中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030410

漆步之遙

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳正昕	吳浩誠
國二 劉宇昕	林彥儒
國二 游必揚	

關鍵詞：正四面體、最短路徑、滾漆多面體

摘要

本作品研究了遊戲$Cube$中正四面體的滾動特性、色漆位置及最少步數解，並將三角網格轉換為方形網格，同時推廣至整個平面且為方形網格定義坐標。由於遊戲中考慮「回黏」時將較複雜，故作品前半部分先在不回黏的情況下做討論，並為了計算解題之「最短路徑長」，先求出任兩方格間「距離」，再將各方格間距離整理為表格，藉表格中行、列位置關係得出計算最短路徑長之公式。

而作品書後半段說明當考慮回黏時的情況，並因過程中需要求出任兩方格間滾動路徑上會經過A,B,C,D之個數，最後分析正四面體身上帶有色漆時對移動步數之影響。由於上述所有公式統整後非常繁複，故我們另借助$Python$將之統整並計算出回黏之最短路徑長。

壹、研究動機

在學習數學的過程中，數學遊戲往往是深受大家喜愛的項目，我們當然也不例外，常常在網路上尋找有趣的難題挑戰。在名為「$Simon\ Tatham's\ Portable\ Puzzle\ Collection$」的網頁上，我們發現一款稱為「$Cube$」的遊戲，並於此遊戲中進行了多次的嘗試，但仍對於過關策略相當迷惘，同時也發現不同人的解法與步數不盡相同，「如何走出最短步數？」、「色漆位置、底圖大小會造成什麼影響？」種種問題激發了我們對此遊戲的研究動機。

貳、研究目的

一、探討正四面體色漆初始位置與有無解關係。

二、探討正四面體在任兩方格間最少滾動步數(距離)。

三、探討正四面體在不考慮回黏條件下之最短路徑長。

四、探討正四面體在任兩方格間滾動所經A,B,C,D之個數。

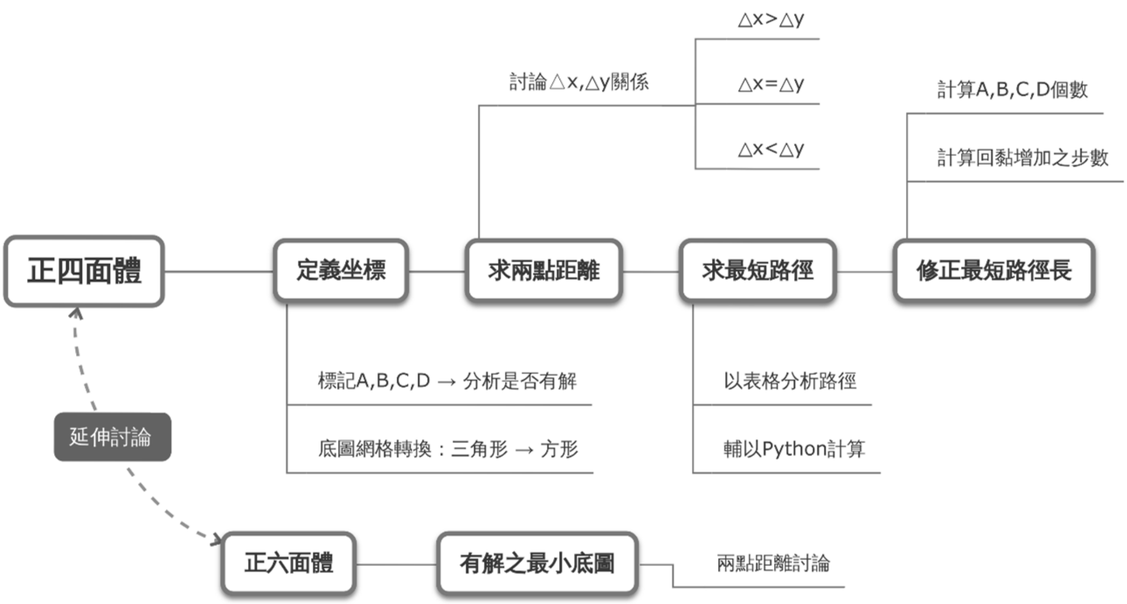
五、探討正四面體在考慮回黏條件下的最短路徑長之修正。

六、探討正六面體在考慮回黏條件下的最小有解之底圖尺寸。

七、探討正六面體在任兩方格間最少滾動步數(距離)。

八、探討正八面體色漆初始位置與有無解關係。

參、研究架構



肆、研究設備

$GeoGebra$、$Python$。

伍、研究過程

一、 遊戲介紹

(一) 開局場地

此數學遊戲是在由正三角形網格組成的底圖上進行。當遊戲開始時，底圖網格上將有一個四面皆空白的正四面體及四塊色漆在隨機位置上出現，如圖 5-1-1。

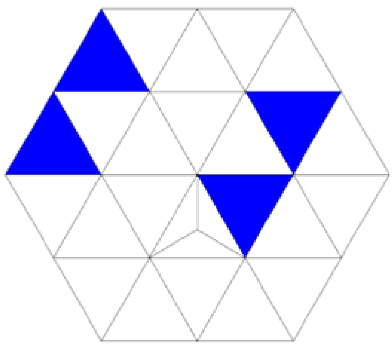


圖 5-1-1

(二) 移動方式

在遊戲進行中，若正四面體落在正三角形網格上時，可以選擇「向下、向左、向右」滾動，如圖 5-1-2；若正四面體落在倒三角形網格上時，可以選擇「往上、向左、向右」滾動，如圖 5-1-3。

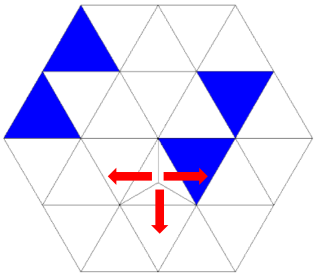


圖 5-1-2

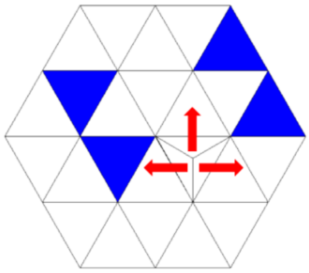


圖 5-1-3

(三) 回黏情形

當正四面體無色漆的一面滾動至有色漆的網格上時，色漆將由網格上轉黏至正四面體與該網格的接觸面上，如圖 5-1-4，反之，當正四面體有色漆的一面滾動至無色漆的網格上時，色漆將由正四面體上轉黏至該網格上，此後稱此情形為「回黏」，專指色漆由底圖網格轉黏至正四面體後再次黏回底圖上，如圖 5-1-5。

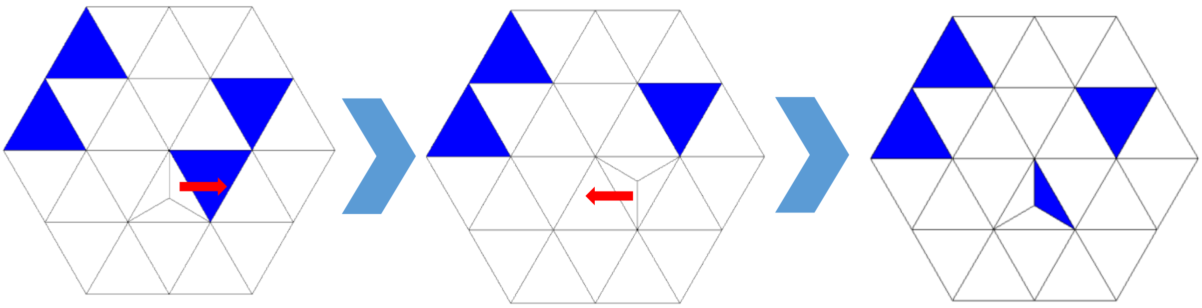


圖 5-1-4

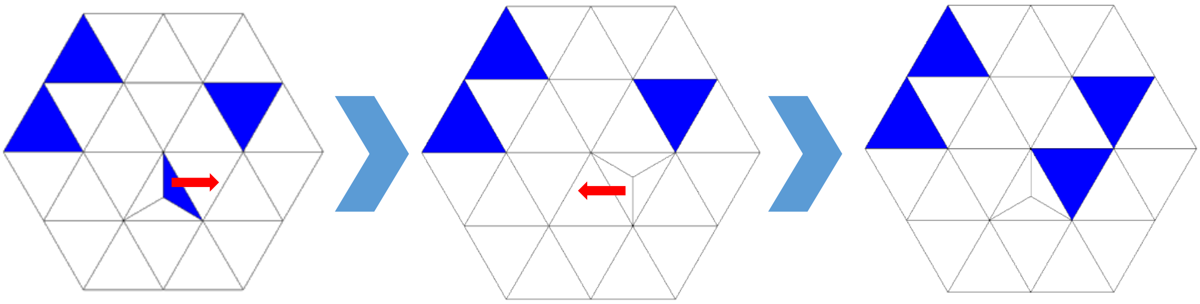


圖 5-1-5

(四) 過關條件

按照前述規則進行遊戲，當底圖網格上之四塊色漆皆分別轉黏至正四面體的四個面上時，稱此回合遊戲「過關」，如圖 5-1-6。

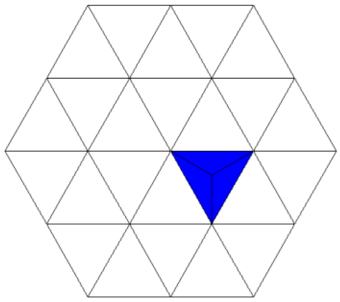


圖 5-1-6

經過初步嘗試後，發現遊戲初始的四塊色漆並非隨意放置都能有解，因此我們決定由此入手研究，同時先排除色漆會回黏的問題，意即色漆轉黏至正四面體的一面上後不會再黏回底圖網格，而後依序探討解題的最短步數及加入回黏後的情形分析。

二、 正四面體色漆初始位置與有無解關係

(一) 定義底圖坐標，並於網格標記A, B, C, D。

在進行研究的過程中，我們將正四面體的四個面依序標上A, B, C, D，如圖 5-2-1，其展開圖如圖 5-2-2，並發現其各個面均只會與底圖的特定網格接觸，因此將能與正四面體「A面、B面、C面、D面」接觸的網格，分別標記上「A, B, C, D」。

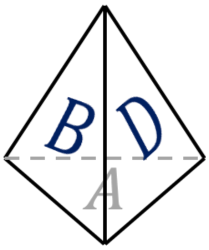


圖 5-2-1

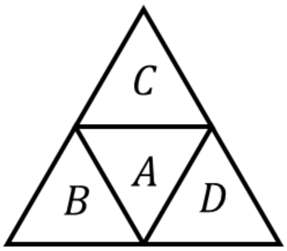


圖 5-2-2

將原遊戲的底圖三角形網格訂立x, y坐標，如下頁圖 5-2-3，並將圖 5-2-1 之正四面體的A面朝下放置於坐標(1,1)，且規定此位置三角形網格為「倒三角形」。此時觀察x坐標為奇數的行，發現只出現A與C，且依序為兩A、兩C的規律，而x坐標為偶數的行，則只出現B與D，同樣依序為兩B、兩D的規律，將上述整理如下：

性質 1	已知(x, y)為底圖上一網格坐標，則：	
	①當x為奇數	②當x為偶數
	若$x + y \equiv 1 \vee 2(mod4)$，則此格為「$A$」。	若$x + y \equiv 1 \vee 2(mod4)$，則此格為「$B$」。
	若$x + y \equiv 3 \vee 0(mod4)$，則此格為「$C$」。	若$x + y \equiv 3 \vee 0(mod4)$，則此格為「$D$」。

(二) 判斷正倒三角形

觀察底圖的三角形網格，可知任兩相鄰之網格必為「一正三角形△、一倒三角形▽」，又根據前述坐標定義，坐標(1,1)的網格為倒三角形，此格每向上或向右一格正倒三角形即交替出現，利用奇偶數的性質可推論出以下結果：

性質 2	已知(x, y)為底圖上一網格坐標，則：	
	①若$x + y$為奇數，則此格為「△」。	②若$x + y$為偶數，則此格為「▽」。

至此為方便後續討論與分析，我們發現可將原底圖的三角形網格轉換為方形網格，如圖 5-2-3 轉為圖 5-2-4，其中同行且相鄰同字母的方格對應至三角形網格是正四面體無法滾動跨越之處，故在方形網格中以紅色粗框線表示，而在此後說明書即不再以三角形網格的形式描述，轉而由方格取代。

