中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030409

原來社交距離可以這樣排

學校名稱：金門縣立金寧國民中學

作者：	指導老師：
國二 楊于萱	楊逸宣
國二 許芷綺	許汎穎

關鍵詞：二維空間與三維空間、最密堆積、優化

摘要

因應疫情，為了知道社交距離在矩形裡可以怎麼排最多人，我們先從面積小的矩形範圍去排，試過正方形排列、三角形排列等方法，試著從中找出最密排列的規律，接著再慢慢的把矩形加長加寬，使面積加大，試著用不同的排列方式去堆疊，最後可以依照條件去計算任意矩形，使用推移法、補隙法等，得到優化緊密度的方法。

壹、前言

一、研究動機

2020 年新冠疫情緊繃，社交距離已成生活中相當常見的日常用詞。我們在 FACEBOOK「數感實驗室」看見一篇文章。**[參 1]**

該內文以「7 個人形成一個正六邊形」去估算，並結論出示政府估算的 4 萬人太多，我們好奇，這就是最緊密的排列方式嗎？是不是利用正三角形在任何情況下都能最緊密排列？如果不是那又要怎麼排列呢？

二、文獻探討

文獻 1.2.1. 黎哲豪/陳藹然。 [參 2]

該文章對於高中範圍化學晶體結構的敘述提到，礦物晶體分子結構便是由穩定重複堆疊來構成，常見堆疊方式如簡單立方、體心立方、面心立方與六方堆積等，其中面心立方與六方堆積同為「最密堆積」，皆擁有最高的堆積緊密度。

文獻 1.2.2. 俞韋亘。 [參 3]

該文章提到球體裝填問題是離散幾何領域的一個古老且經典的難題。每個圓旁邊都有六個相同大小的圓相鄰，如果把它們的球心連起來，看起來就像是個正六邊形，數學家於 1940 年已證明了這樣的六角形堆積就是平面上的最密堆積方式。球體裝填問題在三維空間是 1611 年的克卜勒猜想，1998 年運用了大量的電腦輔助來驗證，2014 年才完成了克卜勒猜想的形式化證明。

三、名詞定義

為了研究進行，以下為使用名詞定義。

定義 1.3.1. 穩定排列：固定的單位圖形進行重覆排列。

定義 1.3.2. 緊密效率：每增加單位長，圖形所增加的點數，即增點數除以增點單位長。

定義 1.3.3. 優化：在相同矩形長寬下，可放置點數較多者稱為優化。

定義 1.3.4. 優化程度：即可放置點數÷矩形面積的結果。

定義 1.3.5. 最佳優化：若在一定條件下有 n 種優化排列，增點式分別為 $P_1, P_2, \dots, P_n$，則滿足 $P_k \geq max\{P_1, P_2, \dots, P_n\}\ (1 \leq k \leq n)$ 者符合最佳優化。

定義 1.3.6. 置換：原本穩定排列中的圖形換成其他圖形。

例子 1.3.7. 延伸置換：將原本圖形延伸，直到內部可置新點。

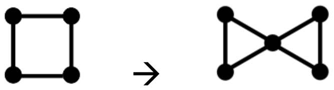


圖 1.3.8. 正方形延伸置換成蝴蝶結形

例子 1.3.9. 推移置換：讓某些點往相同方向移動。

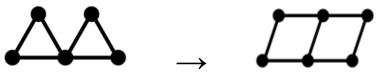


圖 1.3.10. 橫正三角推移置換成平行四邊形

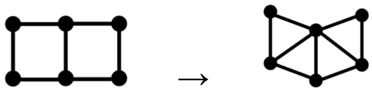


圖 1.3.11. 正方形推移置換成平行四邊形

定義 1.3.12. 最密穩定排列：給定一矩形範圍，能排入最多點的穩定排列方式。

四、研究目的

（一）在 1×n 矩形範圍內、點與點距離不小於 1 儘可能優化放入最多點的排列方式

（二）在 w×n 矩形範圍內、點與點距離不小於 1 儘可能優化放入最多點的排列方式

（三）建立計算模型以計算 w×n 矩形範圍內的優化過程與點的數量

五、研究架構

我們使用網路搜尋相關問題，發現許多問題都導向「克卜勒猜想」，是關於在三維空間中相同球體堆疊的最佳緊密方式，是面心立方與六方最密堆積。而若是二維的情形，也就是在一個平面（無邊界）上，圓心（點）與圓心（點）之間則是以正三角形方式排列是最密排列方式。如圖 1.5.1。

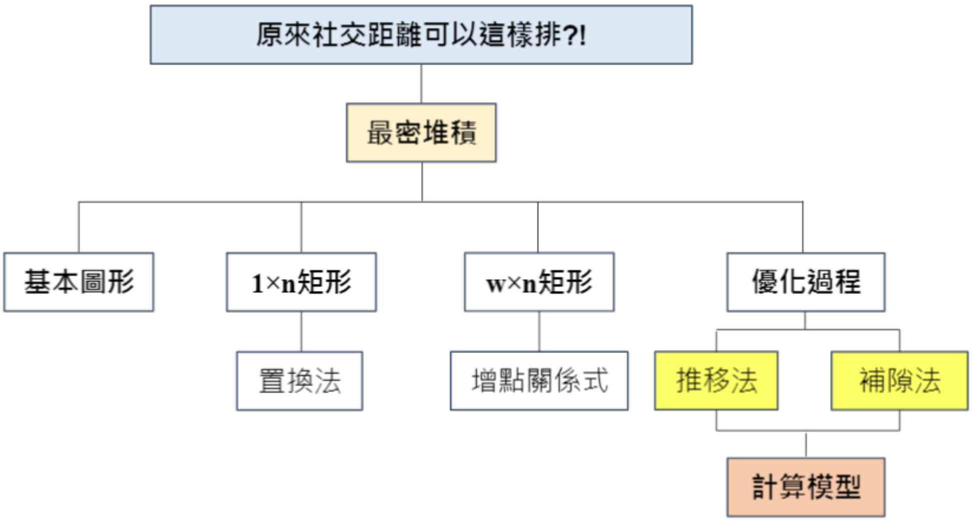


圖 1.5.1

貳、研究過程

一、基本圖形

研究過程一開始，為了從小範圍的點排列去思考，先考慮「三個點」之間的關係。三個點最緊密的排列方式呈現正三角形，但若受矩形長寬範圍限制，正三角形就可能得變形，以便增加點的緊密度。

故我們將會遇到的三角形排列分為以下四類，此四類能由簡單的圓規作圖畫出，且能重複排列與堆疊以填滿二維平面。

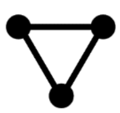
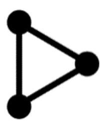
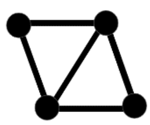
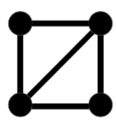
横正三角	直正三角	平行四邊形(簾幕)	正方形
			

圖 2.1.1

二、1×*n* 矩形

讓我們先討論 1×*n* 矩形。

（一）圓規置點

如圖 2.2.1，以 1×1、1×2、1×3 示例。

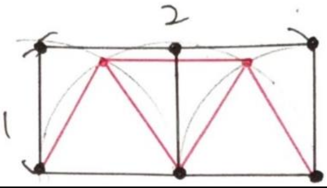
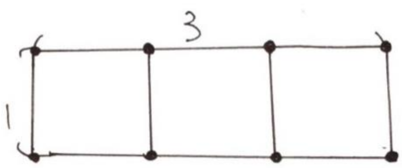
範圍	1×1	1×2	1×3
圖示			

圖 2.2.1

在考慮圖 2.2.1 中，利用圓規置點可發現 1×1 可置 4 點、1×2 可置 6 點、1×3 可置 8 點（見圖中黑點），以上置點方式符合正方排列。

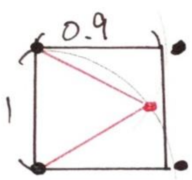
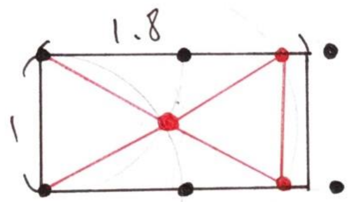
範圍	1×0.9	1×1.8
圖示		

圖 2.2.2

圖 2.2.2 中，若想使用正方排列，則 1×0.9 只可置 2 點、1×1.8 只可置 4 點（見圖中黑點）。若改用直正三角排列，需先注意直正三角所佔橫向長度，如圖 2.2.3。

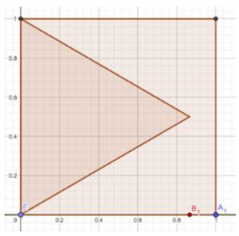


圖 2.2.3

（二）從最少點開始考慮最佳置點

考慮，1 × *n* 矩形，如圖 2.2.4。

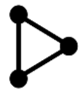
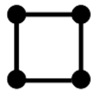
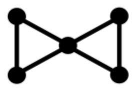
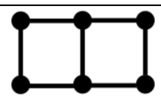
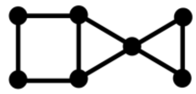
置點情形	圖示
1. 在 n＝0 即可置 2 點。	
2. 在 n＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 即可置 3 點。	
3. 在 n＝1 即可置 4 點。	
4. 在 n＝$\sqrt{3}$ 即可置 5 點。	
5. 在 n＝2 即可置 6 點。	
6. 在 n＝1＋$\sqrt{3}$ 即可置 7 點。	

圖 2.2.4

如圖 2.2.4，若 n 不是整數，使用正方排列會在右方留下空隙。若此空隙橫長不小於 $(\sqrt{3}-1)$，就可以把末端一個正方形延伸成橫長為 $\sqrt{3}$ 的矩形，使得內部剛好足以額外增加 1 點。

