ii)若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**圓內接四邊形**，則 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，參見圖 14。

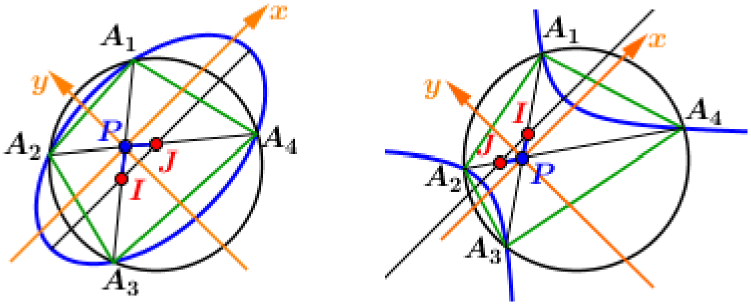


圖 14：一般圓錐曲線內接四邊形的兩對角線與對稱軸性質

【證明】仿照來**輔助定理 6** 證明。(i) A_1,A_3 顯然為 $\Gamma: Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 與

$y=m_1x$ 聯立的解，即 $Ax^2+Bx(m_1x)+C(m_1x)^2+Dx+E(m_1x)+F=0$，化簡得

$(A+Bm_1+Cm_1^2)x^2+(D+Em_1)x+F=0$，所以 $x_1x_3=\dfrac{F}{A+Bm_1+Cm_1^2}$。

同理可得 $x_2x_4=\dfrac{F}{A+Bm_2+Cm_2^2}$，故 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{A+Bm_2+Cm_2^2}{A+Bm_1+Cm_1^2}$。因為

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{\sqrt{x_1^2+m_1^2x_1^2}\cdot\sqrt{x_3^2+m_1^2x_3^2}}{\sqrt{x_2^2+m_2^2x_2^2}\cdot\sqrt{x_4^2+m_2^2x_4^2}}=\frac{\sqrt{x_1^2x_3^2(m_1^2+1)^2}}{\sqrt{x_2^2x_4^2(m_2^2+1)^2}}=\frac{-x_1x_3(m_1^2+1)}{-x_2x_4(m_2^2+1)}=\frac{x_1x_3(m_1^2+1)}{x_2x_4(m_2^2+1)}$$

又 $\frac{x_1x_3}{x_2x_4}=\frac{A+Bm_1+Cm_2^2}{A+Bm_1+Cm_1^2}$ ，故 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(A+Bm_2+Cm_2^2)(m_1^2+1)}{(A+Bm_1+Cm_1^2)(m_2^2+1)}$ 。

設 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸 $:y=m_3x+\gamma$ 的交點，所以

$I\left(\frac{\gamma}{m_1-m_3},\frac{\gamma m_1}{m_1-m_3}\right),J\left(\frac{\gamma}{m_2-m_3},\frac{\gamma m_2}{m_2-m_3}\right)$ ，推得 $\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\frac{(m_2-m_3)^2(m_1^2+1)}{(m_1-m_3)^2(m_2^2+1)}$ 。

故 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(A+Bm_2+Cm_2^2)(m_1-m_3)^2}{(A+Bm_1+Cm_1^2)(m_2-m_3)^2}\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

(ii)因為 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，所以由**圓內兩交弦定理**知 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=1$ ，並且

由**定理 3** 知若選定對稱軸 $:y=m_3x+\gamma$ 平行的直線為 x 軸，則 $m_3=0$ 且 m_1,m_2 得到

m_1',m_2'(**相對斜率：以對稱軸** $:y=m_3x+\gamma$ **方向為** x **軸方向來計算斜率**)滿足

$m_1'+m_2'=0$ ，所以 $1=\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{[A+Bm_2'+C(m_2')^2](m_1')^2}{[A+Bm_1'+C(m_1')^2](m_2')^2}\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

因此， $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 。 ■

四、探討拋物線及其內接四邊形的作圖

由**性質 1** 可此推測**至少一雙對邊不平行的四邊形，必然存在拋物線內接四邊形**。透過 GeoGebra 繪圖發現拋物線內接四邊形中拋物線作圖最為困難，所以就先探討拋物線及其內接四邊形的作圖，推導出二種作圖方式，記作**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**及**(II)**。我們將四邊形分成平行四邊形、梯形及兩雙對邊皆不平行的四邊形等三種，不失一般性，底下直接考慮兩雙對邊皆不平行的四邊形。

(一)拋物線及其內接四邊形的作圖(I)

利用**拋物線的直徑性質**(參見**輔助定理 1-2**)來探討**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)：**

已知三點 A_1, A_2, A_3 與平行對稱軸 L 的直線 L' 條件下確定一拋物線，再取 A_3 點在拋物線上一點 A_4 。注意其四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 可能為非圓內接四邊形，參見圖 15。

現在要建構拋物線及其內接四邊形的作圖(I)，注意對 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 作中垂線 L_1 與 L_2 且 L_1 與 L_2 的交點落在對稱軸 L 上，但交點在 L 上不在同一點，參見圖 16。作法上我們必須考慮使 L_1 、 L_2 交 L 於同一點，方法是底下其作圖(I)中 $Step\,1$ 及 $Step\,2$ ，參見圖 17及證明參見**定理 5**，再由**輔助定理 1-2**知 $\overline{HN} = 2|c|$ 且 $\overrightarrow{HN}$ 為對稱軸，此拋物線因而被決定。

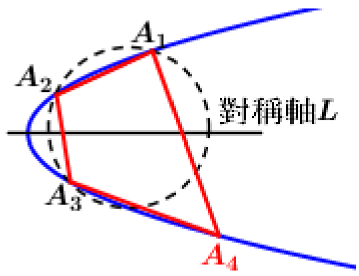


圖 15：非圓內接四邊形

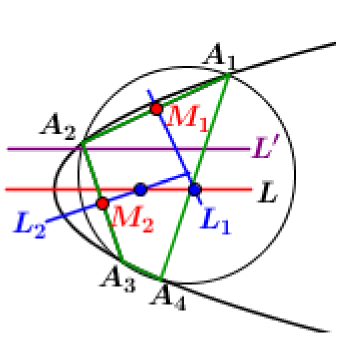


圖 16： $Step\,1$

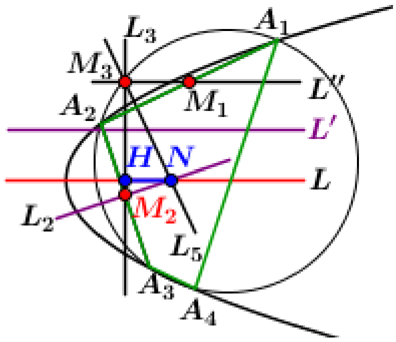


圖 17：拋物線及其內接四邊形的作圖(I)

拋物線及其內接四邊形的作圖(I)： 圖 17中

$Step\,1$ ：過 $\overline{A_1A_2}$ 的中點 M_1 作 $L''//L'$ 且過 $\overline{A_2A_3}$ 的中點 M_2 作 L'' 的垂直線 L_3 交 L'' 於 M_3 。

$Step\,2$ ：過 M_2 作 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線 L_2 且過 M_3 作 $\overline{A_1A_2}$ 的垂直線 L_5 ， L_2 與 L_5 相交於 N 。

$Step\,3$ ：過 N 作 L_3 的垂直線交 L_3 於 H ，即 $\overrightarrow{HN}$ 為對稱軸 L 。

$Step\,4$ ： $Step\,3$ 中得到 $\overrightarrow{HN}$ 為對稱軸且由**輔助定理 2**知 $\overline{HN} = 2|c|$ ，此拋物線因而被決定。

$Step\,5$ ：**四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形**－過 A_1, A_2, A_3 三點作一圓 Ω 交拋物線於 A_4 ；

四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不為圓內接四邊形－取 A_3 點右邊在拋物線上一點 A_4 (異於圓 Ω 上一點)，即四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為拋物線內接四邊形。 ■

【定理 4】(拋物線及其內接四邊形的作圖(I))

設三點 A_1, A_2, A_3 滿足拋物線及其內接四邊形的作圖(I)，參見圖 17，則(i) $Step\,1-3$ 使得直線 L_2 與 L_5 相交對稱軸 L 上同一點 N 。(ii) $Step\,1-5$ 得到拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。

【證明】(i)不失一般性，考慮拋物線方程式為 $y^2 = 4cx$ ，設 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$

且 m_1, m_2 為 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}$ 的斜率，則由**輔助定理 1**知 $m_1 = \dfrac{4c}{y_1+y_2}, m_2 = \dfrac{4c}{y_2+y_3}$ 且由作圖知 $M_2\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ 且 $M_3\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。由**直線方程式中的點斜式**知

$$L_2: y-\frac{y_2+y_3}{2} = m_2\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right), L_5: y-\frac{y_1+y_2}{2} = m_1\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right)$$

推得 $m_1\left(y-\dfrac{y_2+y_3}{2}\right) = m_2\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以 $\dfrac{4c}{y_1+y_2}\left(y-\dfrac{y_2+y_3}{2}\right) = \dfrac{4c}{y_2+y_3}\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，化簡得到 $y=0$，故直線 L_2 與 L_5 的交點在對稱軸 $y=0$ 上。

(ii)由(i)與**輔助定理 1**知 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸，再由**輔助定理 2**知 $\overline{HN} = 2|c|$，因此，以 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸且 $\overline{HN} = 2|c|$的拋物線。 ■

(二) 拋物線及其內接四邊形的作圖(II)

事實上，給定平行對稱軸的直線 L' 是不容易的，主因相異三點決定拋物線有可能是斜拋物線，參見圖 18，那麼直線 L' 如何找呢？克服的方式即**拋物線及其內接四邊形的作圖(II)**：給定一四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 作拋物線，這作圖藉由**輔助定理 5** 得直線 L'，再由**拋物線內接四邊形的作圖(I)**建構拋物線內接四邊形。

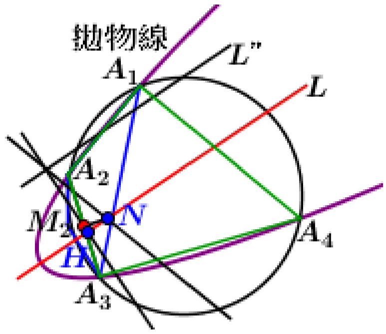


圖 18：斜拋物線

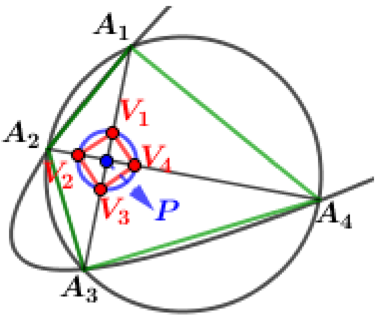


圖 19：斜拋物線的平行對稱軸的直線 L' 為 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$

由**輔助定理 5** 知若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，則 $\overline{PI} = \overline{PJ}$。而若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不為圓內接四邊形，則 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}} = \dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$，這作圖要利用幾何平均數作圖，參見圖 22。

拋物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為圓內接四邊形

$Step\,1$：由於 $\overline{PI} = \overline{PJ}$，所以作以 P 為圓心且適當長為半徑與兩對角線交於 V_1, V_2, V_3, V_4，

參見圖 19，則 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 為平行對稱軸的直線，證明參見**定理 5**。

Step 2：由**拋物線內接四邊形作圖(I)**建構拋物線內接四邊形。 ■

【定理 5】(拋物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為圓內接四邊形)

設圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的對角線交於 P，若以 P 為圓心且適當長為半徑的圓交 $\overline{A_1A_3},\overline{A_2A_4}$ 於 V_1,V_2,V_3,V_4 兩點，參見圖 19-20，則以 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 為平行對稱軸的直線可作出**相互垂直的對稱軸的兩拋物線**。

【證明】存在性證明：由**輔助定理 5** 知 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，所以四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的兩對角線交點 P 為圓心，以適當長為半徑畫圓交兩對角線於 V_1,V_2,V_3,V_4，參見圖 19，則 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 為平行對稱軸的直線 L'。由於 $\overline{V_1V_3},\overline{V_2V_4}$ 為直徑，所以由**泰利斯定理**知 $\angle V_2V_1V_4=\angle V_1V_2V_3=\angle V_2V_3V_4=\angle V_3V_4V_1=90^\circ$，推得 $\overleftrightarrow{V_1V_2}//\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_2V_3}//\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 且 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3}$ 為相互垂直的兩平行對稱軸的直線 L'，配合由**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**可建構兩拋物線內接四邊形。

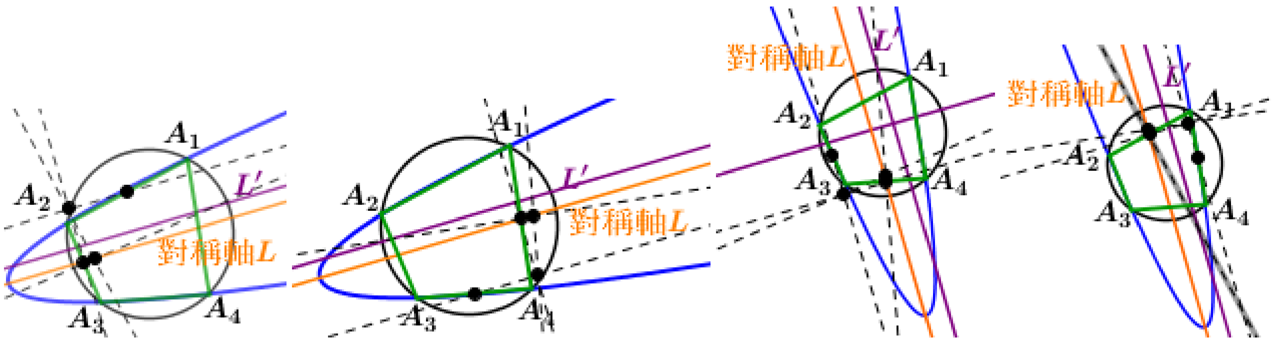
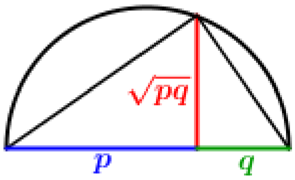


圖 20：唯一性證明作出同一拋物線

唯一性證明：若給定三點 A_1,A_2,A_3 或 A_1,A_3,A_4 且平行對稱軸的直線 L'，按照拋物線及其內接四邊形的作圖(I)可決定同一拋物線，參見圖 20。若給定三點 A_2,A_3,A_4 或 A_1,A_2,A_4 且與 L' 垂直的直線當平行對稱軸的直線 L''(符合存在性質)，按照拋物線及其內接四邊形的作圖(I)可決定同一拋物線，參見圖 20。

綜合以上在圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中**僅能作出兩種對稱軸相互垂直的拋物線**。 ■



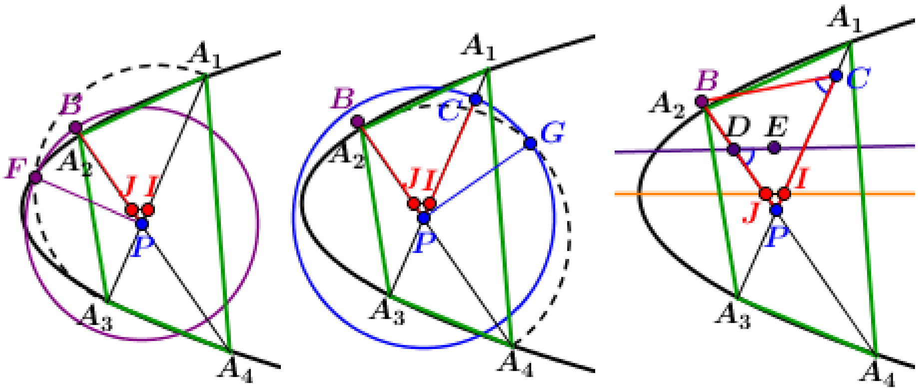


圖 21：幾何平均數　　　　　圖 22：$\overleftrightarrow{DE}$ 為拋物線的平行對稱軸的直線

拋物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為非圓內接四邊形

$Step\,1$：利用幾何平均數作圖 $\overline{PF}^2=\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}$ 且 $\overline{PG}^2=\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$，再以 P 為圓心且半徑為 $\overline{PF}$ 的圓交 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 於 B 且以 P 為圓心且半徑為 $\overline{PG}$ 的圓交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 C，參見圖 22。

$Step\,2$：連接 $\overline{BC}$，在 $\overline{A_2A_4}$ 取上點 D 使得 $\angle PDE=\angle PCB$，則 $\overleftrightarrow{DE}$ 為平行對稱軸直線。■

【定理 6】(拋物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為非圓內接四邊形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的對角線交於 P，滿足拋物線內接四邊形作圖(II)中 $Step\,1-2$，參見圖 22，則 $\overleftrightarrow{DE}$ **為平行對稱軸的直線可作出相互垂直的對稱軸的兩種拋物線**。

【證明】設 $\overline{PF}=R,\overline{PG}=r$，則由**輔助定理 5**知 $\dfrac{R^2}{r^2}=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$，故 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{\overline{PI}}{\overline{PJ}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$。

在 ΔPIJ 與 ΔPBC 中，由於 $\angle IPJ=\angle CPB$ 且 $\dfrac{\overline{PI}}{\overline{PJ}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$，所以

ΔPIJ [illegible] ΔPBC (SAS 相似性質)。故作**等角作圖**使 $\angle PDE=\angle PCB$，即 $\angle PDE=\angle PJI$，

因此，$\overleftrightarrow{DE}$ 為平行對稱軸的直線 L'。

同理可得與 $\overleftrightarrow{DE}$ 垂直的平行對稱軸之直線 L'，配合由**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**可建構**相互垂直的對稱軸的兩種拋物線**。■

五、探討圓錐曲線內接四邊形的作圖

(一)由拋物線及其內接四邊形的作圖來建構圓錐曲線內接四邊形

前面已探討拋物線內接四邊形，接著要探討更一般圓錐曲線內接四邊形的作圖之

判定條件，不失一般性，直接考慮**兩雙對邊皆不平行的四邊形**，作圖方法共有二種：一是在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，由**拋物線及其內接四邊形的作圖中中垂線建構平行對稱軸之直線來決定圓錐曲線**，稱此作圖為**圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)**。二是已知四邊形中四個頂點，**再取平面上一點 Q 來決定圓錐曲線**，稱此作圖為**圓錐曲線內接四邊形的作圖(II)**。

首先先證明**圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)**，由**輔助定理 6** 與**定理 3** 知當四邊形為圓內接四邊形時，不論圓錐曲線方程式為標準形或非標準形均有 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 性質，參見圖 13。為了清楚描述及證明，**論證及構圖上採二次方程式 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 來呈現**。

【定理 7】(圓錐曲線內接四邊形的作圖(I) -四邊形為圓內接四邊形)

給定圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，設由**拋物線及其內接四邊形的作圖**得 $\overline{HN}$ ，若 Q 為 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線 L_2 上一點，參見圖 23，則以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。

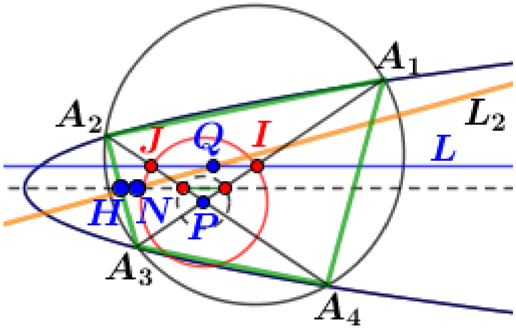


圖 23：以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形

【證明】由**輔助定理 6** 與**定理 4** 知對於圓錐方程式均有 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，其中 $\overleftrightarrow{IJ}$ 為對稱軸。若以 P 為圓心且適當長為半徑畫圓交兩對角線於 I,J 二點，參見圖 23，取 Q 在 $\overleftrightarrow{IJ}$ 上，又 $\overleftrightarrow{IJ}//\overline{HN}$，則以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線 L 為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。 ■

(二)由關鍵點建構退化圓錐曲線內接四邊形

由**定理 7** 知**中垂線 L_2 建構平行對稱軸之直線** L' 來決定圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線，注意影響 L' 的七個特殊點，稱為**關鍵點**，即 N,R_1,Q_1,P,Q_2,R_2,Q_3 ，參見圖 24。

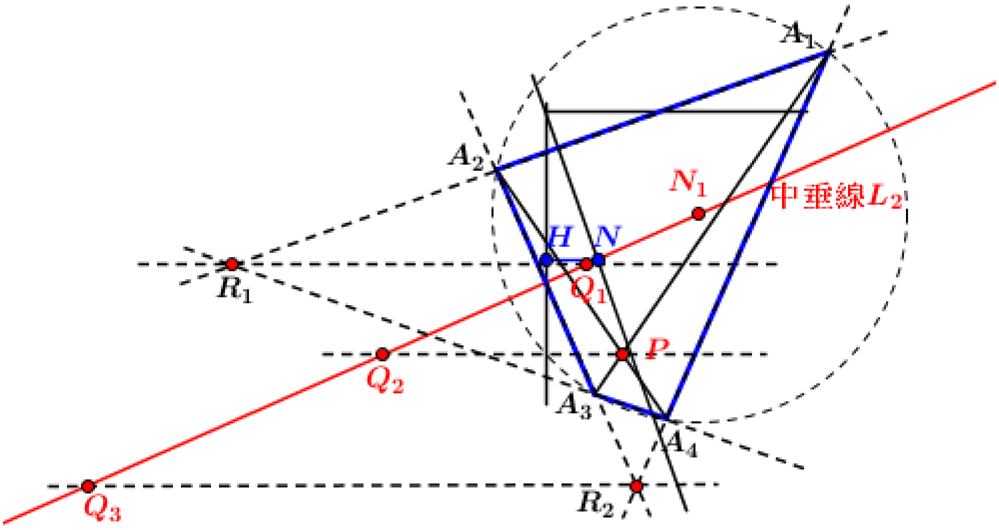


圖 24：影響 L'的七個特殊點 $N, R_1, Q_1, P, Q_2, R_2, Q_3$

(i)四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圓之圓心 N_1(在 L'上)：由**外心性質**知作 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線之交點即圓心 N_1，所以外接圓就是以 N_1 為圓心且對稱軸為 $\overleftrightarrow{H_1N_1}$ 的圓，參見圖 24。

(ii) $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 為與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 的交點 R_1、 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 的的交點 P 、 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 的交點 R_2 及過 R_1, P, R_2 作 $\overline{HN}$ 的平行直線與 L_2 的交點分別為 Q_1, Q_2, Q_3 ，參見圖 24。

【定理 8】(兩相交直線內接四邊形的判定條件)