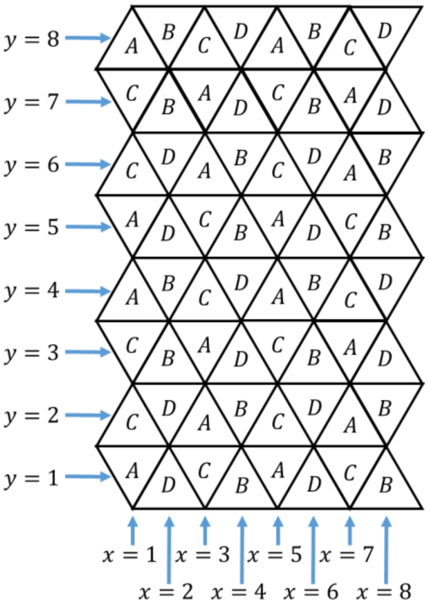


圖 5-2-3

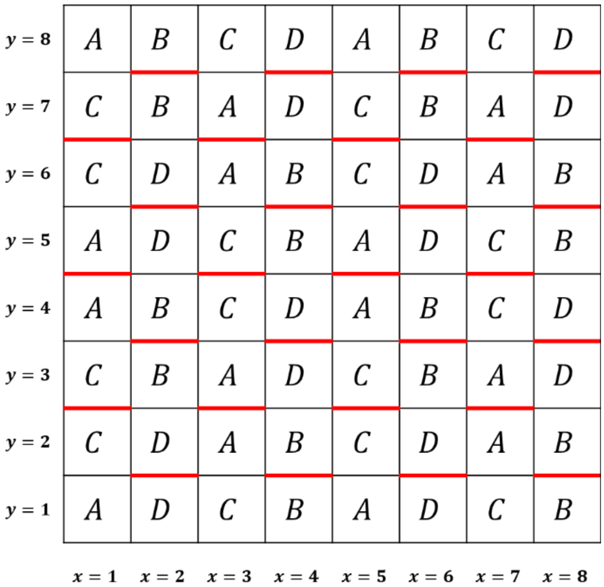


圖 5-2-4

根據前述，當遊戲初始的四塊色漆位置確定後，先將之轉換為坐標，再由$\boxed{\text{性質 1}}$判斷，可得出以下有無解之結論：

$\boxed{\text{定理 1}}$當遊戲滿足下列所有情形時，則此題有解，反之則無解。

①「正四面體」位於任意位置。

②「四塊色漆」恰分別落在標有A, B, C, D之方格。

解決有無解的問題後，接著我們想探討在有解的情形下，如何選擇「滾動路徑」及計算解題所需的「**最短路徑長**」(此指「最少滾動步數」)。為求得最短路徑長，必需先知道任兩方格間「**距離**」(此指「滾動距離」非直線距離)，而後分析最佳的滾動路徑。

三、 正四面體的任兩方格間距離

假設所求之兩方格坐標分別為$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，且將兩方格距離記作$\overline{PQ}$，並定義$\Delta x = |x_2 - x_1|$、$\Delta y = |y_2 - y_1|$，因Δx與Δy的大小關係將影響距離的計算方式，故分為以下三種情況說明。

(一) 若$\boldsymbol{\Delta x = \Delta y}$，則$\boldsymbol{\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y}$。

當$\Delta x = \Delta y$時，以左下(P)至右上(Q)的滾動情形為例(其餘方向皆同理)，在不繞路的條件下滾動方式只能為向右或向上，並將有如圖 5-3-1 與圖 5-3-2 的兩種類型，即P、Q兩點皆為正三角形或皆為倒三角形，這兩種類型走法分別為「向右一步、向上一步」及「向上一步、向右一步」不斷循環，我們將之合稱為「**階梯狀滾法**」，而總步數可看作向右Δx步與向上Δy步之和，即$\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y$。

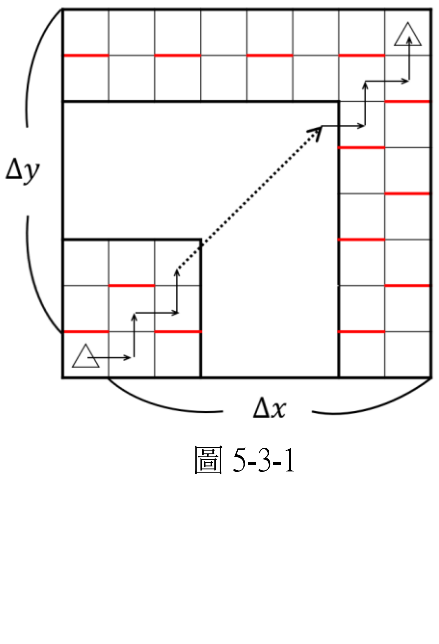


圖 5-3-1

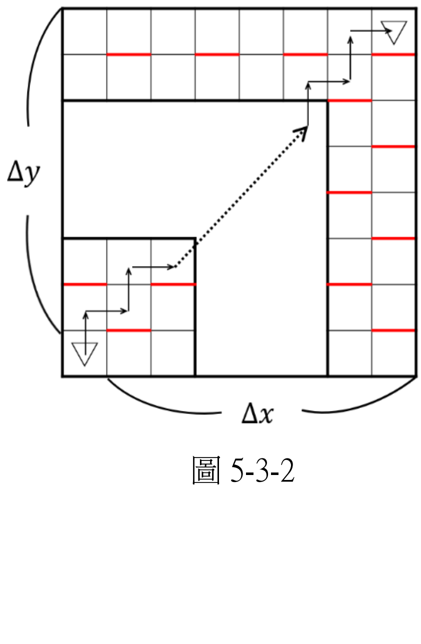


圖 5-3-2

(二) 若$\boldsymbol{\Delta x > \Delta y}$，則$\boldsymbol{\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y}$。

當$\Delta x > \Delta y$時，以左下(P)至右上(Q)的滾動情形為例，並將滾動過程分為兩個階段，如圖 5-3-3，第一階段為$P(x_1, y_1)$至$P'(x_1 + \Delta y, y_2)$，以階梯狀滾法達成，步數為$2\Delta y$，第二階段為$P'(x_1 + \Delta y, y_2)$至$Q(x_2, y_2)$，僅向右滾可達成，步數為$x_2 - (x_1 + \Delta y) = \Delta x - \Delta y$，此兩階段總步數即$\overline{PQ} = 2\Delta y + (\Delta x - \Delta y) = \Delta x + \Delta y$。

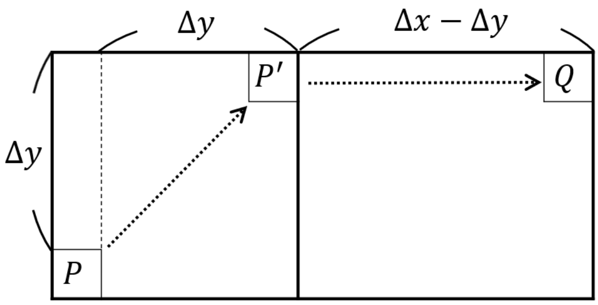


圖 5-3-3

(三) 若$\boldsymbol{\Delta x < \Delta y}$，則$\boldsymbol{\overline{PQ} = 2\Delta y}$或$\boldsymbol{2\Delta y \pm 1}$。

當$\Delta x < \Delta y$時，同樣以左下(P)至右上(Q)的滾動情形為例，並將滾動過程分為兩個階段，如圖 5-3-4，第一階段為$P(x_1, y_1)$至$P'(x_2, y_1 + \Delta x)$，以階梯狀滾法達成，步數為$2\Delta x$，第二階段為$P'(x_2, y_1 + \Delta x)$至$Q(x_2, y_2)$，此階段將分為四種情形，稱其為「**垂直向上滾法**」，如下頁圖 5-3-5 至圖 5-3-8，觀察藍色底框內共有$2(\Delta y - \Delta x)$個方格，若路徑未經過最左上角方格，則步數需減一；若路徑經過最左下角方格，則步數需加一，分述如下：

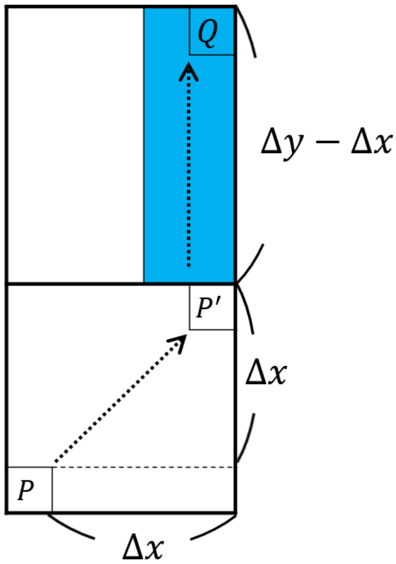


圖 5-3-4

1. 當P'、Q皆為▽，則步數為$2(\Delta y - \Delta x)$。
2. 當P'為▽、當Q為△，則步數為$2(\Delta y - \Delta x) - 1$。
3. 當P'、Q皆為△，則步數為$2(\Delta y - \Delta x) - 1 + 1 = 2(\Delta y - \Delta x)$。
4. 當P'為△、當Q為▽，則步數為$2(\Delta y - \Delta x) + 1$。

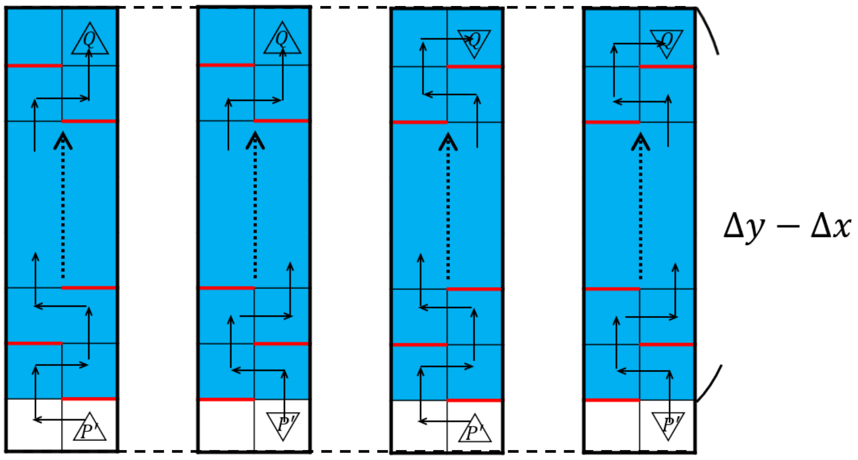


圖 5-3-5　圖 5-3-6　圖 5-3-7　圖 5-3-8

根據性質 2，可知$P(x_1,y_1)$與$P'(x_2,y_1+\Delta x)$必同為△或▽，故此處可改為判斷P、Q為△或▽即可，同時將前述所有兩方格距離公式統整為如下：

> 定理 2 已知$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，並定義$\Delta x=|x_2-x_1|$、$\Delta y=|y_2-y_1|$。
>
> ①若$\Delta x\geq\Delta y$，則$\overline{PQ}=\Delta x+\Delta y$。
>
> ②當$\Delta x<\Delta y$：　1.若$\Delta x+\Delta y$為偶數，則$\overline{PQ}=2\Delta y$。
>
> 2.當$\Delta x+\Delta y$為奇數：
>
> (1)若「$y_1>y_2$且P為△」或「$y_1<y_2$且P為▽」，則$\overline{PQ}=2\Delta y-1$。
>
> (2)若「$y_1>y_2$且P為▽」或「$y_1<y_2$且P為△」，則$\overline{PQ}=2\Delta y+1$。

當遊戲開局時，將正四面體(O點)與四塊色漆(P,Q,R,S點)位置以坐標表示，再由定理 2 可知相互間距離，接下來即可分析如何選擇滾動路徑達成以最短路徑解題，即以O點為起始點，過P,Q,R,S點四點，求最短路徑長。以下先以過兩點、三點判斷最短路徑，再推論至過四點時之情形。

四、　正四面體在不考慮回黏條件下之最短路徑長

(一) 以O點為起始點，過P、Q之最短路徑。

由圖 5-4-1 可知以O為起始點之最短路徑可能為$O\rightarrow P\rightarrow Q$或$O\rightarrow Q\rightarrow P$，其中$\overline{PQ}$為必走，且$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$兩線段較短者必走，因此可推論「最短路徑必經過$\Delta OPQ$中最短一邊」。

