# 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

國中組　數學科

## 第三名

030408

## 從一個內切圓的問題想起

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學



| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國三 黃子恆 | 章念慈 |
| 國三 李馥安 | 柯紋娟 |



關鍵詞：內切圓、切點、圓

# 摘要

在一個三角形的內切圓上，任取三點連線成內接三角形，我們發現當此三點為切點時，可以找到許多與切點三角形有關的性質除了一一加以證明外，並推展至四邊形及更多邊形。

# 壹、研究動機

在練習競賽題目時，找到了一些與三角形內切圓上再做三角形的題目，除了解題外，並探討在不同條件下，內接三角形的性質。從第五冊的相似形、圓、三角形的特殊心的性質開始，觀察相關的幾何性質，並延伸至四邊形及多邊形。

# 貳、研究目的

一、在三角形的內切圓做不同條件的三角形，求兩三角形的面積比值。

二、在三角形的內切圓切點上做三角形，觀察相關的幾何性質。

三、在四邊形的內切圓切點上做四邊形，觀察相關的幾何性質。

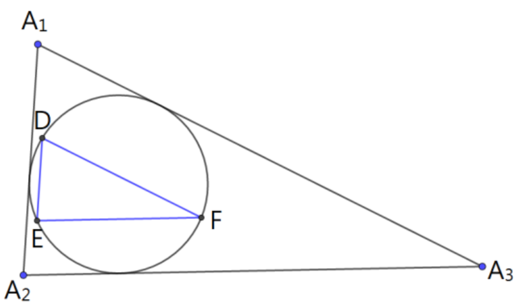
四、在$n$邊形的內切圓切點上做$n$邊形，觀察相關的幾何性質。

# 參、研究設備及器材

紙、筆、筆記型電腦、$GeoGebra$、$Microsoft\ Word$

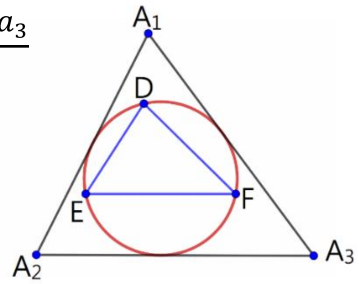
# 肆、研究過程與方法

我們一開始是在$\Delta A_1A_2A_3$內切圓上取三點$DEF$，連接$DEF$，依次改變$\Delta DEF$使成為正三角形、直角三角形、等比三角形、等腰三角形、等差三角形等各個特殊三角形，找出$\Delta DEF$與$\Delta A_1A_2A_3$的面積比值，也觀察了當$\Delta DEF \sim \Delta A_1A_2A_3$時的面積比值關係。



一、內外三角形面積比值

以下以等差三角形及等比三角形為例，先令$S=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{2}$




(一)等差三角形

令$\Delta DEF$三邊$\overline{DE},\overline{EF},\overline{DF}$為三邊公差為$k$的等差數列，

$d$為$D$的對邊

$$r=\frac{d}{2\sin D}\rightarrow d=2r\cdot\sin D\,,\Delta DEF=\frac{1}{2}\cdot(2r\cdot\sin D+k)\cdot(2r\cdot\sin D-k)\cdot\sin D$$

$$=\frac{4r^2\cdot\sin^2 D-k^2}{2}\cdot\sin D\Longrightarrow\frac{\Delta DEF}{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{4r^2\cdot\sin^2 D-k^2}{2r\times S}\cdot\sin D$$

在此也有另一種算法，使用海龍公式計算$\Delta DEF$的面積後再求比值

$$\Delta DEF=\frac{\sqrt{6r\sin D\times 2r\sin D\,(2r\cdot\sin D+2k)(2r\cdot\sin D-2k)}}{4}$$

$$=\sqrt{3r^2\sin^2 D-3k^2}\ \cdot r\sin D$$

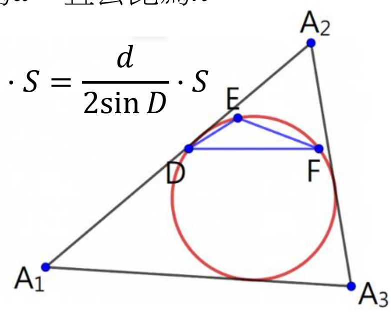
$$\frac{\Delta DEF}{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{\sqrt{3r^2\cdot\sin^2 D-3k^2}\ \cdot r\cdot\sin D}{r\times S}=\frac{\sqrt{3r^2\cdot\sin^2 D-3k^2}\ \cdot\sin D}{S}$$

(二)等比三角形

如圖，$\overline{DE},\overline{EF},\overline{DF}$成等比數列，令等比中項邊$\overline{EF}$為$d$，且公比為$h$

$$\Delta DEF=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{h}\cdot dh\cdot\sin D=\frac{d^2\sin D}{2},\Delta A_1A_2A_3=r\cdot S=\frac{d}{2\sin D}\cdot S$$

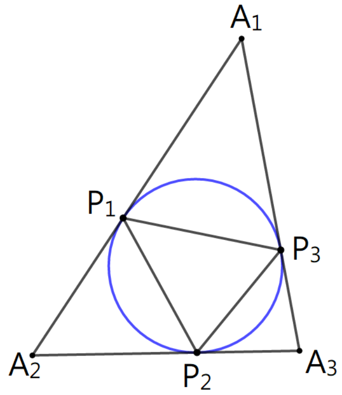
$$\frac{\Delta DEF}{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{\frac{d^2\sin D}{2}}{\frac{d}{2\sin D}\cdot S}=\frac{d\times\sin^2 D}{S}$$




所有結果整理如下表：

| 條件 | 面積比值 |
|---|---|
| 相似三角形 | $\dfrac{4r^2S}{a_2a_3a_1}$ |
| 直角三角形 | $\dfrac{r}{S}\times\sin 2D$ |
| 正三角形 | $\dfrac{3\sqrt{3}r}{4S}$ |
| 等腰三角形 | $\dfrac{2r\cos^2\frac{D}{2}\sin D}{S}$ |

| | |
|---|---|
| 等差三角形 | $\dfrac{\sqrt{3r^2 \cdot \sin^2 D - 3k^2} \cdot \sin D}{S}$ |
| 等比三角形 | $\dfrac{d \sin^2 D}{S}$ |




但就原三角形與切點三角形及另外三角形進行觀察，我們發現了一些有趣的幾何性質，所以改變了我們的方向，為區別切點與其他非切點所構成的三角形，當$D,E,F$為切點時，令三點分別為$P_1,P_2,P_3$，以後就只以$\Delta P_1P_2P_3$表示切點三角形。希望能找到更多的幾何性質。我們就從內外三角形的延伸線開始。

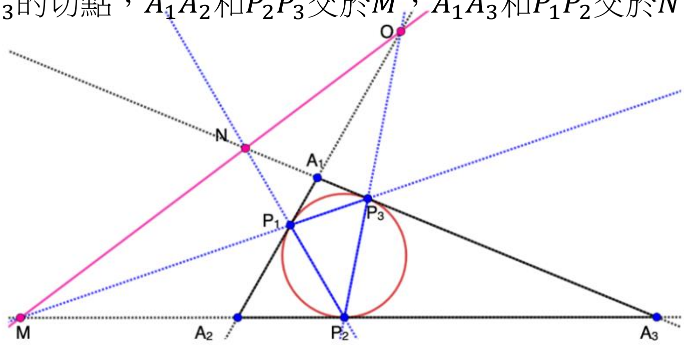
## 二、由切點三角形延伸的幾何性質

### (一)、切點三角形與原三角形之幾何性質

| 性質一、$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta P_1P_2P_3$的三邊延長線交於三點，此三點共線 |
|---|

已知：$P_1,P_2,P_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的切點，$\overleftrightarrow{A_1A_2}$和$\overleftrightarrow{P_2P_3}$交於$M$，$\overleftrightarrow{A_1A_3}$和$\overleftrightarrow{P_1P_2}$交於$N$，$\overleftrightarrow{A_2A_3}$和$\overleftrightarrow{P_1P_3}$交於$O$

求證：$M,N,O$三點共線




$Proof$:

在$\Delta A_1A_2A_3$中，我們可以根據西瓦逆定理得到：

$\because \overline{A_1P_1} = \overline{A_1P_3}, \overline{A_2P_1} = \overline{A_2P_2}, \overline{A_3P_2} = \overline{A_3P_3}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_2P_1}} \times \dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{A_3P_2}} \times \dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{A_1P_3}} = 1$

$\therefore \overline{A_1P_2}, \overline{A_2P_3}, \overline{A_3P_1}$三線共點

根據笛沙格定理

$\because \overline{A_1P_2}, \overline{A_2P_3}, \overline{A_3P_1}$三線共點 $\therefore M,N,O$三點共線, $Q.E.D.$

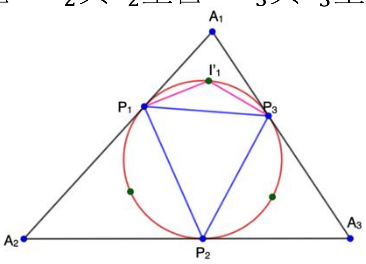
我們也想對$\Delta A_1A_2A_3$中除了切點三角形外的三個三角形進行研究，分述如下。

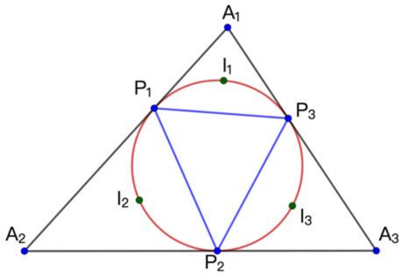
(二)除了$\Delta P_1P_2P_3$外的三個小三角形之其他幾何性質

| 性質二、三個三角形的內心皆在其所夾圓弧的中點上 |
|---|

已知：$I_1$為$\Delta A_1P_1P_3$之內心，$I_2$為$\Delta A_2P_1P_2$之內心，$I_3$為$\Delta A_3P_2P_3$之內心，$I_1'$為弧$A_1A_3$之中點，$I_2'$為弧$A_1A_2$之中點，$I_3'$為弧$A_2A_3$之中點

求證：$I_1$與$I_1'$重合，$I_2$與$I_2'$重合，$I_3$與$I_3'$重合




$Proof$:

$\angle I_1'P_3P_1 = \dfrac{1}{4}$弧$P_1I_1'P_3$(圓周角)

$\angle I_1'P_3A_1 = \dfrac{1}{4}$弧$P_1I_1'P_3$(弦切角)$\Rightarrow \overline{QI_1'}$為$\angle A_1P_3P_1$的角平分線

同理得$\overline{P_1I_1'}$為$\angle A_1P_1P_3$的角平分線

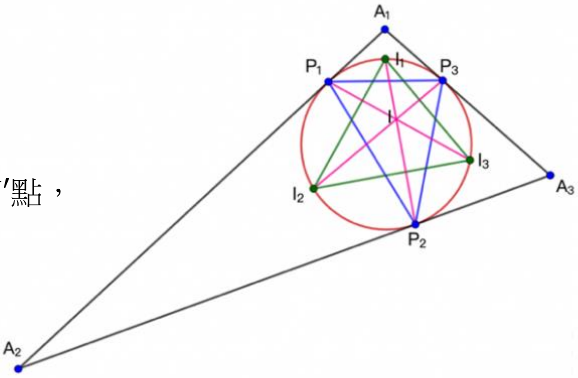
故$I_1'$與$I$重合，同理得$I_2$與$I_2'$重合，$I_3$與$I_3'$重合。我們將其定為引理，以證明下一個命題。

| **引理一：切點三角形切割出的三個三角形的內心皆在其所夾圓弧的中點上。** |
|---|

| 性質三、三個三角形的內心連線與切點三角形的邊的延長線會交於三點，<br>且此三點共線。 |
|---|

已知：$P_1, P_2, P_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的切點，$I_1, I_2, I_3$分別為$\Delta A_1P_3P_1, \Delta A_2P_2P_1, \Delta A_3P_2P_3$之內心，$\overleftrightarrow{P_2P_3}$和$\overleftrightarrow{I_1I_2}$交於$M$，$\overleftrightarrow{P_1P_2}$和$\overleftrightarrow{I_1I_3}$交於$N$，$\overleftrightarrow{P_1P_3}$和$\overleftrightarrow{I_2I_3}$交於$O$。

求證：$M, N, O$三點共線




$Proof$:

令$\overline{P_2I_1}$和$\overline{P_3I_2}$交於$I$點，$\overline{P_2I_1}$和$\overline{P_1I_3}$交於$I'$點，

由引理一得，$I_2$為弧$P_2I_2P_1$之中點

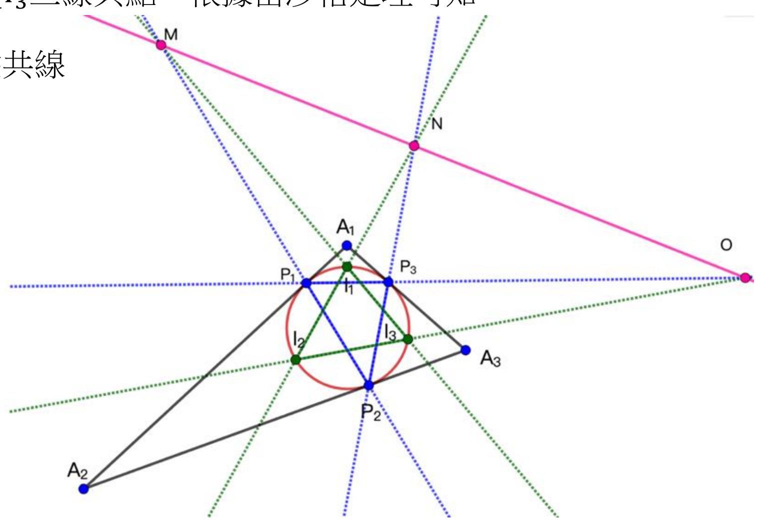
$\Longrightarrow$ 弧$PI_2 =$ 弧$I_2R, \angle P_2P_3I_2 = \angle P_1P_3I_2$

$\therefore \overline{P_3I_2}$平分$\angle P_2P_3P_1$，同理得$\overline{P_2I_1}$平分$\angle P_3P_2P_1$，$\overline{P_1I_3}$平分$\angle P_2P_1P_3$

$\Longrightarrow I$為$\Delta P_1P_2P_3$之內心，$I'$也為$\Delta P_1P_2P_3$之內心，故$I$與$I'$重合

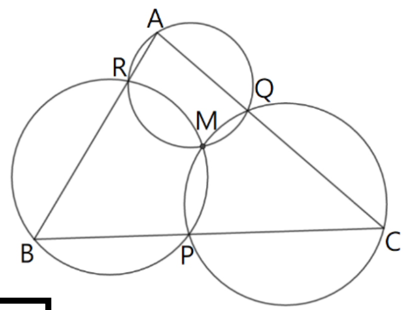
$\because \overline{P_2I_1}, \overline{P_3I_2}$和$\overline{P_1I_3}$三線共點，根據笛沙格定理可知

$\Longrightarrow M, N, O$三點共線




我們發現密克定理恰可證明三圓共點，所以當作引理。其定理如下

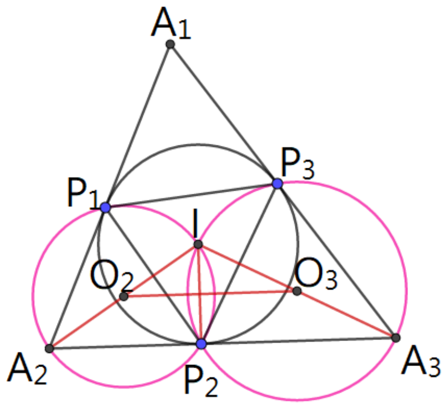
**引理二：任意$\Delta ABC$中，$P, Q, R$分別位於$\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$上，$\Delta AQR, \Delta BPR, \Delta CPQ$的外接圓交於一點(右圖)**




性質四、做$\Delta A_1P_3P_1, \Delta A_2P_2P_1, \Delta A_3P_2P_3$的外接圓，三圓交於一點，此點為$\Delta A_1A_2A_3$之內心

已知：$P_1, P_2, P_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的切點，$\Delta A_1P_3P_1, \Delta A_2P_2P_1, \Delta A_3P_2P_3$的外接圓會交於一點

求證：三圓交點為$\Delta A_1A_2A_3$之內心




$Proof$:

由引理二得此三圓必交於一點

設此三圓交於$I'$點。

$\because \overline{I'P_2}$為圓$O_2, O_3$之公弦

$\therefore \overline{I'P_2} \perp \overline{O_2O_3}$

令$\overline{I'P_2}$交$\overline{O_2O_3}$於$K$點

$\because \overline{I'O_2} = \overline{P_2O_2}, \angle I'KO_2 = 90^o = \angle P_2KO_2, \overline{O_2K} = \overline{O_2K}$(共用邊)

$\therefore \Delta I'O_2K \cong \Delta P_2O_2K(RHS) \Longrightarrow \angle I'O_2P = 2 \times \angle I'O_2K$

得$\angle I'A_2P_2 = \dfrac{1}{2} \times$ 弧$I'P = \dfrac{1}{2} \times \angle I'O_2P = \angle I'O_2K$，同理得$\angle I'O_3K = \angle I'A_3P_2$

$\Rightarrow \angle A_2I'A_3 = 180^{o} - (\angle I'A_2P_2 + \angle I'A_3P_2) = 180^{o} - (\angle I'O_2K + \angle I'O_3K) = \angle O_2I'O_3$

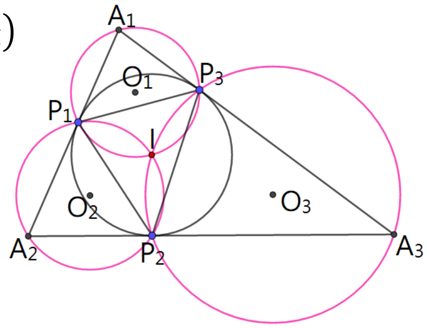
$\Rightarrow A_2, O_2, I'$共線$, A_3, O_3, I'$共線 $\Rightarrow \overline{A_2I'}$為圓$O_2$直徑，$\overline{A_3I'}$為圓$O_3$直徑

$\because \overline{O_2P_2} = \overline{O_2P_1}, \overline{A_2P_1} = \overline{A_2P_2}, \overline{O_2A_2} = \overline{O_2A_2}$(共用邊)

$\Rightarrow \Delta O_2A_2P_1 \cong \Delta O_2A_2P_2(SSS)$

$\Rightarrow \angle P_2A_2O_2 = \angle P_1A_2O_2 \Rightarrow \overline{A_2I'}$平分$\angle P_1AP_2$

同理得$\overline{A_3I'}$平分$\angle QA_3P_2 \Rightarrow I'$為內心$I$

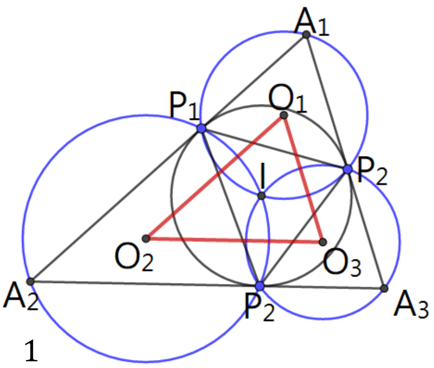



此外，觀察三個三角形的各種心連線，得出一些性質，分述如下。

**性質五、外心連成的三角形相似於原三角形，且面積比為1: 4**

已知：$P_1, P_2, P_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的切點，$O_1, O_2, O_3$分別為$A_1P_3P_1, \Delta A_2P_2P_1, \Delta A_3P_2P_3$之外心

求證：$\Delta O_1O_2O_3 \sim \Delta A_1A_2A_3$且$\dfrac{\Delta O_1O_2O_3}{\Delta A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{4}$




*Proof*:

$\because \dfrac{\overline{IO_2}}{\overline{IA_2}} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{IO_3}}{\overline{IA_3}}, \angle O_2IO_3 = \angle A_2IA_3$

$\therefore \Delta O_2IO_3 \sim \Delta A_2IA_3 \Longrightarrow \overline{O_2O_3} // \overline{A_2A_3}, \dfrac{\overline{O_2O_3}}{\overline{A_2A_3}} = \dfrac{1}{2}$

同理得$\overline{O_1O_2} // \overline{A_1A_2}, \dfrac{\overline{O_1O_2}}{\overline{A_1A_2}} = \dfrac{1}{2}, \overline{O_1O_3} // \overline{A_1A_3}, \dfrac{\overline{O_1O_3}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{1}{2}$

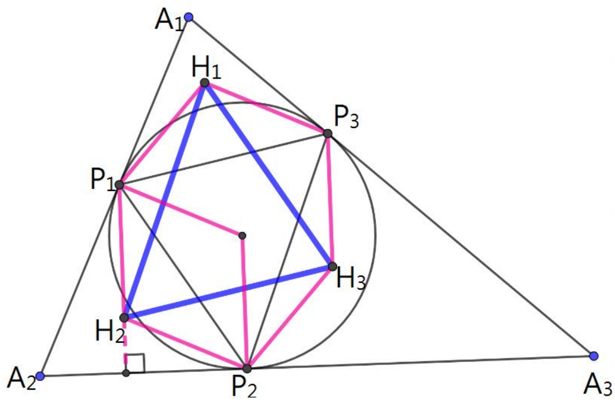
$\Rightarrow \Delta O_1O_2O_3 \sim \Delta A_1A_2A_3(SSS)$且$\dfrac{\Delta O_1O_2O_3}{\Delta A_1A_2A_3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

**性質六、垂心連成的三角形與切點三角形全等**

已知：$P_1, P_2, P_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的切點，

$H_1, H_2, H_3$分別為$\Delta A_1P_3P_1, \Delta A_2P_2P_1, \Delta A_3P_2P_3$之垂心

求證：$\Delta H_1H_2H_3 \cong \Delta P_1P_2P_3$




*Proof*:

如圖，連接$\overline{IP_1}, \overline{IP_2}, \overline{IP_3}$,

$\because P_1, P_2$為切點

$\therefore \overline{IP_2} \perp \overline{A_3A_1}, \overline{IP_1} \perp \overline{A_1A_2}$

又$\overline{P_1H_2} \perp \overleftrightarrow{A_3A_2}, \overline{P_2H_2} \perp \overleftrightarrow{A_1A_2}$

$\Rightarrow \overline{IP_2}//\overline{P_1H_2}, \overline{IP_1}//\overline{P_2H_2}$, 且$\overline{IP_1} = \overline{IP_2}$

故四邊形$IP_2H_2P_1$為邊長為$r$的菱形， 同理可得四邊形$IP_1H_1P_3$也為邊長為$r$的菱形

$\Rightarrow \overline{P_2H_2}//\overline{IP_1}//\overline{H_1P_3}$，又$\overline{P_2H_2} = r = \overline{H_1P_3}$

$\Rightarrow$ 四邊形$P_2H_2H_1P_3$為平行四邊形

$\Rightarrow \overline{H_1H_2} = \overline{P_3P_2}$

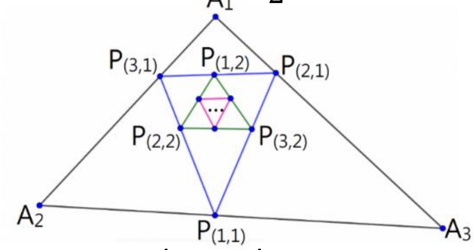
同理得$\overline{H_2H_3} = \overline{P_3P_1}$，$\overline{H_1H_3} = \overline{P_2P_1}$，故$\Delta H_1H_2H_3 \cong \Delta P_2P_3P_1(SSS)$

以上為研究切點三角形的幾何性質，我們接著找其邊長和角度的計算方式。

(三) $n$層的切點三角形

1. $n$層切點三角形邊長、角度及面積

我們已求出第一層的三角形之邊長，為方便觀察，接著想要向內做$n$層的切點三角形，求出它們的邊角關係。為方便研究，令$P_{(1,n)}$點為第$n$層切點三角形位於$\overline{P_{(2,n-1)}P_{(3,n-1)}}$邊上的頂點、$p_{(1,n)}$為$P_{(1,n)}$的對邊、$s_n = \dfrac{p_{(1,n)} + p_{(2,n)} + p_{(3,n)}}{2}$ 、$\angle P_{(1,n)}$為$\Delta P_{(1,n)}P_{(2,n)}P_{(3,n)}$中的對應角度。