給定四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的兩對角線交於 P ，設 Q_1, Q_2, Q_3 分別為過 R_1, P, R_2 作 $\overline{HN}$ 的平行直線與 L_2 的交點，參見圖 24，則分別建構出以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 、 $\overleftrightarrow{Q_2P}$ 及 $\overleftrightarrow{Q_3R_2}$ **為對稱軸的兩相交直線單接四邊形、兩相交直線雙接四邊形、兩相交直線單接四邊形**。

【證明】仿照**性質 2**來證明，先證明以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 為對稱軸的圖形。

設 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 的方程式分別為 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 、 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 、 $a_3x+b_3y+c_3=0$ 、 $a_4x+b_4y+c_4=0$ 、 $a_5x+b_5y+c_5=0$ 、 $a_6x+b_6y+c_6=0$ 。可令 A_1, A_2, A_3, A_4 四點的圓錐曲線方程式為

$$\ell_1(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)+\ell_2(a_3x+b_3y+c_3)(a_4x+b_4y+c_4)=0 \qquad (7)$$

由於是以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 為對稱軸的圖形，所以(7)式必經過 R_1 ， R_1 代入(7)式，化簡得到 $\ell_2=0$ ，即圓錐曲線方程式為 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$ ，因此，其圖形為兩相

交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$。同理可證是以 $\overleftrightarrow{Q_2P}$ 為對稱軸的圖形，所以(7)式必經過 P，P 代入(7)式，化簡得到 $\ell_1=0$，即圓錐曲線方程式為 $(a_3x+b_3y+c_3)(a_4x+b_4y+c_4)=0$，因此，其圖形為兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$。

其次，證明以 $\overleftrightarrow{Q_3R_2}$ 為對稱軸的圖形時，(7)式改為

$$\ell_1(a_3x+b_3y+c_3)(a_4x+b_4y+c_4)+\ell_2(a_5x+b_5y+c_5)(a_6x+b_6y+c_6)=0$$

同理可證，所以其圖形是兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$。 ■

(三)建構橢圓或雙曲線內接四邊形的作圖(I)

接著探討**圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)**中各種非退化圓錐曲線(不含拋物線)的判定條件，不失一般性，以 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 來探討，是由**輔助定理 4：** $\overline{H'N'}=\left|\dfrac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$，其中**圓中** $\overline{H_1N_1}$ **、橢圓中** $\overline{H_2N_2}$ **及雙曲線中** $\overline{H_3N_3}$ **皆定值**來協助論證，定值參見表 1。

表 1：圓錐曲線中的定值性質

圓	扁型橢圓或左右型雙曲線	直立型橢圓或上下型雙曲線
$\lvert x_0-h\rvert$	$\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\dfrac{b^2}{a^2}\lvert x_0-h\rvert$	$\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\dfrac{a^2}{b^2}\lvert x_0-h\rvert$

【定理 9】(由拋物線及其內接四邊形的作圖建構橢圓內接四邊形作圖(I)的判定條件)

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設由拋物線及其內接四邊形作圖(I)得到 $\overleftrightarrow{HN}$，且 N, N_1, N_2 為斜率為 $m\,(<0)$ 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中垂線 L_2 上，(i)若 N_2 在 $\overline{NN_1}$ (不含端點)上，則建構出以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為長軸的**扁型橢圓內接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(ii)若 N_2 在 $\overrightarrow{N_1S}$ (不含端點 N_1)上，則建構出以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為短軸的**直立型橢圓內接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$，參見圖 25。

【註】定理 9中比例關係為(i) $\overline{H_2O}:\overline{H_2N_2}=a^2:b^2$；(ii) $\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}=a^2:b^2$，參見圖 25。

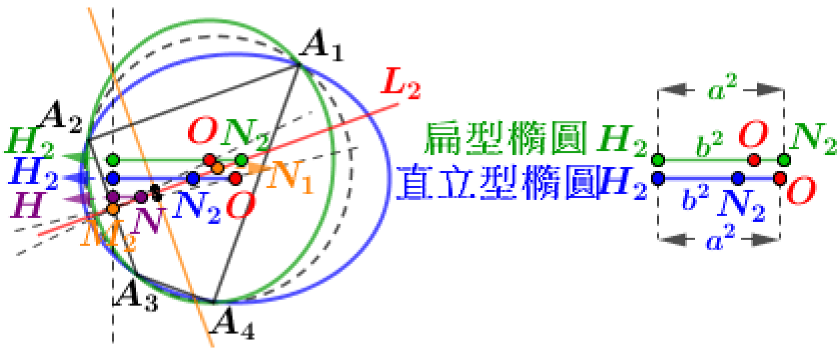


圖　25：利用拋物線內接四邊形作圖建構出橢圓內接四邊形

【**證明**】由**定理　7**知以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。

為了區別 Q，這定理是指 N_2，要探討是 N_2 在 $\overline{NN_1}$ (不含端點 N_1)上或在 $\overrightarrow{N_1S}$ (不含端點 N_1)上為何種圓錐曲線，底下就來證明。

(i)當考慮 $m<0$ 且 N_2 在 $\overline{NN_1}$ (不含端點)上，且作 $\overline{H_2N_2}//\overline{HN}$，得到以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為長軸建構扁型橢圓，因為 $a>b>0$，所以作圖可知 $O(h,k)$ 在 N_2 的右邊，再配合**輔助定理　4**中比例關係：$\overline{H_2O}:\overline{H_2N_2}=a^2:b^2$，參見圖　25。這比例關係可知離心率為 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{\overline{N_2O}}{\overline{H_2O}}}<1$，的確為橢圓。

(ii)當考慮 $m<0$ 且 N_2 在 $\overrightarrow{N_1S}$ (不含端點 N_1)上，且作 $\overline{H_2N_2}//\overline{HN}$，得到以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為短軸建構直立型橢圓內接四邊形，因為 $a>b>0$，所以作圖可知 $O(h,k)$ 在 N_2 的左邊，再配合**輔助定理　4**中比例關係：$\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}=a^2:b^2$，參見圖　25。這比例關係可知離心率為 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{\overline{ON_2}}{\overline{H_2N_2}}}<1$，的確為橢圓。 ■

由**定理　8**知在 L_2 上三點 Q_1,Q_2,Q_3 影響構成兩相交直線的關鍵點，又兩相交直線為雙曲線的退化圖形，可猜測 Q_1,Q_2,Q_3 會影響著雙曲線的形狀之關鍵點，參見**定理　10**。

【**定理　10**】**(由拋物線及其內接四邊形作圖建構雙曲線內接四邊形作圖(I)的判定條件)**

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設由拋物線內接四邊形作圖(I)得到 $\overline{HN}$，且 N, N_3 為斜率為 $m\,(<0)$ 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中垂線 L_2 上，(i)若 N_3 在 $\overline{NQ_1}$ (不含端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸的**左右型雙曲線單接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(ii)若 N_3 在 $\overline{Q_2Q_3}$ (不含端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸可建構**左右型雙曲線雙接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(iii)若 N_3 在 $\overline{Q_1Q_2}$ (不含端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸的**上下型雙曲線雙接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(iv)若 N_3 在 $\overrightarrow{Q_3T}$ (不含 Q_3 端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸的**上下型雙曲線單接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。參見圖 26-27。

【註】定理 10 中比例關係為(i) $\overline{OH_3} : \overline{H_3N_3} = a^2 : b^2$；(ii) $\overline{H_3O} : \overline{N_3H_3} = a^2 : b^2$；

(iii) $\overline{H_3N_3} : \overline{OH_3} = a^2 : b^2$；(iv) $\overline{H_3N_3} : \overline{OH_3} = a^2 : b^2$。

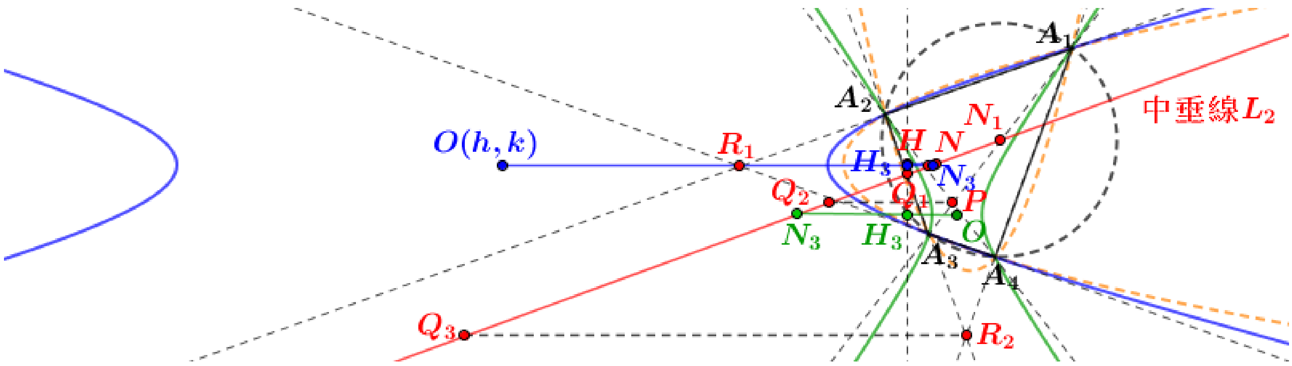


圖 26：建構出左右型雙曲線單接或雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

【證明】仿照**定理 10**來證明。由**定理 8**知以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。為了區別 Q，這定理是指 N_3，要探討是 N_3 的範圍有四種，各屬於何種圓錐曲線，底下就來證明。

(i)當考慮 $m<0$ 且 N_3 在 $\overline{NQ_1}$ (不含端點)上，且作 $\overline{H_3N_3} // \overline{HN}$，得到以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸建構左右型的雙曲線，因為 $a,b>0$，所以作圖可知 $O(h,k)$ 在 H_3 的左邊，再配合**輔助定理 4**中比例關係：$\overline{OH_3} : \overline{H_3N_3} = a^2 : b^2$，參見圖 26。這比例關係可知離心率為

$\dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{\overline{ON_3}}{\overline{OH_3}}} > 1$，的確為雙曲線。注意到若中心 O 在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外部，則構成雙曲線單接四邊形。

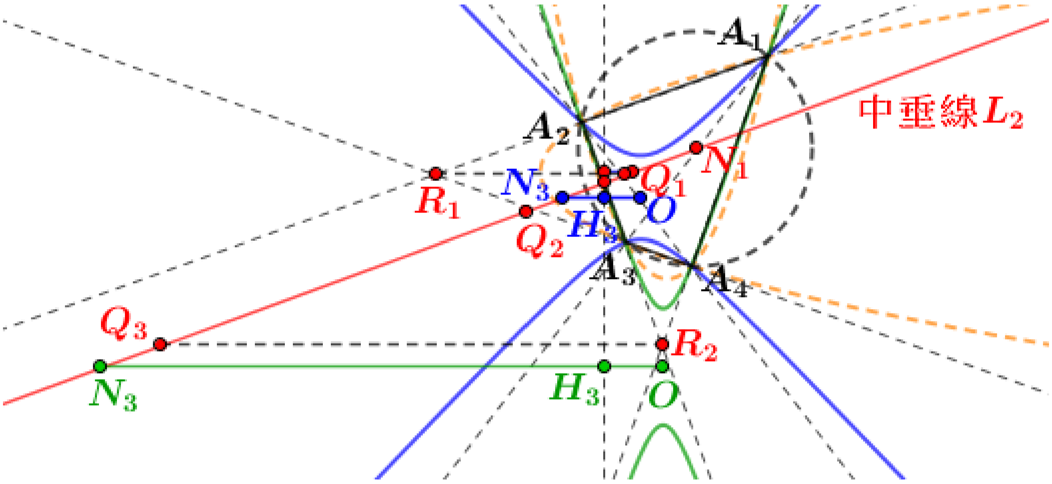


圖 27：建構出上下型雙曲線單接或雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

(ii)~(iv)仿照(i)來證明。推導出比例關係為

(ii) $\overline{H_3O}:\overline{N_3H_3}=a^2:b^2$；(iii) $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$；(iv) $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$，參見圖 27。