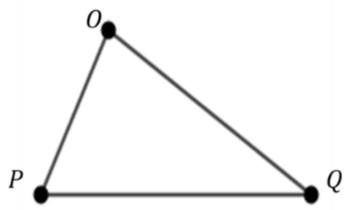


圖 5-4-1

(二) 以O點為起始點，過P、Q、R之最短路徑。

假設ΔPQR中$\overline{PQ} < \overline{QR} < \overline{RP}$，由第一點知$\overline{PQ}$必走，且最短路徑可能為$O \to P \to Q \to R$、$O \to Q \to P \to R$或$O \to R \to Q \to P$，如圖 5-4-2，此時在$\overline{PO}$、$\overline{QO}$、$\overline{RO}$中，若$\overline{PO}$或$\overline{RO}$最短，則需先比較$\overline{PO} + (\overline{QP} + \overline{QR})$與$\overline{RO} + (\overline{QP} + \overline{QR})$大小，為方能決定最短路徑為$O \to P \to Q \to R$或$O \to R \to Q \to P$，若$\overline{OQ}$最短，則需再考慮$O \to Q \to P \to R$是否比前述兩種路徑更短，將上述整理成定理 3-1，並以表格方式呈現，如圖 5-4-3。

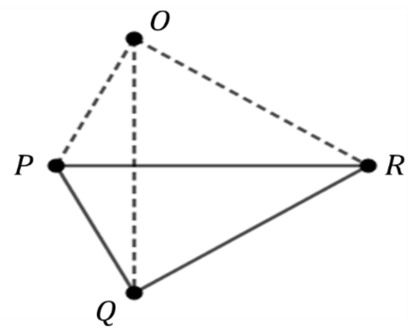


圖 5-4-2

定理 3-1 若以O點為起點，過P、Q、R之最短路徑長為O_{min}。

設$O_1 = \{\overline{PO}, \overline{QO}, \overline{RO}\}, O_2 = \{\overline{PQ} + \overline{PR}, \overline{QP} + \overline{QR}, \overline{RP} + \overline{RQ}\}$

$$O_{min} = \begin{cases} min(O_1) + min(O_2) \ \ldots\ldots ① \\ min\left(min(O_1) + med(O_2), med(O_1) + min(O_2)\right) \ \ldots\ldots ② \end{cases}$$

①：若O_1中最小線段與O_2中最小和之兩線段不共點。

②：若非情況①，則為情況②。

※ $min(x, y, z)$ =取x, y, z的最小值。

※ $med(x, y, z)$ =取x, y, z的中位數。

	P	Q	R
O	$\overline{OP}$	$\overline{OQ}$	$\overline{OR}$
P		$\overline{QP}$	$\overline{RP}$
Q	$\overline{PQ}$		$\overline{RQ}$
R	$\overline{PR}$	$\overline{QR}$	

圖 5-4-3

【範例一】

	P	Q	R
O	5	3	4
P		4	3
Q	4		1
R	3	1	

$min(O_1) = 3$

$min(O_2) = 4$

$O_{min} = 3 + 4 = 7$

最短路徑：

$\boldsymbol{O \to Q \to R \to P}$

【範例二】

	P	Q	R
O	6	5	3
P		3	2
Q	3		1
R	2	1	

$min(O_1) = 3, med(O_1) = 5$

$min(O_2) = 3, med(O_2) = 4$

$O_{min} = min(5 + 3, 3 + 4) = 7$

最短路徑：

$\boldsymbol{O \to R \to Q \to P}$

(三) 以O點為起始點，過P、Q、R、S之最短路徑。

定理 3-2 若以O點為起點，過P、Q、R、S之最短路徑長為O_{min}。 根據定理 3-1，分別以P、Q、R、S為經過第一點，可得$P_{min}, Q_{min}, R_{min}, S_{min}$， $O_{min} = min(\overline{OP} + P_{min}, \overline{OQ} + Q_{min}, \overline{OR} + R_{min}, \overline{OS} + S_{min})$

求出在不考慮回黏之下的最短路徑後，由此開始我們將分析「回黏」對於最短路徑的影響，並藉此分析結果修正前述所求出之最短路徑長，以符合原始遊戲的情境。

五、 正四面體在任兩方格間滾動所經A, B, C, D之個數

為後續研究的需要，我們首先探討任兩方格滾動路徑上之A、B、C、D個數，同樣假設兩方格分別為$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，若以左下(P)滾動至右上(Q)(右上滾動至左下時結果相同)，如圖 5-5-1，此時我們將A, B, C, D分為「A與B」、「C與D」兩組，若以左上(P)滾動至右下(Q)，如圖 5-5-2，則分為「A與D」、「B與C」兩組，以下以前者分組方式說明(後者同理)，並將之分為$\Delta x \geq \Delta y$與$\Delta x < \Delta y$兩種情形討論。

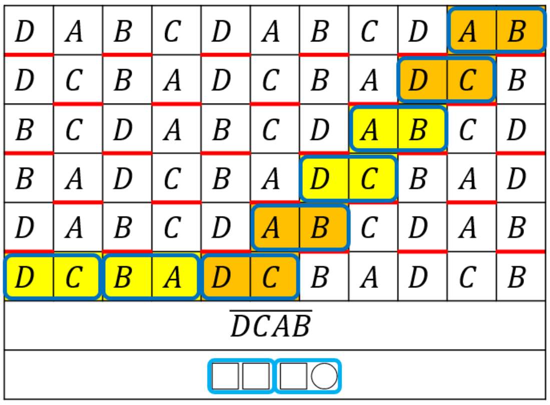


圖 5-5-1

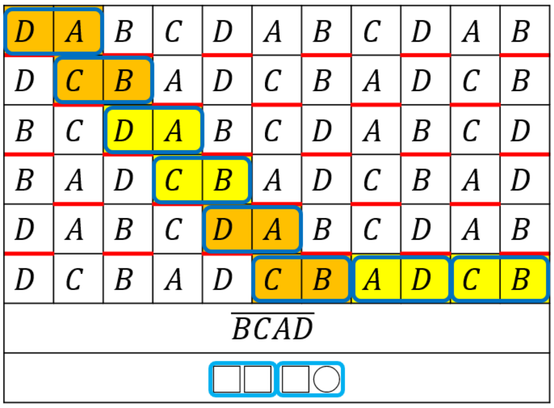


圖 5-5-2

(一) 當$\Delta x \geq \Delta y$：

由$(\overline{PQ} + 1) \div 4$的得商為$M$、餘數為$N$，可知$A$、$B$、$C$、$D$之個數皆在$M$個上下，再依餘數$N$做修正，其中定義$P_1, P_2, P_3$分別為第一個、第二個、第三個經過的方格，將上述整理為下頁表格。

$N=0$		$N=1$		$N=2$	$N=3$	
P、Q 同組	P、Q 異組	P、P_2 同組	P、P_2 異組	P、Q 同組	P、P_2 同組	P、P_2 異組
各M個	各M個	各M個 Q加1個	各M個 P加1個	各M個 P、Q 各加1個	各M個 P、P_2、Q 各加1個	各M個 P、P_2、P_3 各加1個

表 5-5-1

(二) 當$\Delta x < \Delta y$：

此情形分為兩階段討論，第一階段為$P(x_1, y_1)$至$P'(x_2, y_1 + \Delta x)$，第二階段為$P'(x_2, y_1 + \Delta x)$至$Q(x_2, y_2)$，其中為方便表示因此令$U = \Delta y - \Delta x$。

1. 第一階段

Δx為奇數	Δx為偶數
各$\frac{\Delta x}{2}$個，其中Q減1個。	各$\frac{\Delta x-1}{2}$個，其中P減1個。

表 5-5-2

2. 第二階段

	P為△且Δx為偶數 **P為▽且Δx為奇數**	**P為▽且Δx為偶數** **P為△且Δx為奇數**
Q為△	各$\frac{U}{2}$個，其中Q加1個。	各$\frac{U+1}{2}$個，其中若 $U \equiv 1 (mod\ 4)$， 則P加1個，與Q同組者各減1個。
Q為▽	與P'同組者各$\frac{U+1}{2}$個， 與P'異組者各$\frac{U-1}{2}$個。	各$\frac{U}{2}$個，其中P'加1個。

表 5-5-3

六、 正四面體之回黏情形分析

此後的研究，將會使用「○、□、●」記錄「**色漆分布圖**」，其代表滾動路徑上的每個方格上之色漆狀況，因此在此先定義以下三個記號：

(一) 「○」代表該方格對應至正四面體的該面無色漆，且該方格也無色漆。

(二) 「□」代表該方格對應至正四面體的該面有色漆，且該方格無色漆。

(三) 「●」代表該方格對應至正四面體的該面無色漆，且該方格有色漆。

在考慮回黏步數以修正最短路徑長前，我們將先模擬所有回黏可能情況，以下將方格兩兩分為一組，並考慮所有「色漆分布圖」的可能組合，用以討論其所需步數：

表 5-6-1		
色漆數	色漆分布圖	步數
0	○○	2
1	□○	4
	○□	
2	□□	4

由於實際滾動路徑上，時常情況為A,B,C,D以一定順序循環出現，故將上表一組格數擴充為兩倍，即四方格一組，另因正四面體的四面皆有色漆時遊戲即過關，因此正四面體上之色漆數至多為三，而下表「步數圖」則記錄每步滾動的位置：

色漆數	色漆分布圖	步數圖	步數
1	□○○○	12 3456	6
2 (相連)	□□○○	12 3456	6

2 (不相連)	□○□○	12 3456 78	8
3	□□□○	12 3456 78	8

七、 正四面體在考慮回黏條件下的最短路徑長之修正

觀察圖 5-7-1 與圖 5-7-2，可得知由左下至右上與右下至左下的A,B,C,D排序並不相同，但從循環的規律中可以發現，水平相鄰的兩方格皆為固定的組合，如圖中藍色圈選處，因此若要將滾動方向反轉，只需替換公式中兩兩組合的字母，故接下來的研究將只以左下至右上之滾法作說明，而在文中若見如$\overline{ABCD}$或$\overline{□□□○}$，表示其按A、B、C、D或□、□、□、○之順序循環出現。

D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
$\overline{DCAB}$										
□□□○										

圖 5-7-1

D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
$\overline{BCAD}$										
□□□○										

圖 5-7-2

假設兩方格分別為$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，且$x_1 < x_2$、$y_1 < y_2$，此令$\overline{PQ} = W$，即兩方格不考慮回黏時之最少滾動步數為W，並定義$\overline{\overline{PQ}}$為考慮回黏步數時之最少滾動步數，同時在後續的研究中，將以P_1、P_2與P_3依序表示滾動路徑上第一、第二及第三個經過的方格。

(一) 當正四面體由起始點(P)滾至第一塊色漆(Q)：

由於正四面體上並無色漆，因此並無因回黏增加步數，即$\overline{\overline{PQ}} = \overline{PQ} = W$。

(二) 當正四面體由第一塊色漆(P)滾至第二塊色漆(Q)：

此時正四面體上已有一塊色漆，且如前 2 頁表 5-6-1 之色漆數為1的情形，相當於路徑上每遇一個與P相同之方格步數需加2，即$\overline{PQ} = W + 2 \times$(與$P$相同之格數)。

(三) 當正四面體由第二塊色漆(P)滾至第三塊色漆(Q)：

在研究正四面體由第二塊色漆滾至第三塊色漆時，先設每一步皆會回黏，也就是將滾動步數基準值設為$2W$，再分析需修正之步數，並統整為公式。

1. 當$\Delta x < \Delta y$：

此時滾動路徑會由「階梯狀滾法、垂直上升滾法」兩階段組成，若將方格分為兩兩一組，可知當兩格□相連時可降低步數，因此考慮回黏增加步數只需分別觀察兩階段滾法是否有兩格□相連的情形，故可分為下列三種狀況「第一階段兩格□相連、第二階段兩格□相連、兩階段皆兩格□相連」，如表 5-7-1。

【範例】以P為△、Q為△、P_1、P_2為○、Δx為偶數且P_1與Q相同的條件為例，如圖 5-7-3，此情形色漆分布圖為「○○□□○○|□□○○□□○○□□○●」，前半段的橘色與黃色部分為階梯狀，滾動步數為$2\Delta x$，而後半段的綠色、淺藍與深藍部分為垂直上升，滾動步數為$W - 2\Delta x$，所以橘色部分有$\frac{2\Delta x - 2}{4}$個循環，而淺藍部分有$\frac{W - 2\Delta x - 4}{8}$個循環：