(1)角度

因為第一層切點三角形角度為

$$\angle P_{(1,1)} = \frac{\angle A_2 + \angle A_3}{2}, \angle P_{(2,1)} = \frac{\angle A_1 + \angle A_3}{2}, \angle P_{(3,1)} = \frac{\angle A_1 + \angle A_2}{2}$$

以同樣的方法計算第二層的切點三角形角度，可以得到

$$\angle P_{(1,2)} = \left(\frac{\angle A_1 + \angle A_2}{2} + \frac{\angle A_1 + \angle A_3}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{2\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3}{4}$$

同理$\angle P_{(2,2)} = \dfrac{\angle A_1 + 2\angle A_2 + \angle A_3}{4}, \angle P_{(3,2)} = \dfrac{\angle A_1 + \angle A_2 + 2\angle A_3}{4}$

而第三層也可以用同樣的方法計算

$$\angle P_{(1,3)} = \left(\frac{\angle A_1 + \angle A_2 + 2\angle A_3}{4} + \frac{\angle A_1 + 2\angle A_2 + \angle A_3}{4}\right) \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2\angle A_1 + 3\angle A_2 + 3\angle A_3}{8}$$

同理得

$$\angle P_{(2,3)}=\frac{3\angle A_1+2\angle A_2+3\angle A_3}{8},\angle P_{(3,3)}=\frac{3\angle A_1+3\angle A_2+2\angle A_3}{8}$$

由此可知，切點三角形的角度即為兩邊的角度之平均數。以此做延伸

推展至第$n$層得

| | | |
|---|---|---|
| 第$n$層 | $\angle P_{(1,n)}$ | $\frac{\left(\frac{2^n+(-1)^n\times 2}{3}\right)\angle A_1+\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)\angle A_2+\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)\angle A_3}{2^n}$ |
| | $\angle P_{(2,n)}$ | $\frac{\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)\angle A_1+\left(\frac{2^n+(-1)^n\times 2}{3}\right)\angle A_2+\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)\angle A_3}{2^n}$ |
| | $\angle P_{(3,n)}$ | $\frac{\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)\angle A_1+\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)\angle A_2+\left(\frac{2^n+(-1)^n\times 2}{3}\right)\angle A_3}{2^n}$ |

因為$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3=180^{o}$，整理得

| | | |
|---|---|---|
| 第$n$層 | $\angle P_{(1,n)}$ | $\frac{(2^n-(-1)^n)\times 180^{o}+3\times(-1)^n\angle A_1}{3\cdot 2^n}$ |
| | $\angle P_{(2,n)}$ | $\frac{(2^n-(-1)^n)\times 180^{o}+3\times(-1)^n\angle A_2}{3\cdot 2^n}$ |
| | $\angle P_{(3,n)}$ | $\frac{(2^n-(-1)^n)\times 180^{o}+3\times(-1)^n\angle A_3}{3\cdot 2^n}$ |

為了使上列三式合併，做出此定義：$\angle X_{(M,n)}$，其中$M$分別為$A_1,A_2$或$A_3$

$$\angle X_{(A_1,n)}=\angle P_{(1,n)},\angle X_{(A_2,n)}=\angle P_{(2,n)},\angle X_{(A_3,n)}=\angle P_{(3,n)}$$

則$\angle X_{(M,n)}=\dfrac{(2^1-(-1)^1)\times 180^{o}+3\times(-1)^1\angle M}{3\cdot 2^1}$

我們利用數學歸納法作證明，如下：

當$n=1$時，$\angle X_{(A_1,1)}=\angle P_{(1,1)}=\dfrac{\angle A_2+\angle A_3}{2}=\dfrac{180^{o}-\angle A_1}{2}$

$$=\frac{(2^1-(-1)^1)\times 180^{o}+3\times(-1)^1\angle A_1}{3\cdot 2^1}$$，成立

同理得$M=A_2,A_3$也成立。

當$n=k$時，令算式$(**)$於$M=A_1,A_2,A_3$時皆成立

當$n=k+1$時，$\angle X_{(A_1,k+1)}=\dfrac{1}{2}(\angle P_{(2,k)}+\angle P_{(3,k)})$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(2^k-(-1)^k)\times 180^{o}+3\times(-1)^k\angle A_2}{3\cdot 2^k}+\frac{(2^k-(-1)^k)\times 180^{o}+3\times(-1)^k\angle A_2}{3\cdot 2^k}\right]$$

$$=\frac{(2^{k+1}-2\times(-1)^k)\times 180^o+3\times(-1)^k\times(\angle A_2+\angle A_3)}{3\cdot 2^{k+1}}$$

$$=\frac{(2^{k+1}-2\times(-1)^k)\times 180^o+3\times(-1)^k\times(180^o-\angle A_1)}{3\cdot 2^{k+1}}$$

$$=\frac{(2^{k+1}-2\times(-1)^k+3\times(-1)^k)\times 180^o+3\times(-1)^{k+1}\times\angle A_1}{3\cdot 2^{k+1}}$$

$$=\frac{(2^{k+1}+3\times(-1)^{k+1})\times 180^o+3\times(-1)^{k+1}\times\angle A_1}{3\cdot 2^{k+1}}$$ ，成立

同理得$M=A_2,A_3$也成立。

(2)邊長

用餘弦定理求出第一層切點三角形的邊長，如下

$$p_{(1,1)}=\sqrt{(s-a_1)^2+(s-a_1)^2-(s-a_1)\times(s-a_1)\times\cos\angle A_1}$$

$$=(s-a_1)\times\sqrt{2(1-\cos\angle A_1)}$$

$$p_{(2,1)}=\sqrt{(s-a_2)^2+(s-a_2)^2-(s-a_2)\times(s-a_2)\times\cos\angle A_2}$$

$$=(s-a_2)\times\sqrt{2(1-\cos\angle A_2)}$$

$$p_{(3,1)}=\sqrt{(s-a_3)^2+(s-a_3)^2-(s-a_3)\times(s-a_3)\times\cos\angle A_3}$$

$$=(s-a_3)\times\sqrt{2(1-\cos\angle A_3)}$$

同樣利用餘弦定理，我們可以得出第二次切出的切點三角形邊長為

$$p_{(1,2)}=\left(s_1-p_{(1,1)}\right)\times\sqrt{2\left(1-\cos P_{(1,1)}\right)}$$

$$p_{(2,2)}=\left(s_1-p_{(2,1)}\right)\times\sqrt{2\left(1-\cos P_{(2,1)}\right)}$$

$$p_{(3,2)}=\left(s_1-p_{(3,1)}\right)\times\sqrt{2\left(1-\cos P_{(3,1)}\right)}$$

延伸至第$n+1$層

$$p_{(1,n+1)}=\left(s_n-\ p_{(1,n)}\right)\times\sqrt{2\left(1-cosP_{(1,n)}\right)}$$

$$p_{(2,n+1)}=\left(s_n-p_{(2,n)}\right)\times\sqrt{2\left(1-cos\ P_{(2,n)}\right)}$$

$$p_{(3,n+1)}=\left(s_n-p_{(3,n)}\right)\times\sqrt{2\left(1-cos\ P_{(3,n)}\right)}$$

為了合併上列三式，定義$x_{(M,n+1)}$為第$n$層$M$的對邊，其中$M$分別為$A_1,A_2$或$A_3$

$x_{(A_1,n+1)} = p_{(1,n+1)}, x_{(A_2,n+1)} = p_{(2,n+1)}, x_{(A_3,n+1)} = p_{(3,n+1)},$

$$x_{(M,n+1)} = \left(s_n - x_{(M,n)}\right) \times \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{(2^n - (-1)^n) \times 180^{\mathrm{o}} + 3 \times (-1)^n \angle M}{3 \cdot 2^n}\right)}$$

用此種方法，即可得到任一層切點三角形的邊長。

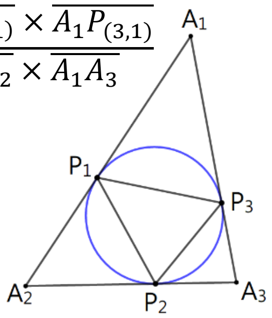
(3)面積

我們先求出$\dfrac{\Delta P_{(1,1)}P_{(2,1)}P_{(3,1)}}{\Delta A_1A_2A_3}$

在切點三角形的情況下，會有$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta A_1P_{(1,1)}P_{(3,1)}$共角，$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta A_2P_{(2,1)}P_{(1,1)}$共角，$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta A_3P_{(2,1)}P_{(3,1)}$共角，因此使用共角定理來做計算。共角定理如下，$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta A_1P_{(1,1)}P_{(3,1)}$共用角$A_1$，故有

$$\frac{\Delta A_1P_{(1,1)}P_{(3,1)}}{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{A_1P_{(1,1)}} \times \overline{A_1P_{(3,1)}} \times \sin A_1}{\frac{1}{2} \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \times \sin A_1} = \frac{\overline{A_1P_{(1,1)}} \times \overline{A_1P_{(3,1)}}}{\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}}$$

$$= \frac{\frac{-a_1 + a_2 + a_3}{2} \times \frac{-a_1 + a_2 + a_3}{2}}{a_2 \times a_3}$$




同理得

$$\frac{\Delta A_2P_{(2,1)}P_{(1,1)}}{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{\overline{A_2P_{(2,1)}} \times \overline{A_2P_{(1,1)}}}{\overline{A_2A_1} \times \overline{A_2A_3}} = \frac{\frac{a_1 - a_2 + a_3}{2} \times \frac{a_1 - a_2 + a_3}{2}}{a_1 \times a_3}$$

$$\frac{\Delta A_3P_{(2,1)}P_{(3,1)}}{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{\overline{A_3P_{(2,1)}P_{(2,1)}} \times \overline{A_3P_{(3,1)}}}{\overline{A_3A_1} \times \overline{A_3A_2}} = \frac{\frac{a_1 + a_2 - a_3}{2} \times \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}}{a_1 \times a_2}$$

帶入計算，可得到以下結果

$$\frac{\Delta P_{(2,1)}P_{(3,1)}P_{(1,1)}}{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{\Delta A_1A_2A_3 - \Delta A_1P_{(1,1)}P_{(3,1)} - \Delta A_2P_{(2,1)}P_{(1,1)} - \Delta A_3P_{(2,1)}P_{(3,1)}}{\Delta A_1A_2A_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot a_1a_2 \cdot \sin A_3 \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}\right)^2}{a_1a_2} - \frac{\left(\frac{a_1 - a_2 + a_3}{2}\right)^2}{a_1a_3} - \frac{\left(\frac{-a_1 + a_2 + a_3}{2}\right)^2}{a_2a_3}\right]}{\frac{1}{2} \cdot a_1a_2 \cdot \sin A_3}$$

$$= \frac{(a_1 + a_2 - a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)}{4a_1a_2a_3} = \frac{2r^2S}{a_1a_2a_3}$$

為方便計算，令$r_k$為$\Delta P_{(1,k)}P_{(2,k)}P_{(3,k)}$之內切圓半徑

因為$\dfrac{\Delta P_{(1,1)}P_{(2,1)}P_{(3,1)}}{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{2r^2s}{a_1a_2a_3}$

$\Longrightarrow \Delta P_{(1,1)}P_{(2,1)}P_{(3,1)}=\Delta A_1A_2A_3\times\dfrac{2r^2s}{a_1a_2a_3}$

可推得

$$\Delta P_{(1,k)}P_{(2,k)}P_{(3,k)}=\Delta P_{(1,k-1)}P_{(2,k-1)}P_{(3,k-1)}\times\frac{2r_{k-1}^2s_{k-1}}{p_{(1,k-1)}p_{(2,k-1)}p_{(3,k-1)}}$$

因此有

$$\Delta P_{(1,n)}P_{(2,n)}P_{(3,n)}=\Delta A_1A_2A_3\times\frac{2r^2s}{a_1a_2a_3}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2r_k^2s_k}{p_{(1,k)}p_{(2,k)}p_{(3,k)}}$$

三、四邊形

在找到切點三角形與其所切出的三個三角形各心連線所形成的性質後，我們聯想到若改為切點四邊形，是否也會有一樣有趣的結果，因此進行以下研究切點四邊形的相關幾何性質。

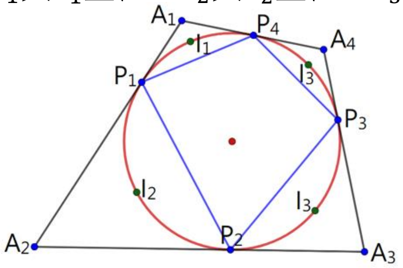
**性質七、切點四邊形切出的四個三角形之內心在所夾圓弧中點**

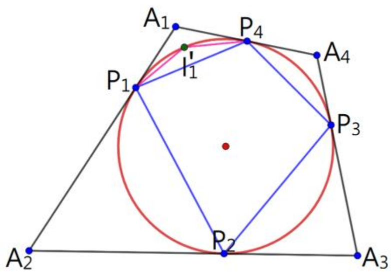
已知：$I_1$為$\Delta A_1P_1P_4$之內心，$I_2$為$\Delta A_2P_1P_2$之內心，$I_3$為$\Delta A_3P_2P_3$之內心，

$I_4$為$\Delta A_4P_3P_4$之內心，$I_1'$為弧$P_1P_4$之中點，$I_2'$為弧$P_1P_2$之中點，

$I_3'$為弧$P_2P_3$之中點，$I_4'$為弧$P_3P_4$之中點

求證：$I_1$與 $I_1'$重合， $I_2$與 $I_2'$重合， $I_3$與 $I_3'$重合，$I_4$與 $I_4'$重合




$Proof$:

與性質二同理

得$I_1'$與$I$重合，$I_2$與 $I_2'$重合， $I_3$與 $I_3'$重合，$I_4$與 $I_4'$重合

**性質八、做$\Delta A_1P_1P_4,\Delta A_2P_1P_2,\Delta A_3P_2P_3,\Delta A_4P_3P_4$的外接圓，**

**四圓交於一點，此點為四邊形$A_1A_2A_3A_4$之內心**

已知：$P_1,P_2,P_3,P_4$為四邊形$A_1A_2A_3A_4$的切點

求證：四圓交點為四邊形$A_1A_2A_3A_4$的內心

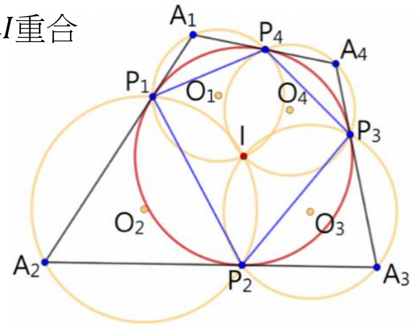
$Proof$:

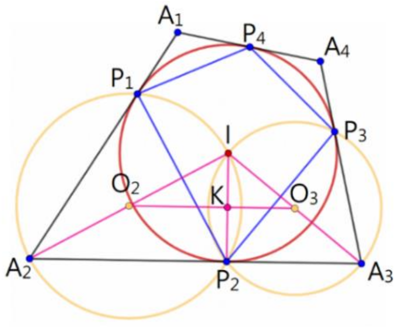
與性質四同理，可得

$\overline{A_4I_1'}$平分$\angle P_3A_4P_4$，$\overline{A_3I_2'}$平分$\angle P_3A_3P_2$，$\overline{A_1I_3'}$平分$\angle P_1A_1P_4$，$\overline{A_2I_4'}$平分$\angle P_1A_2P_2$

又因四邊形$A_1A_2A_3A_4$有內切圓，即四條角平分線交一點內心

$\Rightarrow$ $I_1'I_2'I_3'I_4'$與$I$重合



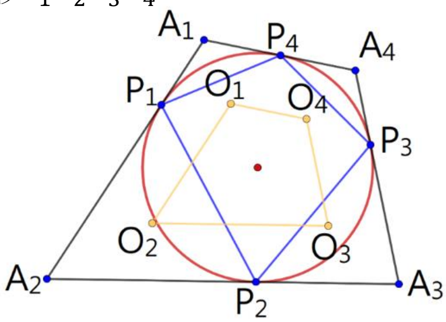




**性質九、外心連成的四邊形相似於原四邊形，且面積比為$1:4$**

已知：$P_1,P_2,P_3,P_4$為四邊形的切點，

$O_1,O_2,O_3,O_4$分別為$\Delta A_1P_1P_4,\Delta A_2P_1P_2,\Delta A_3P_2P_3,\Delta A_4P_3P_4$之外心

求證：四邊形$O_1O_2O_3O_4$~四邊形$A_1A_2A_3A_4$且 $\dfrac{\text{四邊形}O_1O_2O_3O_4}{\text{四邊形}A_1A_2A_3A_4}=\dfrac{1}{4}$




$Proof$:

$\because \dfrac{\overline{IO_2}}{\overline{IB}}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overline{IO_3}}{\overline{IC}},\angle O_2IO_3=\angle BIC$

$\therefore \Delta O_2IO_3\sim\Delta BIC\Longrightarrow\overline{O_2O_3}//\overline{BC},\dfrac{\overline{O_2O_3}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{2}$

同理得

$\overline{O_1O_2}//\overline{AB},\dfrac{\overline{O_1O_2}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2},\overline{O_1O_4}//\overline{AD},\dfrac{\overline{O_1O_4}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{2},\overline{O_3O_4}//\overline{CD},\dfrac{\overline{O_3O_4}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ 四邊形$O_1O_2O_3O_4$~四邊形$A_1A_2A_3A_4$且 $\dfrac{\text{四邊形}O_1O_2O_3O_4}{\text{四邊形}A_1A_2A_3A_4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

性質十、切點四邊形切出的四個三角形的垂心連線是平行四邊形，

且面積為四邊形$P_1P_2P_3P_4$的兩倍

已知：$P_1, P_2, P_3, P_4$為四邊形$A_1A_2A_3A_4$的切點，

$H_1H_2H_3H_4$分別為$\Delta A_1P_1P_4, \Delta A_2P_1P_2, \Delta A_3P_2P_3, \Delta A_4P_3P_4$之垂心

求證：四邊形$H_1H_2H_3H_4$為平行四邊形，

四邊形$H_1H_2H_3H_4$是四邊形$P_1P_2P_3P_4$面積之兩倍

$Proof$:

(1)四邊形$H_1H_2H_3H_4$為平行四邊形

與性質六同理，可得

$\overline{H_1P_1}//\overline{H_4P_3}$且$\overline{H_1P_1} = \overline{H_4P_3} = r$，

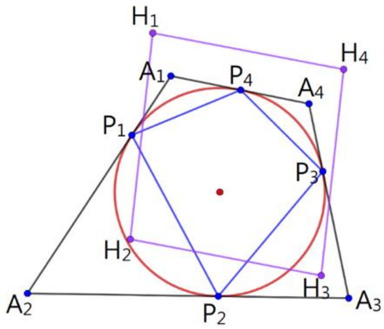
同理可得$\overline{H_2P_1}//\overline{H_3P_3}$且$\overline{H_2P_1} = \overline{H_3P_3} = r$

$\Rightarrow \overline{H_1P_1} = \overline{H_4P_3}, \overline{H_2P_1} = \overline{H_3P_3}, \angle H_1P_1H_2 = \angle H_3P_3H_4$

$\Rightarrow \Delta P_1H_1H_2 \cong \Delta P_3H_3H_4$ $(SAS)$

故$\overline{H_1H_2} = \overline{H_3H_4}$，同理可得$\overline{H_1H_4} = \overline{H_2H_3}$

故四邊形$H_1H_2H_3H_4$為平行四邊形




(2)四邊形$H_1H_2H_3H_4$面積為四邊形$P_1P_2P_3P_4$面積兩倍

$\because \overline{P_4H_1} = \overline{P_2H_2}$，$\overline{P_4H_4} = \overline{P_2H_3}$，$\overline{H_1H_4} = \overline{H_2H_3}$

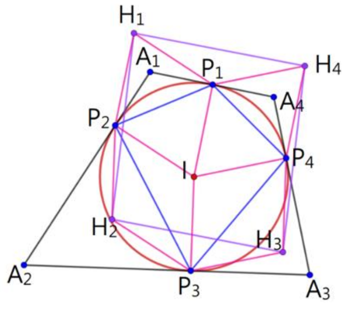
$\Rightarrow \Delta H_2P_2H_3 \cong \Delta H_1P_4H_4$

因$\Delta H_2P_2H_3$面積與$\Delta H_1P_4H_4$相同，

$\Delta H_3P_3H_4$面積與$\Delta H_1P_1H_2$相同

故四邊形$H_1H_2H_3H_4$與八邊形$H_1P_1H_2P_2H_3P_3H_4P_4$相同，

也是四邊形$P_1P_2P_3P_4$面積之兩倍。



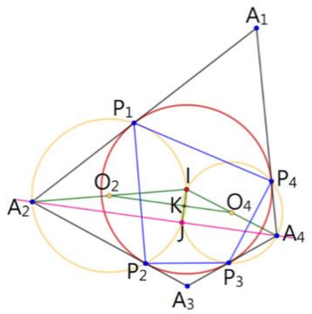
性質十一、$\Delta A_2P_2P_3$與$\Delta A_4P_4P_1$外接圓分別為圓$O_2$,圓$O_4$，且兩圓交於

$I,J$，其中$I$為內心，$J$在$\overline{A_2A_4}$上

已知：隔一個頂點的對角圓有兩個交點，而其中一個位於內心

求證：$J$位於$\overline{A_2A_4}$上

*Proof*:




$\because \overline{IJ}$為$O_2,O_4$之公弦$\Longrightarrow \overline{O_2O_4}$垂直平分$\overline{IJ}$

$$\frac{\overline{IO_2}}{\overline{IA_2}}=\frac{1}{2}=\frac{\overline{IO_4}}{\overline{IA_4}}\Longrightarrow \overline{O_2O_4}//\overline{A_2A_4}\Longrightarrow \overleftrightarrow{IJ}\perp\overline{BD}$$

令$\overleftrightarrow{IJ}$交$\overline{A_2A_4}$於$J'$

又$\dfrac{\overline{IK}}{\overline{IJ'}}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overline{IK}}{\overline{IJ}}\Longrightarrow J$與$J'$重合

故$J$在$\overline{A_2A_4}$上，同理得$\Delta A_1P_1P_2$外接圓與$\Delta A_3P_3P_4$外接圓兩交點交於內心及$\overline{A_1A_3}$上。

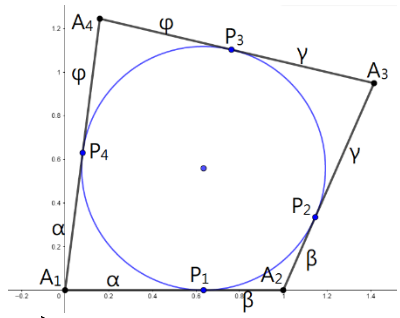
性質十二、原四邊形的四個邊與切點四邊形的四個邊交於八點，

此八點在同一個二次曲線上

已知：$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交$\overleftrightarrow{P_4P_3}$於$C$，$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交$\overleftrightarrow{P_2P_3}$於$B$，$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交$\overleftrightarrow{P_1P_4}$於$D$，$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交$\overleftrightarrow{P_4P_3}$於$E$

$\overleftrightarrow{A_3A_4}$交$\overleftrightarrow{P_4P_1}$於$G$，$\overleftrightarrow{A_3A_4}$交$\overleftrightarrow{P_2P_1}$於$F$，$\overleftrightarrow{A_1A_4}$交$\overleftrightarrow{P_1P_2}$於$J$，$\overleftrightarrow{A_1A_4}$交$\overleftrightarrow{P_2P_3}$於$K$