依照這些比例關係可知離心率為 $\dfrac{c}{a}>1$，的確為雙曲線。注意到若中心 O 在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外部，則構成雙曲線單接四邊形。若內部，則構成雙曲線雙接四邊形。因此，根據以上討論，由拋物線及其內接四邊形的作圖建構雙曲線單(雙)接四邊形的判定條件共有四種。 ■

(四)由橢圓或雙曲線內接四邊形的作圖(I)來建構橢圓或雙曲線內接四邊形的作圖(II)

接著探討**圓錐曲線內接四邊形的作圖(II)**：已知圓內接四邊形 A_1,A_2,A_3,A_4 中四個頂點，再取在平面上一點 Q 來可決定何種圓錐曲線內接四邊形呢？我們由圓、兩條拋物線、四邊形的四個邊及兩個對角線等六條直線將平面區分 **31** 區域，每一區域標記為 I~IV，參見圖 28，那麼每一區域上一點 Q 與 A_1,A_2,A_3,A_4 四點可建構何種圓錐曲線呢？參見**定理 11**。

【定理 11】(橢圓與雙曲線內接四邊形的作圖(II))

給定平面上一點 Q，設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，則 Q,A_1,A_2,A_3,A_4 五點構成圖形為(i)當 Q 在圖 28 中**區域 I** 時，**扁型橢圓內接四邊形**。(ii)當 Q 在圖 28 中**區域 II** 時，**直立型橢圓內接四邊形**。(iii)當 Q 在圖 28 中**區域 III(a)**時，**左右型雙曲線單接四邊形**。(iv)當 Q 在圖 28 中**區域 III(b)**時，**左右型雙曲線雙接四邊形**。(v)當 Q 在圖 28 中**區域 IV(a)**時，**上下型雙曲線雙接四邊形**。(vi)當 Q 在圖 28 中**區域 IV(b)**時，**上下型雙曲線單接四邊形**。

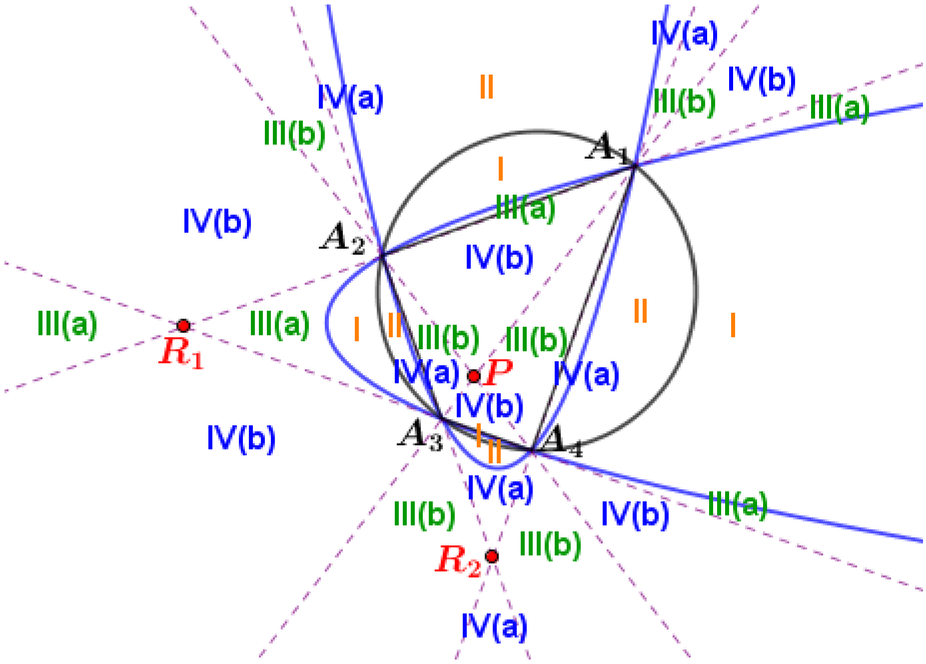


圖 28：圓、兩條拋物線、六條直線區分 **31** 區域

【**證明**】由**定理 9** 與**定理 10** 中圓錐曲線的軌跡圖形而得證。 ■

六、探討圓錐曲線內接四邊形的幾何性質

由**定理 8-11** 知當圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為兩雙對邊皆不平行的四邊形時，得到由 Q, A_1, A_2 A_3, A_4 五點可決定十一種的圓錐曲線內接四邊形。那麼若考慮**非圓內接四邊形**時，可決定幾種呢？那麼其餘四邊形如平行四邊形(含矩形)、等腰梯形、梯形及矩形可決定幾種呢？

【**定理 12**】**(圓錐曲線內接兩對邊皆不平行的四邊形的幾何性質)**

給定一四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設 Q 為平面上一點，則當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 分別為兩雙對邊皆不平行的四邊形、梯形及平行四邊形，**由 Q, A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定十一種、九種及七種的圓錐曲線(不含圓)**。

【**證明**】(i)當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為兩雙對邊皆不平行的四邊形時，由**定理 4-6** 知圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形皆可建構相互垂直的對稱軸的兩種拋物線內接四邊形。更一般的二次方程式由**定理 3** 知同樣可由 Q, A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定二種的拋物線內接四邊形。再由**定理 7-11** 知由**拋物線及其內接四邊形的作圖中中垂線建構軸**或**圓錐曲線族**可再由 Q, A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定九種的圓錐曲線(不含圓)，因此，由 Q, A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定十一種的圓錐曲線(不含圓)，參見圖 16.18.21.23-29。

(ii)當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為梯形時，與(i)做比較，多了一兩平行直線，就少了一種拋物線且一種相交直線且左右型單接雙曲線，因此，由 Q , A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定九種的圓錐曲線(不含圓)，參見圖 29。

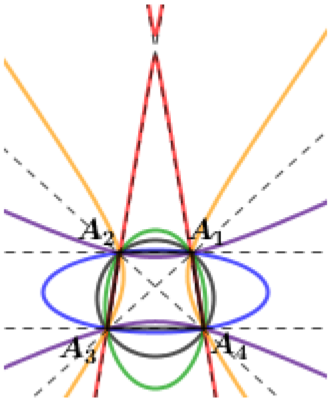


圖 29：由 Q , A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定九種的圓錐曲線內接等腰梯形

(iii)由(ii)知由 Q , A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定九種的圓錐曲線內接梯形，而四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為平行四邊形時，再多了一兩平行直線，就再少了一種拋物線且一種相交直線且上下型單接雙曲線，因此，由 Q , A_1, A_2, A_3, A_4 五點可決定七種的圓錐曲線(不含圓)。 ■

【定理 13】(圓錐曲線內接四邊形的斜率性質)

給定一圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設 m_1, m_2 為對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的斜率，則(i)當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形時， $m_1+m_2=0$ 。(ii)當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$ 時， $m_1=1, m_2=-1$ 。(ii)當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為非圓內接四邊形時， $m_1+m_2 \neq 0$ 。

【註】**定理 13** 中 m_1, m_2 改考慮相對斜率 m_1', m_2' 時，**定理 13** 中(i)改 $m_1'+m_2'=0$；(i)改 $m_1'+m_2' \neq 0$ 。

【證明】(i)由**定理 2-3** 知當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形時， $m_1+m_2=0$ 。(ii)因為 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$ ，所以 $m_1m_2=-1$ 。又由(i)知 $m_1+m_2=0$ 且 $m_2<0$ 。因此， $m_1=1, m_2=-1$ 。

(iii)現在要證明四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為非圓內接四邊形的情形。

由於我們是固定三頂點 A_1, A_2, A_3 作拋物線，另一頂點 A_4 取拋物線上但不是圓上，如圖 30，則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為非圓內接四邊形，參見圖 30。

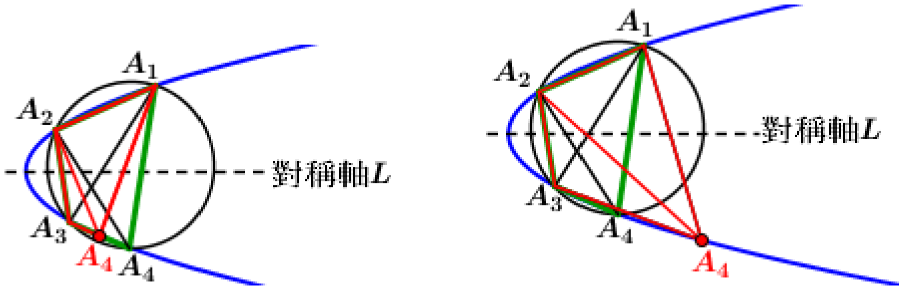


圖 30：證明四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不為圓內接四邊形的斜率性質

注意到圖 30 中左圖滿足 $m_1+m_2<0$，而右圖滿足 $m_1+m_2>0$，因此，$m_1+m_2\neq 0$。 ■

接著探討由**定理 7** 知若 Q 為 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線 L_2 上一點，則以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。那麼**以 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸移動時，所形成圓錐曲線的中心所形成的圖形為何呢？為了方便，將圓錐曲線的中心所形成的圖形稱為中心軌跡圖形，其中心記作 O。**

【定理 14】(圓錐曲線內接四邊形中有心錐線的中心軌跡圖形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓錐曲線內接四邊形，其對角線交於 P，M_1,M_2,M_3,M_4 分別 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$ 、$\overline{A_1A_4}$ 的中點，若 O 為圓錐曲線的中心，則(i)當四邊形為**平行四邊形**時，中心軌跡圖形為**一點** P 。(ii)當四邊形為**梯形**時，中心軌跡圖形為**一直線**。(iii)當四邊形為**兩雙對邊皆不平行的四邊形**時，中心軌跡圖形為**過 P,M_1,M_2,M_3,M_4 五點的一雙曲線**。參見圖 31。

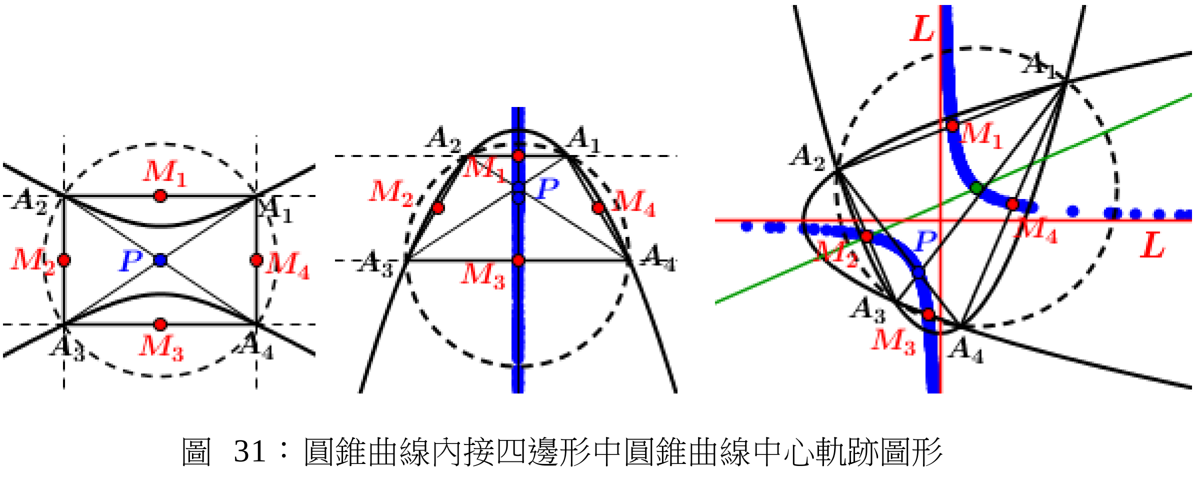


圖 31：圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線中心軌跡圖形

【證明】(i)由**定理 1** 知圓錐曲線內接平行四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中圓錐曲線方程式參見(3)式，現在要證明所有通過四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 四個頂點的圓錐曲線之中心軌跡圖形，我們是用**解析**