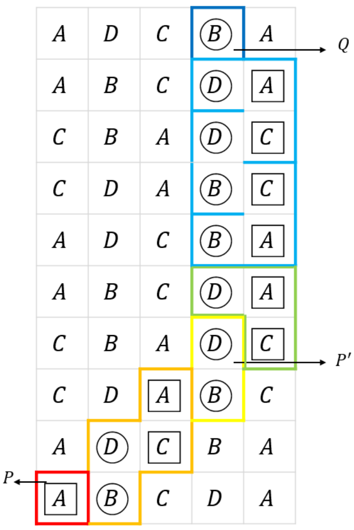


圖 5-7-3

-2 -2 -1 -4 -1

○○□□○○|□□○○□□○○□□○●

橘色部分每次循環減2步、黃色部分總共減2步、綠色部分總共減1步、淺藍色部分每次循環減4步，深藍色部分總共減1步，整理出公式為：

$$\overline{PQ} = 2W - (2 \times \frac{2\Delta x - 2}{4}) - 2 - 1 - (4 \times \frac{W - 2\Delta x - 8}{8}) - 1 = \frac{3W}{2} - 1$$

<table>
<tr><th colspan="7">表 5-7-1</th></tr>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>○位置</th><th>$\boldsymbol{\Delta x}$</th><th colspan="2">●位置</th><th>滾動步數($\overline{PQ}$)
$(w_1=\frac{3W}{2}, w_2=\frac{3W}{2}+\Delta x)$
$(w_3=\frac{7W}{4}+\frac{\Delta x}{2})$</th></tr>
<tr><td rowspan="12">△</td><td rowspan="12">△</td><td rowspan="4">$\overline{○○□□}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{●○□□}$</td><td>無此情形</td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{○●□□}$</td><td>無此情形</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+○○</td><td>$\overline{●○□□}$</td><td>+□□○
$\overline{○□□○○□□○○}$</td><td rowspan="2">w_1-1</td></tr>
<tr><td>$\overline{○●□□}$</td><td>+□□○
$\overline{○□□○○□□○}$
○□□○○</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\overline{○□○□}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{●□○□}$</td><td>無此情形</td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{○□●□}$</td><td>+○□□
$\overline{○□○○□○□□○}$</td><td rowspan="2">w_3-1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+○□</td><td>$\overline{●□○□}$</td><td>+○□□
$\overline{○□○○□○□□○}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{○□●□}$</td><td>無此情形</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\overline{□○○□}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{□●○□}$</td><td>+□○□
$\overline{○○□○□□○□○}$</td><td>$w_3-\Delta x-1$</td></tr>
<tr><td>$\overline{□○●□}$</td><td>無此情形</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+□○</td><td>$\overline{□●○□}$</td><td>+○□○
$\overline{□□○□○○□○}$
□□○□○</td><td>$w_3-\Delta x+1$</td></tr>
<tr><td>$\overline{□○●□}$</td><td>無此情形</td><td></td></tr>
</table>

		$\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}$	偶數 (不變)	$\overline{\bullet\bigcirc\square\square}$	無此情形	
				$\overline{\bigcirc\bullet\square\square}$	無此情形	
			奇數 $+\bigcirc\bigcirc$	$\overline{\bullet\bigcirc\square\square}$	$+\square\square\bigcirc$ $\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\bigcirc\square\square\bigcirc}$	$w_1-\frac{1}{2}$
				$\overline{\bigcirc\bullet\square\square}$	$+\square\square\bigcirc$ $\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\bigcirc\square\square\bigcirc}$ $\bigcirc\square\square\bigcirc$	
	$\triangledown$	$\overline{\bigcirc\square\bigcirc\square}$	偶數 (不變)	$\overline{\bullet\square\bigcirc\square}$	無此情形	
				$\overline{\bigcirc\square\bullet\square}$	$+\bigcirc\square\square$ $\overline{\bigcirc\square\bigcirc\bigcirc\square\bigcirc\square\square}$ $\bigcirc\square\bigcirc\bigcirc$	$w_3-\frac{5}{4}$
			奇數 $+\bigcirc\square$	$\overline{\bullet\square\bigcirc\square}$	$+\bigcirc\square\square$ $\overline{\bigcirc\square\bigcirc\bigcirc\square\bigcirc\square\square}$ $\bigcirc\square\bigcirc\bigcirc$	
				$\overline{\bigcirc\square\bullet\square}$	無此情形	
		$\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}$	偶數 (不變)	$\overline{\square\bullet\bigcirc\square}$	$+\square\bigcirc\square$ $\overline{\bigcirc\bigcirc\square\bigcirc\square\square\bigcirc\square}$ $\bigcirc\bigcirc\square\bigcirc$	$w_3-\Delta x-\frac{3}{4}$
				$\overline{\square\bigcirc\bullet\square}$	無此情形	
			奇數 $+\square\bigcirc$	$\overline{\square\bullet\bigcirc\square}$	$+\bigcirc\square\bigcirc$ $\overline{\square\square\bigcirc\square\bigcirc\bigcirc\square\bigcirc}$	$w_3-\Delta x-\frac{1}{4}$
				$\overline{\square\bigcirc\bullet\square}$	無此情形	
$\triangledown$	$\triangle$	$\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}$	偶數 (不變)	$\overline{\bullet\bigcirc\square\square}$	$+\overline{\bigcirc\bigcirc\square\bigcirc\square\square\bigcirc\square}$ $\bigcirc$	$w_3-\Delta x-\frac{3}{4}$
				$\overline{\bigcirc\bullet\square\square}$	無此情形	

			奇數 +○○	$\overline{\text{●○□□}}$	無此情形	
				$\overline{\text{○●□□}}$	$+\overline{\text{□□○□○○□○□□○□○}}$	$w_3-\Delta x-\frac{7}{4}$
		$\overline{\text{○□○□}}$	偶數 (不變)	$\overline{\text{●□○□}}$	$+\overline{\text{○□○○□○□□○}}$	$w_3-\frac{3}{4}$
				$\overline{\text{○□●□}}$	無此情形	
			奇數 +○□	$\overline{\text{●□○□}}$	$+\overline{\text{□□○□○○□○□□○□○}}$	$w_3+\frac{1}{4}$
				$\overline{\text{○□●□}}$	無此情形	
		$\overline{\text{□○○□}}$	偶數 (不變)	$\overline{\text{□●○□}}$	無此情形	
				$\overline{\text{□○●□}}$	無此情形	
			奇數 +□○	$\overline{\text{□●○□}}$	$+\overline{\text{○□□○○□□○○□□○○}}$	$w_2-\Delta x+\frac{1}{2}$
				$\overline{\text{□○●□}}$	$+\overline{\text{○□□○○□□○○}}$	
	▽	$\overline{\text{○○□□}}$	偶數 (不變)	$\overline{\text{●○□□}}$	$+\overline{\text{○○□○□□○□○○□○}}$	
				$\overline{\text{○●□□}}$	無此情形	
			奇數 +○○	$\overline{\text{●○□□}}$	無此情形	
				$\overline{\text{○●□□}}$	$+\overline{\text{□□○□○○□○}}$	$w_3-\Delta x-1$
		$\overline{\text{○□○□}}$	偶數 (不變)	$\overline{\text{●□○□}}$	$+\overline{\text{○□○○□○□□○□○○}}$	w_3-1
				$\overline{\text{○□●□}}$	無此情形	

			奇數 +○□	$\overline{\text{●□○□}}$	+$\overline{\text{□□○□○○□○}}$	w_3
				$\overline{\text{○□●□}}$	無此情形	
			偶數 (不變)	$\overline{\text{□●○□}}$	無此情形	
		$\overline{\text{□○○□}}$		$\overline{\text{□○●□}}$	無此情形	
			奇數 +□○	$\overline{\text{□●○□}}$	+$\overline{\text{○□□○○□□○}}$	$w_3-\Delta x+1$
				$\overline{\text{□○●□}}$	+$\overline{\text{○□□○○□□○}}$ ○□□○	$w_3-\Delta x$

2. 當$\Delta x=\Delta y$：

此時的滾動路徑為單純的階梯狀滾法，且P、Q必同為△或▽，也因此P_2必與Q相同，即P_2為○，而P_1、P_3其一為○、一為□，故此情況下色漆分布圖共有兩種可能，如表 5-7-2。

【範例】以P_1、P_2為○的條件下為例，如圖 5-7-4，此情形的色漆分布圖為「○○$\overline{\text{□□○○}}$」，其中黃色部分有$\frac{W-2}{4}$個循環：

$$\underset{-2}{\text{○○}}\ \overline{\underset{-2}{\text{□□}}\text{○○}}$$

圖 5-7-4

橘色部分總共減2步、黃色部分每次循環減2步，整理出公式為：

$$\overline{PQ}=2W-2-\frac{W-2}{4}\times 2=2W-\frac{W}{2}+1$$

表 5-7-2	
○的位置	總結公式
○○$\overline{\text{□□○○}}$	$\frac{3w}{2}-1$
□○$\overline{\text{○□□○}}$	$\frac{3w}{2}+1$

3. 當$\Delta x > \Delta y$：

此時滾動路徑由「階梯狀滾法、水平移動滾法」兩階段組成，考慮回黏增加步數的策略如同$\Delta x < \Delta y$，只需觀察兩階段滾法是否有兩格□相連的情形，因此同樣分為三種狀況，第一階段兩格□相連、第二階段兩格□相連、兩階段皆兩格□相連」，如表 5-7-3。

【範例】以P為△、Q為△、P_1、P_2為○、Δx為偶數且P_1與Q相同的條件下為例，如圖 5-7-5，此情形的色漆分布圖為「○○□□|○□○□●」，前半段橘色部分為階梯狀，且橘色循環最後一格為P'，步數為$2\Delta y$，而後半段的黃色與綠色部分為水平移動，步數為$W - 2\Delta y$，其中橘色部分有$\frac{2\Delta y}{4}$個循環，而黃色部分有$\frac{W-2\Delta y-1}{4}$個循環：

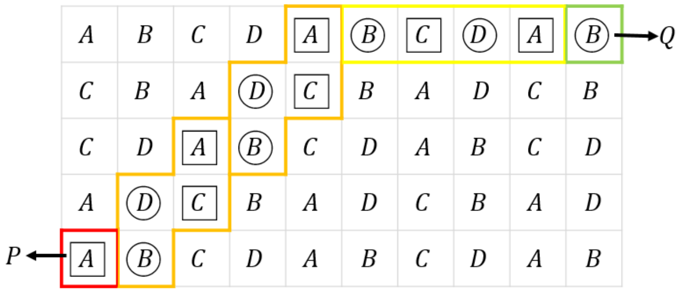


圖 5-7-5

−2　　　　0　　−1

○○□□|○□○□●

橘色部分每次循環減2步，黃色部分不變，綠色部分總共減1步，整理出公式為：

$$\overline{PQ} = 2W - \left(2 \times \frac{2\Delta y}{4}\right) - 1 = 2W - \Delta y - 1$$

<table>
<tr><th colspan="5">表 5-7-3</th></tr>
<tr><th>P</th><th>○的位置</th><th>Δx</th><th>●的位置</th><th>滾動步數($\overline{PQ}$)
($w_1 = \frac{3w}{2}$)
($w_2 = 2W - \Delta y$)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">△</td><td rowspan="4">○○□□</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>●○□□ + ○□○□○</td><td rowspan="4">$w_2 - 1$</td></tr>
<tr><td>○●□□ + ○□○□○□○</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+○○</td><td>●○□□ + □○□○□○</td></tr>
<tr><td>○●□□ + □○□○</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="8"></td><td rowspan="4">$\overline{\bigcirc\square\bigcirc\square}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{\bullet\square\bigcirc\square}+\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}\bigcirc\bigcirc$</td><td>$w_1+\Delta y-\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\bigcirc\square\bullet\square}+\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}\bigcirc$</td><td>$w_1+\Delta y-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+$\bigcirc\square$</td><td>$\overline{\bullet\square\bigcirc\square}+\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}\bigcirc$</td><td>$w_1+\Delta y-\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\bigcirc\square\bullet\square}+\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}\bigcirc\bigcirc$</td><td>$w_1+\Delta y-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{\square\bullet\bigcirc\square}+\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}\square\bigcirc\bigcirc$</td><td>$w_1-1$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\square\bigcirc\bullet\square}+\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}\square\bigcirc$</td><td>$w_1+\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+$\square\bigcirc$</td><td>$\overline{\square\bullet\bigcirc\square}+\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc}$</td><td>$w_1+1$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\square\bigcirc\bullet\square}+\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc}\bigcirc$</td><td>$w_1+\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="12">▽</td><td rowspan="4">$\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{\bullet\bigcirc\square\square}+\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}\bigcirc\bigcirc$</td><td>$w_1-1$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\bigcirc\bullet\square\square}+\overline{\bigcirc\bigcirc\square\square}\bigcirc$</td><td>$w_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+$\bigcirc\bigcirc$</td><td>$\overline{\bullet\bigcirc\square\square}+\overline{\square\square\bigcirc\bigcirc}\square\square\bigcirc$</td><td>$w_1-\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\bigcirc\bullet\square\square}+\overline{\square\square\bigcirc\bigcirc}$</td><td>$w_1-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\overline{\bigcirc\square\bigcirc\square}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{\bullet\square\bigcirc\square}+\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}\square\bigcirc$</td><td>$w_1+\Delta y-1$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\bigcirc\square\bullet\square}+\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}\square\bigcirc\bigcirc$</td><td rowspan="2">$w_1+\Delta y-\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+$\bigcirc\square$</td><td>$\overline{\bullet\square\bigcirc\square}+\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}\square\bigcirc\bigcirc$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\bigcirc\square\bullet\square}+\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}\square\bigcirc$</td><td>$w_1+\Delta y-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\overline{\square\bigcirc\bigcirc\square}$</td><td rowspan="2">偶數
(不變)</td><td>$\overline{\square\bullet\bigcirc\square}+\overline{\bigcirc\square\bigcirc\square}\bigcirc$</td><td rowspan="4">$w_2+1$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\square\bigcirc\bullet\square}+\overline{\bigcirc\square\bigcirc\square}\bigcirc\square\bigcirc$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇數
+$\square\bigcirc$</td><td>$\overline{\square\bullet\bigcirc\square}+\overline{\square\bigcirc\square\bigcirc}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{\square\bigcirc\bullet\square}+\overline{\square\bigcirc\square\bigcirc}\square\bigcirc$</td></tr>
</table>