求證：$GFCKEJDB$八點在同一個二次曲線上



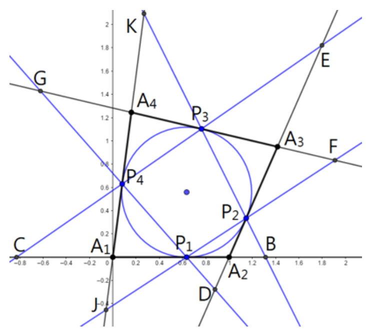

*Proof*

令$\overline{A_1A_2}=1,\overline{A_1P_1}=\overline{A_1P_4}=\alpha,\overline{A_2P_1}=\overline{A_2P_2}=\beta,$

$\overline{A_3P_2}=\overline{A_3P_3}=\gamma,\overline{A_4P_3}=\overline{A_4P_4}=\varphi$

為方便計算，我們將四邊形座標化，令$A_1=(0,0),A_2=(1,0),$

$A_3=(1-(\beta+\gamma)\cos A_2\,,(\beta+\gamma)\sin A_2),$




$A_4=((\alpha+\varphi)\cos A_1\,,(\alpha+\varphi)\sin A_1),P_1=(\alpha,0)$

$P_2=(1-\beta\cos A_2\,,\beta\sin A_2)$

$P_3=\left(x_{A_4}-\varphi\cos(A_1+A_4)\,,y_{A_4}-\varphi\sin(A_1+A_4)\right)or$

$(x_{A_3}+\gamma\cos(A_2+A_3)\,,y_C-\gamma\sin(A_2+A_3))$

$H=(\alpha\cos A_1\,,\alpha\sin A_1)$

$L_{\overleftrightarrow{A_1A_4}}$： $\tan A_1\,x-y=0$

$L_{\overleftrightarrow{A_1A_2}}$： $y = 0$

$L_{\overleftrightarrow{A_2A_3}}$：$\tan A_2\, x + y = \tan A_2$

$L_{\overleftrightarrow{A_3A_4}}$：$\big((\alpha+\varphi)\sin A_1 - (\beta+\gamma)\sin A_2\big)x - \big((\alpha+\varphi)\cos A_1 + (\beta+\gamma)\cos A_2 - 1\big)y$

$= -(\alpha+\varphi)[(\beta+\gamma)\sin(A_1+A_2) - \sin A_1]$

$L_{\overleftrightarrow{P_1P_2}}$：$\beta \sin A_2\, x - (1 - \beta\cos A_2 - \alpha)y = \ \alpha\beta \sin A_2$

$L_{\overleftrightarrow{P_1P_4}}$：$\sin A_1\, x - (\cos A_1 - 1)y = \ \alpha \sin A_1$

$L_{\overleftrightarrow{P_3P_2}}$：$(\sin A_2 - \sin(A_2+A_3))x + (\cos A_2 - \cos(A_2+A_3))$

$= \sin A_2 + \sin(A_2+A_3) + \beta \sin A_3$

$L_{\overleftrightarrow{P_3P_4}}$：$(\sin A_1 - \sin(A_1+A_4))x - (\cos A_1 - \cos(A_1+A_4))y = -\alpha \sin A_4$

解聯立得

$$B = (\left(1 + \frac{\beta \sin A_3}{\sin A_2 - \sin(A_2+A_3)}, 0\right))$$

$$C = \left(\frac{-\alpha \sin D}{\sin A_1 - \sin(A_1+D)}, 0\right)$$

$$J = \left(\frac{-\alpha\beta \sin A_2}{\tan A_1 (1 - \beta\cos A_2 - \alpha) - \beta \sin A_2}, \frac{-\tan A_1\, \alpha\beta \sin A_2}{\tan A_1 (1 - \beta\cos A_2 - \alpha) - \beta \sin A_2}\right)$$

$$K = \left(\frac{\sin A_2 - \sin(A_2+A_3) + \beta \sin A_3}{\tan A_1 (\cos A_2 - \cos(A_2+A_3)) + \sin A_2 - \sin(A_2+A_3)}, \frac{\tan A_1 (\sin A_2 - \sin(A_2+A_3) + \beta \sin A_3)}{\tan A_1 (\cos A_2 - \cos(A_2+A_3)) + \sin A_2 - \sin(A_2+A_3)}\right)$$

$$D = \left(\frac{\tan A_2 (\cos A_1 - 1) + \alpha \sin A_1}{\tan A_2 (\cos A_1 - 1) + \sin A_1}, \tan A_2 (1 - \frac{\tan A_2 (\cos A_1 - 1) + \alpha \sin A_1}{\tan A_2 (\cos A_1 - 1) + \sin A_1})\right)$$

$$E = \left(\frac{-\alpha \sin A_4 + \tan A_2 (\cos A_1 - \cos(A_1+A_4))}{\tan A_2 (\cos A_1 - \cos(A_1+A_4)) + \sin A_1 - \sin(A_1+A_4)}, \tan A_2 (-\frac{-\alpha \sin A_2 + \tan A_2 (\cos A_1 - \cos(A_1+A_4))}{\tan A_2 (\cos A_1 - \cos(A+A_4)) + \sin A_1 - \sin(A_1+A_4)}\right)$$

$$G = (\frac{-(\alpha+\varphi)\,((\beta+\gamma)sin(A_1+A_2) - sinA_1)\,(-cosA+1) + \ ((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1)\alpha sinA_1)}{((\alpha+\varphi)sinA_1 - \ (\beta+\gamma)sinA_2)\,(-cosA_1+1) + \ ((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1)sinA_1},$$

$$\frac{sinA_1}{cosA_1 - 1}\left(\frac{-(\alpha+\varphi)\,((\beta+\gamma)sin(A_1+A_2) - sinA_1)\,(-cosA_1+1) + \ ((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1)\alpha sinA_1)}{((\alpha+\varphi)sinA_1 - \ (\beta+\gamma)sinA_2)\,(-cosA_1+1) + \ ((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1)sinA_1}\right))$$

$$F = (\frac{(\alpha+\varphi)\big((\beta+\gamma)\sin(A_1+A_2) - sinA_1\big)(1 - \beta cosA_2 - \alpha) + \ \big((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1\big)\alpha\beta sinA_2}{-((\alpha+\varphi)sinA_1 - \ (\beta+\gamma)sinA_2)\,(1 - \beta cosA_2 - \alpha) + \ ((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1)\beta sinA_2)},$$

$$\frac{\beta sinA_2}{1 - \beta cosA_2 - \alpha}(\frac{(\alpha+\varphi)\big((\beta+\gamma)\sin(A+A_2) - sinA_1\big)(1 - \beta cosA_2 - \alpha) + \ \big((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1\big)\alpha\beta sinA_2}{-((\alpha+\varphi)sinA_1 - \ (\beta+\gamma)sinA_2)\,(1 - \beta cosA_2 - \alpha) + \ ((\alpha+\varphi)cosA_1 + \ (\beta+\gamma)cosA_2 - 1)\beta sinA_2)})$$

假設方程式： $\kappa x^2 + lxy + my^2 + nx + oy + q = 0$

若$\kappa = 0$，則在與$y = 0$只會有一個交點，

但我們在$x$軸上已設定必過兩點，所以$\kappa \neq 0$，為方便計算，我們令$\kappa = 1$

用$B$、$C$、$K$、$J$、$D$解得

$$l=\frac{y_D(y_K-y_D)\left(x_J{}^2y_K-x_K{}^2y_J+n(x_Jy_K-x_Ky_J)+q(y_K-y_J)\right)-y_J(y_J-y_K)\left(x_K{}^2y_h-x_h{}^2y_K+n(x_Ky_D-x_hy_K)+q(y_D-y_K)\right)}{y_Dy_Ky_J((x_J-x_K)(y_K-y_D)-(x_K-x_D)(y_J-y_K))}$$

$$m=\frac{y_D(x_K-x_D)\left(x_J{}^2y_K-x_K{}^2y_J+n(x_Jy_K-x_Ky_J)+q(y_K-y_J)\right)-y_J(x_J-x_K)(x_K{}^2y_h-x_h{}^2y_K+n(x_Ky_D-x_Dy_K)+q(y_D-y_K))}{y_Dy_Ky_J((y_J-y_K)(x_K-x_D)-(y_K-y_D)(x_J-x_K))}$$

$$n=-(x_C+x_B),o=\frac{-(x_K{}^2+lx_Ky_K+my_K{}^2+nx_K+q)}{y_K},q=x_Bx_C$$

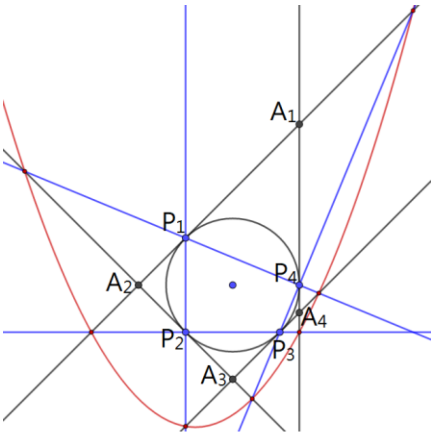
再用$E,G,F$代入得

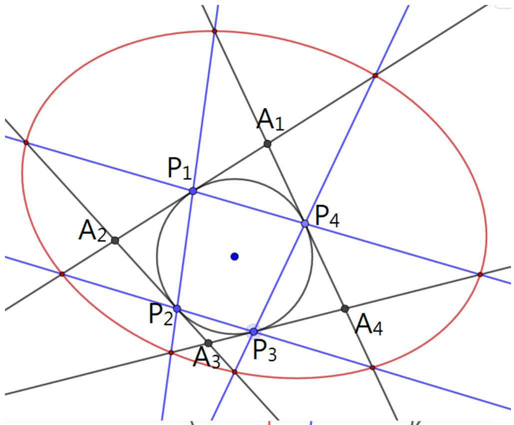
$$x_E{}^2+lx_Ey_E+my_E{}^2+nx_E+oy_E+q=0$$

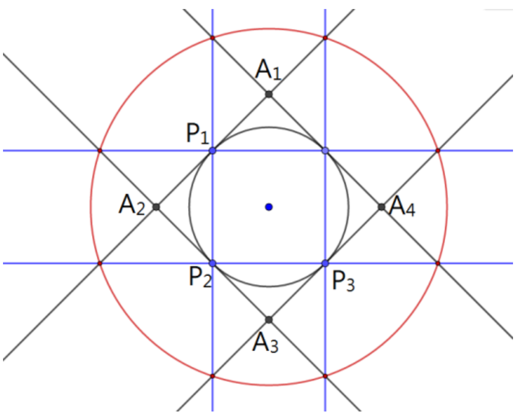
$$x_G{}^2+lx_Gy_G+my_G{}^2+nx_G+oy_G+q=0$$

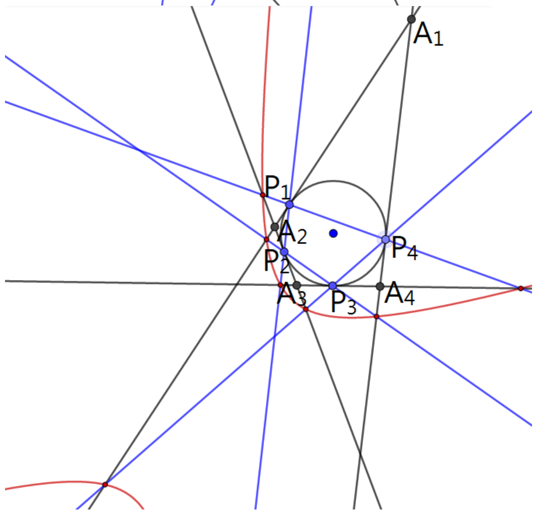
$x_F{}^2+lx_Fy_F+my_F{}^2+nx_F+oy_F+q=0$，故得證。

而二次曲線會有以下四種情況：拋物線、圓、橢圓、雙曲線，如下圖。目前還未找出明確的判斷方式，但由以上推導出的二次曲線方程式，可以在特定條件下區分此四類曲線。詳細說明請見討論二之(二)。



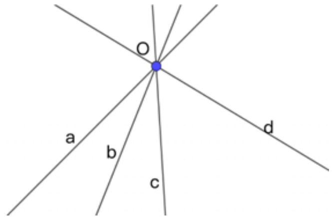




使用解析幾何作證明後，我們在國際科展：「層出不窮的彩蛋有『心』『跡』—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討」(參考資料七)上看到交比、交比的性質和帕斯卡定理等有關於射影幾何的工具，發現對四邊形性質十二的證明很有幫助。

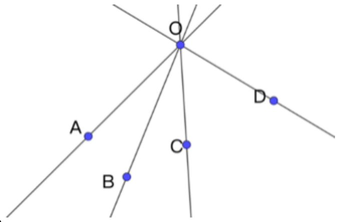
交比定義敘述如下：

定義一、在一條線上取四點$A$、$B$、$C$、$D$，則$(A,B;C,D)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\div\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$


定義二、過同一點$O$的四條線$a$、$b$、$c$、$d$，

則$(a,b;c,d)=\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)}\div\frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)}$

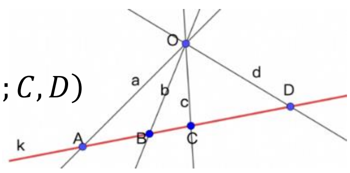



定義三、做任意五點$O$、$A$、$B$、$C$、$D$，

則$O(A,B;C,D)=(\overline{OA},\overline{OB};\overline{OC},\overline{OD})$

定義四、圓$\Gamma$上四點$A$、$B$、$C$、$D$之交比寫作$(A,B;C,D)_{\Gamma}$

至於交比的性質，我們列舉在證明中使用到的性質依序當作為引理。




引理三、令直線$k$分別交過$O$點的四條線$a$、$b$、$c$、$d$於

$A$、$B$、$C$、$D$，則$(a,b;c,d)=O(A,B;C,D)=(A,B;C,D)$

引理四、交比有唯一性。即在直線$L$上取三點$A$、$B$、$C$，

對於任意實數$x$而言，只有一點$D$在$L$上可使$(A,B;C,D)=x$

引理五、在直線$L$上取三點$A$、$B$、$C$，對於任意兩點$X$、$Y$（不在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上）

$A$、$B$、$C$三點共線若且唯若$X(Y,A;B,C)=Y(X,A;B,C)$

引理六、在一圓$\Gamma$上取四點$A$、$B$、$C$、$D$，則對於$\Gamma$上任意點$P$，

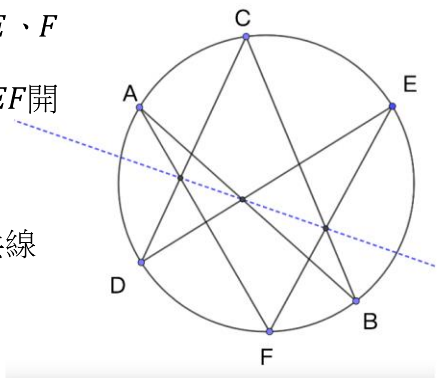
$(A,B;C,D)_{\Gamma}=P(A,B;C,D)$，值得注意的是當$P$與$A$重合時$\overline{PA}$為過$A$對$\Gamma$的切線

引理七、帕斯卡定理及逆定理。$A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$

在同一個二次曲線上若且唯若對$ABCDEF$開

帕斯卡定理成立，即$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{DE}$的交點、

$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{EF}$的交點、$\overleftrightarrow{CD}$與$\overleftrightarrow{FA}$的交點三點共線




$Proof$：

令$\overleftrightarrow{P_1P_4}$交$\overleftrightarrow{P_2P_3}$於$M$，四邊形$A_1A_2A_3A_4$內切圓為$\Gamma$

根據引理六$\Rightarrow(P_2,P_1;P_4,P_3)_{\Gamma}=P_3(P_2,P_1;P_4,P_3)$

再根據引理三 ⇒ $P_3(P_2,P_1;P_4,P_3)=(M,P_1;P_4,G)$

同理 ⇒ $(P_2,P_1;P_4,P_3)_\Gamma=(P_4,P_3;P_2,P_1)_\Gamma=P_1(P_4,P_3;P_2,P_1)=(M,P_3;P_2,B)$

⇒ $(M,P_1;P_4,G)=(M,P_3;P_2,B)$

假設$\overleftrightarrow{GB}$交$\overleftrightarrow{P_4P_2}$於$L$，$\overleftrightarrow{LP_1}$交$\overleftrightarrow{P_3P_2}$於$P'$，則根據引理三

⇒ $(M,P_3;P_2,B)=L(M,P_3;P_2,B)=(M,P';P_4,G)$

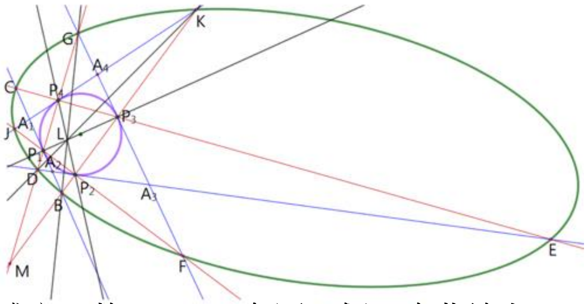
又$(M,P';P_4,G)=(M,P_3;P_2,B)=(M,P_1;P_4,G)$

根據引理四得$P'$與$P_1$重合

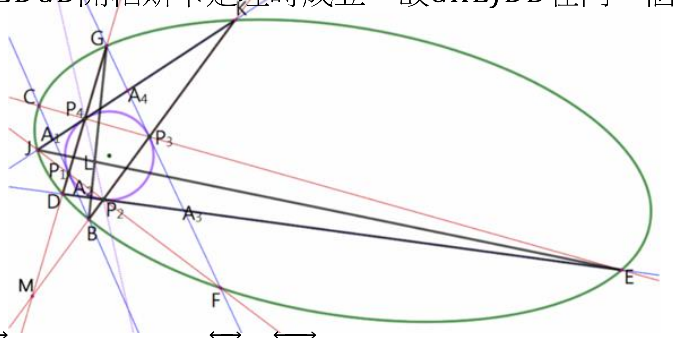
⇒ $\overleftrightarrow{P_1P_3}$、$\overleftrightarrow{P_2P_4}$、$\overleftrightarrow{GB}$三線共點$L$

同理得$\overleftrightarrow{P_1P_3}$、$\overleftrightarrow{P_2P_4}$、$\overleftrightarrow{JE}$三線共點$L$

⇒ $\overleftrightarrow{JE}$交$\overleftrightarrow{GB}$於$L$，且$P_4$、$P_2$、$L$三點共線




根據引理七，即對$KJEDGB$開帕斯卡定理時成立，故$GKEJDB$在同一個二次曲線上




同理可得

$\overleftrightarrow{P_1P_4}$、$\overleftrightarrow{P_2P_3}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{CJ}$四線共點$M$ ⇒ $\overleftrightarrow{CJ}$交$\overleftrightarrow{GD}$於$M$

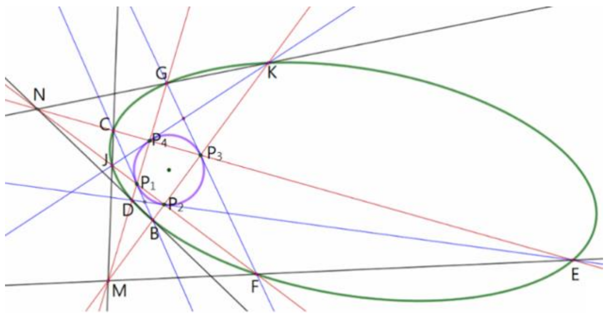
$\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_4P_3}$、$\overleftrightarrow{GK}$、$\overleftrightarrow{BD}$四線共點$N$

⇒ $(P_1,M;D,P_4)=(P_2,M;B,P_3)$

$P_2(P_1,M;A_2,L)=(P_1,M;D,P_4)$

$=(P_2,M;B,P_3)=P_1(P_2,M;A_2,L)$

根據引理五 ⇒ $M$、$A_2$、$L$三點共線

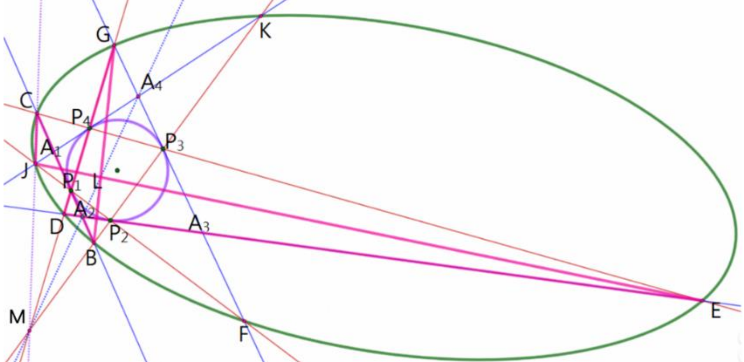



根據引理七，即對$JCBGDE$開帕斯卡定理時成立，故$GCEJDB$在同一個二次曲線上

同理可得$GFEJDB$在同一個

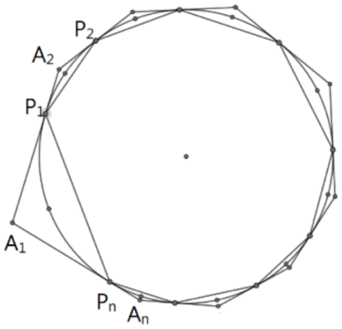
二次曲線上，故$GFCKEJDB$

八點在同一個二次曲線上



四、$n$邊形

(一)規定：




1.$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$有內切圓，

其中切點$P_1$、$P_2$、$P_3 \dots P_{n-1}$、$P_n$分別位於

$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_2} \dots \overline{\mathrm{A_{n-1}A_n}}$、$\overline{A_nA_1}$上

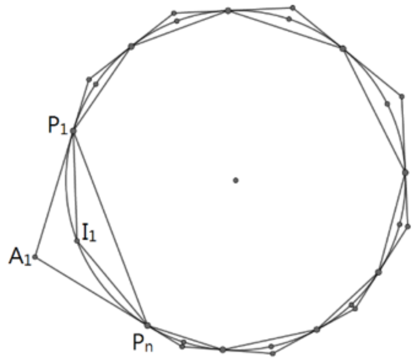
2.令$\Delta A_kP_kP_{k-1}$之內心為$I_k$、外心為$O_k$、垂心為$H_k$

其中會有兩種情形：一、$2 \le k \le n$；二、$k = 1$，此時$k - 1$則改寫為$n$。

3.$r$為$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$的內切圓半徑

(二)切點$n$邊形的相關幾何性質

$\boxed{\text{性質十三、 } I_k\text{位於弧}P_kP_{k-1}\text{中點上}}$




已知：$\Delta A_kP_kP_{k-1}$之內心為$I_k$

求證：$I_k$位於弧$P_kP_{k-1}$中點上

$Proof$:

令$\angle A_kP_kP_{k-1}$角平分線交圓$O_k$於$I_k'$

與性質二同理

$\Longrightarrow I_1'$為角平分線交點，與$I_1$重合，且位於弧$P_1P_n$之中點

同理得$I_k$位於弧$P_kP_{k-1}$中點上

| 性質十四、 圓$O_1$、$O_2$、$O_3 \dots O_{n-1}$、$O_n$恰交一點且為$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$之內心 |
|---|

已知：$P_1$、$P_2$、$P_3 \dots P_{n-1}$、$P_n$為$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$的切點

求證：圓$O_1$、 … 、$O_n$交一點於$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$之內心

$Proof$:

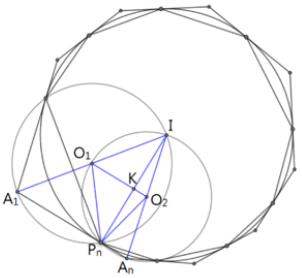
令$\Delta A_1P_1P_n$的外接圓與$\Delta A_nP_nP_{n-1}$的外接圓交於$I_1'$

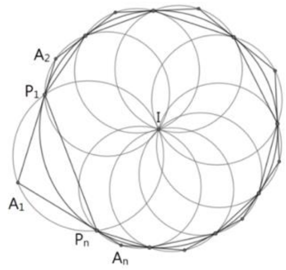
$\Delta A_kP_kP_{k-1}$的外接圓與$\Delta A_{k-1}P_{k-1}P_{k-2}$的外接圓交於$I_k'$