幾何來證明，不失一般性，用<u>**矩形**</u>來證明，考慮θ=90^0且$m_1+m_2=0$，其中$m_1=\dfrac{s_2}{s_1}$。

代入(3)式且配方得$(\ell-m_1^2)\left(x-\dfrac{s_1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{s_2}{2}\right)^2=\dfrac{s_1^2+s_2^2}{4}$，其中$\ell\in R\setminus\{0\}$

所以中心為$\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_2}{2}\right)$，參見圖 31，因此，**中心軌跡圖形為一點**$P\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_2}{2}\right)$。

(ii)仿照(i)來證明，我們也是用**解析幾何**來證明，不失一般性，用<u>**等腰梯形**</u>來證明，注意等腰梯形為圓內接四邊形，所以由**定理 13** 知$m_1+m_2=0$。沿用平行四邊形四個頂的坐標化方式，但點A_1改為$A_1(s_1-s_2\cot\theta,s_2)$，其中$m_1=\dfrac{s_2}{s_1-s_2\cot\theta}$且$m_2=\dfrac{s_2}{s_2\cot\theta-s_1}$。

(3)式改為$(m_2x-y-m_2s_1)(m_1x-y)+\ell(x-\cot\theta\cdot y)(x+\cot\theta\cdot y-s_1)=0$，其中$\ell\in R\setminus\{0\}$ (8)

代入(8)式且配方得$(\ell-m_1^2)x^2+(1-\ell\cot^2\theta)y^2-(\ell s_1-m_1^2s_1)x+(m_2s_1+\ell s_1\cot\theta)y=0$

$$(\ell-m_1^2)\left(x-\frac{s_1}{2}\right)^2+(1-\ell\cot^2\theta)\left(y-\frac{s_1(m_2+\ell\cot\theta)}{2(1-\ell\cot^2\theta)}\right)^2=\frac{(\ell-m_1^2)s_1^2}{4}+\frac{s_1^2(m_2+\ell\cot\theta)^2}{4((1-\ell\cot^2\theta))}$$

所以中心為$\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_1(m_2+\ell\cot\theta)}{2(1-\ell\cot^2\theta)}\right)$，可令$x=\dfrac{s_1}{2},y=\dfrac{s_1(m_2+\ell\cot\theta)}{2(1-\ell\cot^2\theta)}$，由於$\ell\in R\setminus\{0\}$，所以$y\in R$。因此，**中心軌跡圖形為一直線**$x=\dfrac{s_1}{2}$**，此直線為拋物線的對稱軸**，參見圖 31。

(iii)仿照(i)(ii)來證明，同樣用**解析幾何**來證明，由圖 31 知中心軌跡圖形必過P,M_1,M_2,M_3,M_4五點的雙曲線且雙曲線的兩漸近線為兩種拋物線之對稱軸，現在採**解析幾何**證明雙曲線方程式。不失一般性，考慮圓內接四邊形且圓錐曲線方程式為**標準形**來證明，由**定理 13** 知$m_1+m_2=0$，同時m_3,m_4為$\overline{A_2A_3}$與$\overline{A_1A_4}$的斜率滿足$m_3+m_4=0$。

令四邊形$A_1A_2A_3A_4$的四個頂點$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3),A_4(x_4,y_4)$，則

$\overleftrightarrow{A_1A_3}:m_1x-y+y_1-m_1x_1=0,\overleftrightarrow{A_2A_4}:m_2x-y+y_2-m_2x_2=0$

$\overleftrightarrow{A_2A_3}:m_3x-y+y_2-m_3x_2=0,\overleftrightarrow{A_1A_4}:m_4x-y+y_1-m_4x_1=0$，且由**圓錐曲線族性質**知

$(m_1x-y+y_1-m_1x_1)(m_2x-y+y_2-m_2x_2)+\ell(m_3x-y+y_2-m_3x_2)(m_4x-y+y_1-m_4x_1)=0$ (9)

(9)式展開且配方得到中心，令中心坐標為(x,y)，則

$$(x,y)=\left(\frac{(m_1-m_3\ell)(y_2-y_1)+(m_1^2+m_3^2\ell)(x_1+x_2)}{-2(m_1^2+m_3^2\ell)},\frac{-(1+\ell)(y_2+y_1)+(m_1-m_3\ell)(x_1-x_2)}{2(1+\ell)}\right)$$。

我們可以考慮中心(x,y)的y坐標化簡為

$$y=\frac{-(1+\ell)(y_2+y_1)+(m_1-m_3\ell)(x_1-x_2)}{2(1+\ell)}=\frac{-(y_2+y_1+m_3x_1-m_3x_2)}{2}+\frac{(m_1+m_3)(x_1-x_2)}{2(1+\ell)} \quad (10)$$

同樣地中心(x,y)的x坐標可化簡如(10)式。注意(10)式不一唯一表式法，可寫成$x=\mu+\mu_\ell, y=\nu+\nu_\ell$，其中$\mu,\nu$為與$\ell$無關的常數且$\mu_\ell,\nu_\ell$為與$\ell$有關的實數，故中心軌跡圖形的方程式型如：$(x-\mu)(y-\nu)=\mu_\ell\nu_\ell$，其中**雙曲線的兩漸近線為$x=\mu, y=\nu$，即為兩種拋物線之對稱軸**，參見圖 31，因此，**中心軌跡圖形為過P,M_1,M_2,M_3,M_4五點的一雙曲線**。 ■

伍、研究結果

一、透過**圓錐曲線族性質**來探討圓錐曲線內接平行四邊形中共有七種圓錐曲線及其判定條件，其中不存在拋物線的內接四邊形，參見**性質 1**及**定理 1**。

二、證明圓錐曲線內接四邊形的作圖的輔助定理及其推廣定理：

圓錐曲線的**直徑性質**，參見**輔助定理 1、3**；圓錐曲線的**定值性質**：一弦的中垂線與軸的交點，與此弦的中點到軸的垂足點，其交點與垂足點的長度為**定值**，參見**輔助定理 2、4**；**推廣圓內兩圓內兩交弦定理**：考慮圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形，參見**輔助定理 5、6 (標準形**的圓錐曲線)及**定理 3 (非標準形**的圓錐曲線)。

三、探討**二種拋物線及其內接四邊形作圖**：**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)-**給定平面上三點與拋物線的平行軸直線條件，由**輔助定理 1-4**協助論證，及其幾何性質，參見**定理 4**。

拋物線及其內接四邊形的作圖(II) -給定圓內接兩雙對邊皆不平行的四邊形，由**輔助定理 5-6**得到拋物線的平行軸之直線，接著證明可作出相互垂直的對稱軸的兩拋物線內接四邊形，參見**定理 5-6**，注意四邊形不論是否圓內接四邊形均可作圖。

四、探討**二種圓錐曲線內接四邊形作圖**：**作圖(I)與(II)**均是由拋物線及其內接四邊形作圖類推而得，推導出當四邊形$A_1A_2A_3A_4$分別為兩雙對邊皆不平行的四邊形、梯形及平行四邊形，由Q ,A_1,A_2,A_3,A_4五點可決定**十一種、九種及七種的圓錐曲線**。參見**定理 7-12**。

五、推導出圓錐曲線內接四邊形其對角線的**斜率性質**：$m_1+m_2=0$(圓內接四邊形)及$m_1+m_2\neq 0$(圓內接四邊形)，參見**定理 13**。再由其斜率性質及圓錐曲線族性質證明圓錐曲線內接四邊形中有心錐線的中心軌跡圖形：**一點(當四邊形為平行四邊形)、一直**

線(當四邊形為梯形)及雙曲線(當四邊形為兩雙對邊皆不平行的四邊形)，參見**定理 14**。

陸、結論與未來展望

本作品談到圓錐曲線必通過四邊形的四個頂點，發現拋物線及其內接四邊形的作圖是困難的，主因兩雙對邊皆不平行的四邊形中僅有兩種拋物線，本作品得到二種拋物線及其內接四邊形的作圖。令人驚喜的當圓內接四邊形時，其二種拋物線的對稱軸是相互垂直的，關鍵在 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 此性質，參見**輔助定理 5、6** 及**定理 3**。值得一提，當圓內接四邊形時，其兩對角線斜率 m_1, m_2 滿足 $m_1+m_2=0$ ，是充分條件，我們期許未來可以證明其必要條件。而四邊形為非圓內接四邊形時，則 $m_1+m_2\neq 0$。此外，將圓內兩交弦定理推廣至圓錐曲線，參見**定理 3**。

在作品中發現無心錐線－拋物線的作圖最難，而有心錐線－橢圓及雙曲線卻有無限多條，所以從拋物線及其內接四邊形的作圖著手，簡單來說，是由無心錐線作圖去推導出有心錐線作圖。至於直接從有心錐線作圖，推導無心錐線作圖，這是有趣的研究思路，目前有初步想法，期許未來能夠完備。最後觀察到有趣錐線的中心軌跡圖形為雙曲線，特別是其漸近線為拋物線的對稱軸，可見圓錐曲線是一體的。作品中的證明部分，期許未來能更嚴謹完備。

柒、參考文獻資料

[1]項武義 (2009)。**基礎幾何學**。台北市：五南圖書出版有限公司。

[2]黃家禮 (1997)。**幾何明珠**。台北市：九章出版社。

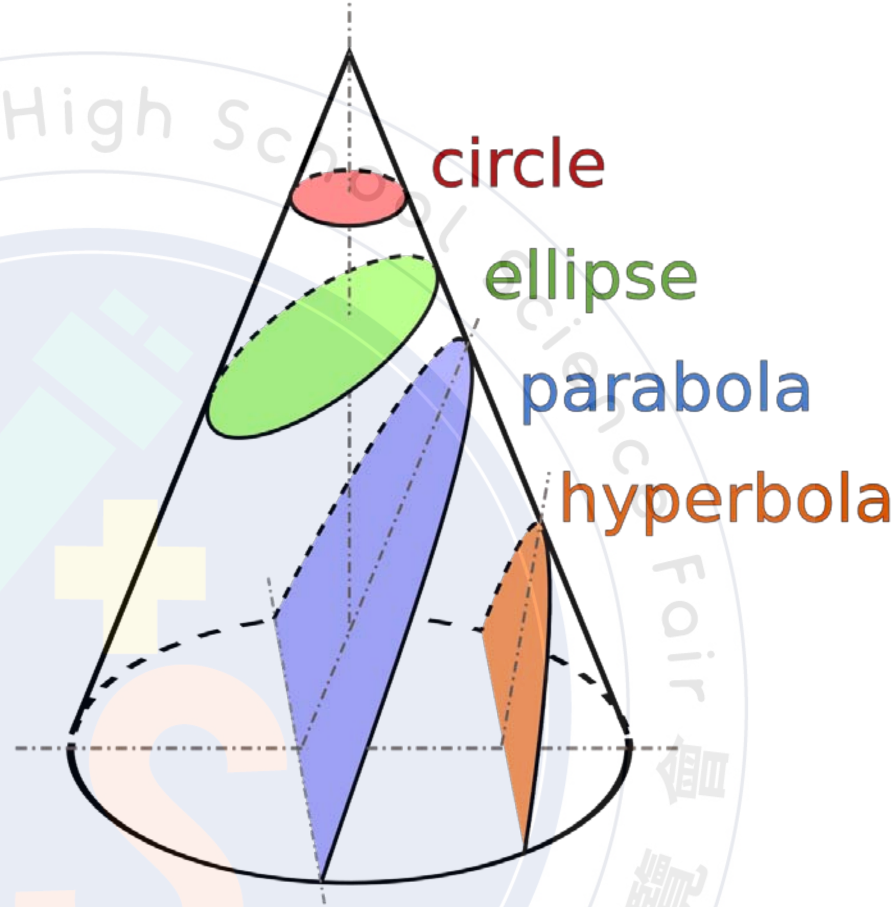
[3]Coxeter, H. S. M. (1967). Greitzer, S. L.*Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer..