(四) 當正四面體由第三塊色漆(P)滾至第四塊色漆(Q)：

當$\Delta x<\Delta y$時，我們注意到正四面體上有三塊色漆時，若將第一階段改為「向右三格、向上一格」形成八步一循環的滾法，在考慮回黏時相較階梯狀滾法省步數，並將此法稱為「右三上一滾法」，如圖 5-7-6 的$\overline{ADCABCDB}$，每個循環「$ADCABCDB$」需 14 步，而原階梯狀滾法則為「$ACDBACDB$」需 16 步，因此右三上一滾法每循環可減2步，同時我們由前述知當盡可能讓兩格□相鄰可降低最多步數，因此右三上一滾法為此情況最佳的滾動路徑。

此外，當$\Delta x < \Delta y$時，滾動的第二階段垂直上升滾法也有相同情形，其色漆分布圖同為「□□□□○□□□○」，如圖 5-7-7。

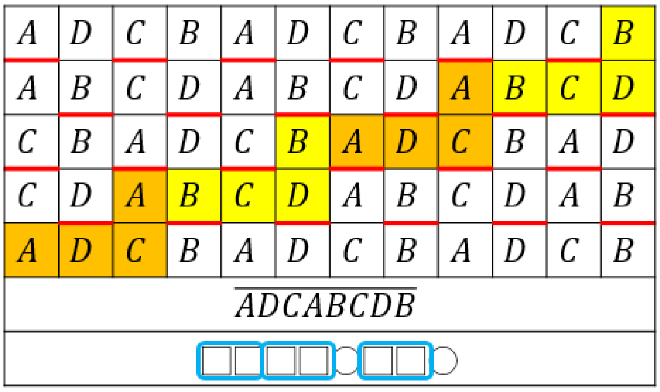


圖 5-7-6

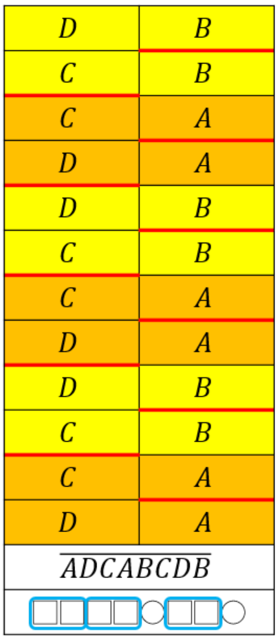


圖 5-7-7

1. 當$\Delta x < \Delta y$：

此時滾動路徑由「階梯狀滾法、垂直上升滾法」組合。

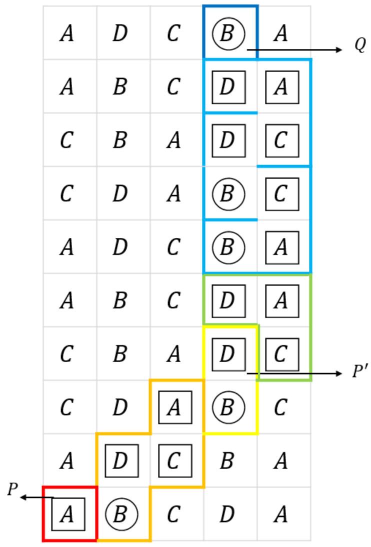
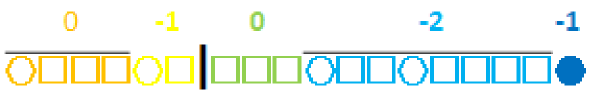


圖 5-7-8

【範例】以P為△、Q為△、P_1為○且Δx為偶數的條件下為例，如圖 5-7-8，此情形色漆分布圖為「○□□□○□|□□□○□□□○□□□□●」，前半段的橘色與黃色部分為階梯狀，總使用的步數為$2\Delta x$，而後半段的綠色、淺藍與深藍部分為垂直上升，步數為$W - 2\Delta x$，因此黃色部分有$\frac{2\Delta x-2}{4}$個循環，而深藍部分有$\frac{W-2\Delta x-4}{8}$個循環：



橘色部分總共減1步，黃色、綠色、淺藍色部分皆不變，深藍色部分每次循環減2步，紫色部分總共減1步，整理出公式為：

$$\overline{PQ} = 2W - 1 - \left(2 \times \frac{W-2\Delta x-4}{8}\right) - 1 = 2W - \frac{W-2\Delta x}{4} - 1$$

表 5-7-4				
○ 位置	Δx	P	Q	滾動步數($\overline{PQ}$) ($w' = 2W - \frac{W-2\Delta x}{4}$)
$\overline{\bigcirc\square\square\square\bigcirc}-1$	偶數 +□	△ $+\square\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	w'
			▽+○□□○	$w'-\frac{1}{4}$
		▽ $+\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	$w'+\frac{1}{4}$
			▽+○□□○	$w'-2$
	奇數 +□□□	△ $+\square\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	w'
			▽+○□□○	$w'-\frac{1}{4}$
		▽ $+\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	$w'+\frac{1}{4}$
			▽+○□□○	$w'-2$
$\square\overline{\bigcirc\square\square\square\bigcirc}+0$	偶數 (不變)	△ $+\square\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+□□□□○	w'
			▽+□□□□○□□□○	$w'-\frac{1}{4}$
		▽ $+\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+□□□□○	$w'+\frac{1}{4}$
			▽+□□□□○□□□○	w'
	奇數 +□□	△ $+\square\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	w'
			▽+○□□○	$w'-\frac{1}{4}$
		▽ $+\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	$w'+\frac{1}{4}$
			▽+○□□○	$w'-2$
$\square\square\overline{\bigcirc\square\square\square\bigcirc}-1$	偶數 +□	△ $+\square\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	w'
			▽+○□□○	$w'-\frac{1}{4}$
		▽ $+\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	△+○	$w'+\frac{1}{4}$
			▽+○□□○	$w'-2$

	奇數 +□□□	△ $\overline{\text{○□□○□□□□}}$ +□□□○□□○□□□□	△+○	w'
			▽+○□□○	$w'-\frac{1}{4}$
		▽ $\overline{\text{○□□○□□□□}}$ +○□□○□□□□	△+○	$w'+\frac{1}{4}$
			▽+○□□○	$w'-2$

2. 當$\Delta x=\Delta y$：

此時滾動路徑為「階梯狀滾法」，同前述P、Q必同為△或▽，且P_2與Q相同，其色漆分布圖僅一種可能，如表 5-7-5，得公式為：$\overline{PQ}=2W$

表 5-7-5	
色漆分布圖	滾動步數($\overline{PQ}$)
□○$\overline{\text{□□□○}}$	$2W$

3. 當$\Delta x>\Delta y$：

此時滾動路徑由「右三上一滾法、階梯狀滾法」組合，並因說明需要在此定義P_1',P_2',P_3'分別為P右邊第一、第二及第三格，如圖 5-7-9。而因右三上一滾法每八步循環會減少2步，故依照右三上一的循環次數可分為如下兩種情況：

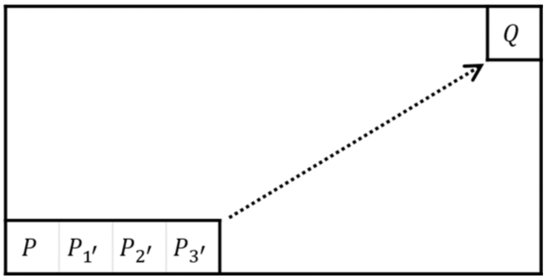


圖 5-7-9

(1) **情況一**：右三上一可完全填滿，即代表每單位y可配到三單位x，可依據$3\Delta x\geq\Delta y$判斷為此情況，其步數只須用$2W$扣除右三上一省下之步數。

(2) **情況二**：右三上一無法完全填滿，即代表只有一部份單位的y可配到三單位x，可依據$3\Delta x<\Delta y$判斷為此情況，其需先計算右三上一循環次數，再將Δx減去頭尾的必走步數，再減去Δy間x的移動步數，即$\Delta y-1$。

【範例】以P為△、Q為▽且P_1為○的條件下為例，如圖 5-7-10，此情形色漆分布圖為「$\overline{\text{○□□○□□□□}}$|$\overline{\text{○□□□}}$○」，前半段的橘色部分為右三上一，步

數為$2(\Delta x-\Delta y)-2$，而後半段的黃色與綠色部分為階梯狀與水平移動，步數為$W-2(\Delta x-\Delta y)+2$，且橘色部分有$\frac{\Delta x-\Delta y-1}{4}$個循環，而黃色部分有$\frac{W-2(\Delta x-\Delta y)+1}{4}$個循環：

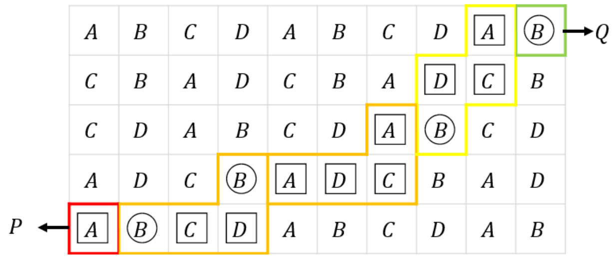


圖 5-7-10

橘色部分每次循環減2步、黃色部分不變、綠色部分總共減1步，得公式為：

$$\overline{PQ}=2W-\frac{\Delta x-\Delta y}{2}-\frac{3}{2}$$

表 5-7-6

P	○的位置	**Q**	滾動步數($\overline{PQ}$) ($w'=2W-\frac{\Delta x-\Delta y}{2}$)
△	$\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	$\triangle+\bigcirc\square\square\bigcirc\overline{\square\square\square\bigcirc}$	$w'-1$
		$\triangledown+\overline{\bigcirc\square\square\square}\bigcirc$	$w'-\frac{3}{2}$
	$\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	$\triangle+\bigcirc\square\square\bigcirc\overline{\square\square\square\bigcirc}$	$w'-1$
		$\triangledown+\overline{\bigcirc\square\square\square}\bigcirc$	$w'-\frac{1}{2}$
	$\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	$\triangle+\bigcirc\square\square\bigcirc\overline{\square\square\square\bigcirc}$	$w'-1$
		$\triangledown+\overline{\bigcirc\square\square\square}\bigcirc$	$w'-\frac{1}{2}$
▽	$\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	$\triangle+\bigcirc\square\square\bigcirc\overline{\square\square\square\bigcirc}$	$w'+\frac{1}{2}$
		$\triangledown+\overline{\square\square\square\bigcirc}\bigcirc$	w'
	$\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	$\triangle+\bigcirc\square\square\bigcirc\overline{\square\square\square\bigcirc}$	$w'+\frac{1}{2}$
		$\triangledown+\overline{\square\square\square\bigcirc}\bigcirc$	w'

	$\square\square\square\overline{\bigcirc\square\square\bigcirc\square\square\square\square}$	$\triangle+\bigcirc\square\square\overline{\bigcirc\square\square\square\bigcirc}$	$w'+\frac{1}{2}$
		$\triangledown+\overline{\square\square\square\bigcirc\bigcirc}$	w'

陸、延伸討論

前述「正四面體」的研究就到一段落，而我們對於同屬**柏拉圖多面體**的「正六面體」與「正八面體」也感到好奇，其中前者底圖為方形網格，後者為三角網格，將之分別按照遊戲規則操作，並開始了我們以下的研究。