與三角形之性質四同理

$\Rightarrow I_1' \dots I_k' \dots I_n'$與$I$重合

故圓$O_1$、$O_2$、$O_3 \dots O_{n-1}$、$O_n$交於$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$之內心




性質十五、 $n$邊形$O_1O_2O_3O_4 \dots O_{n-1}O_n$與$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$相似，

且面積比為$\frac{1}{4}$

已知：$P_1$、$P_2$、$P_3 \dots P_{n-1}$、$P_n$為$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$的切點，

$\Delta A_kP_kP_{k-1}$外心為$O_k$

求證：$n$邊形$O_1O_2O_3O_4 \dots O_{n-1}O_n \sim n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$，且面積比為$\frac{1}{4}$

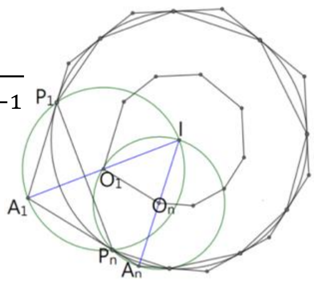
$Proof$:

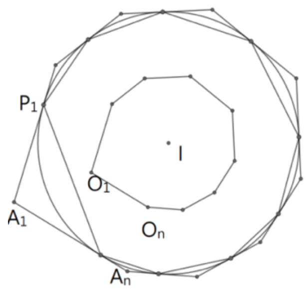
與四邊形之性質三同理

$\Rightarrow \overline{O_1O_n} = \frac{1}{2}\overline{A_1A_n}$，$\overline{O_kO_{k-1}} = \frac{1}{2}\overline{A_kA_{k-1}}$

$\Rightarrow \angle O_{n-1}O_nO_1 = \angle P_{n-1}A_nA_{n-1}$，

$\angle O_{k-1}O_kO_k = \angle P_{k-1}A_kA_{k-1}$



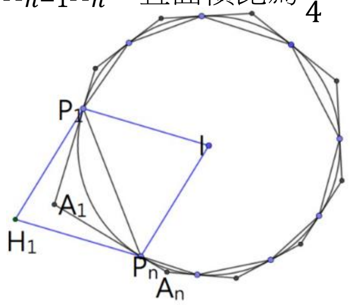

故$n$邊形$O_1O_2O_3O_4 \dots O_{n-1}O_n \sim n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$，且面積比為$\frac{1}{4}$

性質十六、 $\overline{P_kH_k} = r = \overline{P_{k-1}H_k}$

已知：$P_1$、$P_2$、$P_3 \dots P_{n-1}$、$P_n$為

$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$的切點

求證：$\overline{P_kH_k} = r = \overline{P_{k-1}H_k}$



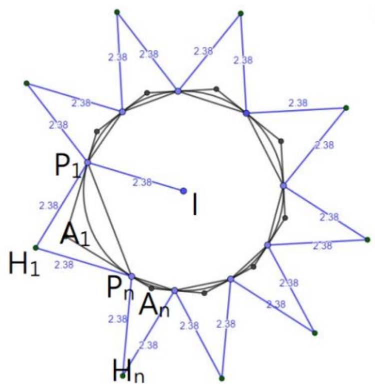

$Proof$:

與性質六同理可得

$r = \overline{IP_n} = \overline{IP_1} \therefore$ 四邊形$IP_1H_1P_n$為菱形

$\Rightarrow \overline{P_1H_1} = r = \overline{P_nH_1}$

同理得$\overline{P_kH_k} = r = \overline{P_{k-1}H_k}$



性質十七、當$n-2\geq|m-k|\geq 2$，即$m,k$相隔一頂點以上時，$O_m$、$O_k$兩個交點分別交於內心及$\overline{A_mA_k}$上

已知：隔$k$個頂點的對角圓有兩個交點，而其中一個位於內心

求證：另一個交點位於對角線上

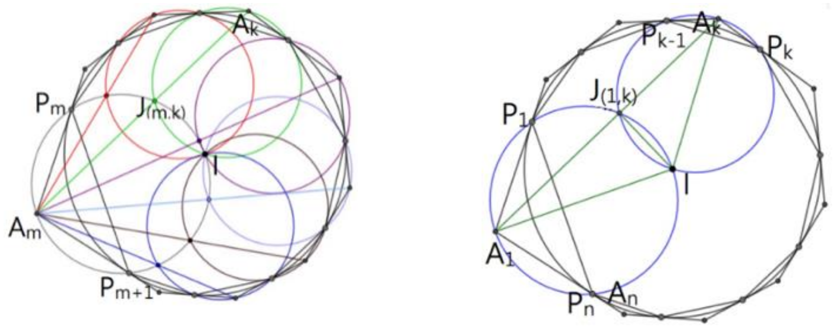
$Proof$:

令圓$O_1$,圓$O_k$交於$I$及$J_{(1,k)}$，圓$O_m$,圓$O_k$交於$I$及$J_{(m,k)}$，$\overline{O_1O_k}$交$\overline{IJ_{(1,k)}}$於$K$，

$\overleftrightarrow{IJ_{(1,k)}}$交$\overline{A_1A_k}$於$J_{(1,k)}'$,$\overleftrightarrow{IJ_{(m,k)}}$交$\overline{A_mA_k}$於$J_{(m,k)}'$。

與性質十一同理，$J'_{(1,k)}$與$J_{(1,k)}$重合，故$J_{(1,k)}$在$\overline{A_1A_k}$上。

同理得$J_{(m,k)}$在$\overline{A_mA_k}$上故當$n-2\geq|m-k|\geq 2$，即$m,k$相隔一頂點以上時，$O_m$、$O_k$兩個交點分別交於內心及$\overline{A_mA_k}$上。



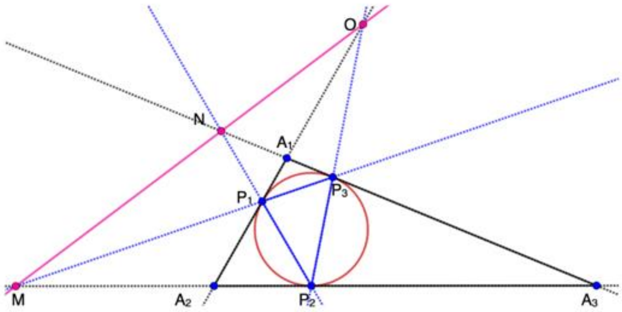

# 伍、研究結果

一、內外三角形面積比值

| 條件 | 面積比值 |
| --- | --- |
| 相似三角形 | $\frac{4r^2S}{a_1a_2a_3}$ |
| 直角三角形 | $\frac{r}{S}\times\sin 2D$ |
| 正三角形 | $\frac{3\sqrt{3}r}{4S}$ |
| 等腰三角形 | $\frac{2r\cos^2\frac{D}{2}\sin D}{S}$ |
| 等差三角形 | $\frac{\sqrt{3r^2\cdot\sin^2 D-3k^2}\cdot\sin D}{S}$ |
| 等比三角形 | $\frac{d\sin^2 D}{S}$ |

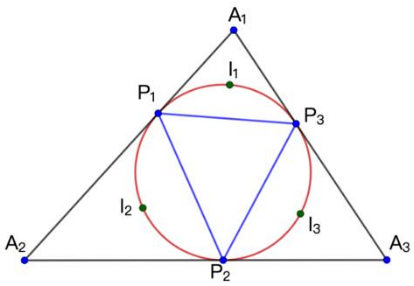
## 二、與切點$\Delta P_1P_2P_3$相關的幾何性質

(一)、$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_1A_3}$和$\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_1P_3}$的延長線交於三點，此三點共線

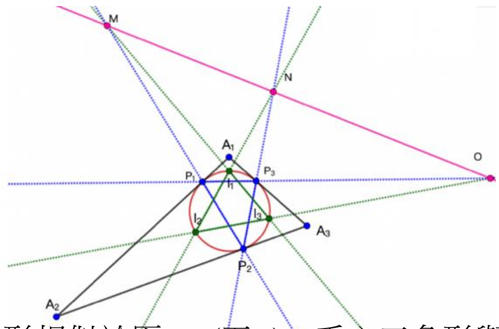



## 三、$\Delta A_1P_1P_3, \Delta A_2P_1P_2, \Delta A_3P_2P_3$的幾何性質

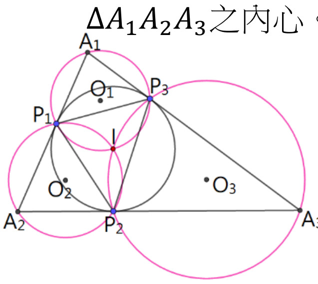
(一)、除了$\Delta P_1P_2P_3$外的三個小三角形的內心皆在其所夾圓弧的中點上。



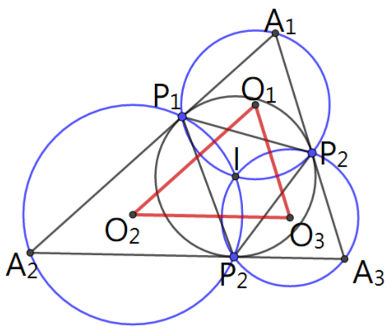

(二)、切點三角形分割出的三個三角形的內心互相連線與切點三角形的邊的延長線會交於三點，且此三點共線。



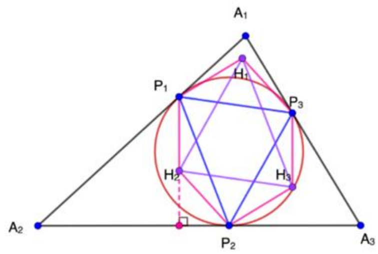

(三)、$\Delta A_1P_1P_3, \Delta A_2P_1P_2, \Delta A_3P_2P_3$的外接圓交於一點，此點為$\Delta A_1A_2A_3$之內心。




(四)、外心三角形相似於原三角形且面積比為$1:4$。




(五 s)、垂心三角形與切點三角形全等。

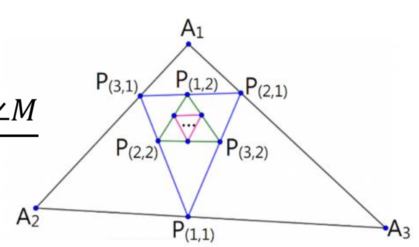



## 四、做$n$層的切點三角形

(一) $n$層的切點三角形的角度

定義$\angle X_{(M,n)}$，$M$為$A_1, A_2, A_3$，$n$為層數

$$\text{則}\angle X_{(M,n)} = \frac{(2^n - (-1)^n) \times 180^o + 3 \times (-1)^n \angle M}{3 \cdot 2^n}$$




(二) $n$層的切點三角形的邊長

定義$x_{(M,n)}$，且$M$為$A_1, A_2, A_3$，$n$為層數，則有

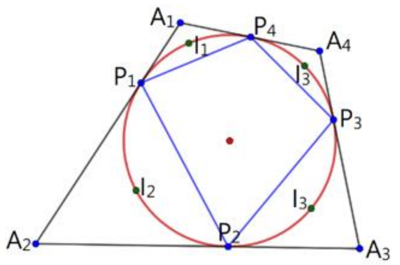
$$x_{(M,n+1)} = \left(s_n - x_{(M,n)}\right) \times \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{(2^n - (-1)^n) \times 180^{\mathrm{o}} + 3 \times (-1)^n \angle M}{3 \cdot 2^n}\right)}$$

(三) $n$層的切點三角形的面積

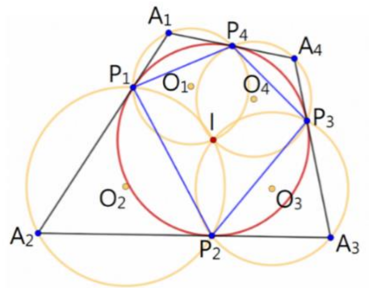
$$\Delta P_{(1,n)}P_{(2,n)}P_{(3,n)} = \Delta A_1A_2A_3 \times \frac{2r^2 s}{a_1a_2a_3} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2r_k^2 s_k}{p_{(1,k)}p_{(2,k)}p_{(3,k)}}$$

五、切點四邊形的相關幾何性質

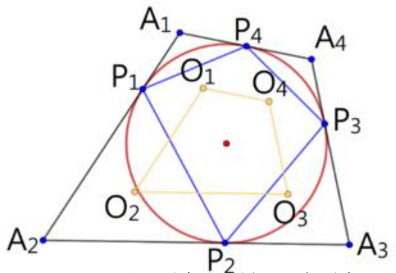
(一)切點四邊形切出的四個三角形之內心在所夾圓弧中點



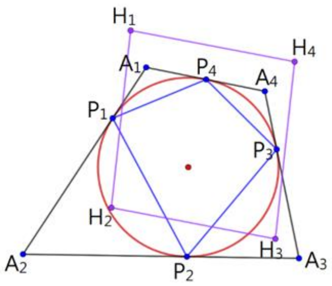

(二)做$\Delta A_1P_1P_4, \Delta A_2P_1P_2, \Delta A_3P_2P_3,$ $\Delta A_4P_3P_4$的外接圓，四圓共點，此點為四邊形$A_1A_2A_3A_4$之內心。



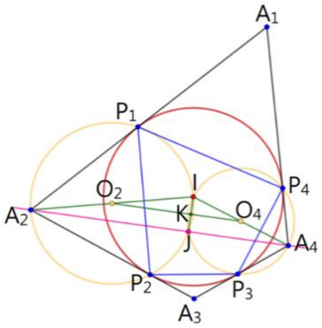

(三)外心四邊形相似於原四邊形，且面積比為 1: 4。



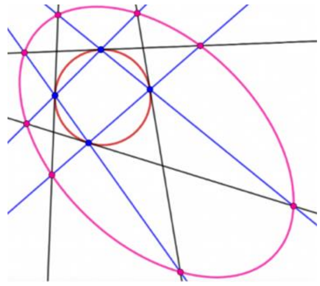

(四)切點四邊形切出的四個三角形的垂心連線是平行四邊形，且面積為四邊形$P_1P_2P_3P_4$面積之兩倍。




(五)$\Delta A_2P_1P_2$與$\Delta A_4P_3P_4$的外接圓分別為圓$O_1$,圓$O_2$，且兩圓交於$I, J$，$\overline{O_1O_2}$交$\overline{IJ}$於$K$。

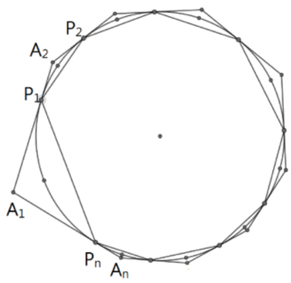



(六)原四邊形的四個邊與切點四邊形的四個邊交於八點，此八點共二次曲線

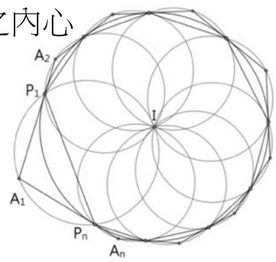


六、$n$邊形

(一)$I_k$位於弧$P_kP_{k-1}$中點上



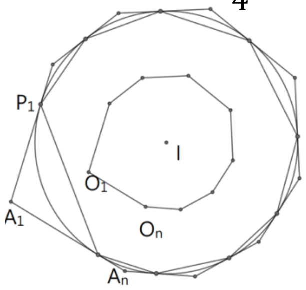

(二)圓$O_1$、$O_2$、$O_3$ … $O_{n-1}$、$O_n$交於$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$之內心



(三)$n$邊形$O_1O_2O_3O_4 \ldots O_{n-1}O_n$~

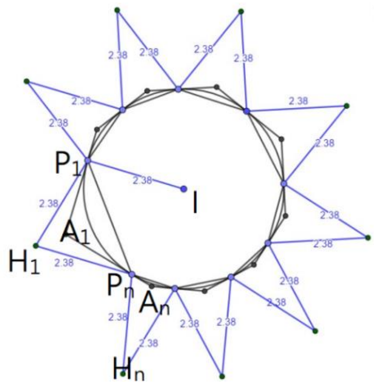
$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n$

，且面積比值為$\frac{1}{4}$




(四)$\overline{P_kH_k} = r$

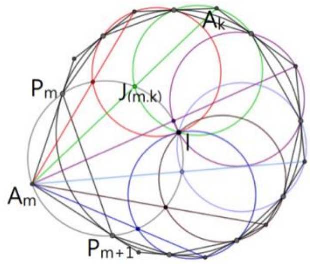
$= \overline{P_{k-1}H_k}$




(五)圓$O_m$、圓$O_k$兩個交點分別

交於內心及$\overline{A_mA_k}$上且

$n-2 \geq |m-k| \geq 2$，




# 陸、討論

一、文獻探討

(一)、我們從第 57 屆中小學科學展覽會，國中組數學科，劉安家的作品

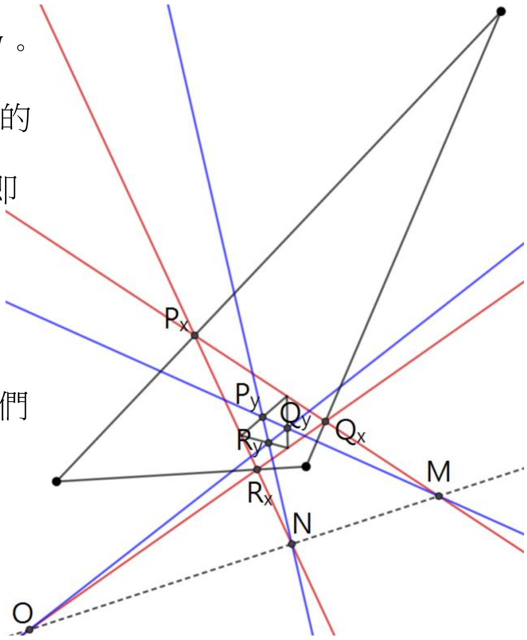
「從三個交於一點的圓形想起——Miquel’ s Theorem 之推廣」看到邊形密克定理

之推廣」：「若在多邊形$A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n$中，$P_1$、$P_2$、$P_3 \ldots P_{n-1}$、$P_n$分別位於$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2} \ldots \overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$，則$\Delta A_2P_2P_3 \ldots \Delta A_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$的外接圓共點的條件是有$n-3$個隔一頂點的對角圓兩交點之一個為在 $\mathrm{n}-3$ 條自己所屬的對角線上。」而在我們的研究中，因為我們多了一個有內切圓的條件，$n$個圓皆交在內心，並利用此條件，將此性質推展到任兩個圓皆交在自己所屬的對角線上，即隔$k$個頂點的對角圓皆交於內心及其所屬的對角線上($|m-k| \geq 2$)。

(二)、我們在完成作品後，在中學生網站，藍偉豪的作品，「三角形旁切圓的幾何性質初探」中，看到了他也有做切點三角形與原三角形的面積比，而結果恰與我們相同，皆為$\frac{4r^2S}{a_1a_2a_3}$，但他所探討的重點是在面積比的最大值，而我們重點則其他幾何性質的探討，方向不同。

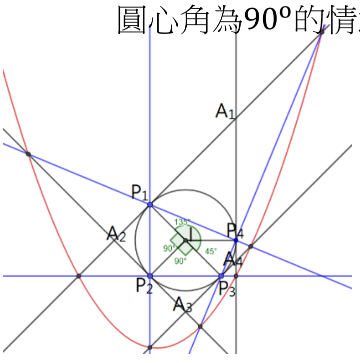
二、未來展望

(一)、任兩層切點三角形的邊之延長線交於三點，此三點共線令$\overline{P_xQ_x}$交$\overline{P_yQ_y}$於$M$，$\overline{Q_xR_x}$交$\overline{Q_yR_y}$於$O$，$\overline{P_xR_x}$交$\overline{P_yR_y}$於$N$，且$x,y\in N$。則$M,N,O$三點共線，如圖。我們對此證明的想法在於，$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta P_nQ_nR_n$符合時，即證明任兩層切點三角形的邊之延長線交於的三點會共線。但無法像前面的證明一樣直接使用西瓦定理證明三線共點，因此我們想從延長線想起：令$\overleftrightarrow{A_1P_n}$交$\overline{A_2A_3}$於$K_1$，$\overleftrightarrow{A_2Q_n}$交$\overline{A_1A_3}$於$K_2$，$\overleftrightarrow{A_3R_n}$交$\overline{A_1A_2}$於$K_3$，若$\dfrac{\overline{A_1K_3}}{\overline{A_2K_3}}\times\dfrac{\overline{A_2K_1}}{\overline{A_3K_1}}\times\dfrac{\overline{A_3K_2}}{\overline{A_1K_2}}=1$時，即可得到$\overleftrightarrow{A_1P_n}$、$\overleftrightarrow{A_2Q_n}$及$\overleftrightarrow{A_3R_n}$三線共點，再根據笛沙格定理，即可得證，目前還沒有完成證明。目前發現在$x$與$y$相隔 14 層都符合，期望以後想出證明。

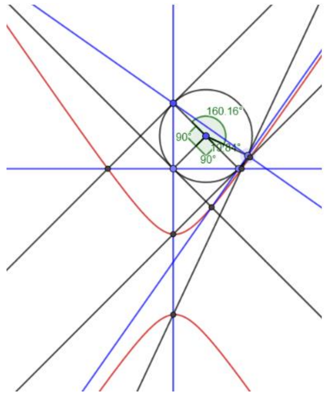



(二)、二次曲線圖形的判斷

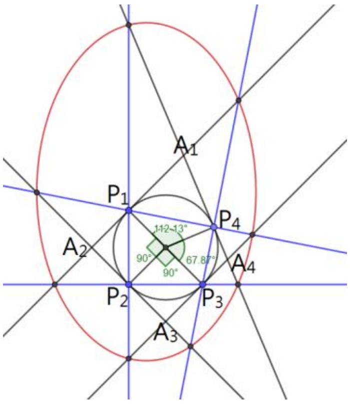
我們發現，當$\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}$且$P_4$位於$\overline{P_1P_2}$的中垂線上時，形成的二次曲線會是拋物線。觀察此時圓心角，可以發現角度會分別為$90^o$、$90^o$、$45^o$和$135^o$，如圖，有$\angle P_1IP_2=90^o$、$\angle P_2IP_3=90^o$、$\angle P_3IP_4=45^o$、$\angle P_4IP_1=135^o$，且原四邊形和切點四邊形之邊長延伸線會只有$7$個交點。在不改變直角的情況下，若將$45^o$變大，二次曲線會呈現橢圓，若將四個圓心角皆調成$90^o$時，則會出現圓形，而在不改變直角的情況下，若將$45^o$變小，二次曲線會呈現雙曲線。以上皆是在固定有相鄰兩圓心角為$90^o$的情況，其他狀況我們仍在發想。



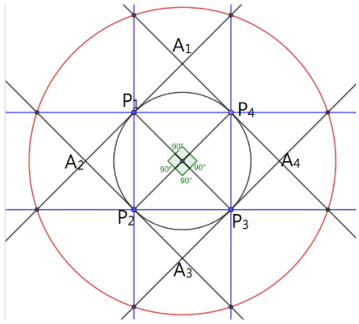

兩個$90^o$、$45^o$和$135^o$



兩個$90^o$、和一個小於$45^o$的角和一個大於$135^o$的角



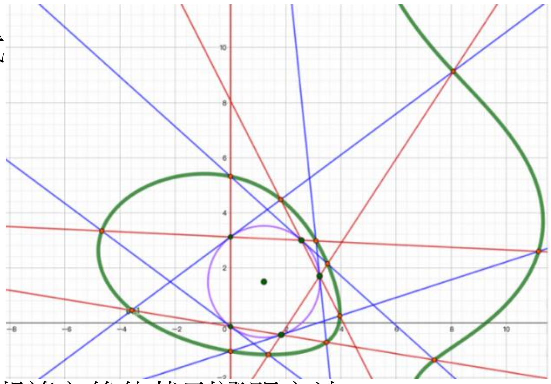

兩個$90^{\circ}$、和兩個大於$45^{\circ}$且小於$135^{\circ}$的角




四個$90^{\circ}$

我們也有想到用方程式來判斷令二次方程式為：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$。我們同時發現，若$b^2-4ac>0$形狀為雙曲線，$b^2-4ac=0$為拋物線， $b^2-4ac<0$則為橢圓或圓。但從我們的一般式中較難計算及判斷，此種方法也還在突破中。