（三）緊密效率

依定義 1.3.2，緊密效率越高，越適合作為優化排列，如圖 2.2.5。

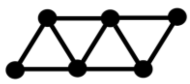
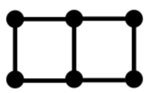
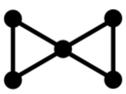
排列方式	緊密效率=每單位增點數÷增點單位長
鋸齒排列 	增點單位長：$\frac{1}{2}$ 每單位增點數：1 緊密效率：2
正方排列 	增點單位長：1 每單位增點數：2 緊密效率：2
蝴蝶結排列 	增點單位長：$\sqrt{3}$ 每單位增點數：3 緊密效率：$\sqrt{3} \approx 1.732$

圖 2.2.5

可看出蝴蝶結緊密效率最低，正方與鋸齒效率相同，而在 n 相同時，正方形排列又比鋸齒排列多置 1 點，所以對於 $1\times n$ 的矩形，正方形理論上是最緊密的穩定排列方式，而在滿足延伸置換可行的條件下，就可以使用直正三角或蝴蝶結。

（四）置換：對於 $1\times n$ 矩形

1. n 是整數時 ，以正方形排列最有效率，如圖 2.2.6。

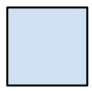
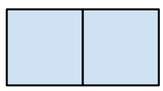
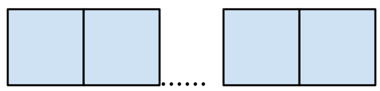
n	圖示	點的數量 p
0		2
1		4
2		6
n		2n+2

圖 2.2.6

2. n 是非整數時的置換，如圖 2.2.7。

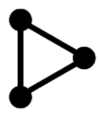
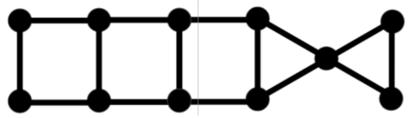
說明	圖示
(1) 當 $\frac{\sqrt{3}}{2}\le n<1$時，採用直正三角（半蝴蝶結）。	
(2) 當 $\sqrt{3}+k\le n<2+k$，k是非負整數時，末端正方形延伸置換成蝴蝶結。	

圖 2.2.7

對於 $1\times n$ 矩形，n 在非負數範圍排列，如圖 2.2.8。

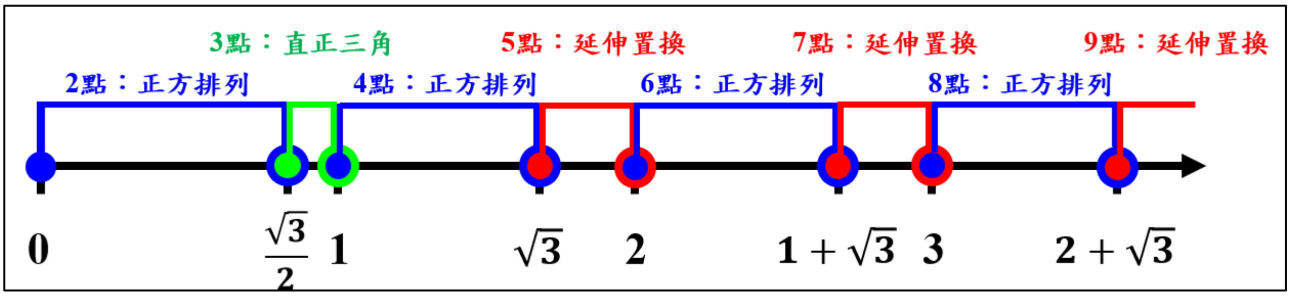


圖 2.2.8

（五）判斷此法即最佳緊密排列

以上圖 2.2.8 是由觀察歸納所得，而我們想確定這就是最緊密情形。以下依圖中藍色部分、綠色部分與紅色部分分類討論。

定理 2.2.9.(藍色部分)

對於 $1\times n$ 矩形，n 是任意正整數，則最密點數 $P(n)=2n+2$，且以正方排列最佳。

證明. 數學歸納法：

(1) 當 $n=1$ 時，利用圓規置點可增 4 點但無法增 5 點，得 $P(1)=4$，此時為正方排列。

(2) 設 $n=k$ 時，使用正方排列最佳，且 $P(k)=2k+2$。當 $n=k+1$ 時，將矩形分成 $1\times k$ 及 1×1 兩塊。$1\times k$ 矩形以正方排列最佳，此時剩下的 1×1 矩形因條件限制可增 2 點但無法增 3 點。得 $P(k+1)=2k+4=2(k+1)+2$，仍以正方排列最佳。 ■

定理 2.2.10. (綠色部分)

對於 $1\times n$ 矩形，若 $\frac{\sqrt{3}}{2}\le n<1$，則最密點數為 3，為直正三角排列。

證明. 利用圓規置點，在 n 小於 1 情況下無法放置四點，故最大值為 3。 ■

定理 2.2.11. (紅色部分)

對於 $1\times n$ 矩形，若 $n=(m-1)+\sqrt{3}$，m 是任意正整數，則最密點數為 $P(m)=2m+3$，且以正方排列加一蝴蝶結置換最佳。

證明. 使用數學歸納法：

(1) 當 $m = 1$ 時，利用圓規置點得 $P(1) = 5$，此時為一蝴蝶結形。

(2) 設 $m = k$ 時，$P(k) = 2k + 3$。當 $m = k + 1$ 時，將矩形分成 $1 \times k$ 及 $1 \times \sqrt{3}$ 兩塊。由定理 2.2.9 可知 $1 \times k$ 矩形以正方排列最佳，點數為 $2k + 2$。剩餘 $1 \times \sqrt{3}$ 矩形因條件限制，可增 3 點而無法增 4 點，故 $P(k + 1) = 2k + 2 + 3 = 2(k + 1) + 3$。此時圖形為正方排列加上末端一蝴蝶結置換。 ■

在 1×n 矩形範圍內，以正方排列為最密穩定排列、以直正三角或延伸置換作優化。特別的是，延伸置換可想成是延伸形式的推移，因為一個沙漏經橫向推移可變成正方形，而推移是可還原的過程，故正方形亦可橫向推移成沙漏；同理，一個蝴蝶結經直向推移可變成正方形，故正方形亦可直向推移成蝴蝶結，此時，對於 1xn 矩形最佳排列及定理 2.2.11.最佳排列中所出現的「延伸置換」，即可歸類為推移的其中一型，之後稱為「延伸推移」。接下來分析 w×n 的矩形。

三、*w*×*n* 矩形

（一）基準點與基準線

為了討論方便，之後我們在放置點時統一以最左上角為基準點（第一點），基準點分別向下與向右延伸為縱向與橫向基準線，作排列時均從左上開始往右、往下排列與堆疊。此外設定 n 為橫向長度（橫長）、w 為縱向長度（縱長）。見下圖 2.3.1。

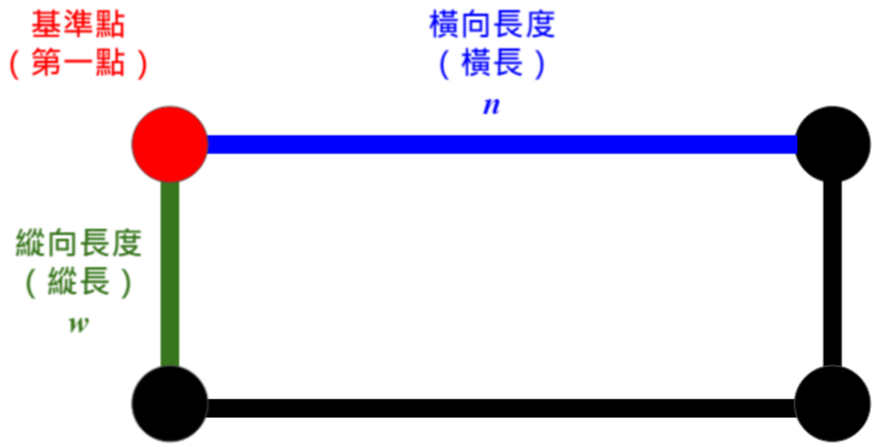


圖 2.3.1

（二）增點關係式與最佳置換

1. 考慮 n 是整數的情形

首先從一開始基本圖形中，我們選擇使用橫正三角與正方形這兩種基本圖形來進行堆疊排列，因為這兩種排列剛好能配合堆疊（n 每增加 1 就能重複增加該基本圖形）。先建立以下定義：

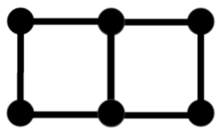
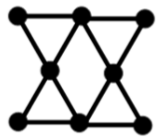
定義 2.3.2. 增點關係式（n 為整數）

總點數 $P(n)$＝緊密效率×n＋起始點數量

其中緊密效率＝排列時每單位(橫長 1)增點數

如下表 2.3.3，將橫正三角分為鋸齒和沙漏，是因為兩者增點關係式形式不同。

表 2.3.3. 三種排列的增點關係式

排列規則（n 是整數）			
排列方式	鋸齒形排列（單層橫正三角）	正方形排列	沙漏形排列（雙層橫正三角）
圖示	 圖 2.3.4	 圖 2.3.5	 圖 2.3.6
緊密程度	最大	次之	最小
單層高度	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	1.000	$\sqrt{3} \approx 1.732$
增點關係式 $p = An + B$	$p = 2n + 1$	$p = 2n + 2$	$p = 3n + 2$
A（緊密效率）	2	2	3
B（起始點數）	1	2	2

2. 利用鋸齒與正方排列進行堆疊

性質 2.3.7. 在 w 不超過一定值（臨界高度）時，最佳排列仍是正方排列。

證明. 設 x 層正方與 $x + 1$ 層鋸齒的總堆疊高度相同

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$

$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 6.4641$ （臨界高度）

總堆疊高度不高於臨界高度時，正方堆疊緊密效率高於鋸齒堆疊，但高於臨界高度後，正方形 7 層（$p = 8n+8$）的高度足以讓鋸齒堆疊 8 層（$p = 9n+5$），鋸齒堆疊效率大於正方堆疊，故正方形層最多只需放 6 層。 ■

定理 2.3.8. 最佳置換層數

在 w 超過臨界高度後，先以鋸齒作為主要排列，再將鋸齒層置換正方層。若剩餘下方空隙高度為 x，則最佳置換層數為 $\left[\frac{x}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$。