一、　正六面體

對於「正六面體」，發現其與正四面體最大的差異在於正六面體在方形網格上滾動時，其滾動方向將不會有任何限制，即在任何位置皆可選擇上、下、左、右滾動，如圖 6-1-1。

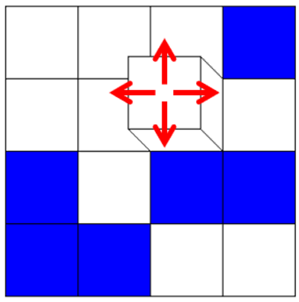
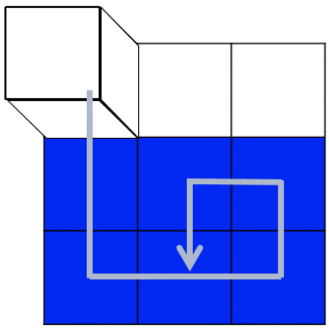


圖 6-1-1

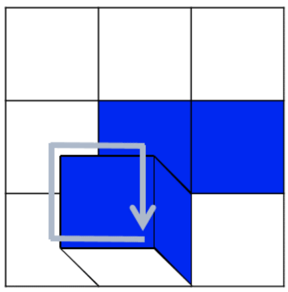
(一) 正六面體在考慮回黏條件下的最小有解之底圖尺寸

在研究過程中，我們發現若底圖網格為2×3時即有解，且在不斷嘗試中目前以15步為解題之最少步數，以下就15步之滾動路徑作說明。

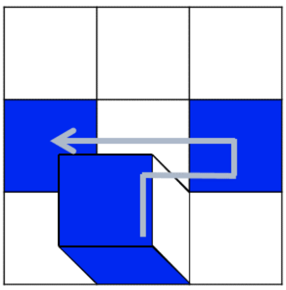
①



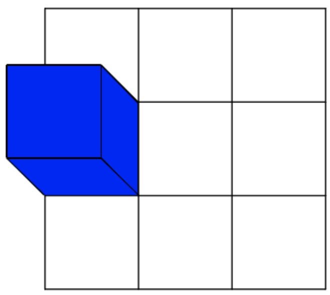
②



③



④



(二) 正六面體在任兩方格間最少滾動步數(距離)

1. 單純考慮任兩方格間滾動步數

由於正六面體的滾動方向不受限制，故任兩方格$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$距離，即$\overline{PQ}=\Delta x+\Delta y$，其中$\Delta x=|x_2-x_1|$、$\Delta y=|y_2-y_1|$，不過此結果無法確認滾動至$Q$時正六面體為哪一面朝下，將由下列兩點繼續討論。

2. 需特定面朝下之兩方格滾動步數

當任兩方格分別為$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，並令$\Delta x=|x_2-x_1|,\Delta y=|y_2-y_1|$，以下皆由$P$點滾至$Q$點來說明，並將正六面體六面分別標上$A,B,C,D,E,F$，其中$A$對面為$F$、$B$對面為$E$、$C$對面為$D$。

當$(\Delta x,\Delta y)=(2,4)$時，由$P$滾至$Q$的最短路徑共有15種，如圖 6-1-2，當正六面體滾至Q時，其各面朝下與路徑數統計如下表，其中包含各面朝下的 6 種情形。

朝下面	A	B	C	D	E	F
路徑數	5	2	2	1	1	4

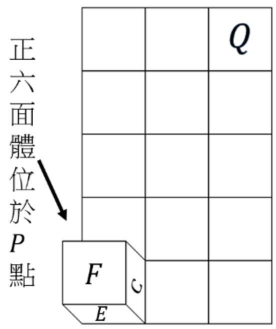


圖 6-1-2

3. 需特定兩面分別朝前及朝下之兩方格滾動步數

承 2，若考慮正六面體朝下及朝前的面，則共有24種組合。當$(\Delta x,\Delta y)=(4,5)$時，如圖 6-1-3，由$P$滾至$Q$最短路徑的126種中，即包含前述的 24 種組合。

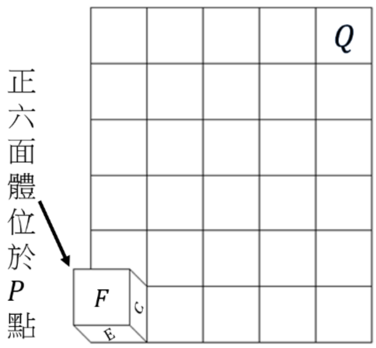


圖 6-1-3

綜合上述 1、2、3，整理為以下性質：

> 性質 3 已知$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，並令$\Delta x=|x_2-x_1|$、$\Delta y=|y_2-y_1|$。
> 若由P滾至Q且以最短路徑滾動，即$\overline{PQ}=\Delta x+\Delta y$，則：
> ①當$\Delta x,\Delta y\geq 2$且$\Delta x\times\Delta y\geq 8$時，正六面體可任意指定面朝下。
> ②當$\Delta x,\Delta y\geq 4$且$\Delta x\times\Delta y\geq 20$時，正六面體可任意指定兩面分別朝前及朝下。

由此可知，若正六面體及六塊色漆的初始位置兩兩之間皆符合$\boxed{\text{性質 3}}$的①時，則其最短路徑即七點的最短路徑(前述$\boxed{\text{定理 3-2}}$即五點的最短路徑)；若其中有一段以上的路徑不符合$\boxed{\text{性質 3}}$的①時，則需再考量各路徑是否符合$\boxed{\text{性質 3}}$的②，由於此情形較為複雜且篇幅有限，故在此不再做更詳細的討論。

二、 正八面體

對於「正八面體」的研究，由於底圖與正四面體同為三角網格，其於「△」、「▽」上可滾動的方向亦與正四面體相同，因此我們依此特性繼續往下探討。

- **正八面體色漆初始位置與有無解關係**

正多面體的各面與底圖網格是否有對應關係一直是此篇研究的重點，在探討正八面體時，使用研究正四面體的方法，將其各面依序標上A至H，如圖 6-2-1。

如圖 6-2-2 為由底圖擷取的部分三角網格，若將圖 6-2-1 與 6-2-2 的紅色頂點重合，並依順時針方向滾動正八面體，則可發現「A,E」兩面只會與「△」接觸，「B,H」兩面則只會與「▽」接觸，如圖 6-2-2 所標示，將此結果延伸至整個底圖網格，可完整推論出正八面體各面與網格的對應關係為「A,C,E,G」對應「△」，「B,D,F,H」對應「▽」。

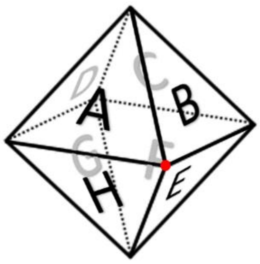


圖 6-2-1

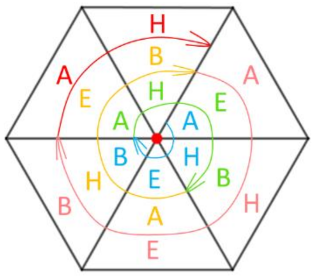


圖 6-2-2

按照上述結果，正八面體的有無解情形可由以下來描述：

> $\boxed{\text{定理 4}}$當遊戲滿足下列所有情形時，則此題有解，反之則無解。
>
> ①「正八面體」位於任意位置。
>
> ②「八塊色漆」恰分別落在4個「△」及4個「▽」上。

正八面體的研究到此，其滾動路徑及規律雖與正四面體相似，但因面數較多且各面與網格並無一一對應關係，故無繼續進行最短路徑長的計算，本篇作品便也在此結束，以下將「正四面體、正六面體、正八面體」的所有研究結果統整為結論。

柒、研究結論

一、正四面體色漆初始位置與有無解關係：

當四塊色漆位置恰分別落在標記A, B, C, D之方格，則此情形必有解。

二、正四面體在任兩方格間最少滾動步數(距離)：

假設兩方格為$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，且定義$\Delta x = |x_2 - x_1|$、$\Delta y = |y_2 - y_1|$。

(一) 若$\Delta x \geq \Delta y$，則$\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y$。

(二) 當$\Delta x < \Delta y$：

1. 若$\Delta x + \Delta y$為偶數，則$\overline{PQ} = 2\Delta y$。

2. 當$\Delta x + \Delta y$為奇數：

(1) 若「$y_1 > y_2$且P為△」或「$y_1 < y_2$且P為▽」，則$\overline{PQ} = 2\Delta y - 1$。

(2) 若「$y_1 > y_2$且P為▽」或「$y_1 < y_2$且P為△」，則$\overline{PQ} = 2\Delta y + 1$。

三、正四面體在不考慮回黏條件下之最短路徑長：

(一) 將任兩點距離以表格型式紀錄，並由$\boxed{\text{定理 3-1}}$、$\boxed{\text{定理 3-2}}$可得最短路徑長。

(二) 因手動計算較慢，故另寫$Python$程式輔助，如參考資料三。

四、正四面體在任兩方格間滾動所經$\boldsymbol{A, B, C, D}$之個數：

(一) 當$\Delta x \geq \Delta y$，如表 5-5-1。

(二) 當$\Delta x < \Delta y$，如表 5-5-2、表 5-5-3。

五、正四面體在考慮回黏條件下的最短路徑長之修正：

(一) **當正四面體由起始點滾至第一塊色漆：**

$$\overline{\overline{PQ}} = \overline{PQ} = W$$

(二) **當正四面體由第一塊色漆滾至第二塊色漆：**

$$\overline{\overline{PQ}} = W + 2 \times (\text{與}P\text{相同之格數})$$

(三) **當正四面體由第二塊色漆(P)滾至第三塊色漆(Q)：**

①當$\Delta x < \Delta y$，如表 5-7-1　②當$\Delta x = \Delta y$，如表 5-7-2　③當$\Delta x > \Delta y$，如表 5-7-3

(四) **當正四面體由第三塊色漆(P)滾至第四塊色漆(Q)：**

①當$\Delta x < \Delta y$，如表 5-7-4　②當$\Delta x = \Delta y$，如表 5-7-5　③當$\Delta x > \Delta y$，如表 5-7-6

六、**正六面體在考慮回黏條件下的最小有解之底圖尺寸：**

底圖網格為2×3時即有解，且發現最短步數解為15步。

七、**正六面體在任兩方格間最少滾動步數(距離)：**

假設兩方格為$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，且定義$\Delta x = |x_2 - x_1|$、$\Delta y = |y_2 - y_1|$。

(一) 當單純考慮任兩方格間滾動步數：$\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y$。

(二) 需特定面朝下之兩方格滾動步數：

若$\Delta x, \Delta y \geq 2$且$\Delta x \times \Delta y \geq 8$時，則可任意指定面朝下，且$\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y$。

(三) 需特定兩面分別朝前及朝下之兩方格滾動步數：

若$\Delta x, \Delta y \geq 4$且$\Delta x \times \Delta y \geq 20$時，則可指定兩面朝前及朝下，且$\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y$。

八、**正八面體色漆初始位置與有無解關係：**

當八塊色漆恰分別落在4個「△」及4個「▽」上時，則此情形必有解。

捌、未來展望

此作品對於原數學遊戲中「正四面體」的滾動做了詳細的分析與研究，但對於作品後半部將回黏問題加入修正最短路徑長時，所得出的各項公式非常繁瑣，若輔以設計程式方能加速計算結果，未來希望能將之整合得更加完善。

最後的延伸討論，對於「正六面體」、「正八面體」的研究目前相對較少，且若將回黏步數計算在最短路徑長內時，所牽涉到的問題更為複雜，因此在最佳路徑的選擇以及最短路徑長的證明皆為未來研究方向。此外，柏拉圖多面體尚有「正十二面體」及「正二十面體」，其皆為之後能夠繼續發展的子題目。

玖、參考資料

一、柏拉圖多面體

(https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid)。

二、國中數學第六冊第二章立體圖形。

三、*Welcome to Python.org*

(https://drive.google.com/file/d/1-PIj9bKGKdA62Z9W_JbZ-HMOCp222bul/view?usp=sharing).

四、*Simon Tatham's Portable Puzzle Collection*

(https://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/puzzles/js/cube.html).