(三)、切點五邊形的邊長延伸線與原五邊形邊長延伸線有十五個交點，而我們猜測此十五個交點會在同一個三次曲線上。由於目前仍未找到一些關於射影幾何在三次曲線上的應用，而利用解析幾何的方式太為複雜，所以目前仍在突破中，同時也大膽猜測，切點$n$邊形與原$n$邊形之邊長延伸線的交點會形成一個$n-2$次曲線上，且當原$n$邊形為正$n$邊形時，所形成的圖形是圓，期望之後能找到證明方法。



## 柒、結論

一、算出內外三角形面積比值，且發現面積比都與半周長和內切圓長有關。

二、與切點$\Delta P_1P_2P_3$相關的幾何性質

(一)、$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_1A_3}$和$\overline{P_1P_2},\overline{P_2P_3},\overline{P_1P_3}$的延長線交於三點此三點共線

三、切點三角形分割出的三個三角形$\Delta A_1P_1P_3,\Delta A_2P_1P_2,\Delta A_3P_2P_3$的幾何性質

(一)、切點三角形切割出的三個三角形的內心皆在其所夾圓弧的中點上

(二)、切點三角形分割出的三個三角形的內心互相連線與切點三角形的邊的延長線會交於三點，且此三點共線

(三)、$\Delta A_1P_1P_3, \Delta A_2P_1P_2, \Delta A_3P_2P_3$的外接圓交於一點，此點為$\Delta A_1A_2A_3$之內心。

(四)、外心三角形相似於原三角形且面積比為$1:4$。

(五)、垂心三角形與切點三角形全等。

四、做$n$層的切點三角形

(一)、$n$層的切點三角形的角度

定義$\angle X_{(M,n)}$，$M$為$A, B, C$，$n$為層數

則$\angle X_{(M,n)} = \dfrac{(2^n-(-1)^n)\times 180^o + 3\times(-1)^n\angle M}{3\cdot 2^n}$

(二)、$n$層的切點三角形的邊長

定義$x_{(M,n)}$，且$M$為$A, B, C$，$n$為層數，則有

$$x_{(M,n+1)} = \left(s_n - x_{(M,n)}\right)\times\sqrt{2\left(1-\cos\frac{(2^n-(-1)^n)\times 180^o + 3\times(-1)^n\angle M}{3\cdot 2^n}\right)}$$

(三)、$n$層的切點三角形的面積

$$\Delta P_{(1,n)}P_{(2,n)}P_{(3,n)} = \Delta A_1A_2A_3 \times \frac{2r^2 s}{a_1a_2a_3} \times \prod_{k=1}^{n-1}\frac{2r_k^2 s_k}{p_{(1,k)}p_{(2,k)}p_{(3,k)}}$$

五、切點四邊形的相關幾何性質

(一)、切點四邊形切出的四個三角形之內心在所夾圓弧中點

(二)、做$\Delta A_1P_1P_4, \Delta A_2P_1P_2, \Delta A_3P_2P_3, \Delta P_4P_3P_4$的外接圓，四圓共點，此點為四邊形$A_1A_2A_3A_4$之內心。

(三)、外心四邊形相似於原四邊形，且面積比為$1:4$。

(四)、切點四邊形切出的四個三角形的垂心連線是平行四邊形且面積為四邊形$A_1A_2A_3A_4$面積之兩倍。

(五)、$\Delta A_2P_1P_2$與$\Delta A_4P_3P_4$的外接圓分別為圓$O_1$,圓$O_2$，且兩圓交於$I, J$，$\overline{O_1O_2}$交$\overline{IJ}$於$K$

(六)、原四邊形的四個邊與切點四邊形的四個邊交於八點，此八點共二次曲線

六、$n$邊形

(一)、$I_k$位於弧$P_kP_{k-1}$中點上

(二)、圓$O_1$、$O_2$、$O_3 \dots O_{n-1}$、$O_n$交於$n$邊形$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$之內心

(三)、圓$O_m$、圓$O_k$兩個交點分別交於內心及$\overline{A_mA_k}$上且$|m-k|\geq 2$，即$m,k$

相隔一頂點以上

(四)、$n$邊形$O_1O_2O_3O_4\ldots O_{n-1}O_n\sim n$邊形$A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$，且面積比為$\frac{1}{4}$

(五)、$\overline{P_kH_k}=r=\overline{P_{k-1}H_k}$

七、將所有性質統整如下

| 性質　形狀 | 三角形 | 四邊形 | | $n$邊形 |
|---|---|---|---|---|
| 內心位於所夾圓弧中點 | V | V | | V |
| $n$個圓交於內心 | V | V | | V |
| 外心連線與原圖形相似 | V | V | | V |
| 垂心 | 與切點三角形全等 | 平行四邊形 | … | $\overline{P_kH_k}=r$<br>$=\overline{P_{k-1}H_k}$ |
| 切點$n$邊形與原$n$邊形邊長延伸線交點 | 直線 | 二次曲線 | | (猜測五邊形為三次曲線) |
| 對角圓交點在內心及對角線上 | | V | | V |

綜合以上歸納，我們得出切點$n$邊形切割出的$n$個三角形的結果如下：

1.共同性質：

(1)內心皆位於所夾的圓弧中點

(2) $n$個圓交於內心

(3)外心連線與原圖形相似

(4)垂心到切點的距離都是內切圓半徑(導致在三角形會有全等、四邊形有平行四邊形的性質)

2.只有部分有的性質：

(1)除了三角形外，對角圓交點在內心及對角線上

(2)切點$n$邊形與原$n$邊形的邊長延伸線交點

三角形為三點共線、四邊形為在同一個二次曲線上。

(3)內心三角形與切點三角形的邊長延伸線交點會三點共線。

# 捌、參考文獻資料

一、劉安家，第 57 屆中小學科學展覽會，國中組數學科

「從三個交於一點的圓形想起——Miquel’s Theorem 之推廣」

二、張勛絜、林郁傑、黃偉特，第 58 屆中小學科學展覽會，高中組數學科

「循「密」尋謎，「克」不容緩 —密克定理系列圖形幾何推論與證明」

三、張幼賢，國民中學數學課本第五冊。

四、游森棚，高級中學數學課本第三冊。

五、黃家禮，幾何明珠，九章出版社，民國 103 年 04 月初版。

六、藍偉豪，中學生網站，三角形旁切圓幾何性質之初探。

七、張霈萱，2016 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯：層出不窮的彩蛋有「心」「跡」

—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討

## 【評語】030408

本作品所考慮的是三角形的內切圓的三個切點所形成的三角形及其切割原三角形所得出的三個三角形的種種性質。作者們針對切割出的三個三角形的內、外、垂心連線所得出的新三角形與原三角形的關係，以及一些相關的共線性質做了分析，得出了一些結果。對於四邊形或是多邊形的相對應的性質，也做了討論。內容很有趣，說理的過程也很清楚，十分難得。在討論四邊形的一些性質時，借用了前人作品中的一些概念與符號，如果可以補上這些符號的定義會更好一些。在未來的展望這個部分，作者們提到了一些研究過程中觀察到的性質或是自己的一些猜測，這些現象與猜想十分有意思，如果能針對這些現象與猜想給出一些好的結論或是論述，將會很棒！