[4] Keith Kendig. (2005). *Conics*. Cambridge University Press.

【評語】030411

本作品研究圓錐曲線其內接四邊形的作圖與幾何性質，主要結果是得到圓錐曲線內接平行四邊形的判定定理、圓錐曲線的兩交弦定理、圓錐曲線內接四邊形的作圖以及圓錐曲線內接四邊形其對角線的斜率性質與應用。內容十分深入且完整，是個相當優質的作品。

作品簡報



科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：

錐心覓跡-圓錐曲線及其內接四邊形的作圖與幾何性質之探討

前言 (Introduction)

研究動機 (Research Motivation)

探討圓錐曲線及其內接四邊形的作圖

- 前作品中證明拋物線有關的輔助定理
- 本作品證明更一般圓錐曲線的輔助定理，證明中推導出推廣圓內兩交弦定理，同時也推導一些圓錐曲線內接四邊形的幾何性質。

研究問題 (Research Problem)

1. 圓錐曲線如何作圖呢？ 2.如何取第五點決定圓錐曲線種類呢？ 3.其幾何性質有何差異呢？

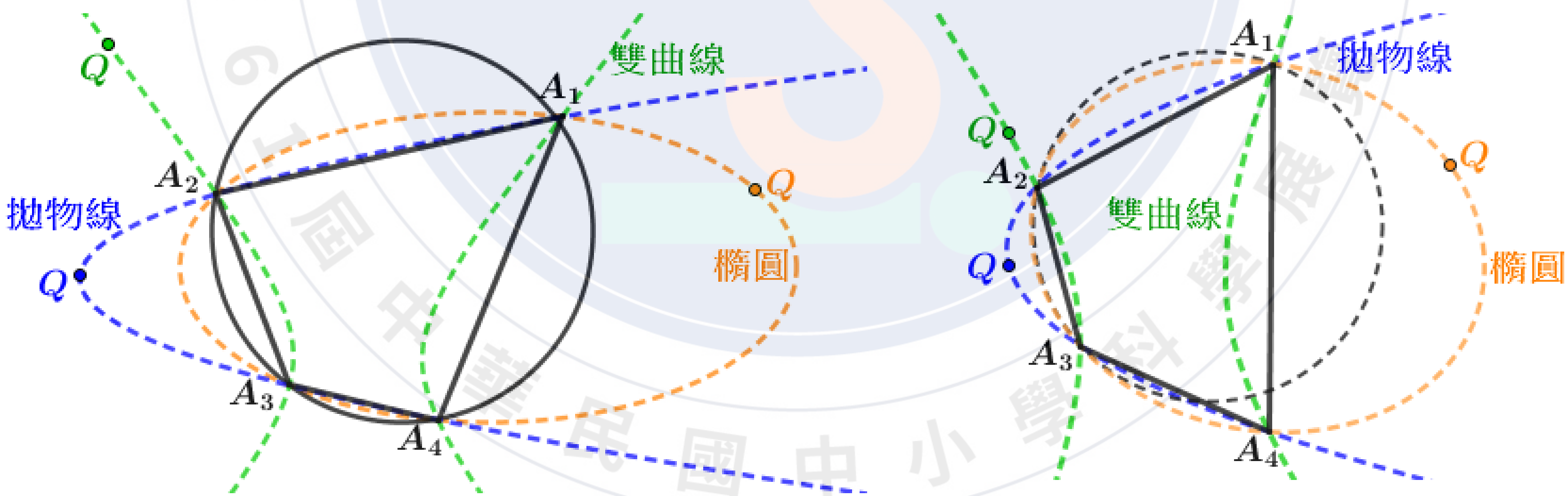


圖 1：圓內接與非圓內接四邊形中圓錐曲線種類或其幾何性質有何差異

名詞定義 (Noun and Definition)

定義 1 (圓錐曲線內接四邊形)

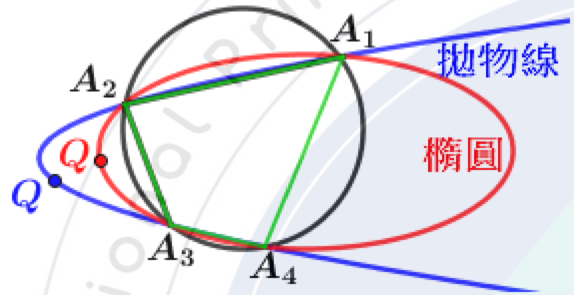


圖 2：圓內接四邊形

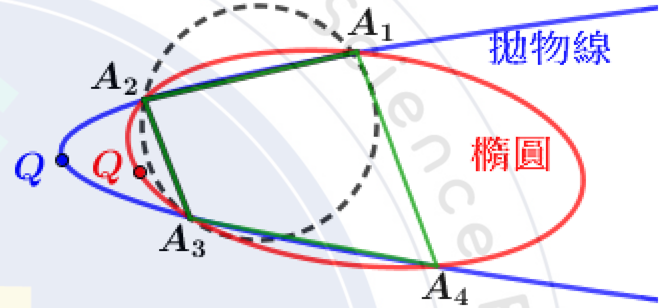


圖 3：非圓內接四邊形

定義 2 (圓錐曲線及其內接四邊形的作圖)

拋物線及其內接四邊形的作圖(I)與(II) → **圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)與(II)**

- **作圖(I)**：給定平面上三點與拋物線的平行軸之直線
- **作圖(II)**：給定一圓內接或非圓內接四邊形

在文獻上並無針對圓錐曲線內接四邊形的作圖及其幾何性質作深入探討，這是本作品研究核心。

定義 3 (區分圓錐曲線種類)

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$，其中 A,B,C 不全為0

- 若 $B=0$，則稱為**標準形**。
- 若 $B\neq 0$，則稱為**非標準形**。

拋物線	橢圓	雙曲線
左右型 $(x-h)^2=4c(y-k)$	扁型 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	左右型 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$
上下型 $(y-k)^2=4c(x-h)$	直立型 $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$	上下型 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

研究架構 (Research Architecture)

兩雙對邊皆不平行的四邊形

圓錐曲線內接四邊形

作圖 → •圓內接 •非圓內接 → 拋物線及其內接四邊形作圖(I)(II) → 圓錐曲線內接四邊形作圖(I)(II) → 區分圓錐曲線種類

幾何性質 → •圓錐曲線的定值性質 •推廣圓內兩交弦定理 •兩對角線的斜率性質 •有心錐線中心軌跡圖形

梯形　平行四邊形 → 區分圓錐曲線種類

輔助定理 (Auxiliary Theorem)

圓錐曲線直徑性質　圓錐曲線定值性質

輔1. **定值**= $\overline{HN}=2|c|$

輔2. **定值通式**= $\left|\dfrac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$，**圖 5**：$\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$

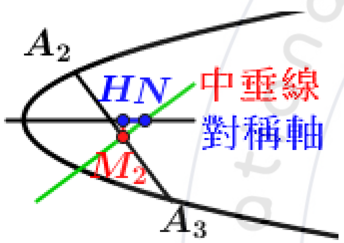


圖 4：拋物線的定值性質

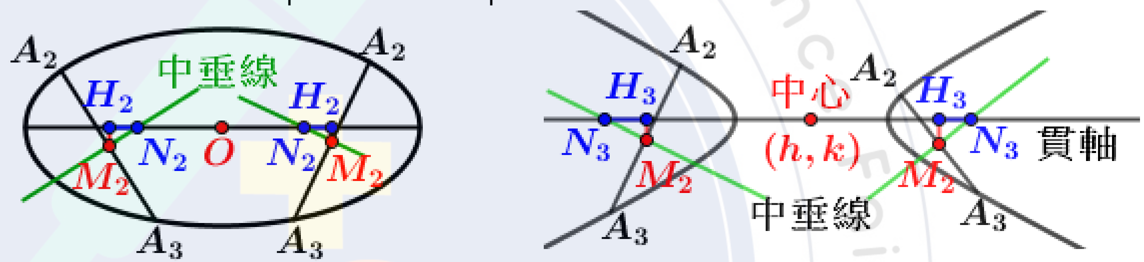


圖 5：橢圓與雙曲線定值性質

推廣圓內兩交弦定理

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}=t\left(\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}\right)$$

➢非圓內接四邊形(標準形)

輔3. **拋物線：**

$$t=\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$$

輔4. **扁型橢圓或左右型雙曲線：** $t=\left(\dfrac{(a'+b'm_2^2)m_1^2}{(a'+b'm_1^2)m_2^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$

$$a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$$

直立型橢圓或上下型雙曲線： $t=\left(\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$

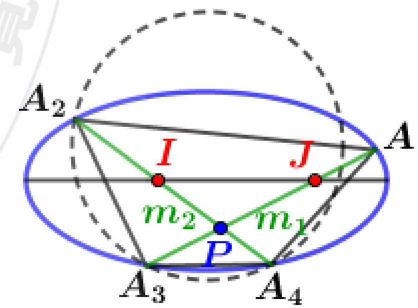


圖 6：$\overline{PI},\overline{PJ}$

➢非圓內接四邊形(非標準形)：

輔5. 證明通式，考慮對稱軸的斜率。

➢圓內接四邊形(標準形及非標準形)

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}=t\left(\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}\right)$$

輔6.