【評語】030410

在某四個格子有塗上顏色的正三角形網格棋盤上放置一個四面都沒有顏色的正四面體，讓四面體在棋盤上滾動。當四面體的某一面滾過一個上色的格子時，此格子的顏色會消失，顏色會轉印到四面體的這一面。反之，如果四面體的某一面是已經被上色了，當它滾過某一個沒有顏色的格子時，這一面的顏色會消失，而顏色會轉印到這個格子上。在什麼條件下可以順利的讓四面體的四面都上色？如果可以順利的完成，滾動的最少次數是多少？這是由網路上的一個遊戲所引發的一個有趣的問題。作者們先計算了由棋盤上某一點出發，經過特定的一些點的最少滾動次數，再進一步分析當四面體在滾動過程中，如果某些面已經有了顏色，這一面在滾過沒有顏色的格子時，滾動的步數應該如何修正。透過這兩個步驟的分析，對於最少滾動的次數給出了一些結論。文中分析問題的手法十分的適切，說理也很清楚，非常難得。如果在正六面體、正八面體的情況有更清楚的說明，則作品會更完整。

作品簡報

2021

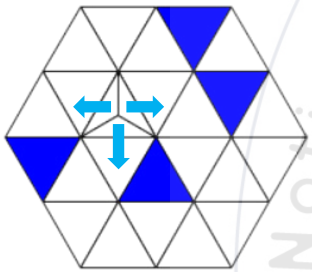
國中組

數學科

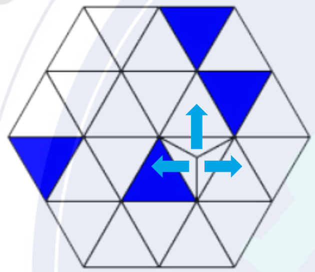
漆步之遙

正四面體－遊戲介紹

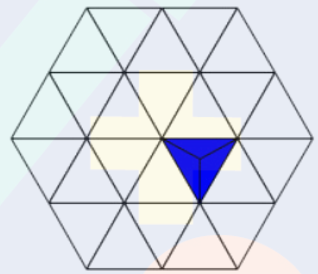
- 開局時，將於**<u>隨機位置</u>**出現「正四面體x1、色漆x4」。
- 〔過關條件〕透過滾動將所有色漆黏於正四面體上。
- 〔關卡有解〕當關卡能滿足過關條件，稱此關有解。



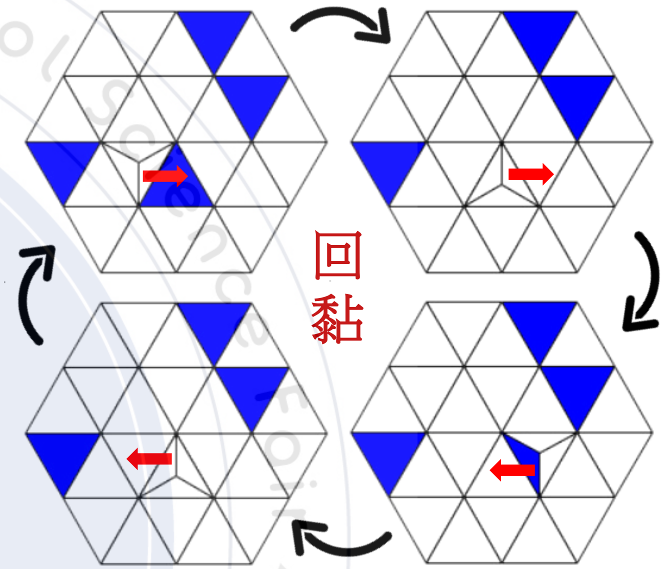
位於△上



位於▽上

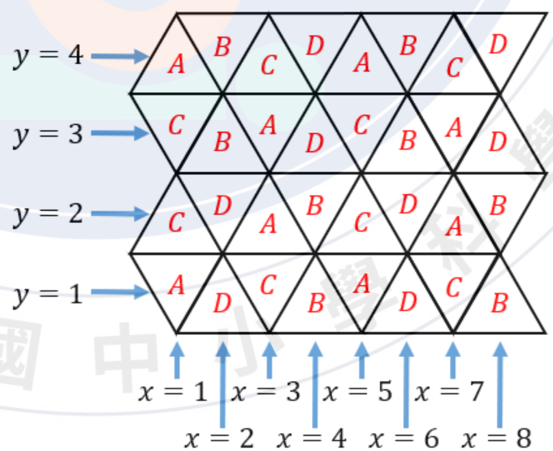


過關



正四面體－定義底圖網格坐標

- **正四面體**各面分別標上A, B, C, D。
  - 將A面朝下、置於(1,1)。
  - 網格標記A, B, C, D。
  - 三角轉換為方形網格。



	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$y=6$	C	D	A	B	C	D
$y=5$	A	D	C	B	A	D
$y=4$	A	B	C	D	A	B
$y=3$	C	B	A	D	C	B
$y=2$	C	D	A	B	C	D
$y=1$	A	D	C	B	A	D

正四面體－滾動路徑及有無解情形

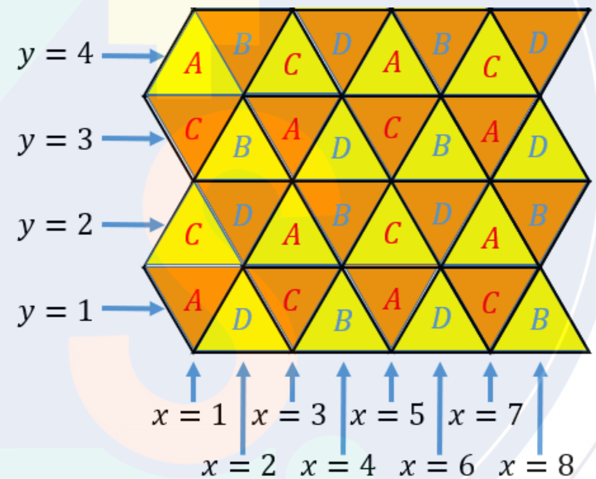
定理 1

當遊戲滿足下列所有情形時，則此關有解，反之則無解。

(1)「正四面體」位於任意位置。

(2)「四塊色漆」恰分別落在標有A, B, C, D之網格。

$x+y\ (mod4)$ \ x	1、2	0、3	1、3	2、4
奇數	A	C	▲	▼
偶數	B	D		



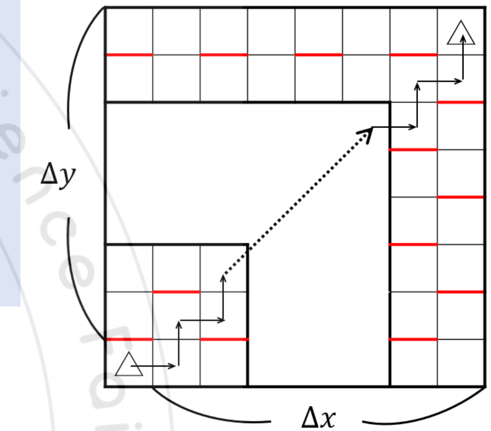
定理 2

已知$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，並定義$\Delta x = |x_2 - x_1|$、$\Delta y = |y_2 - y_1|$。

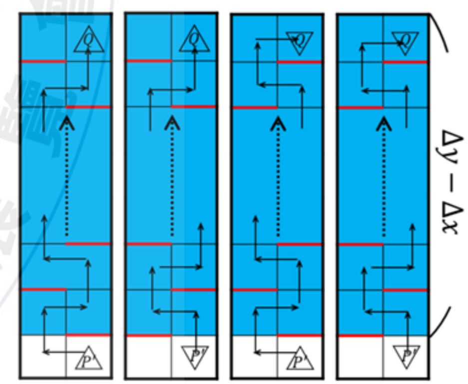
(1) 若$\Delta x \geq \Delta y$，則$\overline{PQ} = \Delta x + \Delta y$。

(2) 若$\Delta x < \Delta y$，則$\overline{PQ} = 2\Delta y$或$2\Delta y \pm 1$。

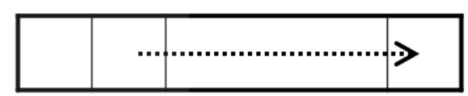
階梯狀滾法



垂直上升滾法



水平移動滾法



正四面體－不回黏之最短路徑長

定理 3-1

若以O點為起點，過P、Q、R之最短路徑長為O_{min}。

設$O_1=\{\overline{PO},\overline{QO},\overline{RO}\}, O_2=\{\overline{PQ}+\overline{PR},\overline{QP}+\overline{QR},\overline{RP}+\overline{RQ}\}$

$$O_{min}=\begin{cases} min(O_1)+min(O_2) \ldots\ldots ① \\ min\big(min(O_1)+med(O_2), med(O_1)+min(O_2)\big) \ldots\ldots ② \end{cases}$$

①：若O_1中最小線段與O_2中最小和之兩線段不共點。

②：若非情況①，則為情況②。

其中，「min」為取最小值，「med」為取中位數。

定理 3-2

若以O點為起點，過P、Q、R、S之最短路徑長為O_{min}。

根據定理3-1，可得$P_{min}, Q_{min}, R_{min}, S_{min}$，則：

$$O_{min}=min(\overline{OP}+P_{min},\overline{OQ}+Q_{min},\overline{OR}+R_{min},\overline{OS}+S_{min})$$

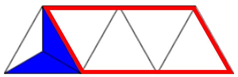
	P	Q	R
O	$\overline{OP}$	$\overline{OQ}$	$\overline{OR}$
P		$\overline{QP}$	$\overline{RP}$
Q	$\overline{PQ}$		$\overline{RQ}$
R	$\overline{PR}$	$\overline{QR}$	

	P	Q	R
O	5	3	4
P		4	3
Q	4		1
R	3	1	

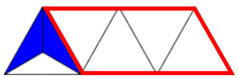
【範例】最短路徑長= 7

正四面體－色漆分布圖

- 以**符號**表示色漆分布情形。



➡ □□○○



➡ □○□○

符號	對應面	對應底圖
○	X	X
□	V	X
●	X	V

- $\overline{PQ}$：由P至Q，不回黏的最短滾動步數。
- $\overline{\overline{PQ}}$：由P至Q，含回黏的最短滾動步數。

相連較不相連「省兩步」

色漆數	1	2 (相連)	2 (不相連)	3
色漆分布圖	□○○○	□□○○	□○□○	□□□○
步數圖	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8
$\overline{\overline{PQ}}$	6	6	8	8

正四面體－滾動路徑規律

- 水平相鄰兩方格皆為固定組合：

(1) 方向為↗： (A,B)、(C,D)。

(2) 方向為↘： (A,D)、(B,C)。

- $\overline{\boldsymbol{DCAB}}$：依$D,C,A,B$規律循環。
- $\overline{□□□○}$：依□,□,□,○規律循環。

D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B

$\overline{DCAB}$

□□□○

D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B

$\overline{DACB}$

□□□○

正四面體－滾動路徑之A, B, C, D個數

- 已知$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$。
- P_1, P_2, P_3依序為路徑所經之前三格。

一、當$\Delta x \geq \Delta y$：

$$(\overline{PQ}+1) \div 4 = M \ldots N$$

A, B, C, D個數		
$N=0$	P、Q同組	各M個
	P、P_2異組	各M個
$N=1$	P、Q同組	各M個，Q加1個
	P、P_2異組	各M個，P加1個
$N=2$	P、Q同組	各M個 P、Q各加1個
$N=3$	P、Q同組	各M個 P、P_2、Q各加1個
	P、P_2異組	各M個 P、P_2、P_3各加1個

二、當$\Delta x < \Delta y$：

第一階段：階梯狀滾法	
Δx為奇數	Δx為偶數
各$\frac{\Delta x-1}{2}$個，P_1, P_2加1個。	各$\frac{\Delta x}{2}$個。

第二階段：垂直向上滾法		
	P為△	P為▽
Q為△	各$\frac{U}{2}$個。 $(U = \Delta y - \Delta x)$	各$\frac{U-1}{2}$個，Q加1個。
Q為▽	$U \equiv 1\ (mod4)$： 各$\frac{U+1}{2}$個，P_1減1個。 $U \equiv 3\ (mod4)$： 各$\frac{U+1}{2}$個，Q減1個。	$U \equiv 0\ (mod4)$： 各$\frac{U}{2}$個。 $U \equiv 2\ (mod4)$： 各$\frac{U}{2}$個，P'減1個，Q加1個。

正四面體－含回黏之最短路徑長

一、由起始點(P)滾至第一塊色漆(Q)

$$\overline{\overline{PQ}} = \overline{PQ}$$

二、由第一塊(P)滾至第二塊色漆(Q)

$$\overline{\overline{PQ}} = \overline{PQ} + 2\times(\text{與}P\text{相同之格數})$$

三、由第二塊(P)滾至第三塊色漆(Q)