# 作品簡報

# 從一個內切圓的問題想起

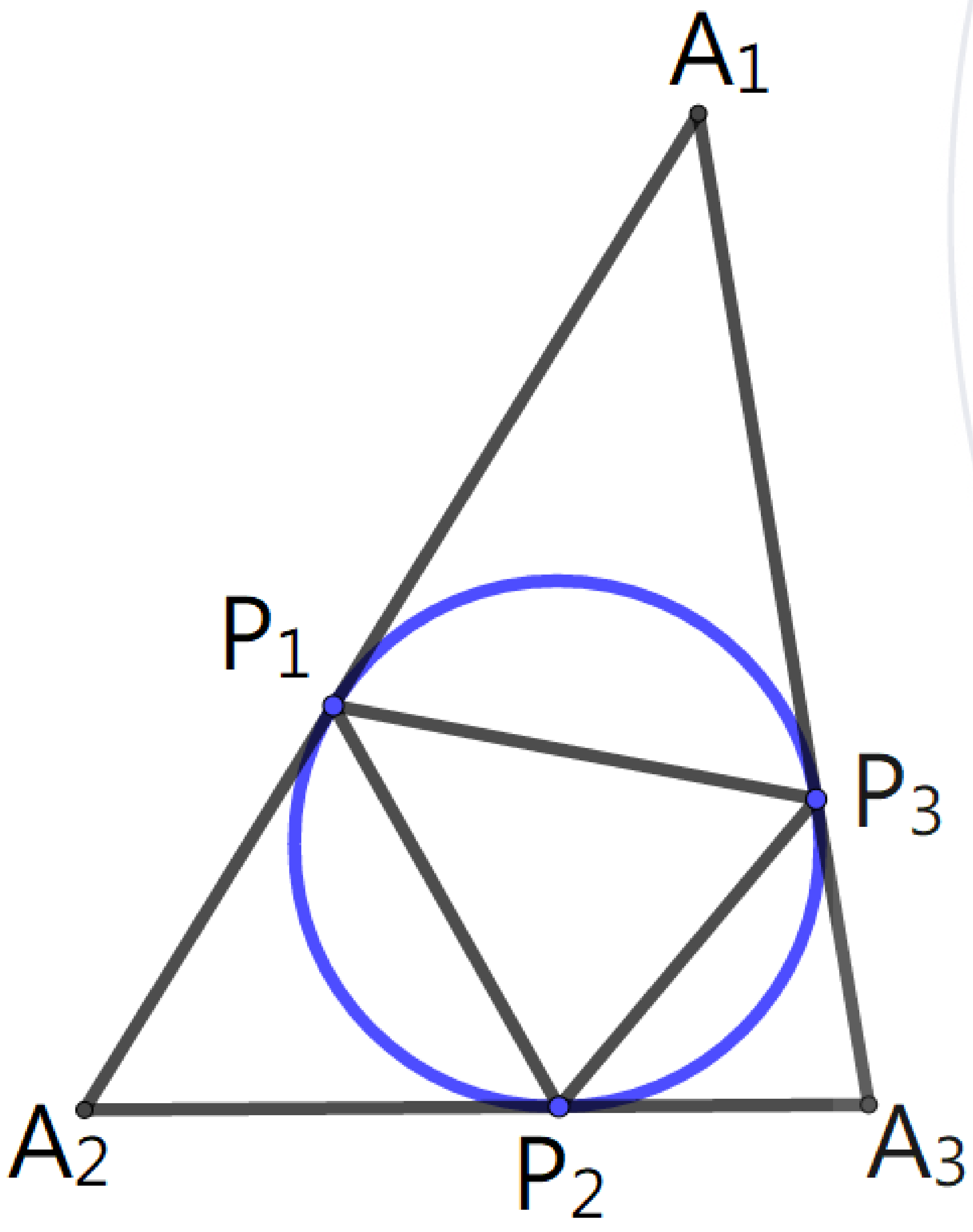
科別：數學科

組別：國中組

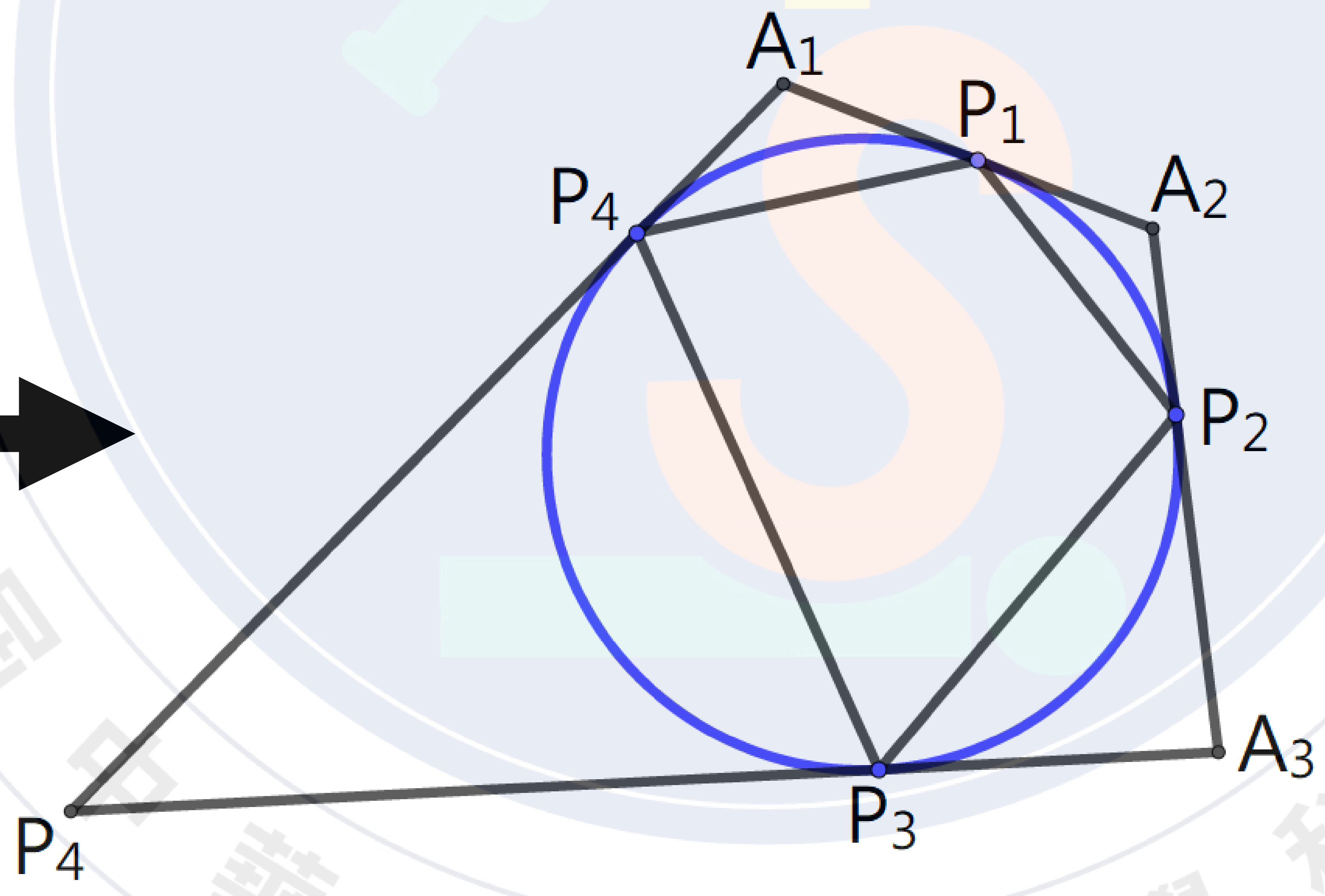
# 前言

　　一開始是在三角形內切圓上任取三點連成三角形，找出內外三角形的面積比值，發現當此三點為切點時，會有更多的幾何性質，因此展開了我們以下的研究。

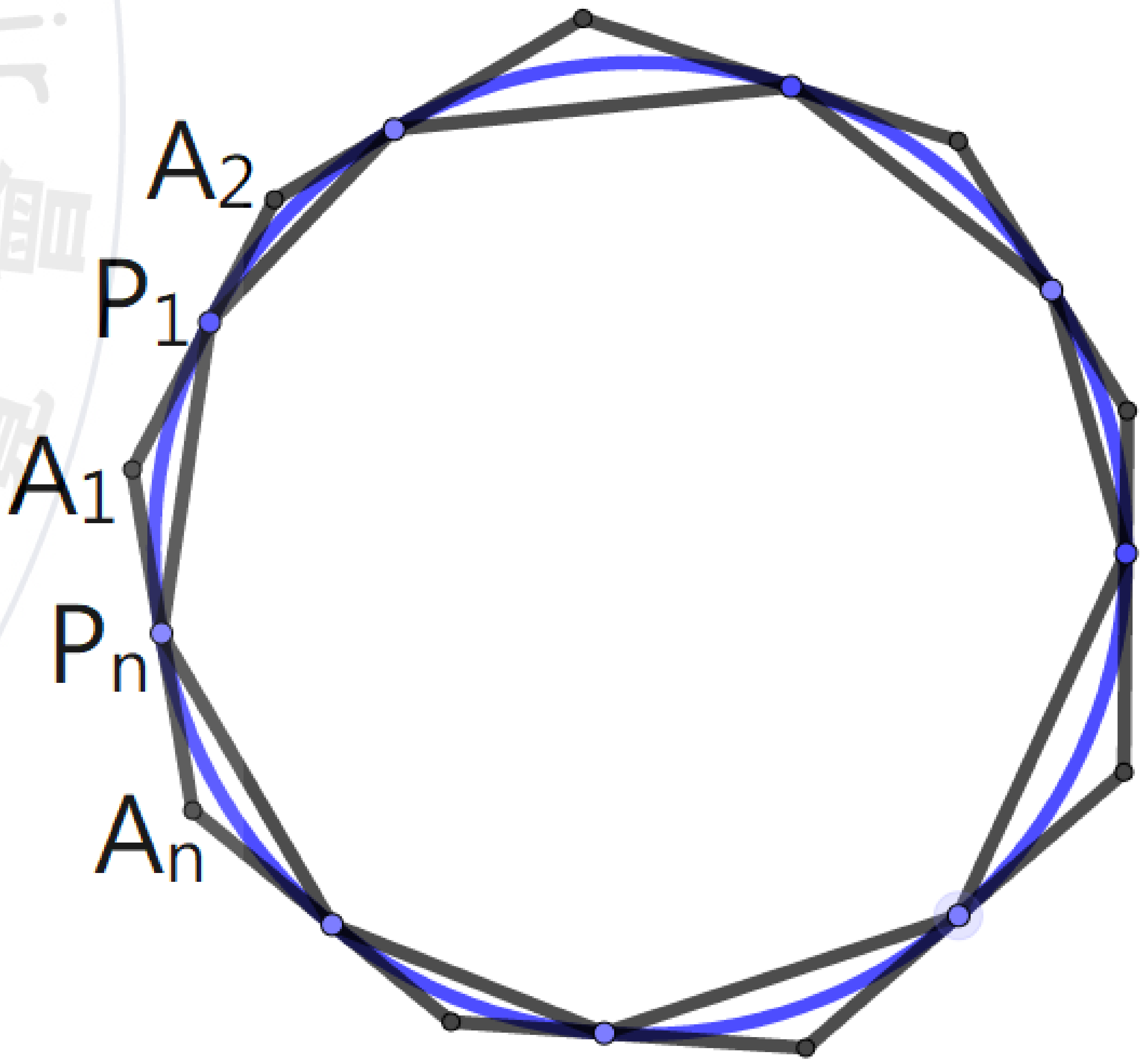
# 問題與架構




三角形



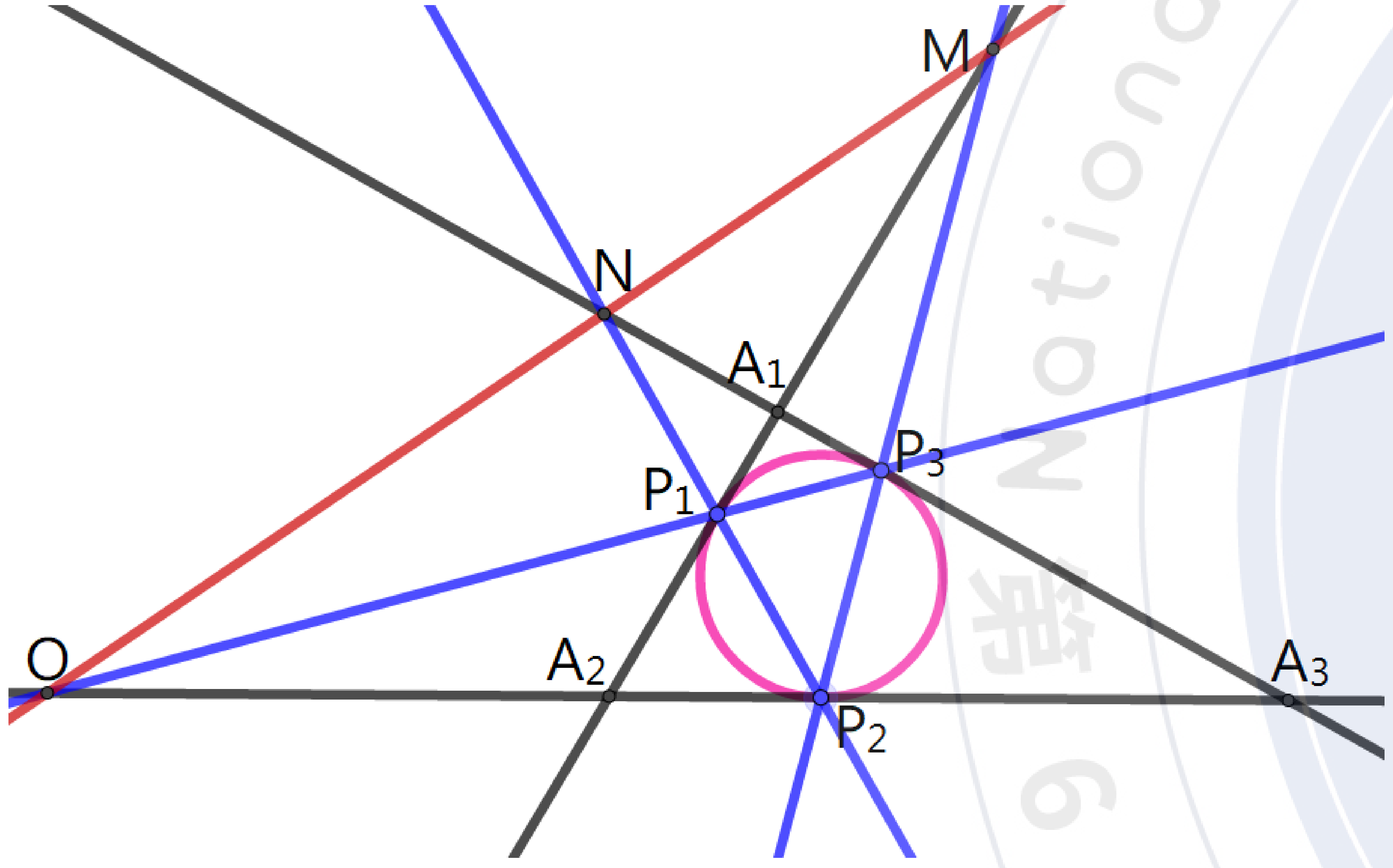

四邊形




n邊形

# 研究內容：三角形(1/2)

## 性質一



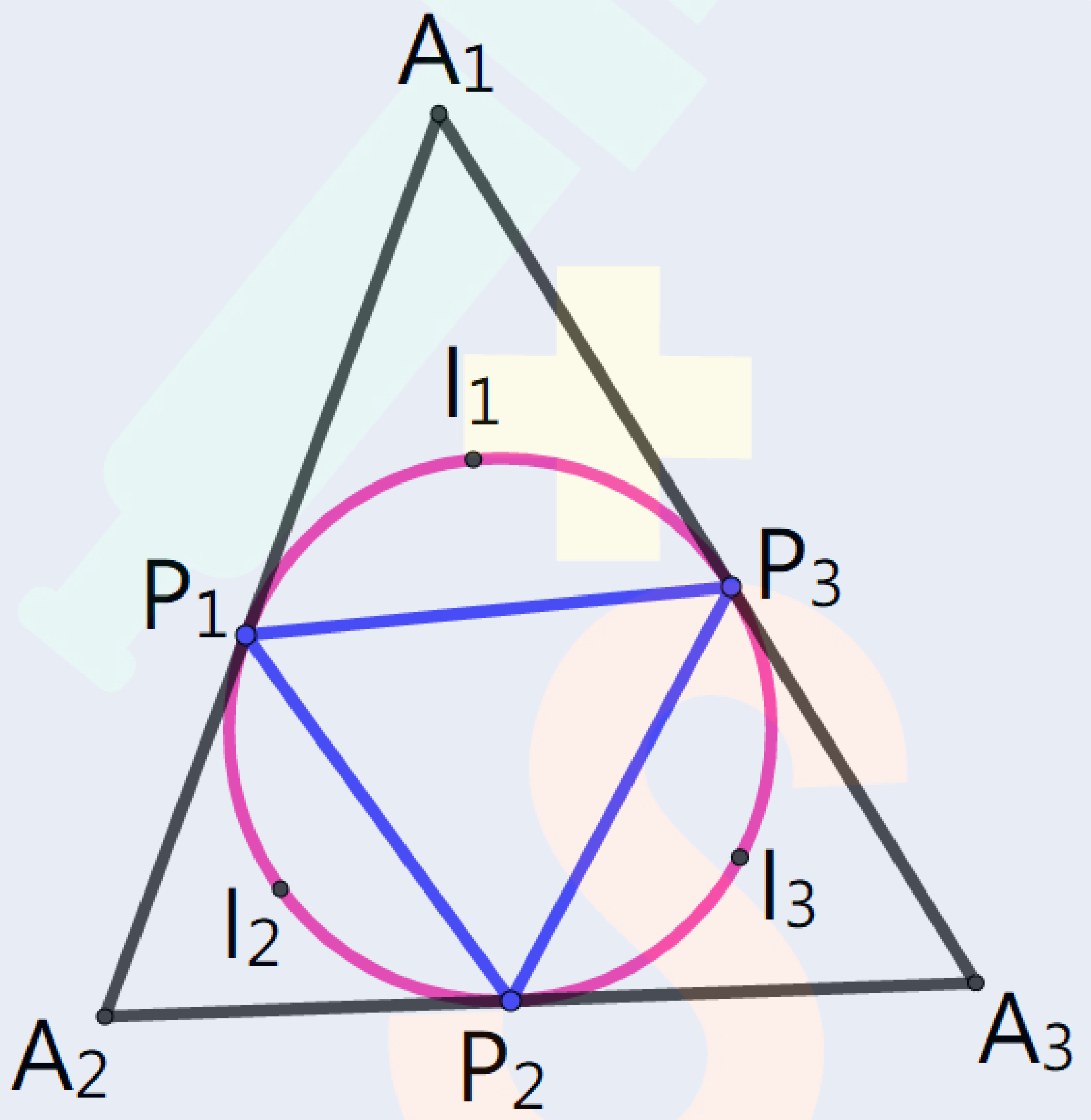

$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta P_1P_2P_3$

三邊延長線共交於三點

則此三點共線

由西瓦逆定理及笛沙格定理可得證

## 性質二



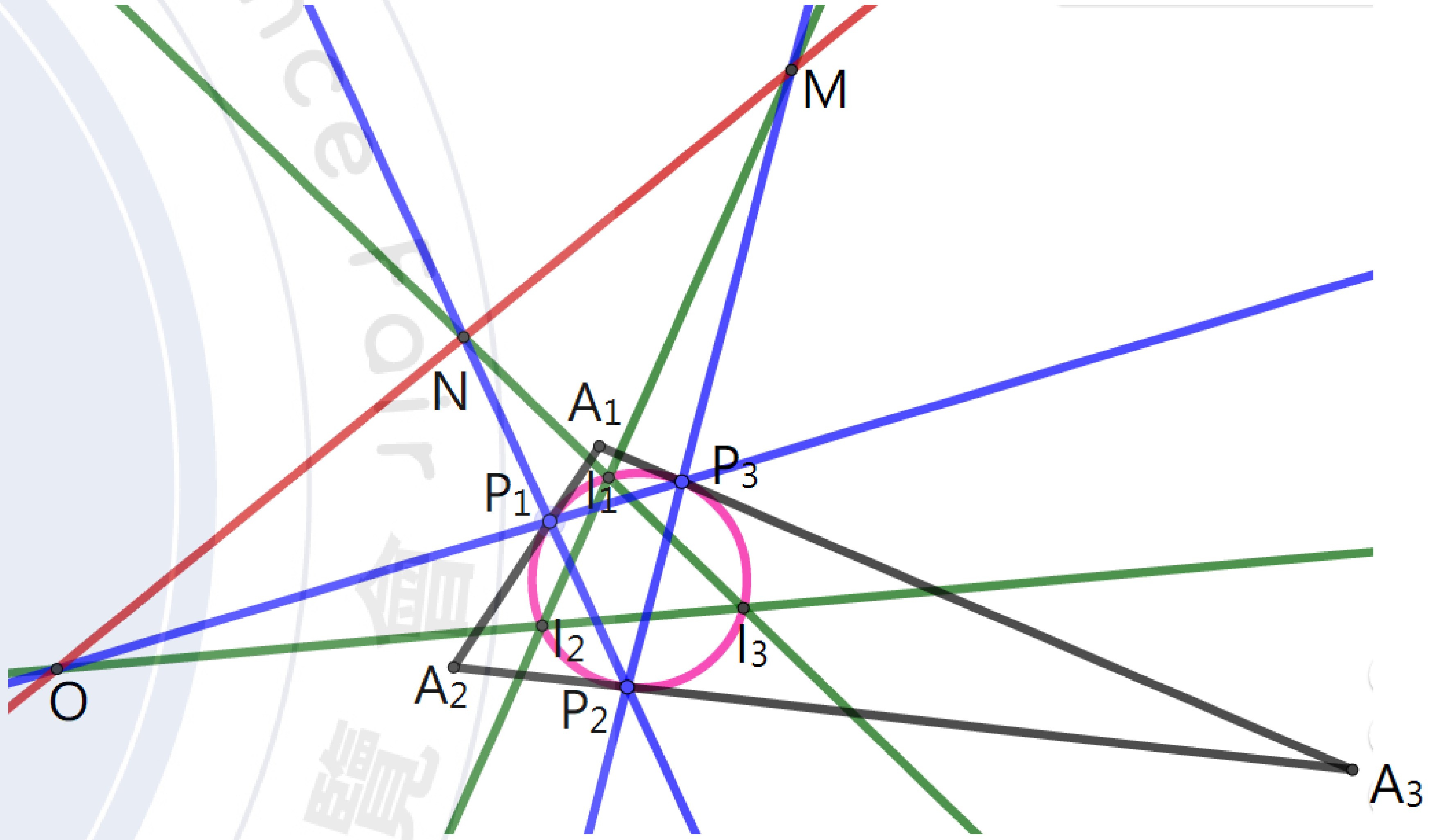

三個三角形的

內心皆在其所夾

圓弧的中點上

由圓周角及弦切角可得證

## 性質三




$\Delta I_1I_2I_3$和$\Delta P_1P_2P_3$

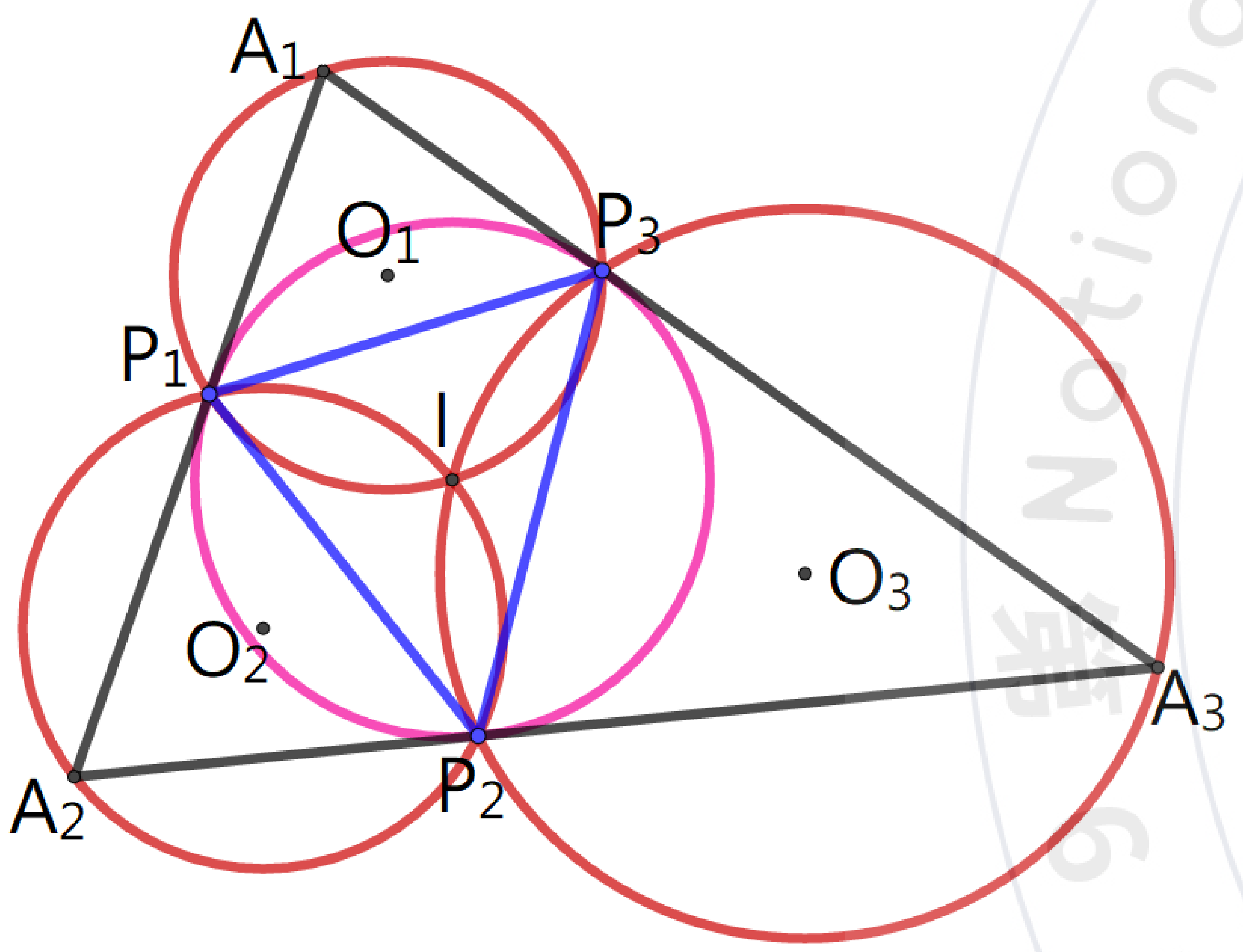
三邊延長線共交於三點

此三點共線

由笛沙格定理可得證

# 三角形(2/2)

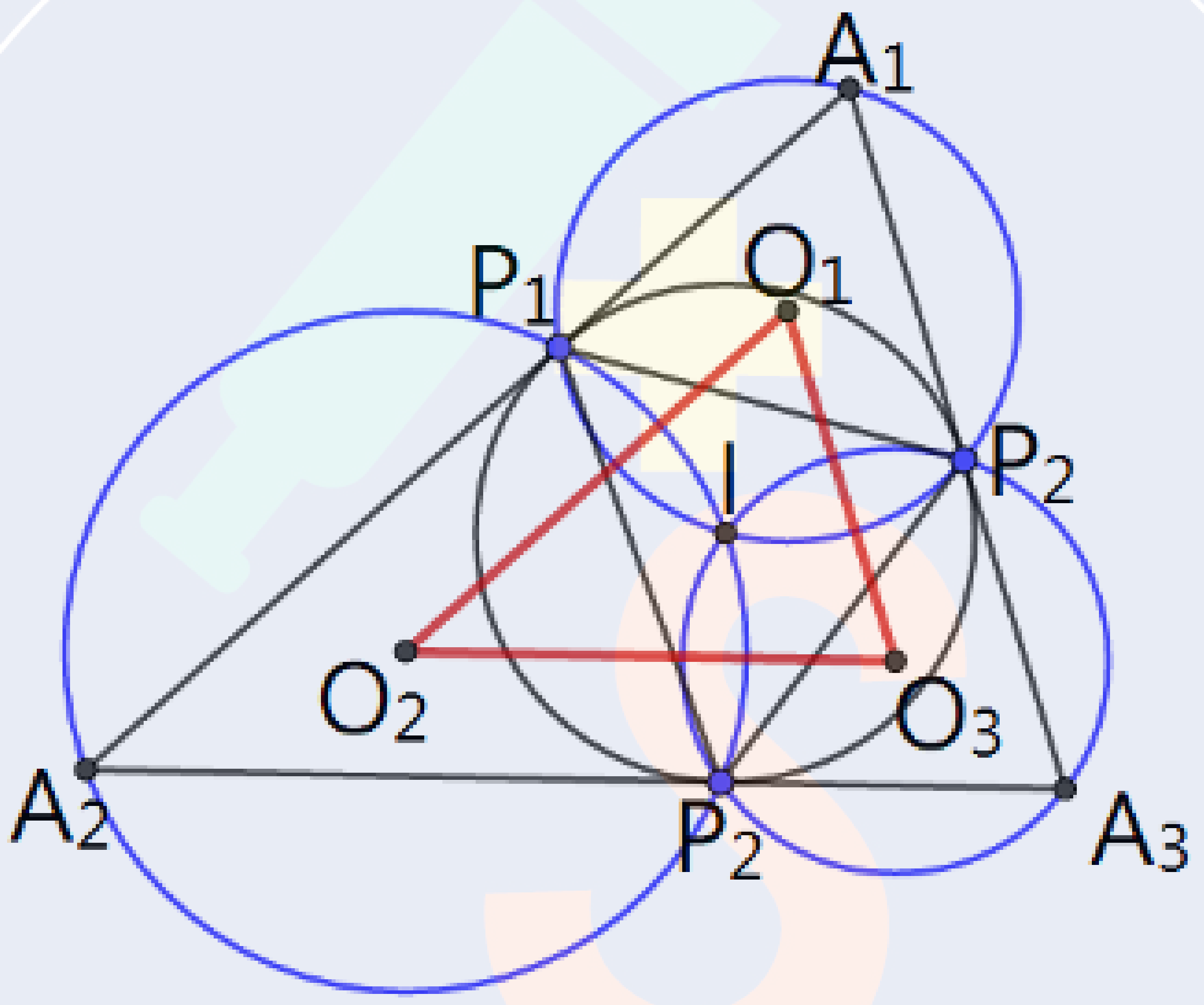
## 性質四




三個三角形的外接圓
會交於一點此點為
原三角形的內心

三圓交點到頂點連線為角平分線

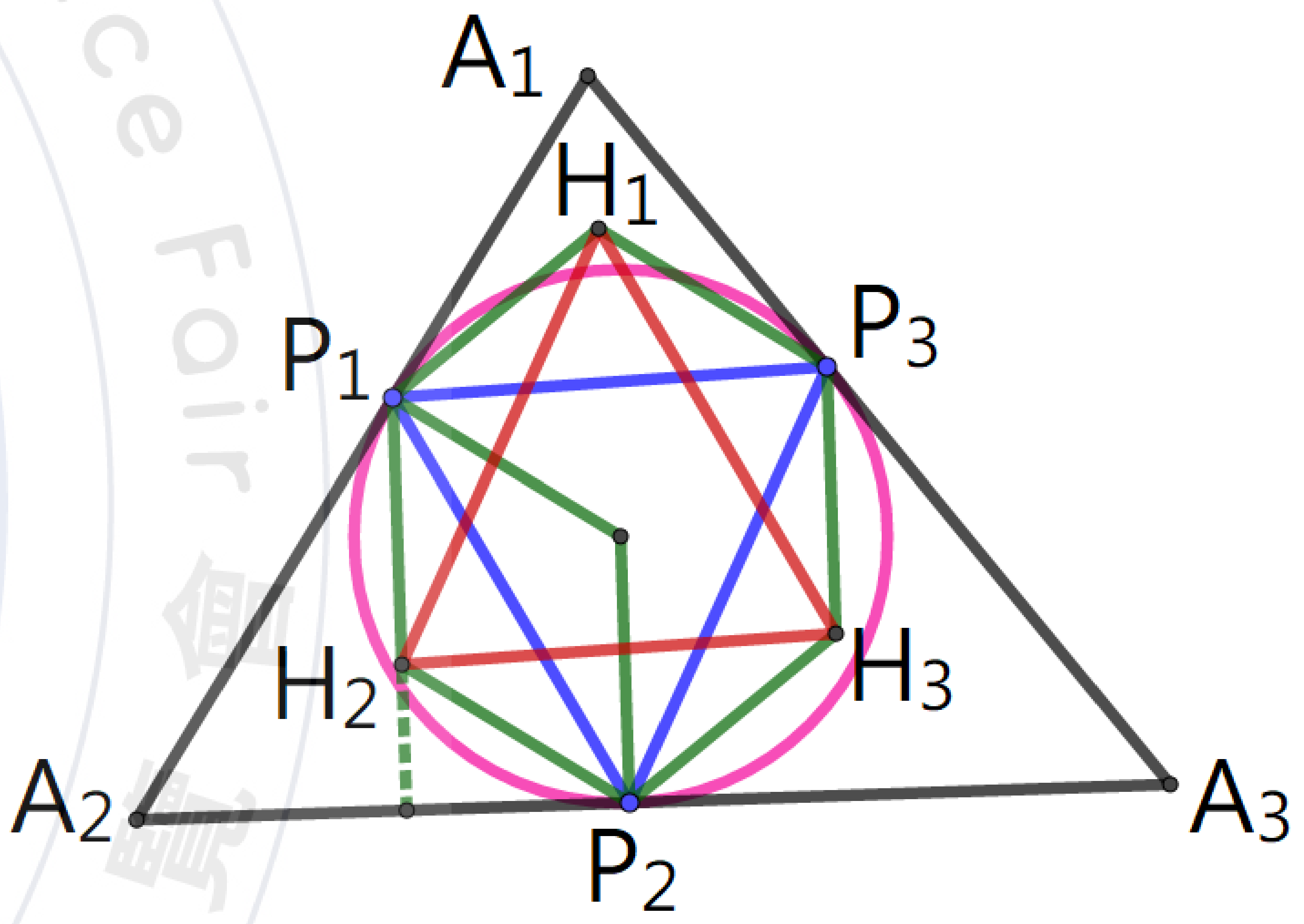
## 性質五




外心三角形相似
於原三角形
且面積比為1：4

利用半徑比直徑的關係

## 性質六




垂心三角形
全等於
切點三角形

垂心到切點的距離和內切圓半徑等長

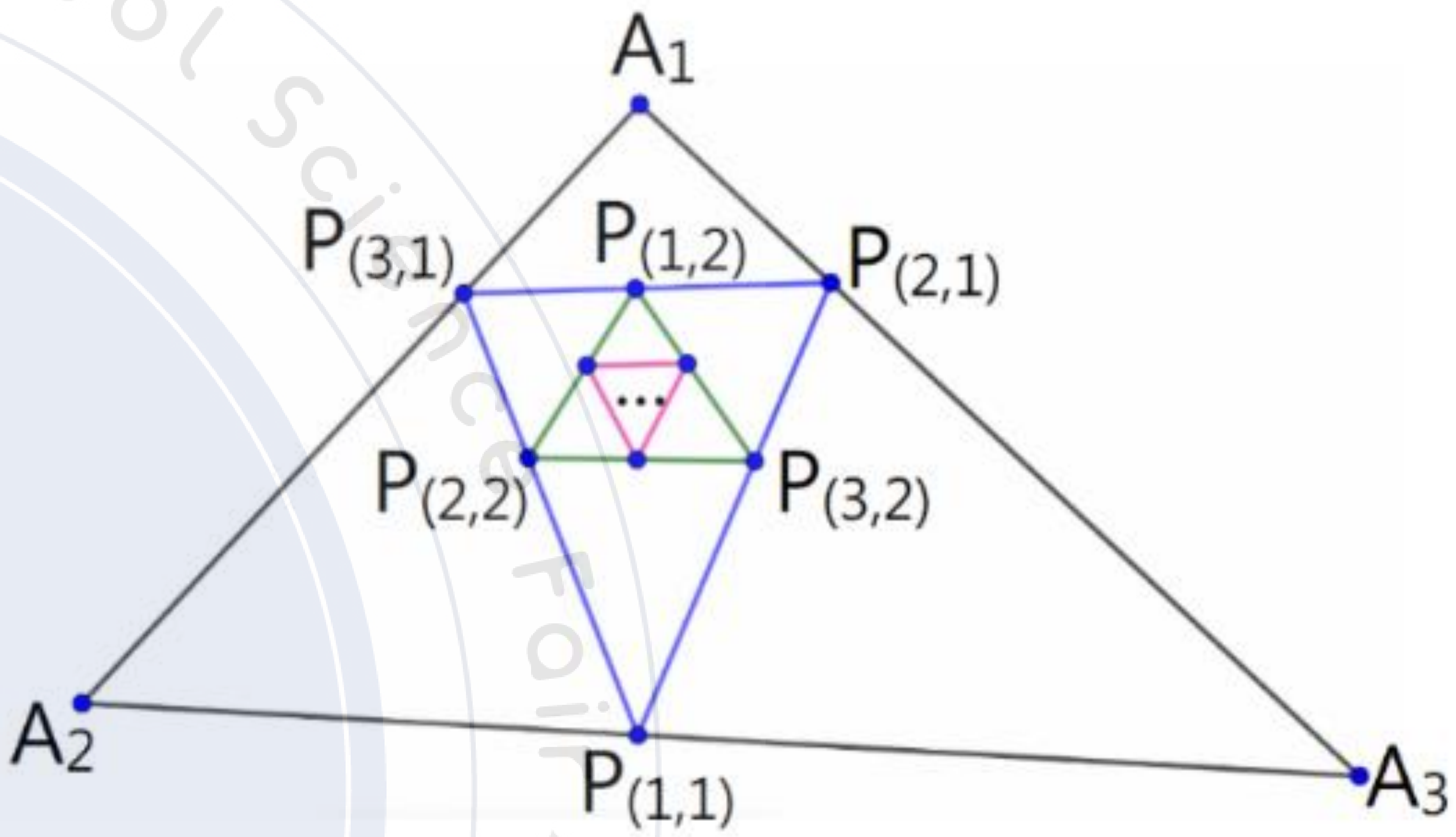
# n層切點三角形

## 角度

定義$\angle X_{(M,n)}$，

$$\angle X_{(A_1,n)} = \angle P_{(1,n)}, \angle X_{(A_2,n)} = \angle P_{(2,n)}, \angle X_{(A_3,n)} = \angle P_{(3,n)}$$

$$\angle X_{(M,n)} = \frac{(2^n - (-1)^n) \times 180^o + 3 \times (-1)^n \angle M}{3 \cdot 2^n}$$