證明. 每將一層鋸齒換成正方，總堆疊高度增加 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故取不大於 $x \div (1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的整數便是可置換層數。利用「高斯取底符號」(簡稱高斯符號）**[參 4]**

$[x] =$ 不小於x的最大整數

得最佳置換層數為 $\left[\frac{x}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$ 。 ■

（三）增點關係式與最佳推移

為了考慮 n 是任意數，除了用表 2.3.3 三種排列之外，我們再使用另一種方法。

定理 2.3.9 推移法：若將 m 層橫正三角進行推移，縱向空隙為 x，橫向空隙為 y 且滿足 $y < \frac{1}{2}$，則滿足 $y \geq \sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m})^2}$ 時，推移後可使總點數增加。

證明. 推移 m 層表示要將縱向空隙 x 均分給 m 層，故原本高度為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的橫正三角，會變成高度為 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m}$ 的平行四邊形，如圖 2.3.10。

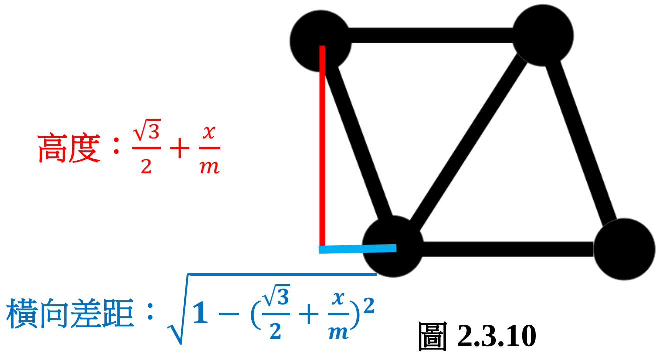


圖 2.3.10

利用畢氏定理可知，此平行四邊形的橫向差距（圖 2.3.10 中的藍色線段）為 $\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m})^2}$ 。因 $y<\frac{1}{2}$，表示原本在橫向空隙中無法用橫正三角置點，但推移為平行四邊形後，$\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m})^2}$ 若不大於 y，則可在橫向空隙中增點。

定理 2.3.11. 最佳推移層數 $E=\left\lfloor\frac{x}{\sqrt{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\rfloor$

證明. 由定理 2.3.9 可知推移層數 m 會受到 x 與 y 的限制，也就是 $y\geq\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m})^2}$，將此不等式進行移項調整得 $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\geq m$ 。所以假設要推移 E 層橫正三角會有最佳緊密度，則 E 要選擇不大於 $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 的最大整數。 ■

定理 2.3.12. 將鋸齒層置換成正方形層的結果是推移法的特例。

證明. (1) 若推移 E 層鋸齒，E 是最佳推移層數，在橫向空隙 x 滿足 $x\geq\frac{2-\sqrt{3}}{2}E$ 條件下，推移後平行四邊形高度$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{E}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}=1$，又橫向推移上限高度便是 1，此時排列為正方排列。

(2) 上一節的定理 2.3.8.最佳置換層數便屬於最佳推移層數的特例：當 y=0 時，最佳推移層數 $E=\left\lfloor\frac{x}{\sqrt{1-0^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\rfloor$ 即等於最佳置換層數。■

對於 n 為任意正數的情形，我們想建立一個能計算各種穩定排列的增點關係式。於是可利用高斯符號來改良定義 2.3.2 的增點關係式：

> **定理 2.3.13. 增點關係式**（對於任意正數 n）
>
> 總點數 $P(n) = [n \div (\text{增點單位長})] \times \text{每單位增點數} + \text{起始點數量}$

證明. 在橫長 n 的矩形做點排列，每個橫向重複圖形稱為增點單位，因為增點單位要在整數才能增點，所以以下使用高斯符號：

可排列單位數 $= [n \div (\text{增點單位長})]$

可排列點數 $= [n \div (\text{增點單位長})] \times \text{每單位增點數}$

總排列點數 $P(n) = [n \div (\text{增點單位長})] \times \text{每單位增點數} + \text{起始點數量}$。 ■

例如圖 2.3.10，起始點為 2（綠點），以沙漏形為增點單位，每單位增點數為 3（紅點）。

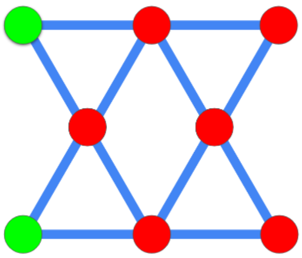


圖 2.3.14

（四）以 w 的範圍分類討論

性質 2.3.15 若 $0 < w \le \frac{\sqrt{3}}{2}$，則以鋸齒排列（非橫正三角）為緊密排列。

此時增點關係式為 $p = \left[\frac{n}{\sqrt{1-w^2}}\right] + 1$。

證明. 利用圓規置點如圖 2.3.16，增點單位長為$\sqrt{1-w^2}$，每單位增點數 1。

利用定理 2.3.13 可得

$$p = [\mathrm{n} \div \sqrt{1-w^2}] \times 1 + 1 = \left[\frac{n}{\sqrt{1-w^2}}\right] + 1 \quad ■$$

圖 2.3.16

特別地，當 $w = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時即為橫正三角排列，$p = [2n] + 1$。

圖 2.3.17

性質 2.3.18. 若 $\frac{\sqrt{3}}{2} < w \leq 1$，則以橫正三角推移成平行四邊形作為緊密排列。

此時增點關係式為 $p = 2[n] + 1$。

證明. 橫正三角經橫向推移如圖 2.3.15，增點單位長為 1，每單位增點數 2。

利用定理 2.3.13 可得

$p = [\mathrm{n} \div 1] \times 2 + 1 = 2[n] + 1$ ■

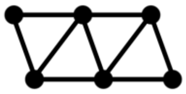


圖 2.3.19

特別地，當 $w = 1$ 時即為正方排列，$p = 2[n] + 2$。

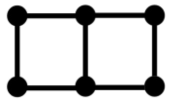


圖 2.3.20

性質 2.3.21. 若 $1 < w \leq \frac{3}{2}$，則以正方推移成平行四邊形作為緊密排列。

此時增點關係式為 $p = 2\left[\frac{n}{\sqrt{1-(w-1)^2}}\right] + 2$。

證明. 正方形經直向推移如圖 2.3.22，增點單位長為$\sqrt{1-(w-1)^2}$，每單位增點數 2。利用定理 2.3.13 可得

$p = \left[\mathrm{n} \div \sqrt{1-(w-1)^2}\right] \times 2 + 2 = 2\left[\frac{n}{\sqrt{1-(w-1)^2}}\right] + 2$ ■

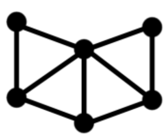


圖 2.3.22

特別地，當 $w=\frac{3}{2}$ 時即為直正三角排列，$p=2\left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\right]+2$。

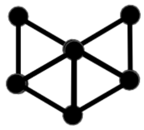


圖 2.3.23

性質 2.3.24. 若 $\frac{3}{2}<w<\sqrt{3}$，則仍以**性質 2.3.21** 的直正三角排列為緊密排列。

性質 2.3.25. 推移規律：鋸齒（橫向正三角形）經橫向推移，變成平行四邊形再變成正方形；正方形經縱向推移變成直正三角。如圖 2.3.26。

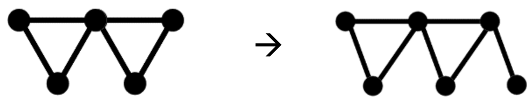
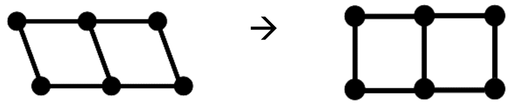
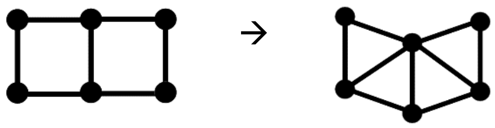
橫正三角變平行四邊形（橫向推移） 範圍：$\frac{\sqrt{3}}{2}\leq w<1$	
平行四邊形變正方（橫向推移） 範圍：$\frac{\sqrt{3}}{2}<w\leq 1$	
正方變直正三角（縱向推移） 範圍：$1\leq w<\frac{3}{2}$	

圖 2.3.26

參、優化

一、優化

（一）推移法

1. 接下來利用推移來建立一般情形的優化方式，而因為 $w\times n$ 矩形作直正三角排列可視為將轉置為 $n\times w$ 矩形作橫正三角排列，故只需先考慮「橫正三角-平行四邊形-正方形」的推移規律即可。**先從基準點與橫基準線開始以橫正三角做層堆疊，剩餘空隙決定如何做推移置換。**

空隙分為下方的縱向空隙(x)與右方的橫向空隙(y)，在橫向空隙小於 $\frac{1}{2}$ 時，可能利用推移法來增加點數；至於橫向空隙不小於 $\frac{1}{2}$ 時，就可以用直接增點來完成增點，於下一小節討論。

定義 3.1.1. 橫正三角緊密排列：對於任意 $w \times n$ 矩形，從基準點開始，先由上至下以正反交錯排列橫正三角，排至無法再放置為止，此時便完成一行增點單位；再由左至右重複此增點單位，至無法再放置完整的增點單位為止。