- 假設每步皆回黏，故訂$\overline{PQ}$基準為$2\overline{PQ}$。

$\Delta x,\Delta y$	P	Q	○位置	●位置	Δx	$\overline{\overline{PQ}}$
$\Delta x<\Delta y$	△	△	○○□□	●○□□	奇數	公式
				○●□□		
$\Delta x=\Delta y$			○□○□	●□○□		
	▽	▽		○□●□	偶數	
$\Delta x>\Delta y$			□○○□	□●○□		
				□○●□		

【範例1】$\Delta x>\Delta y$ (A,C面有色漆)

	C	D	A	B	$\boxed{C}$	D	$\boxed{A}$	B	$\boxed{C}$	D → Q
	A	D	C	B	$\boxed{A}$	D	C	B	A	D
	A	B	$\boxed{C}$	D	A	B	C	D	A	B
	C	B	$\boxed{A}$	D	C	B	A	D	C	B
P ←	$\boxed{C}$	D	A	B	C	D	A	B	C	D

$$\overline{\overline{PQ}} = 2\overline{PQ} + \left(-2\times\frac{2\Delta y}{4}\right) - 1 = 2\Delta x + \Delta y - 1$$

【範例2】$\Delta x=\Delta y$

(A,C面有色漆)

	A	D	C	B	A	D → Q
	A	B	C	D	$\boxed{A}$	B
	C	B	A	D	$\boxed{C}$	B
	C	D	$\boxed{A}$	B	C	D
	A	D	$\boxed{C}$	B	A	D
P ←	$\boxed{A}$	B	C	D	A	B

$$\overline{\overline{PQ}} = 2\overline{PQ} - 2 + \left(-2\times\frac{\overline{PQ}-2}{4}\right) = 3\Delta x - 1\text{或}3\Delta y - 1$$

正四面體－含回黏之最短路徑長

四、由第三塊(P)滾至第四塊色漆(Q)

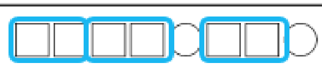
- 假設每步皆回黏，故訂$\overline{\overline{PQ}}$基準為$2\overline{PQ}$。

$\Delta x, \Delta y$	P	Q	○位置	Δx	$\overline{\overline{PQ}}$
$\Delta x < \Delta y$	△	△	$P_1(P_1')$	奇數	公式
$\Delta x = \Delta y$			$P_2(P_2')$	偶數	
$\Delta x > \Delta y$	▽	▽	$P_3(P_3')$		

- 當$\Delta x > \Delta y$，「右三上一滾法」每循環**省兩步**。

A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B

$\overline{ADCABCDB}$



【範例3】$\Delta x > \Delta y$ (A, C, D面有色漆)

A	B	C	D	A	B	C	D	$\boxed{A}$	B
C	B	A	D	C	B	A	$\boxed{D}$	$\boxed{C}$	B
C	D	A	B	C	D	$\boxed{A}$	B	C	D
A	D	C	B	$\boxed{A}$	$\boxed{D}$	$\boxed{C}$	B	A	D
$\boxed{A}$	B	$\boxed{C}$	$\boxed{D}$	A	B	C	D	A	B

P → Q

$$\overline{\overline{PQ}} = 2\overline{PQ} \times \left(-2 \times \frac{\Delta x - \Delta y + 1}{4}\right) - 1 = \frac{3\Delta x + 5\Delta y - 3}{2}$$

總結

若「最短路徑」為$O \to P \to Q \to R \to S$，則：

(1) 最短路徑長$= \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS}$

(2) 修正最短路徑長$= \overline{\overline{OP}} + \overline{\overline{PQ}} + \overline{\overline{QR}} + \overline{\overline{RS}}$

正四面體－範例演示

12	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
11	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
10	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
9	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
8	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
7	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
6	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
5	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
4	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
3	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D
2	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
1	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

	坐標	A	B	C	D
O	(8,5)	5	7	10	7
A	(11,3)	-	8	13	12
B	(4,2)	8	-	15	8
C	(9,10)	13	15	-	11
D	(2,6)	12	8	11	-

① 不回黏最短步數

「 32 步 」

② 含回黏最短步數

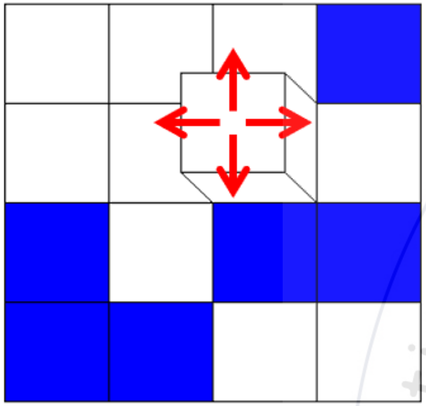
「 **48 步** 」

①
$$\begin{cases} A_{min} + 5 = 32 \\ B_{min} + 7 = 38 \\ C_{min} + 10 = 37 \\ D_{min} + 7 = 36 \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} \overline{\overline{OA}} = \overline{OA} = \mathbf{5} \\ \overline{\overline{AB}} = \overline{AB} + 1 \times 2 = \mathbf{10} \\ \overline{\overline{BD}} = \frac{2+7\times4-2}{2} = \mathbf{14} \\ \overline{\overline{DC}} = \frac{7\times7+7\times4-1}{4} = \mathbf{19} \end{cases}$$

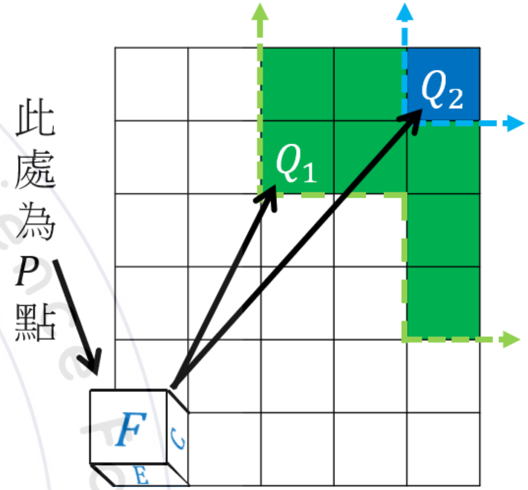
	P	Q	○	●	Δx	色漆分布圖	$\overline{\overline{PQ}}$ $(W = \overline{PQ})$
$\overline{\overline{BD}}$	▽	▽	$\overline{○□○□}$	$\overline{●□○□}$	偶數	$\overline{○□○□}$ $\overline{○○□○□□○□}$○○□○	$\frac{\Delta x + 7\Delta y - 2}{2}$
$\overline{\overline{DC}}$	▽	△	P_3'	-	-	□□○$\overline{□□□□○□□○}$	$\frac{7\Delta x + 7\Delta y - 1}{4}$

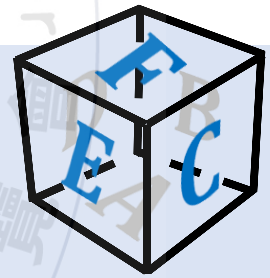
正六面體－滾動路徑及最短路徑長



- 當$(\Delta x,\Delta y)=(2,4)$，可選特定一面朝下。
- 當$(\Delta x,\Delta y)=(4,5)$，可選特定二面朝前與下。
- 當$(\Delta x,\Delta y)=(2,4)$，各面壓至$Q_1$之次數如下：

朝下面	A	B	C	D	E	F
路徑數	5	2	2	1	1	4





性質 3

已知$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，並令$\Delta x=|x_2-x_1|$、$\Delta y=|y_2-y_1|$。

若由P滾至Q且以最短路徑滾動，即$\overline{PQ}=\Delta x+\Delta y$，則：

(1) 當$(\Delta x,\Delta y)\geq 2$、$\Delta x\times\Delta y\geq 8$且$(\Delta x,\Delta y)\neq(3,3)$，正六面體可任意選定一面朝下。

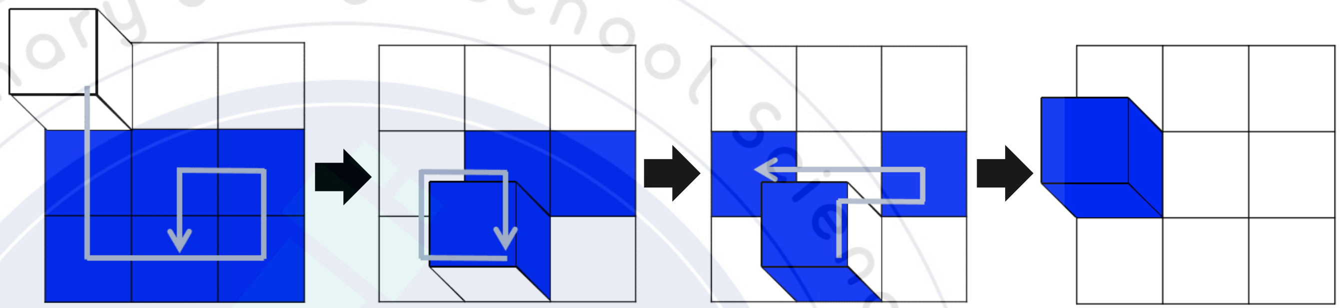
(2) 當$(\Delta x,\Delta y)\geq 4$且$\Delta x\times\Delta y\geq 20$，正六面體可任意選定二面分別朝前及朝下。

- 若任意兩色漆皆符合性質3之(1)時，則**最短路徑**即為「七點的最短路徑」。
- 若任意兩色漆有不符合性質3之(1)者，則**最短路徑**需搭配性質3之(2)做調整。

正六面體－含回黏之底圖最小有解尺寸

- 底圖尺寸**2 × 3**即有解。
- 最短步數推測為**15步**。

「色漆在任意位置皆有解」

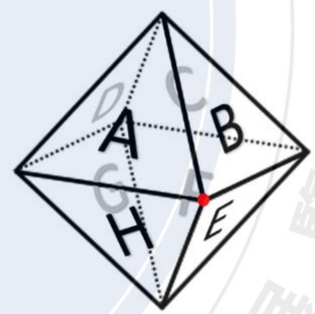


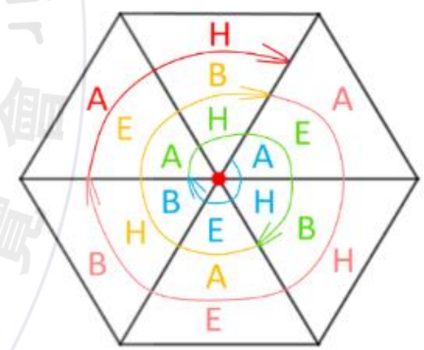
正八面體－滾動路徑及有無解情形

- 若將右列兩圖紅色頂點重合，並依順時針方向滾動，則：

(1)「$A, E, (C, G)$」只落在「△」上。

(2)「$B, H, (D, F)$」只落在「▽」上。





定理 4

當遊戲滿足下列所有情形時，則此關有解，反之則無解。

(1)「正八面體」位於任意位置。

(2)「八塊色漆」恰分別落在4個「△」及4個「▽」上。

未來展望

- **「柏拉圖多面體」**

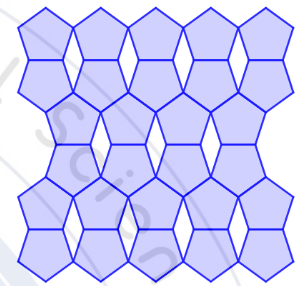
  (1) 正四面體：完成所有回黏公式的一般化。

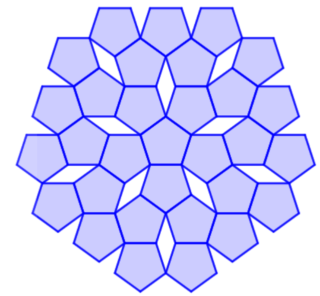
  (2) 正六面體：最佳路徑選擇、回黏公式計算為後續方向。

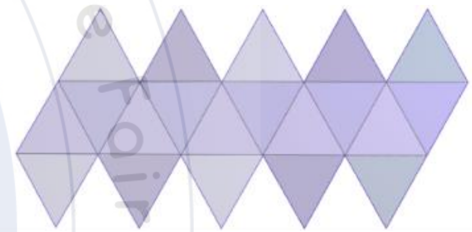
  (3) 正八面體：各面與底圖有半對應關係，滾動規律尚未完整。

  (4) 正十二面體：雖其底圖<u>無法密鋪</u>，但仍可依規律排列。

  (5) 正二十面體：底圖與正四面體、正八面體同為「三角網格」。







參考資料

- 柏拉圖多面體
  (https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid)。
- Simon Tatham’s Portable Puzzle Collection
  (https://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/puzzles/js/cube.html).
- Euler and Hamiltonian Paths and Circuits
  (https://courses.lumenlearning.com/math4liberalarts/chapter/introduction-euler-paths).