•拋物線：$t=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=1\Rightarrow\quad\overline{PI}=\overline{PJ}$

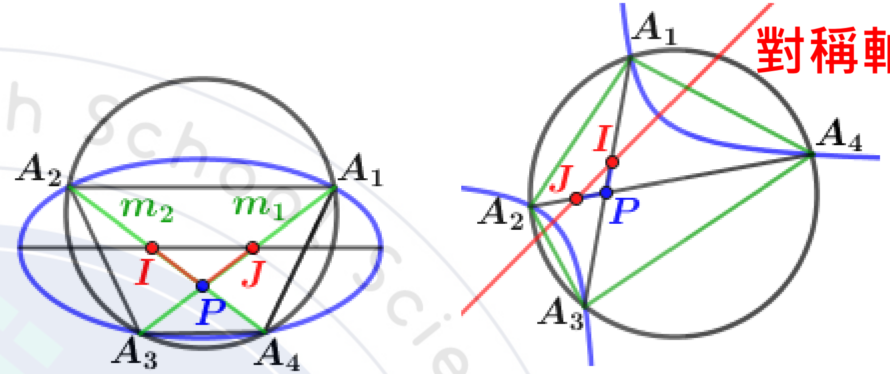


圖 7：$\overline{PI}=\overline{PJ}$

圓錐曲線及其內接四邊形的作圖

定理 1 (圓錐曲線內接平行四邊形中圓錐曲線的判定條件)

$$(m_1m_2+\ell)x^2-(m_1+m_2+2\ell\cot\theta)xy+(\ell\cot^2\theta+1)y^2-(m_1m_2s_1+\ell s_1)x+(m_2s_1+\ell s_1\cot\theta)y=0$$

•當 $\ell=1+m_1^2$ 時，圓

•當 $\ell>\dfrac{(m_1-m_2)^2}{4\ell(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1)}$ 時，橢圓

•當 $\ell<\dfrac{(m_1-m_2)^2}{4\ell(m_1\cot\theta-1)(m_2\cot\theta-1)}$ 時，雙曲線

• **2** 種兩平行直線及 **1** 種兩相交直線($\ell=0$)

由圓錐曲線族性質及判別式證明

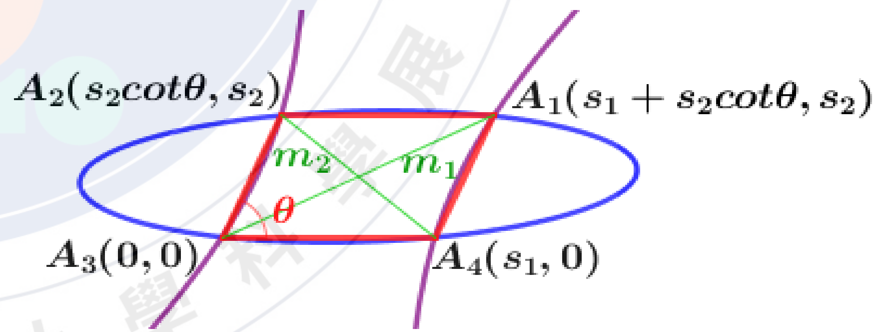


圖 8：圓錐曲線內接平行四邊形

兩雙對邊皆不平行的四邊形

定理 2 (拋物線及其內接四邊形的作圖(I))

•由輔助定理 1可建構出拋物線及其內接四邊形

輔助定理 6 ： $\overline{PI} = \overline{PJ}$

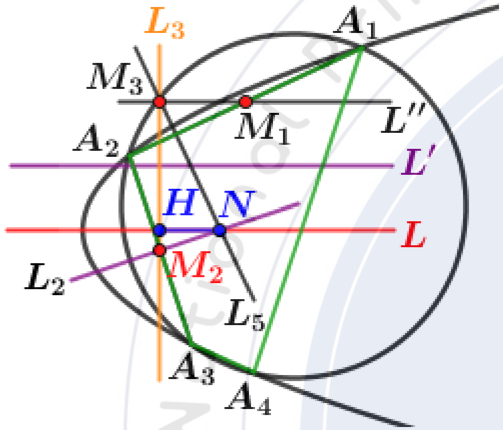


圖 9：作圖(I)

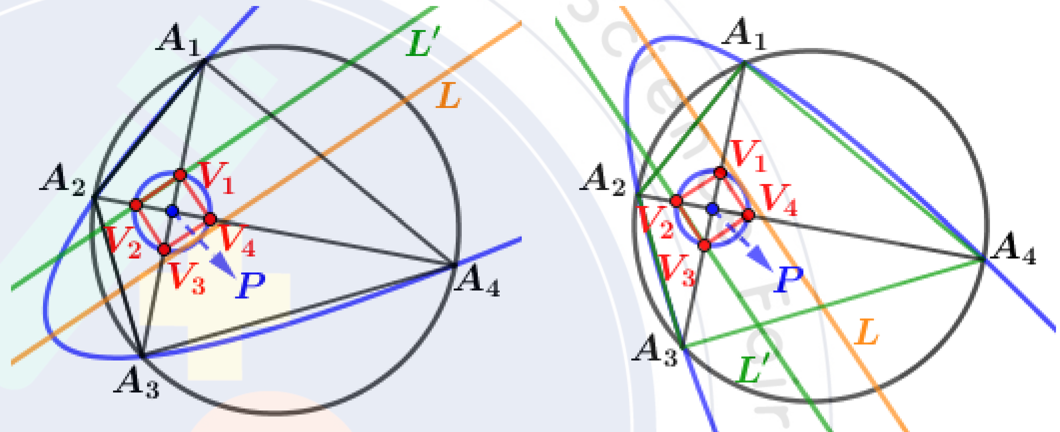


圖 10：作圖(II)-圓內接四邊形

定理 3 (拋物線及其內接四邊形的作圖(II))

•建構兩種對稱軸相互垂直的拋物線內接四邊形

輔助定理 3：

$$\frac{\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_3}}{\overline{PA_2} \cdot \overline{PA_4}} = \frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$$

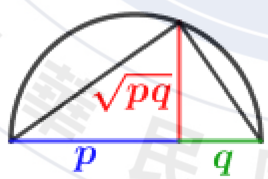


圖 11：幾何平均數

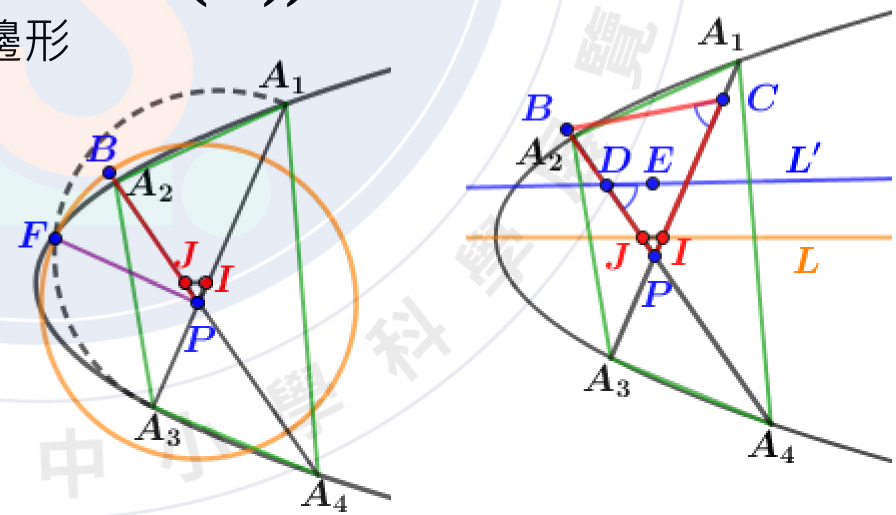


圖 12：作圖(II)-非圓內接四邊形

定理 4 (圓錐曲線內接四邊形的作圖(I))

- **過中垂線上建構軸，由點N_1, N, Q_1, Q_2, Q_3 區分建構出六種圓錐曲線**。
- 以Q_1R_1, Q_2P, Q_3R_2 為對稱軸，則分別建構出兩相交直線單接、雙接、單接等四邊形。

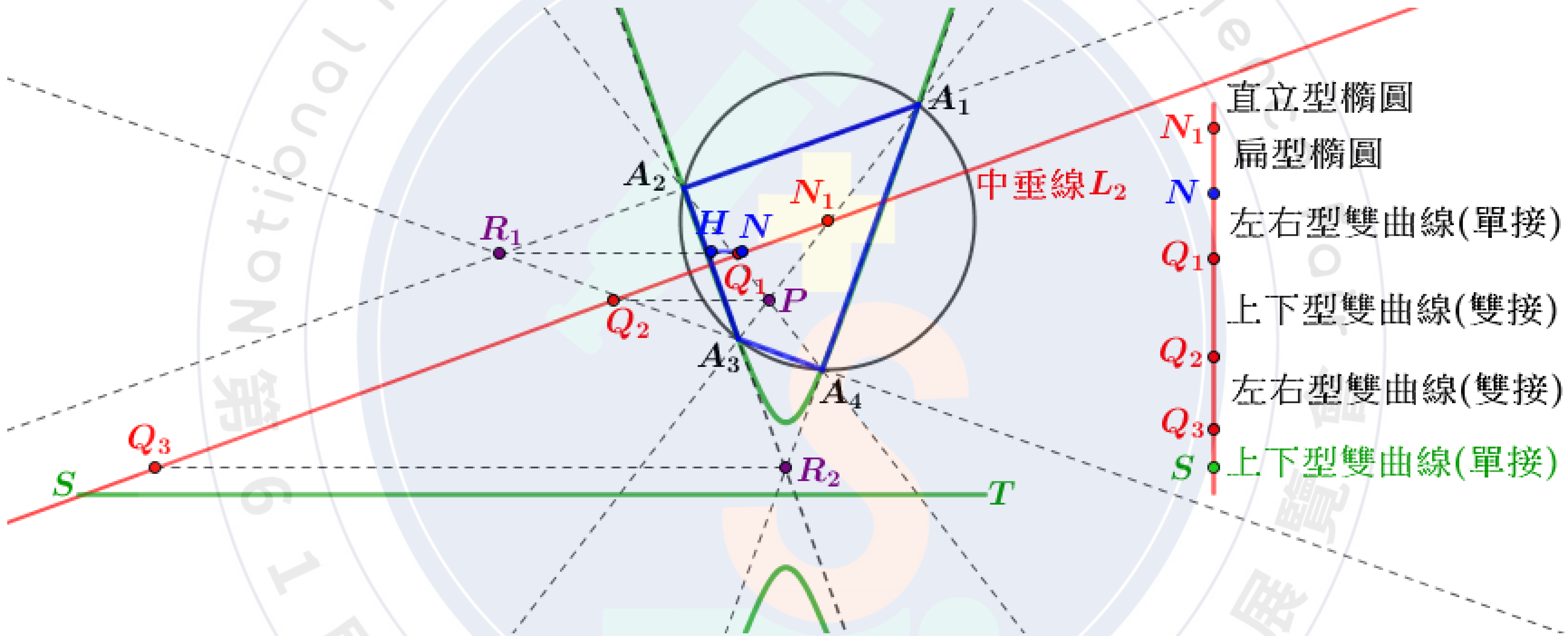


圖 13：圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)

證明：**由圓錐曲線的定值性質推導比例性質**，如直立型橢圓為

$$\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}=a^2:b^2$$

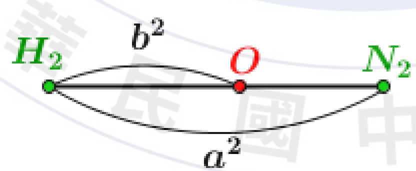


圖 14：比例性質

離心率 $\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{\overline{ON_2}}{\overline{H_2N_2}}}<1$

定理 5 (圓錐曲線內接四邊形的作圖(II))