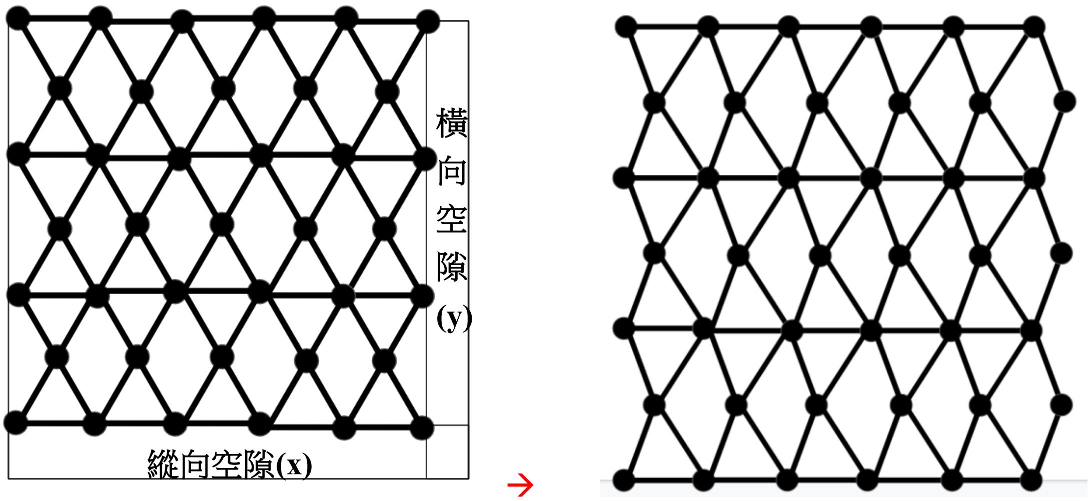


圖 3.1.2

如圖 3.1.2，圖左便是橫正三角緊密排列後的縱向空隙 x 與橫向空隙 y，圖右則是推移後結果，我們稱其為**橫簾幕排列**。

接下來為了得到推移法的增點公式，進行以下分析。

引理 3.1.3. 若函數 $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2}, & x\text{ 是正奇數}\\ \frac{x}{2}, & x\text{ 是正偶數}\end{cases}$ ，則 $f(x)=\left\lceil\frac{x+1}{2}\right\rceil$ 。

證明. 若 x 是正奇數，則 $\frac{x+1}{2}$ 是整數，故得 $\left\lceil\frac{x+1}{2}\right\rceil=\frac{x+1}{2}$。

若 x 是正偶數，則 $\frac{x}{2}$ 是整數，且 $\left\lceil\frac{x+1}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{x}{2}+0.5\right\rceil=\frac{x}{2}$ 。 ■

定理 3.1.4. 若推移 E 層，則**推移法增點數** $P(E)=\left[\frac{E+1}{2}\right]$ 。

證明. 若 E 是奇數，則視為數層沙漏加一層鋸齒，每層沙漏推移後增 1 點，故增$\frac{E}{2}$點，且一層鋸齒本身再加 1 點，故 $P(E)=\frac{E+1}{2}$ ；若 E 是偶數，則視為數層沙漏，故 $P(E)=\frac{E}{2}$ 。利用引理 3.1.3，得 $P(E)=\left[\frac{E+1}{2}\right]$ 。 ■

（二）補隙法

1. 經橫正三角緊密排列後，橫向空隙不小於 $\frac{1}{2}$ 時，就不須推移，用直接增點來補其橫向空隙，故稱「補隙法」。

2. **補隙方式：半沙漏與五角形**

考慮對沙漏層作增點，利用 *Geogebra* 繪製圖 3.1.5，簡化後得圖 3.1.6。

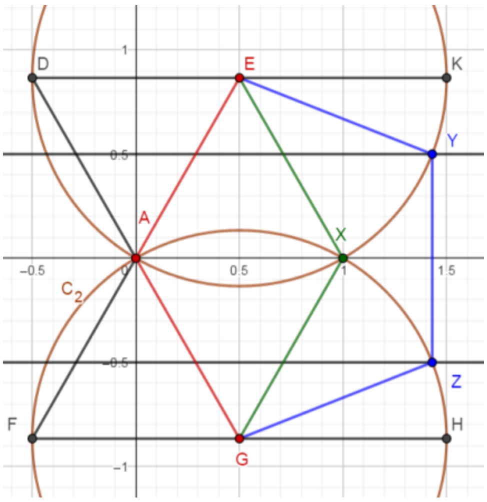


圖 3.1.5

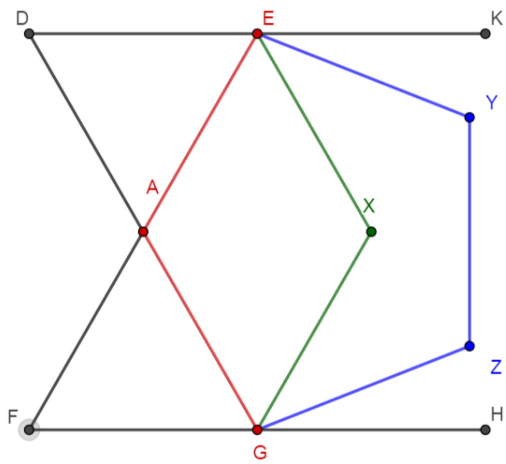


圖 3.1.6

上圖中五點 *DEAFG* 形成一沙漏形，C_1 是以 *E* 點為圓心、半徑是 1；C_2 是以 *G* 點為圓心、半徑是 1。

(1) 假設此沙漏右邊空間不小於 1，就可再加一沙漏，所以增加 *X*、*K*、*H* 共三點。

(2) 假設此沙漏右邊空間不小於 0.5，就可以再加半沙漏，所以增加 *X* 共一點。

(3) 特別情況是，在 C_1 與 C_2 上可畫出兩點 *Y*、*Z*，使得 $\overline{EY}=\overline{YZ}=\overline{ZG}=1$，這樣在右邊空間夠大時就能補上 *Y*、*Z* 兩點，使 *AEYZG* 形成邊長都是 1 的五角形。此時**五角形置換所需空隙**見下圖 3.1.7，直線GQ垂直$\overline{EG}$，Q是直線GQ與直線XY的垂足，$\overline{GE}=\sqrt{3}$，$\overline{YZ}=1$，$\overline{ZQ}=\frac{1}{2}(\overline{GE}-\overline{YZ})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\overline{GQ}=\sqrt{\overline{GZ}^2-\overline{ZQ}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx 0.9306 \quad ■$$

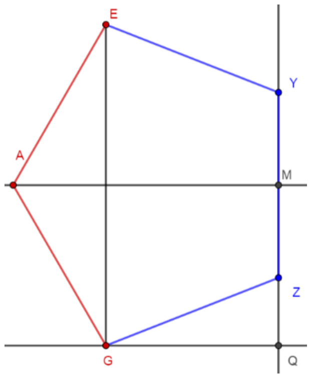


圖 3.1.7

演算方法 3.1.8. 補隙法 I：半沙漏增點

(1) 使用條件：$\frac{1}{2}\leq y<\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) 形式：同定理 3.1.8，若有 m 層橫正三角，則半沙漏增點數$P(m)=\left[\frac{m+1}{2}\right]$。

演算方法 3.1.9. 補隙法 II：五角形增點

(1) 使用條件：$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\leq y<1$

(2) 形式：假設共排列 *m* 層橫正三角，從最上層數起，第一層沙漏可用五角形增 2 點，此時第二層沙漏因距離限制不能再用五角形，仍用半沙漏增 1 點，如圖 3.1.10。

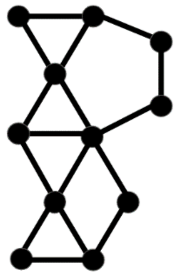


圖 3.1.10

五角形增點數分析：

(i) 恰好是偶數層沙漏：每 2 層沙漏可增 3 點，故可增 $\frac{m}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3m}{4}$ 點。

(ii) 恰好是奇數層沙漏：每 2 層沙漏可增 3 點，最後一層沙漏可增 2 點，

共可增 $\frac{m-2}{2}\times\frac{3}{2}+2=\frac{3m-6}{4}+\frac{8}{4}=\frac{3m+2}{4}$ 點。

(iii) 恰好是偶數層沙漏加一層鋸齒：

(a) 若下方空隙小於$\frac{1}{2}$，則最後一層鋸齒可增 1 點，

共可增 $\frac{m-1}{2}\times\frac{3}{2}+1=\frac{3m-3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{3m+1}{4}$ 點。

(b) 若下方空隙不小於$\frac{1}{2}$，則最後一層鋸齒可增 2 點，

共可增 $\frac{m-1}{2}\times\frac{3}{2}+2=\frac{3m-3}{4}+\frac{8}{4}=\frac{3m+5}{4}$ 點。

(iv) 恰好是奇數層沙漏加一層鋸齒：

共可增 $\frac{m-3}{2}\times\frac{3}{2}+3=\frac{3m-9}{4}+\frac{12}{4}=\frac{3m+3}{4}$ 點。

整理如下表 3.1.11。

表 3.1.11. 五角形補隙法整理

排列分類	偶數層沙漏	偶數層沙漏 加一層鋸齒	奇數層沙漏	奇數層沙漏 加一層鋸齒
層數 m 的形式 （令 K 為整數）	$\boldsymbol{m=4K}$	$\boldsymbol{m=4K+1}$	$\boldsymbol{m=4K+2}$	$\boldsymbol{m=4K+3}$
補隙增點數	$\frac{3m}{4}$	$x<\frac{1}{2}$，$\frac{3m+1}{4}$ $x\geq\frac{1}{2}$，$\frac{3m+5}{4}$	$\frac{3m+2}{4}$	$\frac{3m+3}{4}$

在 $w\times n$ 矩形範圍內，優化方式為從橫正三角排列開始，依條件使用推移法、補隙法（半沙漏與五角形），於下面詳細說明。

二、以推移為主軸作整合

（一）以推移為主軸

我們的優化方式中，補隙法是直接利用空隙而不動用原有排列，屬於靜態優化；推移法則是挪用原有排列以便增加新的點數，屬於動態優化。本小節就動態優化，也就是推移法來做優化方式的整合。$w \times n$ 矩形的排列方式動態流程如下：

1. 橫正三角排列，此時增點式為原型 P_0 ，於下面定理 3.2.2 列式運算。
2. 推移成橫簾幕，利用定理 3.1.8，此時增點式為 $P_1 = P_0 + P(E)$ 。
3. 推移成正方排列，此時增點式為 $P_2 = ([w]+1)([n]+1)$ 。這裡是考慮**打破臨界高度**，於下面定理 3.2.3 列式運算。
4. 推移成直簾幕，算出 P_3，於下面定理 3.2.4 列式運算。
5. 推移成直正三角，算出 P_4；因將 $w \times n$ 矩形以直正三角排列，等同於將 $n \times w$ 矩形以橫正三角排列，故 P_4 可將 w, n 互換代入定理 3.2.2 的 P_0 算式即可。