## 邊長

定義$x_{(M,n+1)}$為$\angle X_{(M,n+1)}$的對邊

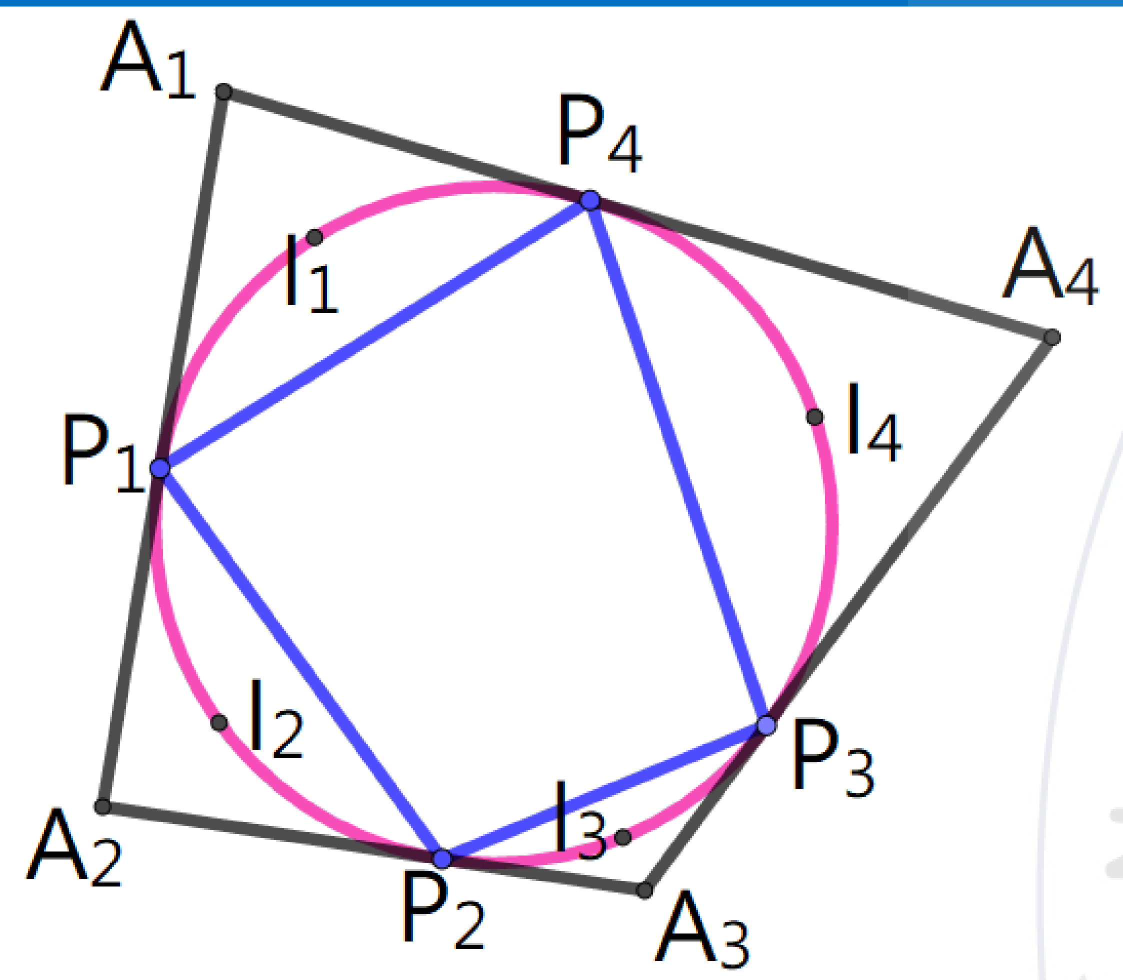
$$x_{(M,n+1)} = \left(s_n - x_{(M,n)}\right) \times \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{(2^n - (-1)^n) \times 180^o + 3 \times (-1)^n \angle M}{3 \cdot 2^n}\right)}$$

## 面積

$$\Delta P_{(1,n)} P_{(2,n)} P_{(3,n)} = \Delta A_1 A_2 A_3 \times \frac{2r^2 s}{a_1 a_2 a_3} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2r_k^2 s}{p_{(1,k)} p_{(2,k)} p_{(3,k)}}$$

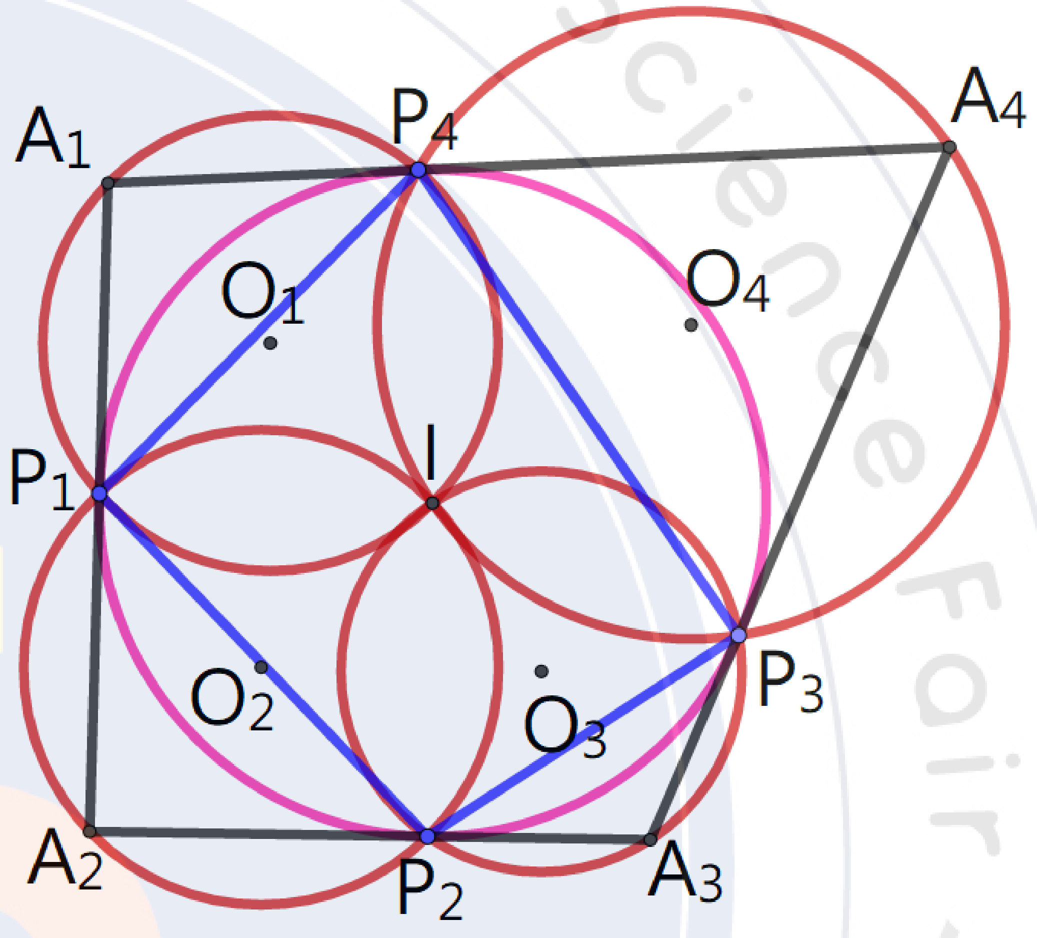
# 四邊形(1/2)