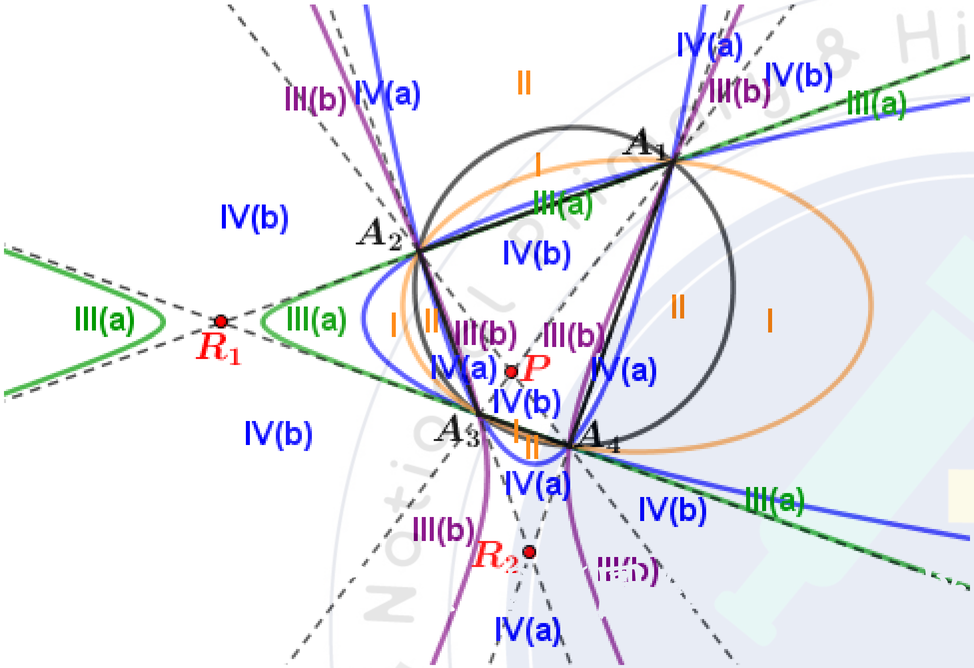


圖 15：圓錐曲線內接四邊形的作圖(II)

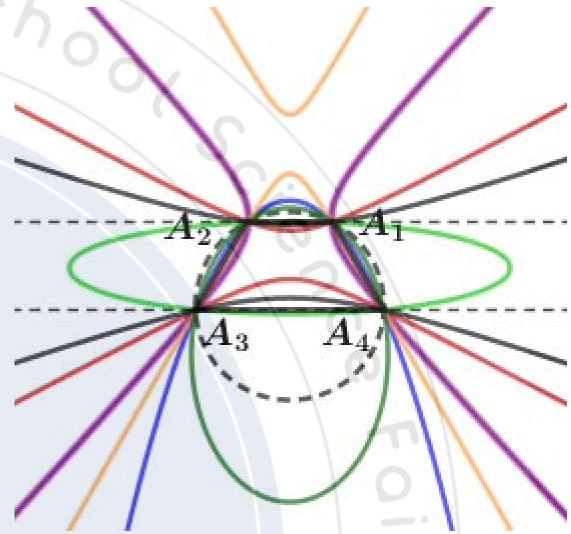


圖 16：圓錐曲線內接梯形

區域	圓錐曲線內接四邊形	退化圓錐曲線
I	扁型橢圓內接四邊形	兩相交直線(單接)
II	直立型橢圓內接四邊形	兩相交直線(單接)
III(a)	左右型雙曲線單接四邊形	兩相交直線(雙接)
III(b)	左右型雙曲線雙接四邊形	加上 2 種拋物線，共有 11 種圓錐曲線
IV(a)	上下型雙曲線雙接四邊形	
IV(b)	上下型雙曲線單接四邊形	

類推

- **梯形：**
  9 種圓錐曲線
- **平行四邊形：**
  7 種圓錐曲線

圓錐曲線內接四邊形的幾何性質

推廣圓內兩交弦定理　　兩對角線斜率性質

本作品中的推廣圓內兩交弦定理是用 $\overline{PI}$ 與 $\overline{PJ}$ 、及兩對角線、對稱軸的斜率來推導，與參考文獻[2]結果是不同的。

定理 6 (圓錐曲線內接四邊形的斜率性質)

- **圓內接四邊形：** $m_1+m_2=0$ (標準形)； $m_1'+m_2'=0$ (非標準形)
- **非圓內接四邊形：** $m_1+m_2\neq 0$ (標準形)； $m_1'+m_2'\neq 0$ (非標準形)

m_1',m_2' 考慮相對斜率：以對稱軸 $y=m_3x+\gamma$ 為 x 軸方向來計算斜率

由輔助定理 3證明中得證

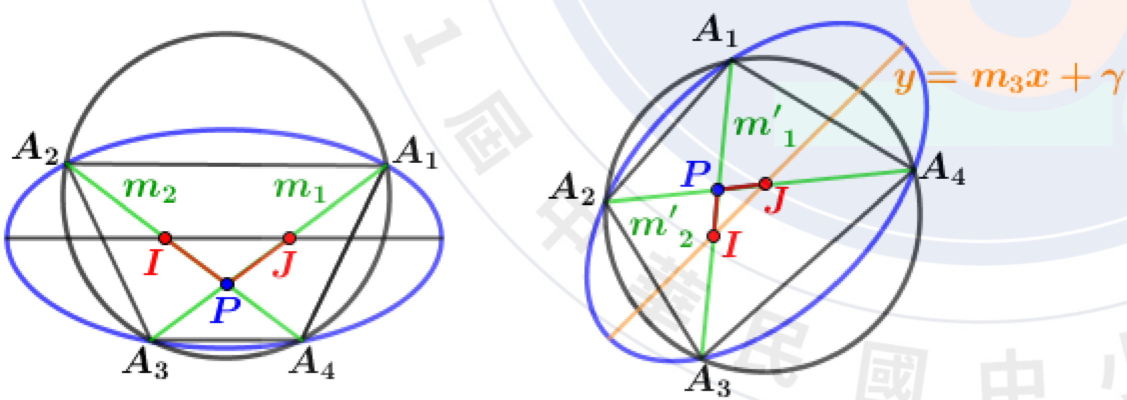


圖 17：斜率性質 ($m_1+m_2=0$)

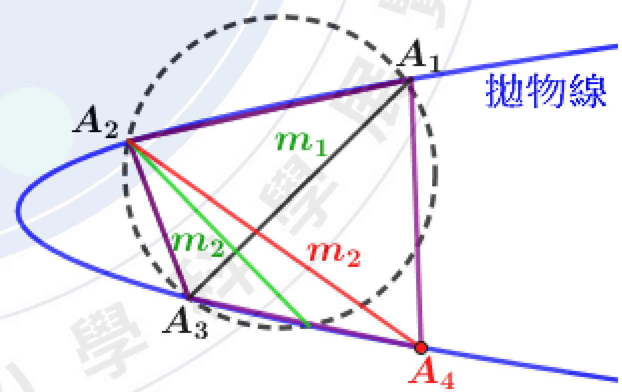


圖 18：斜率性質 ($m_1+m_2>0$)

中心軌跡圖形：由**定理 4**知可建構出六種有心錐線，由六種有心錐線的中心所形成的圖形。

定理 7 (中心軌跡圖形性質)

- **兩雙對邊皆平行的四邊形 (平行四邊形)：一點**

圓錐曲線族性質證明

中心$\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_2}{2}\right)$

- **一雙對邊平行的四邊形 (梯形)：一直線**

中心$\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_1(m_2+\ell\cot\theta)}{2(1-\ell\cot^2\theta)}\right)$

軌跡方程式為 $x=\dfrac{s_1}{2}$

- **兩雙對邊皆不平行的四邊形：過 P,M_1,M_2,M_3,M_4 的一雙曲線**

軌跡方程式為 $(x-\mu)(y-\nu)=\mu_\ell\nu_\ell$

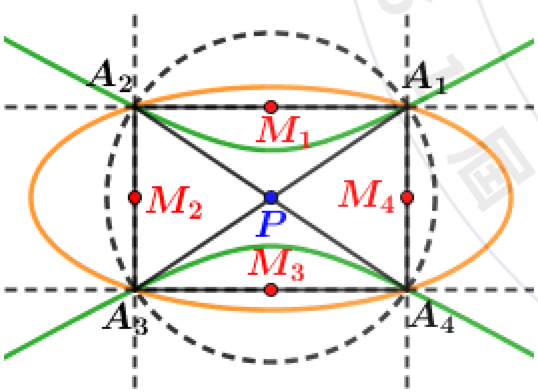


圖 19：軌跡圖形為一點

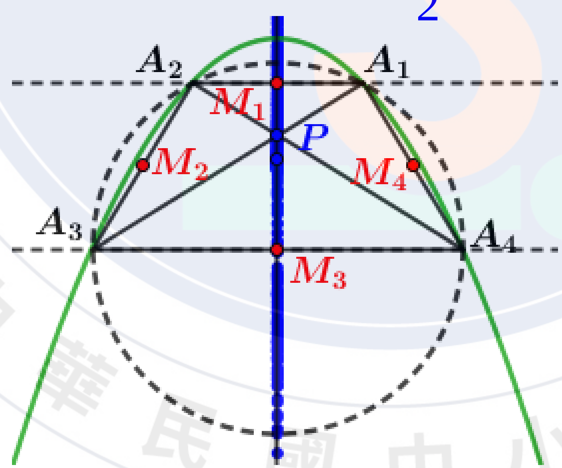


圖 20：軌跡圖形為一直線

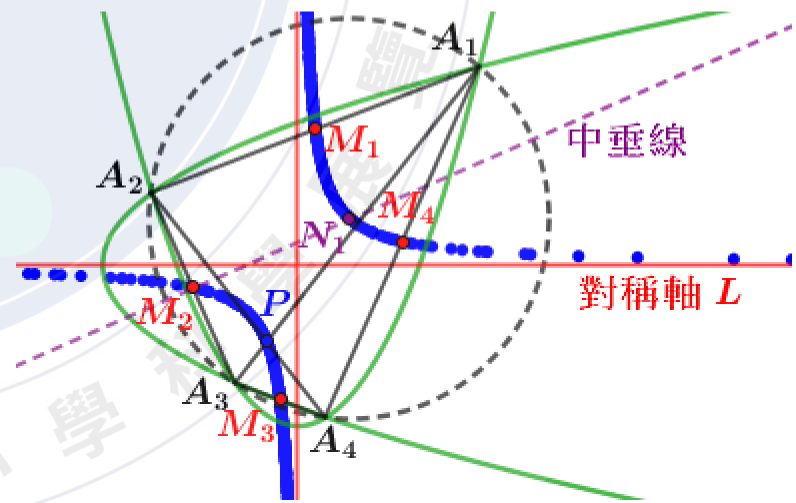


圖 21：軌跡圖形為一雙曲線

結論 (Conclusions)

✓透過六個輔助定理推導拋物線及其內接四邊形的作圖，進而證明推廣圓內兩交弦定理及兩對角線的斜率性質。

✓圓錐曲線的作圖是由無心錐線作圖去推導出有心錐線作圖。

✓當圓內接四邊形時，兩對角線的斜率滿足 $m_1+m_2=0$ 。

✓區分圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線種類，且證明其中心軌跡圖形。

☐由兩對角線斜率證明圓內接四邊形的充分條件，期許證明必要條件。

☐進一步探討由有心錐線的作圖去推導出無心錐線的作圖。

☐深入探討一些圓錐曲線內接四邊形的幾何性質。

參考文獻資料 (References)

[1]項武義 (2009)。**基礎幾何學**。台北市：五南圖書出版有限公司。

[2]黃家禮 (1997)。**幾何明珠**。台北市：九章出版社。

[3]Coxeter, H. S. M. (1967). Greitzer, S. L.*Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer..

[4] Keith Kendig. (2005). *Conics*. Cambridge University Press.