表 3.2.1. 推移法為主軸的動態流程

$w \times n$ 矩形	橫正三角	橫簾幕	正方排列	直簾幕	直正三角
增點式	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
$n \times w$ 矩形	直正三角	直簾幕	正方排列	橫簾幕	橫正三角

所以，依據定義 1.3.4，若要利用推移法找到最佳優化方式，就要判斷 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 在不同條件下，何者才是最大值。

定理 3.2.2. 計算原型 $\boldsymbol{P_0}$：對於 m 層鋸齒排列，增點式 $P_{m,n}=(m+1)[n]+\left[\frac{m}{2}\right]+1$ 。

證明. 先將 m 分成奇數與偶數情況。

m (奇數)層鋸齒的起始點為 $\frac{m+1}{2}$ 個，取增點單位長 1，則每單位增點數為 $(m+1)$個。利用定理 2.3.9 可得

$P_{m,n}=[n\div 1]\times(m+1)+\frac{m+1}{2}=(m+1)[n]+\frac{m+1}{2}$ ……(1)

m (偶數)層鋸齒的起始點為 $\frac{m+2}{2}$ 個，取增點單位長 1，則每單位增點數為 $(m+1)$個。利用定理 2.3.9 可得

$P_{m,n}=[n\div 1]\times(m+1)+\frac{m+2}{2}=(m+1)[n]+\frac{m+2}{2}$ ……(2)

利用高斯符號取奇偶數之特性：

若 k 是整數，令$m_1=2k+1$，$m_2=2k$，則 $\left[\frac{m_1}{2}\right]=\left[\frac{m_2}{2}\right]=k$

$\frac{m_1+1}{2}=k+1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1$ ， $\frac{m_2+2}{2}=k+1=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1$。

故**(1)式與(2)式**可統整為 m 是任意正整數時，

$P_{m,n}=(m+1)[n]+\left[\frac{m}{2}\right]+1$ ■

定理 3.2.3. 計算正方排列 $\boldsymbol{P_2}$：增點式為 $([w]+1)([n]+1)$

證明. 縱向可排正方形層數為 $[w]$，橫向可排正方形層數為 $[n]$

故總點數為$([w]+1)([n]+1)$ ■

定理 3.2.4. 計算直簾幕 $\boldsymbol{P_3}$： 令 $F=\left[\frac{y}{\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$，則 $P_3=P_4+\left[\frac{H+1}{2}\right]$ 。

證明. 如表 3.2.1，將正方直向推移成直簾幕，相當於將直正三角推移成直簾幕。

參考定理 2.4.5，若對於直簾幕的推移層數 F ，則 F 會受到 x 與 y 的限制，也就是 $x\geq\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{H})^2}$，將此不等式進行移項調整得 $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\geq F$ 。

故從 P_4 推移成 P_3 的最佳推移層數為 $H=\left[\frac{y}{\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$，再依定理 2.4.8，可得

$P_3=P_4+\left[\frac{F+1}{2}\right]$ ■

三、演算方法

為了做一般化的演算，先建立以下表 3.3.1 及表 3.3.2.的資訊。

表 3.3.1. $\boldsymbol{w\times n}$ 矩形的四個參數

參數	A	B	C	D
計算方式	$[w]$	$\left[\frac{2w}{\sqrt{3}}\right]$	$[n]$	$\left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\right]$
幾何意義	縱長可放置 直正三角數	縱長可放置 橫正三角數	橫長可放置 橫正三角數	橫長可放置 直正三角數

表 3.3.2. 原型與推移流程

	排列方式	增點式	條件
原型	橫正三角排列 P_0	$P_0=(B+1)C+\left[\frac{1}{2}B\right]+1$	無。
推移	橫簾幕排列	$P_1=P_0+[\frac{E+1}{2}]$	$E=\left[\frac{x}{\sqrt{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]>0$
	正方排列	$P_2=(A+1)(C+1)$	
	直簾幕排列	$P_3=P_4+\left[\frac{F+1}{2}\right]$	$F=\left[\frac{y}{\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]>0$
	直正三角排列	$P_4=(D+1)A+\left[\frac{1}{2}D\right]+1$	無。

演算方法 3.3.3. 計算出最佳優化排列，方式如下

第一步驟：輸入矩形「橫長(n)」與「縱長(w)」，依表 3.3.1 計算參數 A、B、C、D 。

第二步驟：計算橫正三角排列的橫向空隙 $y_1 = n - C$ 與縱向空隙 $x_1 = w - \frac{\sqrt{3}}{2}B$ 。

第三步驟：計算直正三角排列的橫向空隙 $y_2 = n - \frac{\sqrt{3}}{2}D$ 與縱向空隙 $x_2 = w - A$ 。

第四步驟：依定理 3.1.5 與定理 3.2.4，計算出最佳推移層數 E 與 F 。

第五步驟：推移法計算：依表 3.3.2 增點式計算 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 。

第六步驟：半沙漏補隙法計算：

(1) 對於 P_0 ，若 $y_1 \geq \frac{1}{2}$ ，則依定理 3.1.12.增點，總點數為 $P_{0+} = P_0 + \left[\frac{B+1}{2}\right]$ 。

(2) 對於 P_4 ，若 $x_2 \geq \frac{1}{2}$ ，則依定理 3.1.12.增點，總點數為 $P_{4+} = P_0 + \left[\frac{D+1}{2}\right]$ 。

第七步驟：五角形補隙法計算：依表 3.1.15.增點，令 Q 為五角形增點參數。

(1) 對於 P_0 ，若 $y_1 \geq \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ，則總點數為 $P_{0++} = P_0 + \frac{3B+Q}{4}$ 。

若 B 是偶數且 $\frac{B}{2}$ 是偶數，則 $Q = 0$ ；若 B 是偶數且 $\frac{B}{2}$ 是奇數，則 $Q = 2$ ；

若 B 是奇數、$\frac{B-1}{2}$ 是偶數且 $x_1 < \frac{1}{2}$，則 $Q = 1$ ；

若 B 是奇數、$\frac{B-1}{2}$ 是偶數且 $x_1 \geq \frac{1}{2}$，則 $Q = 5$；

若 B 是奇數且 $\frac{B-1}{2}$ 是奇數，則 $Q = 3$ 。

(2) 對於 P_4 ，若 $x_2 \geq \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ，則總點數為 $P_{4++} = P_0 + \frac{3D+Q}{4}$ 。

若 D 是偶數且 $\frac{D}{2}$ 是偶數，則 $Q = 0$ ；若 D 是偶數且 $\frac{D}{2}$ 是奇數，則 $Q = 2$ ；

若 D 是奇數、$\frac{D-1}{2}$ 是偶數且 $y_2 < \frac{1}{2}$，則 $Q = 1$ ；

若 D 是奇數、$\frac{D-1}{2}$ 是偶數且 $y_2 \geq \frac{1}{2}$，則 $Q = 5$；

若 D 是奇數且 $\frac{D-1}{2}$ 是奇數，則 $Q = 3$ 。

第八步驟：若選擇 $P' = Max\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$，此即最佳優化推移結果；若選擇 $P'' = Max\{P_{0+}, P_{0++}, P_{4+}, P_{4++}\}$，此即最佳優化補隙結果；取 $Max\{P', P''\}$

即以推移為主軸、再與補隙結合的計算模型結果。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	基本面板	矩形長寬		橫正三角原型		直正三角原型			橫正三角原型		五角形參數	直正三角原型	
2		橫長(n)	1.99	橫向空隙(y1)	0.99	橫向空隙(y2)	0.257949192		*B*	偶		*D*	偶
3		縱長(w)	1.99	縱向空隙(x1)	0.257949192	縱向空隙(x2)	0.99		*B/2*	奇		*D/2*	奇
4									*(B-1)/2*	偶		*(D-1)/2*	偶
5	計算參數	縱長可放置直正三角數	縱長可放置橫正三角數	橫長可放置橫正三角數	橫長可放置直正三角數	最佳推移層數 for P1	最佳推移層數 for P3		*x1*	小於0.5		*y2*	小於0.5
6		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*		*Q0*	2		*Q4*	2
7		1	2	1	2	-1	-1						
8													
9	推移優化	橫正三角	橫簾幕	正方	直簾幕	直正三角	最佳優化推移		最佳優化結果				
10		*P0*	*P1*	*P2*	*P3*	*P4*	5		7				
11		5	5	4	5	5							
12													
13	補隙優化	橫正三角			直正三角		最佳優化補隙						
14		半沙漏判別	五角形判別		半沙漏判別	五角形判別	7						
15		可	可		可	可							
16		*P0+*	*P0++*		*P4+*	*P4++*							
17		6	7		6	7							

圖 3.3.4. 利用 EXCEL 建立計算模型

定理 3.3.5. 對 $w \times n$ 矩形與 $n \times w$ 矩形進行優化，結果相同。

證明. 已知「對 $n \times w$ 矩形做橫正三角緊密排列」等同「對 $w \times n$ 矩形做直正三角緊密排列」，若 $n \times w$ 矩形依表 3.2.6 所算得的增點式為 $\{P_0{}', P_1{}', P_2{}', P_3{}', P_4{}'\}$，而 $w \times n$ 矩形所算得的增點式為 $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$，便滿足

$P_0' = P_4$、$P_1' = P_3$、$P_2' = P_2$、$P_3' = P_1$、$P_4' = P_0$，故最佳優化推移結果

$Max\{P_0{}', P_1{}', P_2{}', P_3{}', P_4{}'\} = Max\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$。

而補隙方面，$n \times w$ 矩形橫正三角原型的參數會等於$w \times n$ 矩形直正三角原型的參數，故 $n \times w$ 矩形若算得 $\{P_{0+}{}', P_{0++}{}', P_{4+}{}', P_{4++}{}'\}$，$w \times n$ 矩形算得 $\{P_{0+}, P_{0++}, P_{4+}, P_{4++}\}$，則滿足

$P_{0+}{}' = P_{4+}$、$P_{0++}{}' = P_{4++}$、$P_{4+}{}' = P_{0+}$、$P_{4++}{}' = P_{0++}$，故最佳優化補隙結果

$Max\{P_{0+}{}', P_{0++}{}', P_{4+}{}', P_{4++}{}'\} = Max\{P_{0+}, P_{0++}, P_{4+}, P_{4++}\}$。

因此對 $w \times n$ 矩形與 $n \times w$ 矩形最佳優化推移與最佳優化補隙結果均同。 ■

四、考慮 P_0 與 P_4 計算結果相等情形

首先套用表 3.3.1 參數面板與表 3.3.2，$P_0 = P_4$ 可列寫：

式 3.4.1. $(B+1)C + \left[\frac{1}{2}B\right] + 1 = (D+1)A + \left[\frac{1}{2}D\right] + 1$

整理移項得

式 3.4.2. $BC + C - AD - A = \left[\frac{1}{2}D\right] - \left[\frac{1}{2}B\right]$ **（轉置等點判別式）**

左式因為是整數的加、減、乘法運算，所以結果也會是一個整數，設此整數為 Z。

則右式 $\left[\frac{1}{2}D\right] - \left[\frac{1}{2}B\right] = Z$ **（判別式簡化）**。

所以得以下定理：

定理 3.4.3. 給定任意 $w \times n$ 矩形，令 $A = [w]$，$B = \left[\frac{2w}{\sqrt{3}}\right]$，$C = [n]$，$D = \left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\right]$，$Z = BC + C - AD - A$，若滿足判別式 $Z = \left[\frac{1}{2}D\right] - \left[\frac{1}{2}B\right]$，則此矩形經橫正三角緊密排列點數量轉置後不變。

至於形如 $\left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}y\right] = Z$ 的高斯方程式解範圍，用 *Desmos* 繪圖，如圖 3.4.4，出現了階梯形的線，但實際上我們代數字計算，發現解不是曲線而是區域，如圖 3.4.5，是無限多個重複方形區域。

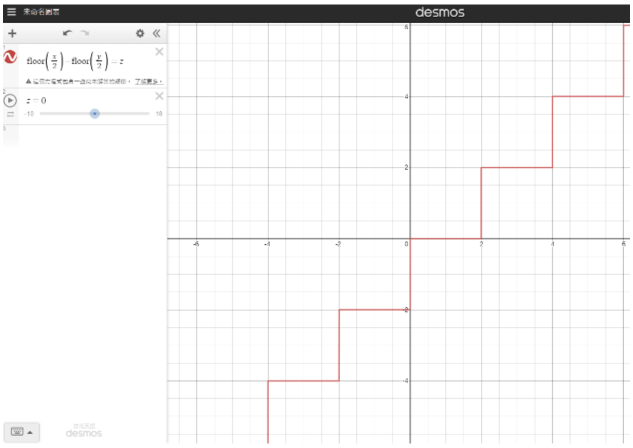


圖 3.4.4

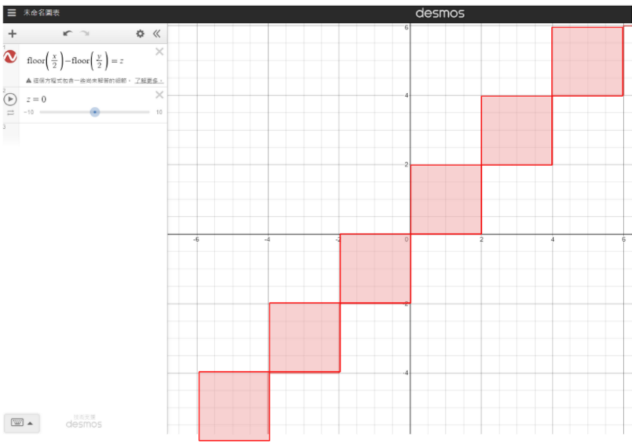


圖 3.4.5

定理 3.4.6. 若判別式 $Z > \left[\frac{1}{2}D\right] - \left[\frac{1}{2}B\right]$，則橫正三角排列點數轉置後減少；

若判別式 $Z < \left[\frac{1}{2}D\right] - \left[\frac{1}{2}B\right]$，則橫正三角排列點數轉置後增加。

證明. 若將式 3.4.1 改為 $(B+1)C + \left[\frac{1}{2}B\right] + 1 > (D+1)A + \left[\frac{1}{2}D\right] + 1$

表示橫正三角排列點數轉置前多於轉置後，整理得 $Z > \left[\frac{1}{2}D\right] - \left[\frac{1}{2}B\right]$ ；

若將式 3.4.2 改為 $(B+1)C + \left[\frac{1}{2}B\right] + 1 < (D+1)A + \left[\frac{1}{2}D\right] + 1$

表示橫正三角排列點數轉置前少於轉置後，整理得 $Z < \left[\frac{1}{2}D\right] - \left[\frac{1}{2}B\right]$ 。 ■

肆、討論

一、非正方推移後補隙情形

（一）若考慮非正方推移形式後補隙

1. 使用條件：$\frac{x}{m} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ （無法推移成正方排列）
2. 形式：在平行四邊形右側邊上增一正三角形，為了得到右方所需空隙 y，利用畢氏定理列式如下圖。

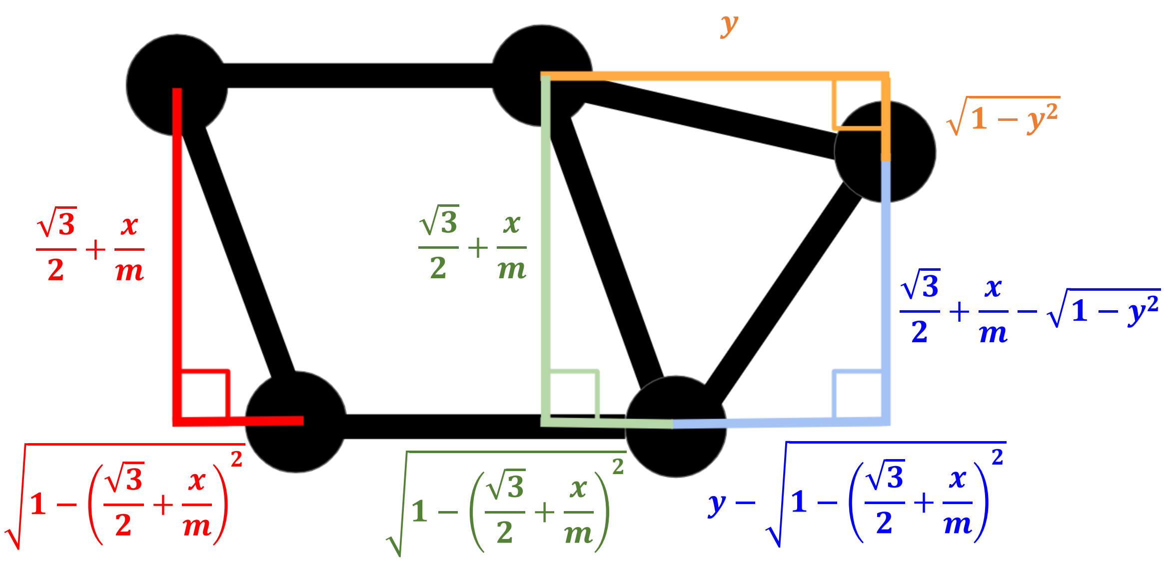


圖 4.1.1

觀察圖 4.1.1 右下角直角三角形的兩股（藍色線段），以畢氏定理得到 x、y、m 的關係式

式 4.1.2. $\left(y-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m}-\sqrt{1-y^2}\right)^2=1$

令平行四邊形高度為 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m}$，整理式 4.1.2 得

式 4.1.3. $\left(y-\sqrt{1-R^2}\right)^2+\left(R-\sqrt{1-y^2}\right)^2=1$ ， $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq R\leq 1$

將圖形用 *Desmos* 繪製，得範圍如圖 4.1.4 所示。

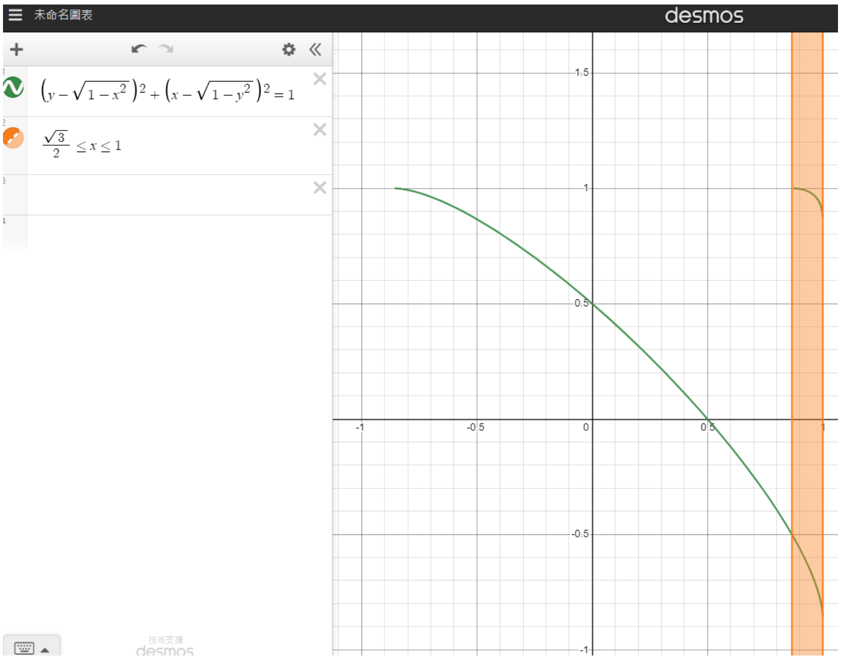


圖 4.1.4

在平行四邊形高度 R 與橫向空隙 y 滿足式 4.1.3 時即可。

二、若條件改成在一個 $w\times n$ 的矩形中，距離為 k

想像把這個矩形縮小 k 倍，這個新矩形長變成 $\frac{n}{k}$ 、寬變成 $\frac{w}{k}$ ，所以先考慮在新矩形中距離為 1 的排列與優化，再將排列完成的矩形放大 k 倍，所以可以同樣用推移補隙等方法來作緊密度優化計算。

三、延伸至「平面上固定範圍中圓形的堆疊問題」

回到一開始克卜勒猜想，是討論三維球體的堆疊，那二維球體也就是圓形，因為每個圓形的要素就是「一個圓心點加上固定半徑」，假如半徑為 r，只要將此圓形的堆疊當成是圓心之間的緊密排列、圓心之間距離至少為 $2r$，這樣也可以利用研究結果來套用作緊密度優化。

假如原問題是「在 $w \times n$ 矩形中放置半徑為 r 的圓形、如何放置最多」，如圖 4.3.1，可轉為新問題是「在 $(w-2r)\times(n-2r)$矩形中、點之間距離至少 $2r$、如何作最密排列」，如圖 4.3.2。

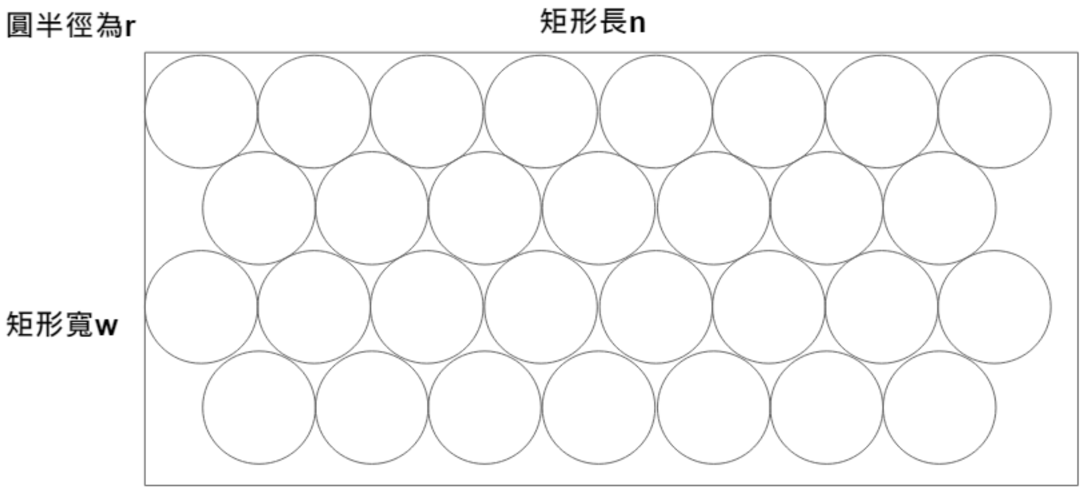


圖 4.3.1

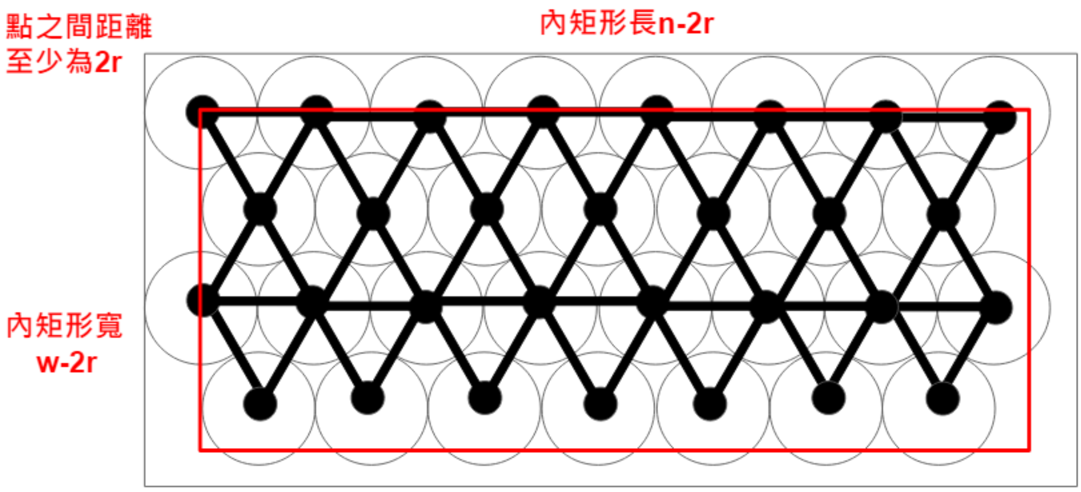


圖 4.3.2

伍、結論

我們對於如何優化保持距離的最緊密排列方式，採取策略是先以橫正三角排列，再依空隙條件，選擇推移、補隙等方法，最後從轉置與不轉置中得到最優結果；例如研究動機中是以 330×100 的矩形廣場作排列，最佳優化點數結果是 38391，比原文章中未優化的 38201 還多了 190 個點。目前計算模型尚屬複雜，期望未來能著手於簡化計算、增加應用便利性來繼續研究。

陸、參考資料及其他

一、Facebook 專頁《數感實驗室 | 台北市跨年限制 4 萬人，能保持社交距離嗎？》

發表日期：2020.12.31

網址：https://reurl.cc/KAjkym

二、科普文章《科學 Online：立方晶體》（國立臺灣大學-高瞻自然科學教學資源平台）

國立臺灣大學化學系學士生黎哲豪作/國立臺灣大學化學系陳藹然博士責任編輯

發表日期：2011.07.27

網址：https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=31205

三、科普文章《球體裝填問題：如何用最少空間裝填最多顆球?》

作者俞韋亘（國立中央大學數學系教授）

發表日期：2016.5.31

網址：https://sites.google.com/a/g2.nctu.edu.tw/unimath/2016-05/sphere_packing

四、科普文章《環遊數界：高斯符號》

發表日期：2017.1.23

網址：https://amathing.world/floor-and-ceiling-functions/

【評語】030409

作者們考慮在矩形區域內放置點，使得點與點間的距離大於等於1，所能放置的點數的最大可能值問題。這是一個既有實用性又非常切合時事的一個有趣的問題。作者們針對如何移動調整，才能讓所能放置的點數盡可能的多，給出了一些想法，想法頗具巧思，值得鼓勵。作者們確實找出了一些讓點數盡可能多的排列方式，但對於這些排列方式是不是最好並沒有給出太多的說明。這可能是整個作品最需要也最難回答的部分。如果可以針對這樣的問題作進一步的分析，給出一個能夠放置多少個點的一個理論上的上界，而這個上界又與作者們所得出的結果相去不遠，那整個作品看起來就會更為完整也更好。

作品簡報

原來社交距離可以這樣排

研究動機

因應新冠疫情，看見FACEBOOK數感實驗室在討論「如何在有限範圍內保持社交距離」，我們便好奇如何找到最緊密的排列方式。

研究目的

在有限矩形範圍下，尋找點與點距離不小於1、能優化放入最多點的方式，並建立計算模型。

研究架構

- 原來社交距離可以這樣排
  - 最密堆積
    - 基本圖形
    - 1×n矩形
      - 置換法
    - w×n矩形
      - 增點關係式
    - 優化過程
      - 推移法
      - 補隙法
        - 計算模型

優化程度–定義

因為在固定面積中，增加點數越多表示優化程度越好，所以定義如下

- 優化：在相同矩形長寬下，可放置點數較多者稱為優化。
- 優化程度：即**可放置點數 ÷ 矩形面積**的結果。

例：在 $1×5$ 矩形中，比較鋸齒排列、正方排列的優化程度

鋸齒可放置點數 ÷ 矩形面積 $= 11 ÷ 5 = 2.2$

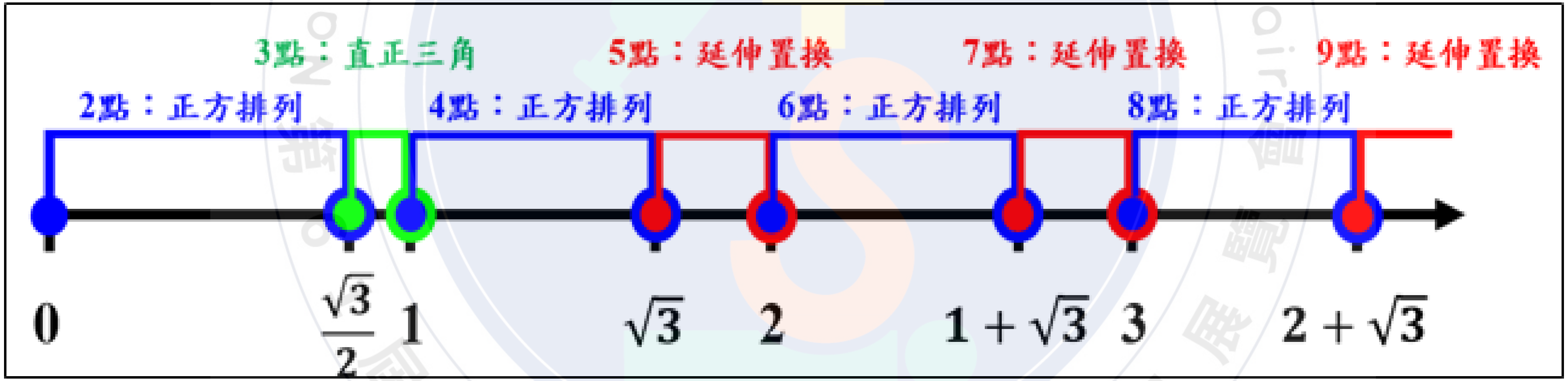
正方可放置點數 ÷ 矩形面積 $= 12 ÷ 5 = 2.4$ （$2.4 > 2.2$）

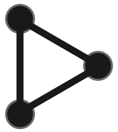
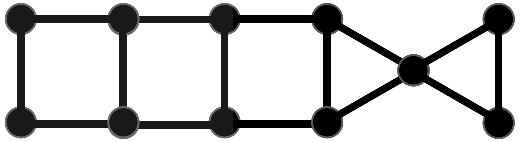
故正方排列優化程度大於鋸齒排列

- 最佳優化：若在一定條件下有 n 種優化排列，則優化程度最大者為最佳優化。

$1 \times n$ 矩形–優化排列與置換

1. 優化緊密排列是**正方排列**。
2. n 在非負數範圍的優化排列：



直正三角圖示：　正方形延伸置換蝴蝶結圖示：

優化方式–推移法

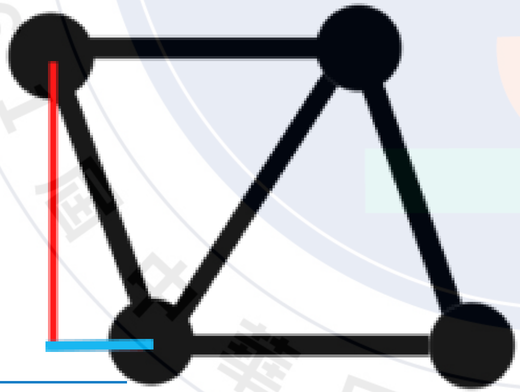
1. 當矩形寬度 w 增大時，可將橫正三角排列作推移：

   橫正三角 → 平行四邊形 → 正方形

   以便更有效的利用空間。

2. 橫正三角排列的最佳推移層數：設推移E層最佳

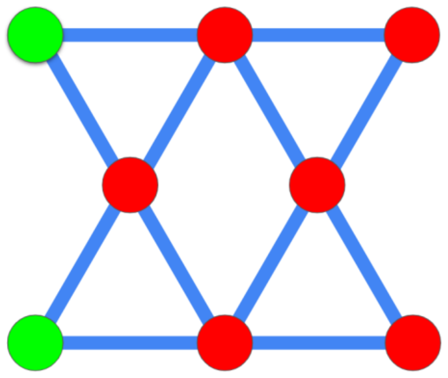
高度：$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m}$



橫向差距：$\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{m})^2}$

$$E=\left[\frac{x}{\sqrt{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$w \times n$ 矩形─增點關係式



設橫長 n 的矩形做點排列，每個橫向重複圖形稱為增點單位。

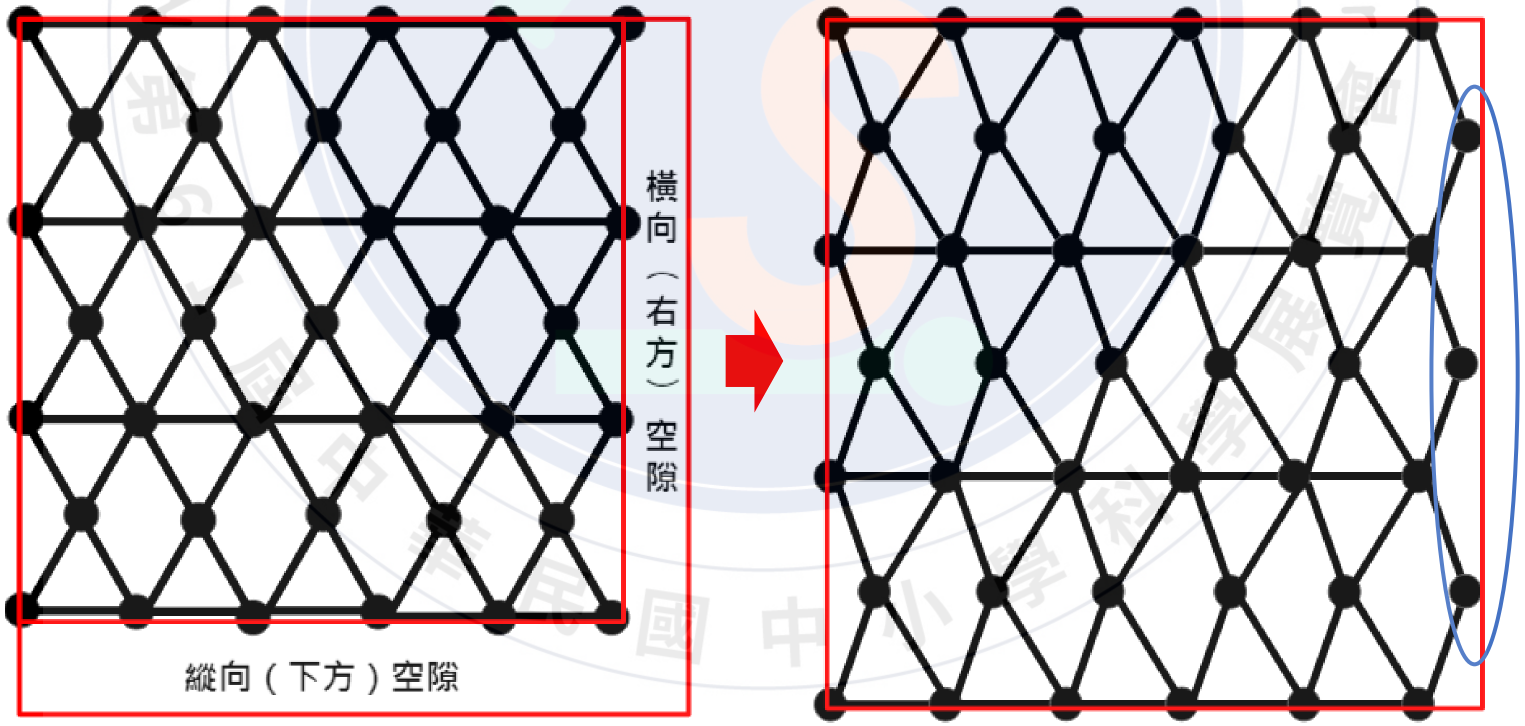
1. 可排列單位數 = [n ÷ 增點單位長] ，[ ]是高斯取底符號。
2. 可排列點數 = [n ÷ 增點單位長] × 每單位增點數
3. 總排列點數 p = [n ÷ 增點單位長] × 每單位增點數 + 起始點數量

此即 p 對於 n 的增點關係式。

推移後增點

推移過程中，原有點數量不變。最佳推移層數 E 若大於 0，則表示推移後橫向空隙可再增加 $\left[\frac{E+1}{2}\right]$ 點。

例：若E=6
則推移6層



推移後
可增加3點

優化方式–補隙法

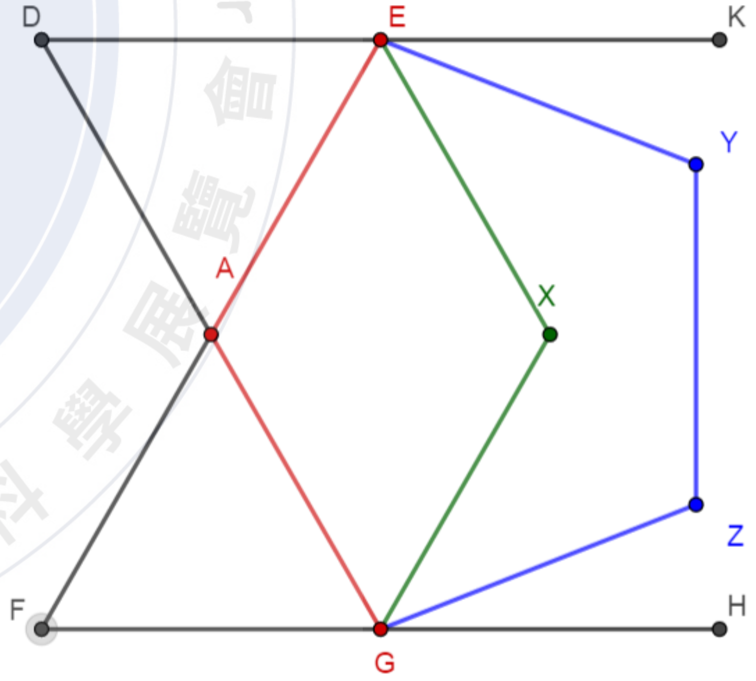
1. 當橫向空隙在 $y \geq \frac{1}{2}$ 時，縱向空隙補上半沙漏、五角形或其他增點；

如果有 m 層沙漏，則最右側至少可增加 m 個點。

（所以此情況不需推移，稱為「補隙法」）

(1)「補隙法I-半沙漏」使用條件：$\frac{1}{2} \leq y < \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2)「補隙法II-五角形」使用條件：$y \geq \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$



演算方法

第一步驟：輸入矩形「橫長(n)」與「縱長(w)」，依表計算參數A、B、C、D。

第二步驟：計算橫正三角排列的橫向空隙 $y_1 = n - C$ 與縱向空隙 $x_1 = w - \frac{\sqrt{3}}{2}B$。

第三步驟：計算直正三角排列的橫向空隙 $y_2 = n - \frac{\sqrt{3}}{2}D$ 與縱向空隙 $x_2 = w - A$。

第四步驟：計算出最佳推移層數 E 與 F。

參數	A	B	C	D
計算方式	$[w]$	$\left[\frac{2w}{\sqrt{3}}\right]$	$[n]$	$\left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\right]$
幾何意義	縱長可放置直正三角數	縱長可放置橫正三角數	橫長可放置橫正三角數	橫長可放置直正三角數

演算方法

第五步驟：推移法計算，

依表計算 P_0 , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 。

	排列方式	增點式	條件
原型	橫正三角排列 P_0	$P_0=(B+1)C+\left[\frac{1}{2}B\right]+1$	無。
推移	橫簾幕排列	$P_1=P_0+\left[\frac{E+1}{2}\right]$	$E=\left[\frac{x}{\sqrt{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]>0$
	正方排列	$P_2=(A+1)(C+1)$	
	直簾幕排列	$P_3=P_4+\left[\frac{F+1}{2}\right]$	$F=\left[\frac{y}{\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]>0$
	直正三角排列	$P_4=(D+1)A+\left[\frac{1}{2}D\right]+1$	無。

第六步驟：半沙漏補隙法計算

第七步驟：五角形補隙法計算

第八步驟：得到最佳優化推移結果 P' 與最佳優化補隙結果 P'' 。

結論

對於任意 $w \times n$ 矩形中、點與點距離不小於1的最密優化排列：

1. 推移優化 P' ：橫正三角、橫簾幕、正方、直簾幕、直正三角
2. 補隙優化 P''：半沙漏、五角形
3. 推移與補隙過程不會使原有點變少，故取 $Max\{P', P''\}$ 作為最佳優化解。