## 性質七



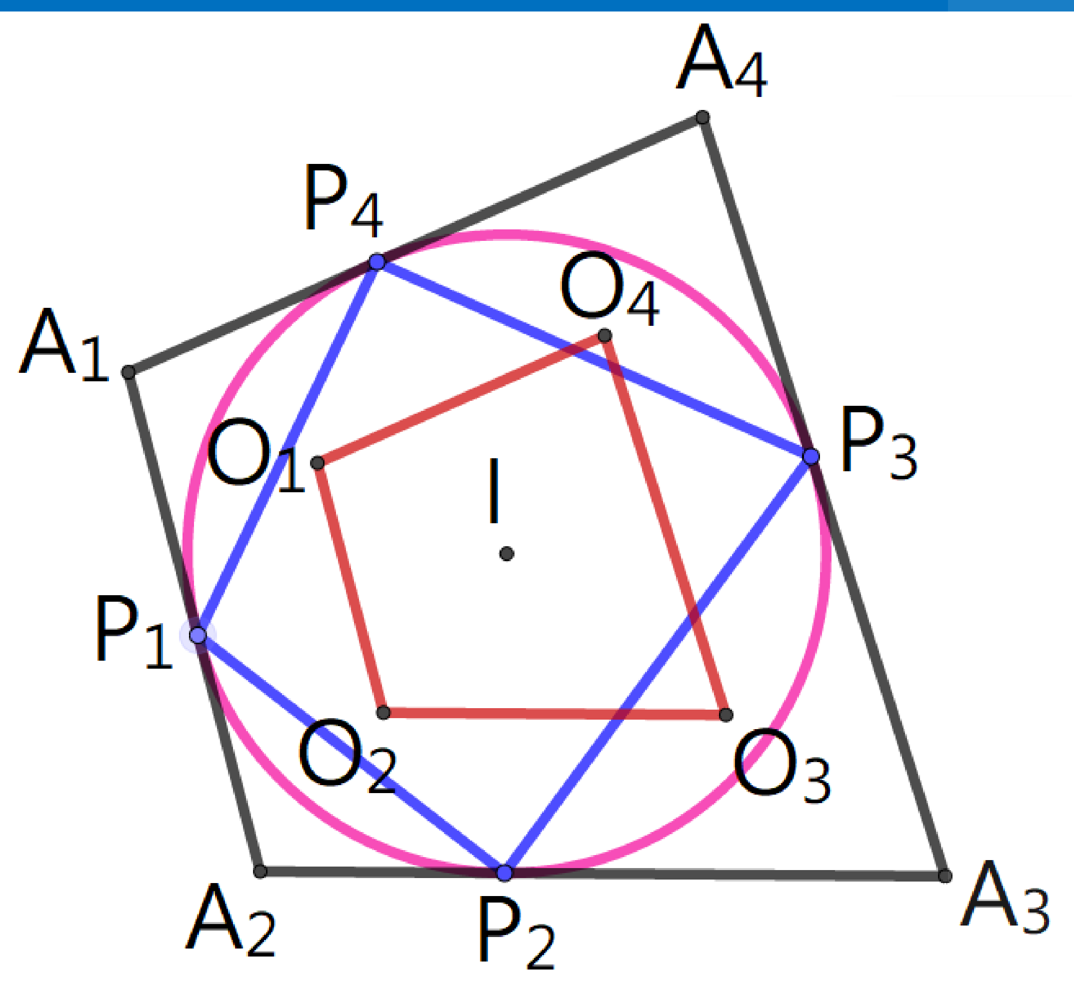

四個三角形之內心皆在其所夾的圓弧中點上

## 性質八



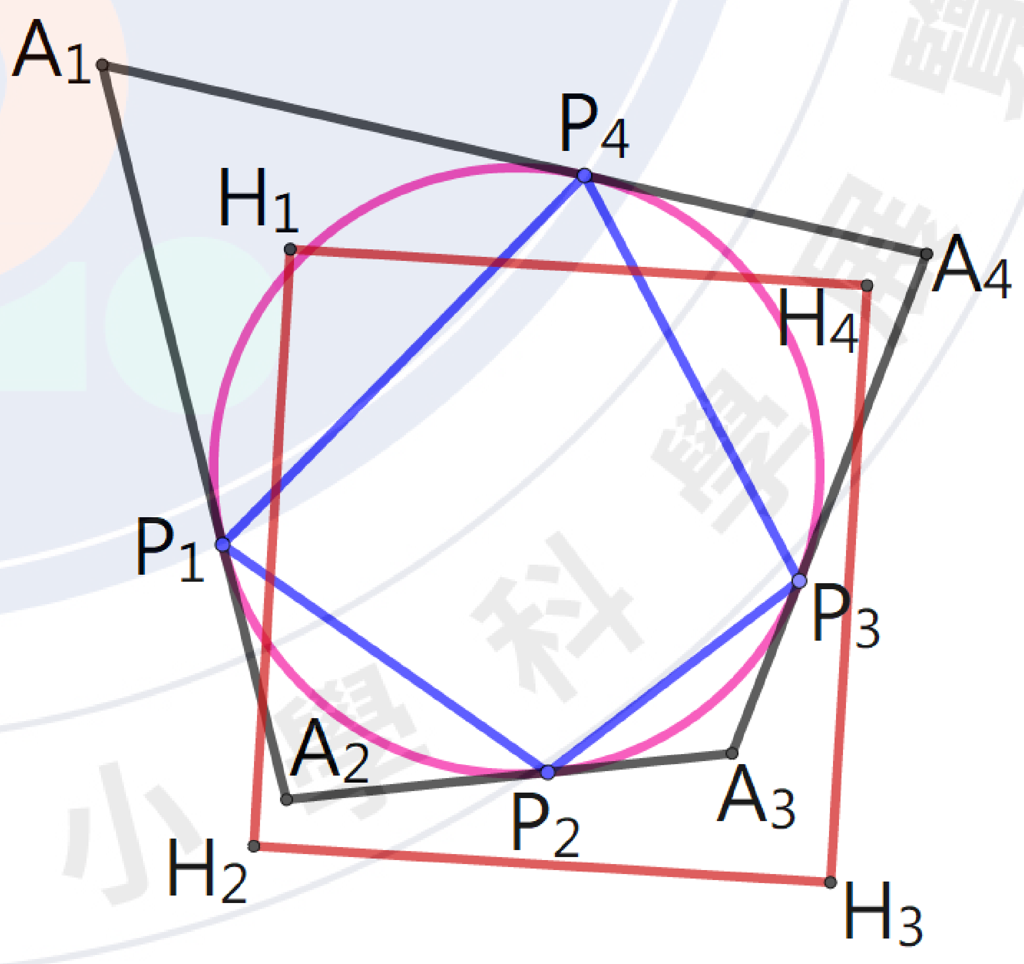

四個三角形的外接圓交於一點此點為原四邊形的內心

## 性質九




外心四邊形相似於原四邊形且面積比為1：4

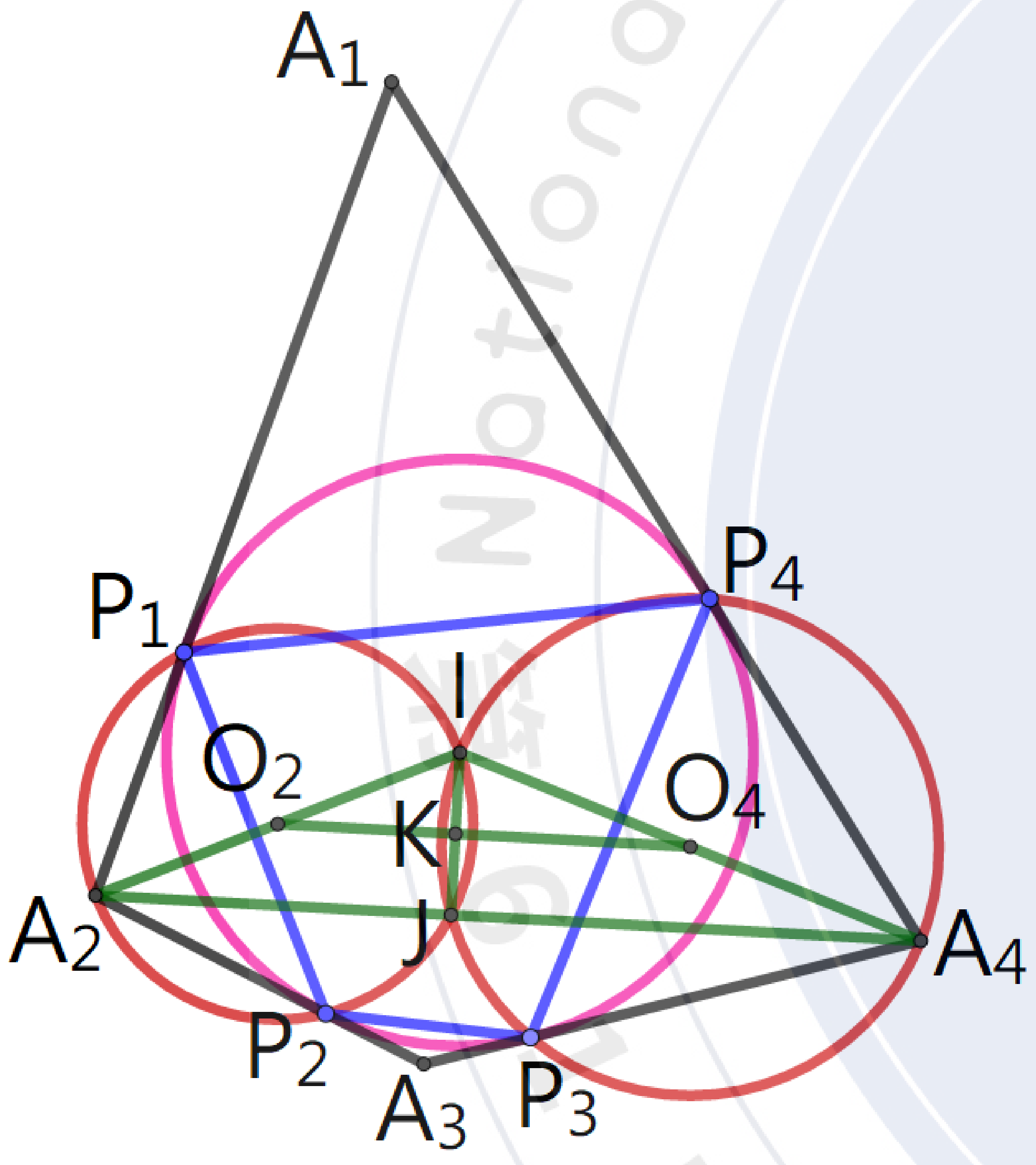
## 性質十




垂心四邊形為平行四邊形且面積為切點四邊形的兩倍

# 四邊形(2/2)

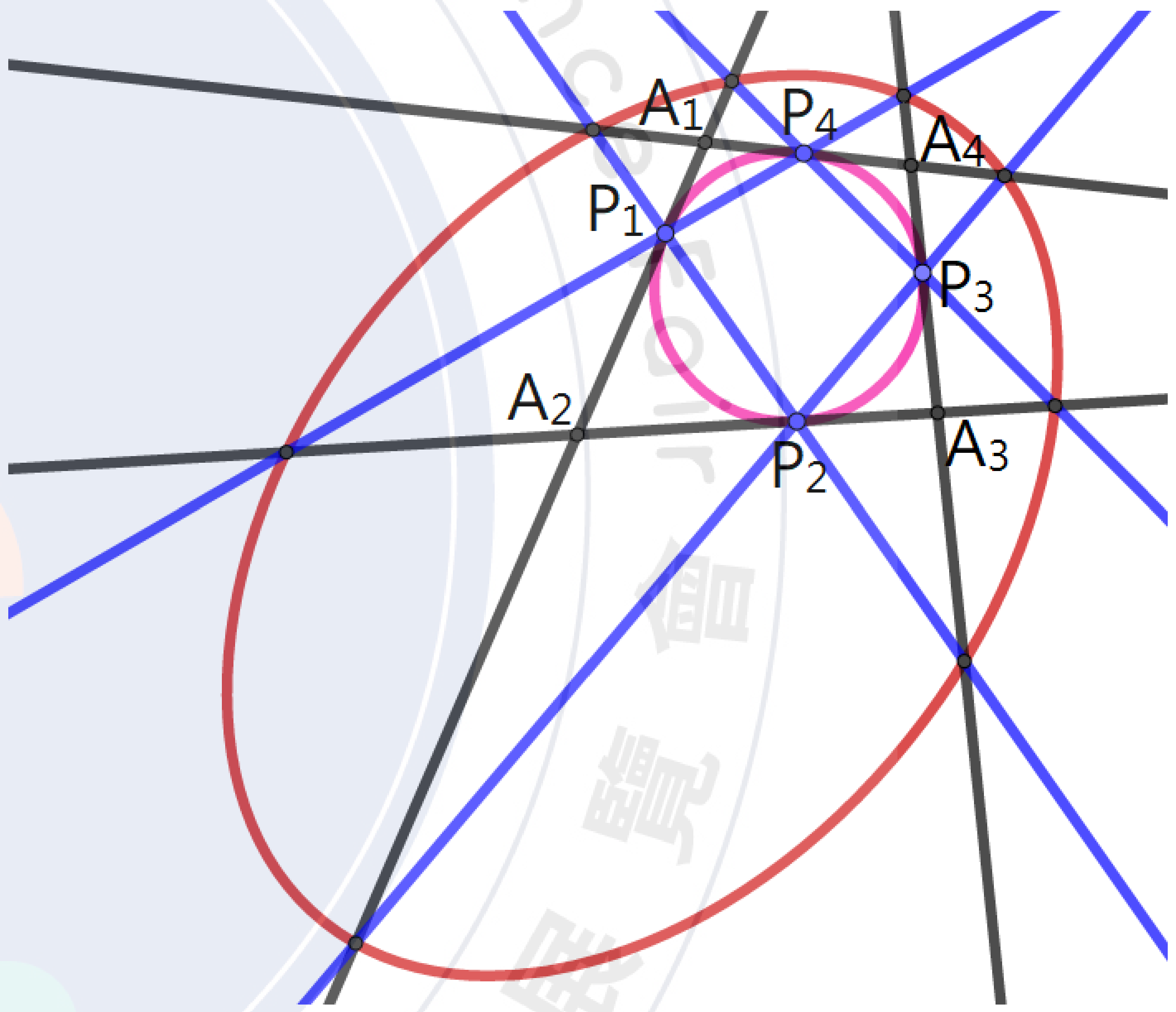
## 性質十一




對角圓的兩個交點分別
位於內心及對角線上

利用平行線截等比例線段證明

## 性質十二

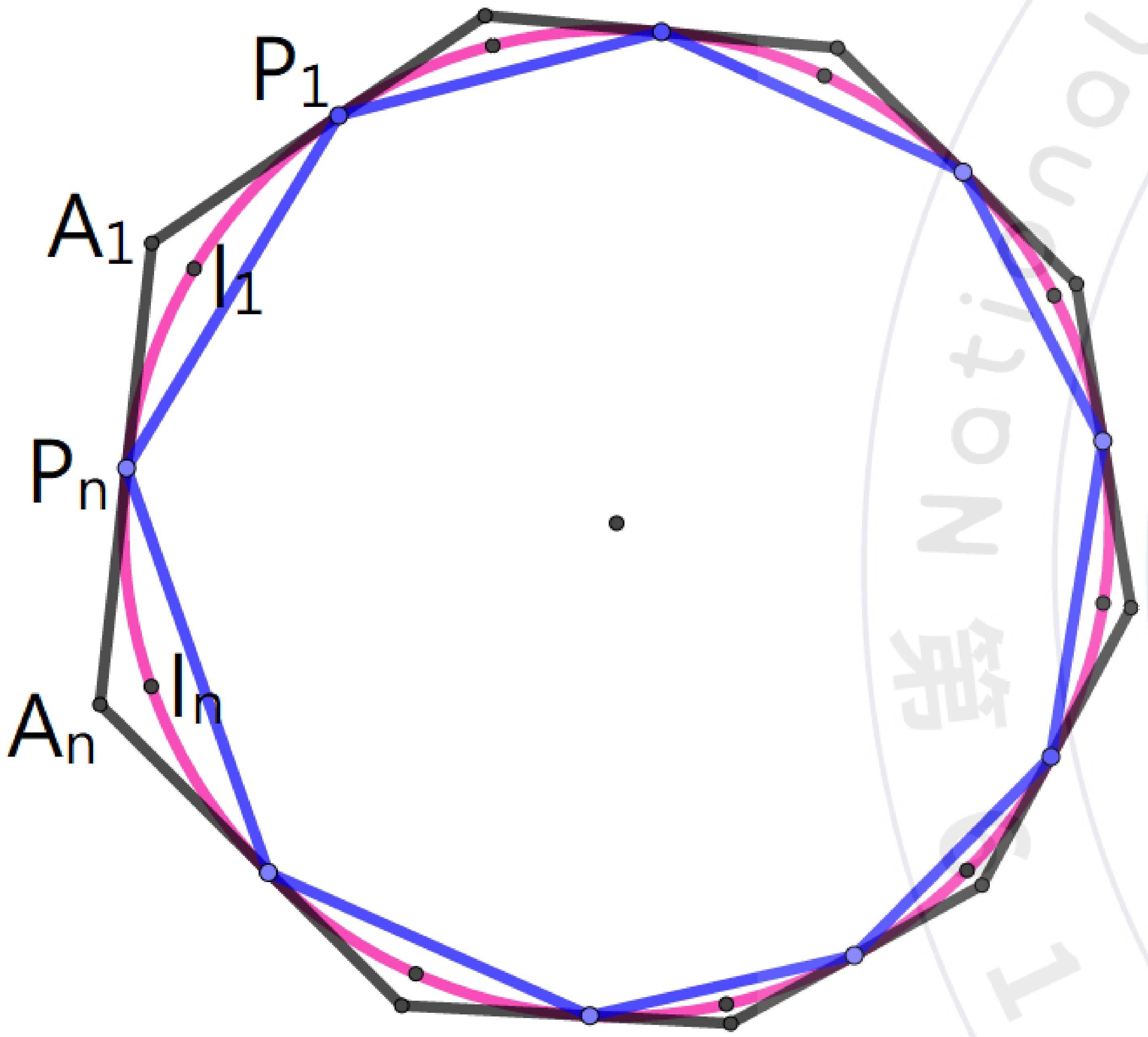



原四邊形與切點四邊形
邊長延伸線交於八點，
此八點在同一個二次曲線上

利用解析幾何或是射影幾何皆可證明

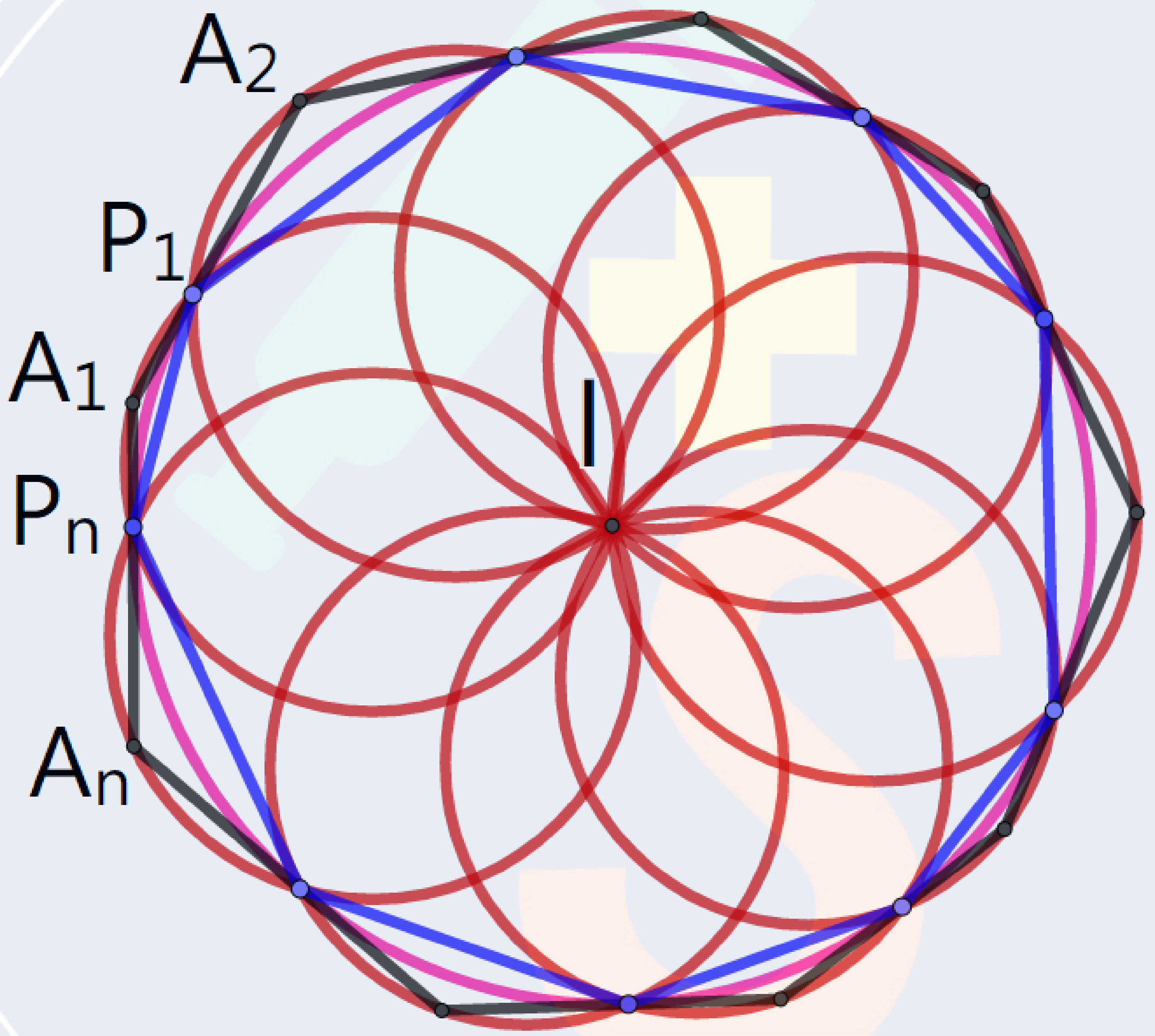
# n邊形-由三角形、四邊形延伸出的5個性質(1/2)

## 性質十三



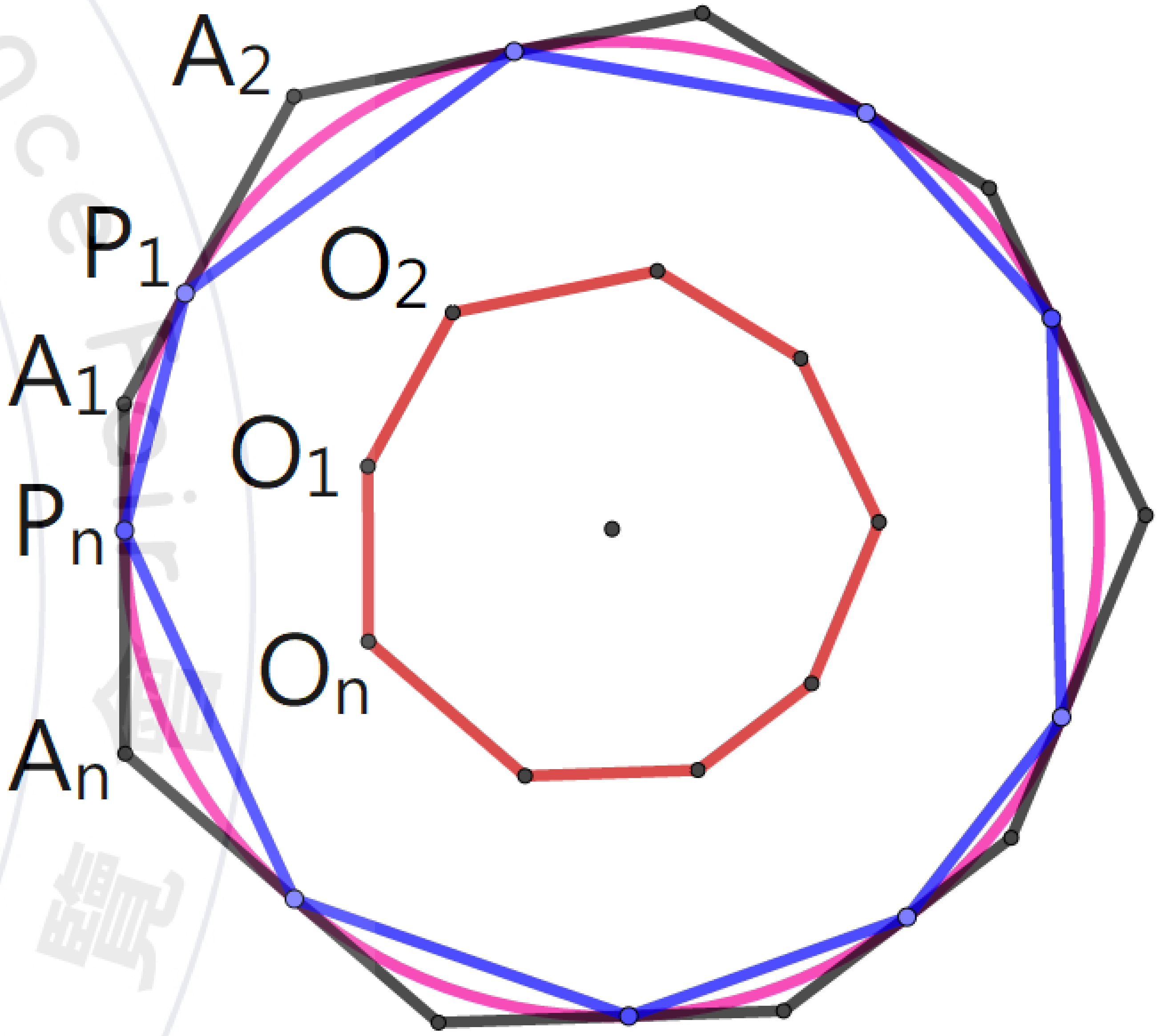

n個三角形之內心皆在
其所夾的圓弧中點上

## 性質十四




n個三角形的外接圓交於一點
此點為原n邊形的內心

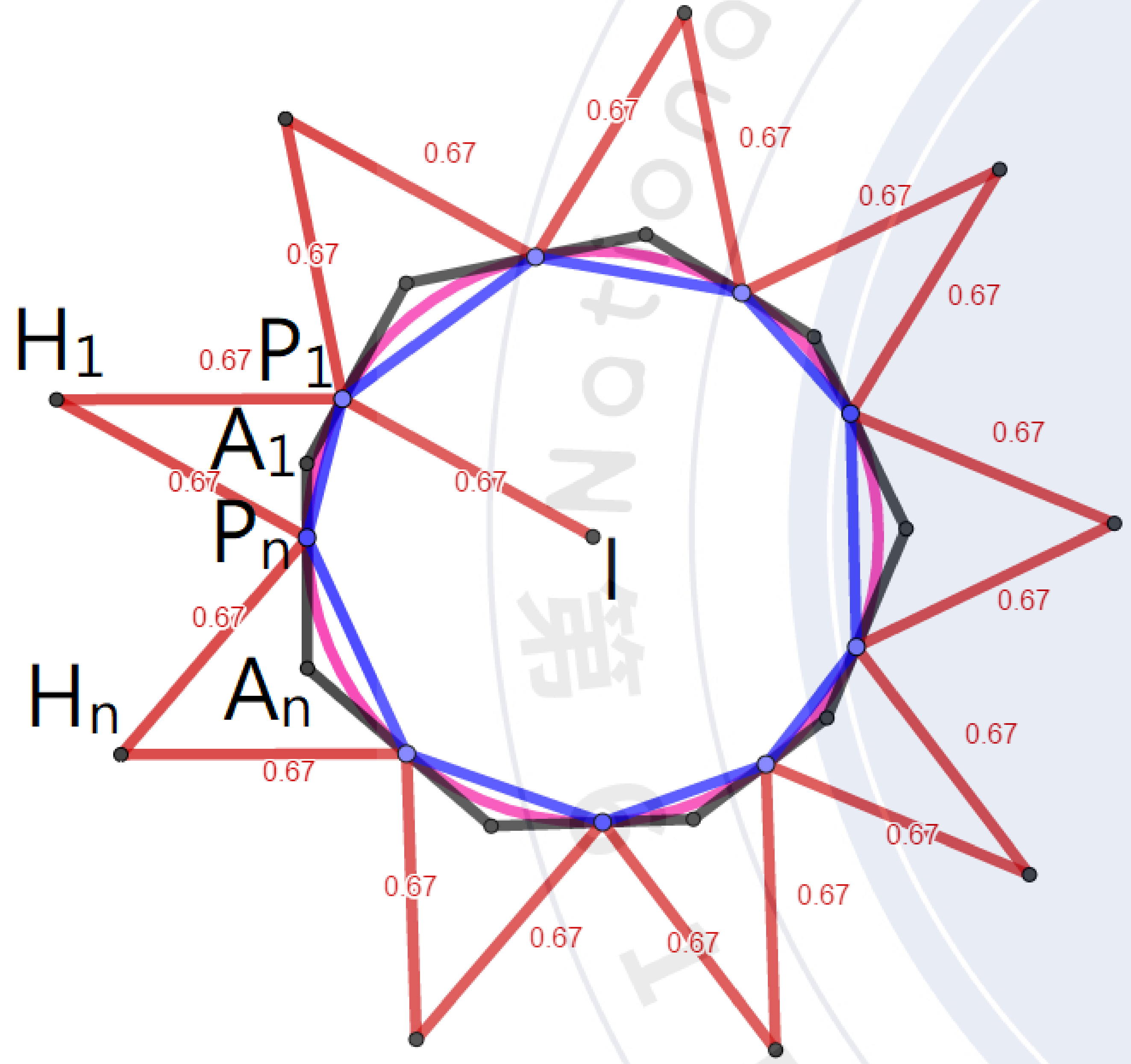
## 性質十五




外心n邊形相似於原n邊形
且面積比為1：4

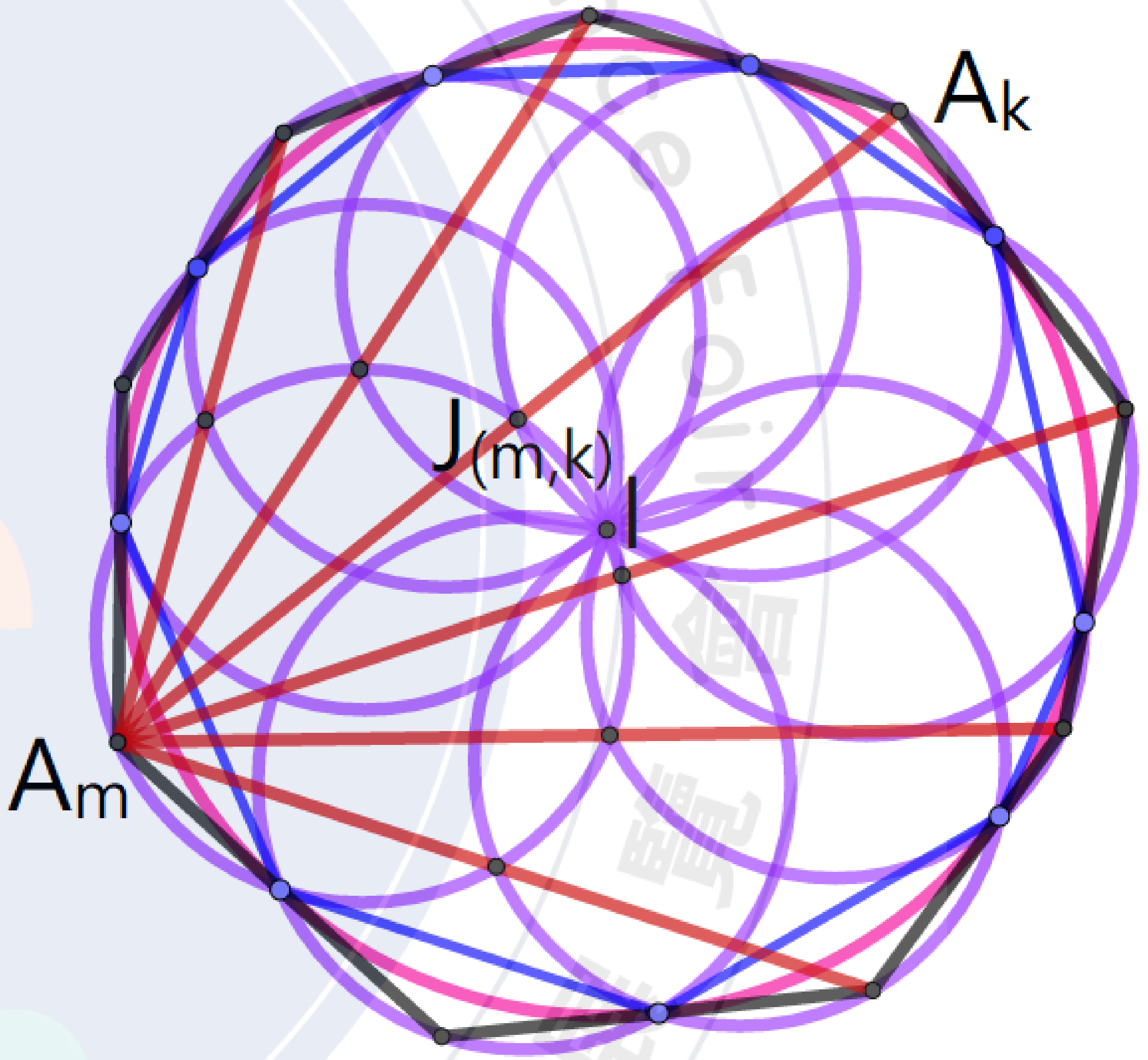
# n邊形-由三角形、四邊形延伸出的5個性質(2/2)

## 性質十六




$$\overline{P_kH_k} = r = \overline{P_{k-1}H_k}$$

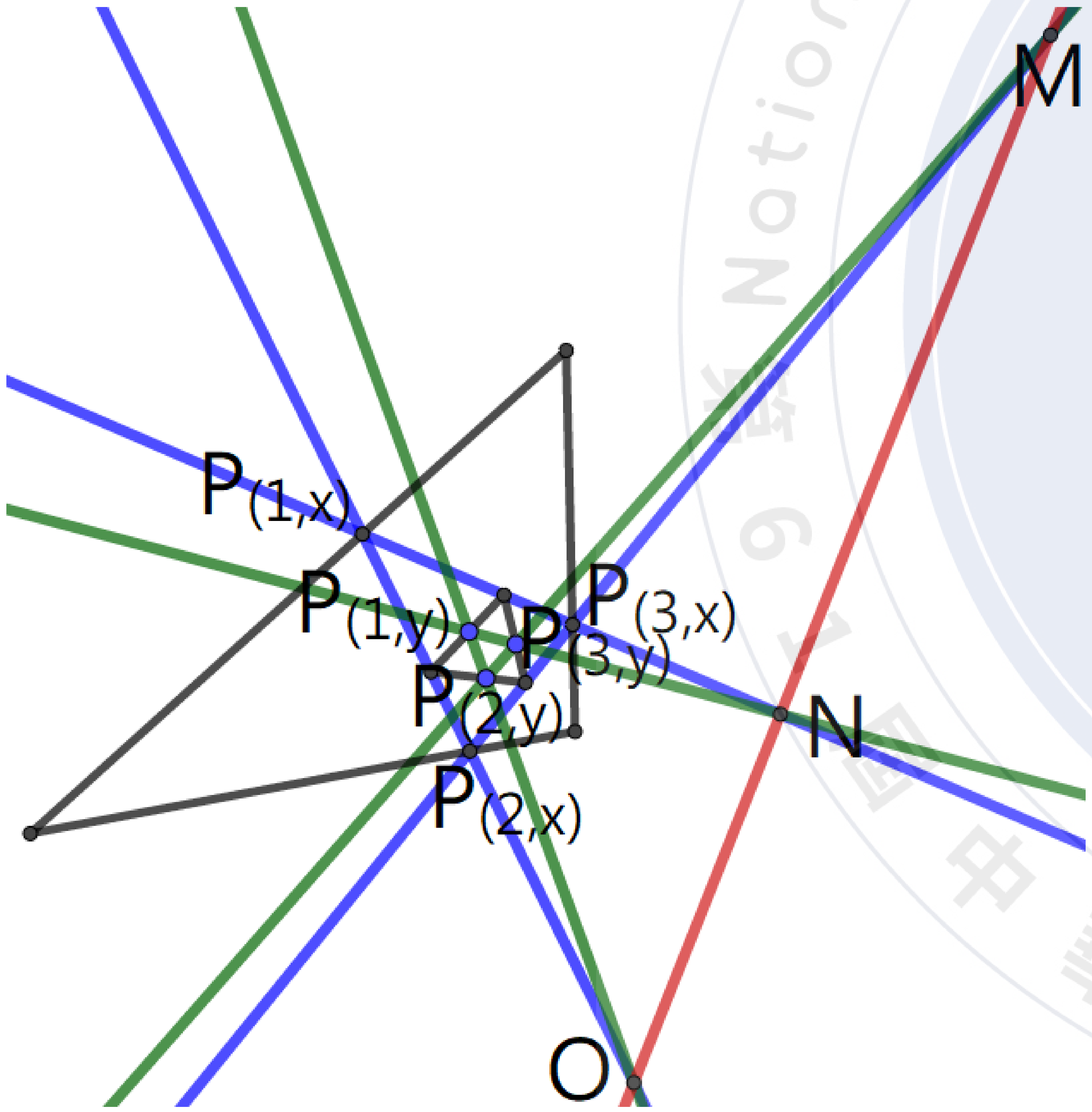
## 性質十七



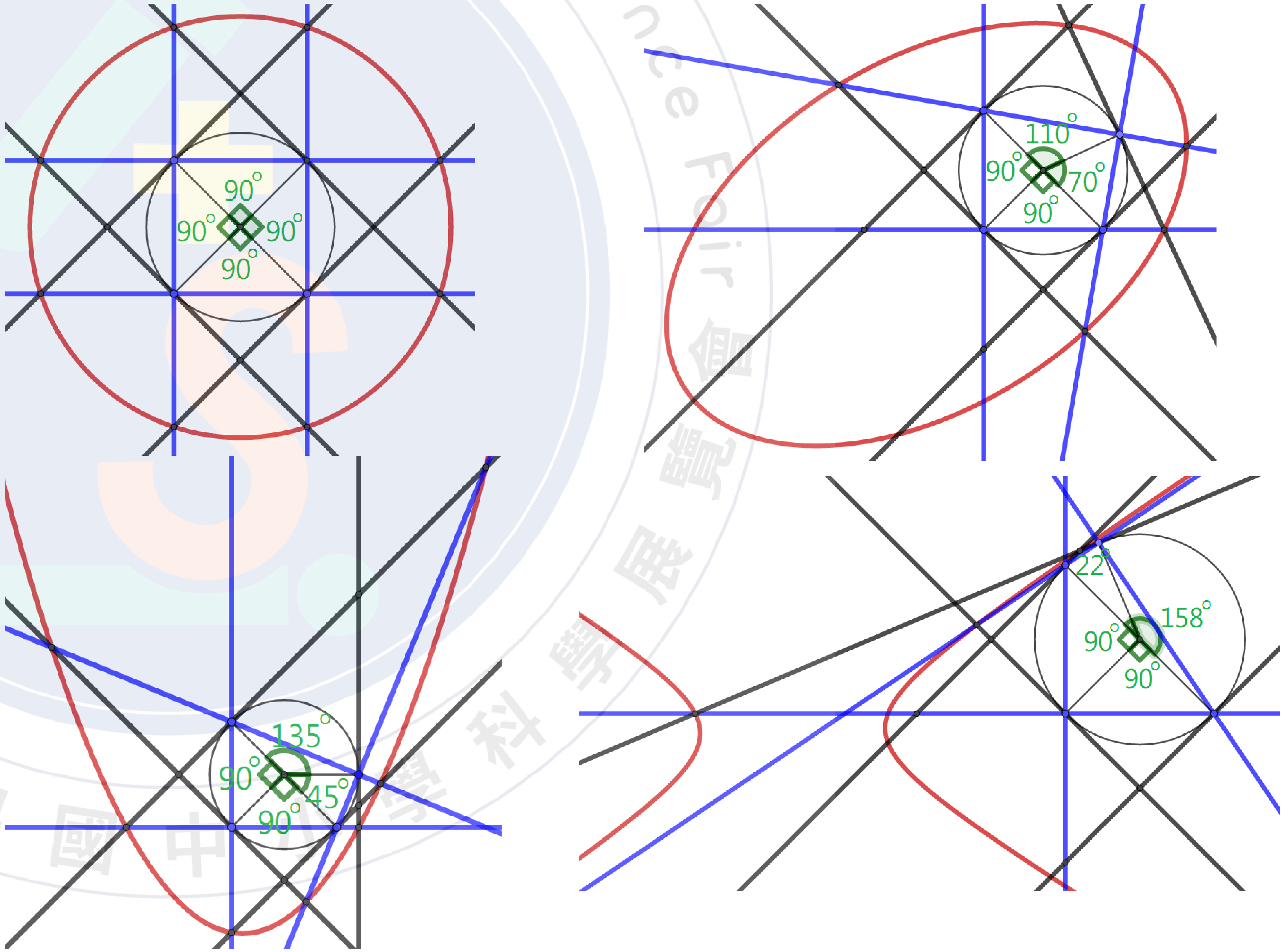

圓$O_m$、圓$O_k$兩個交點分別交於內心及$\overline{A_mA_k}$上，且 $n-2 \geq |m-k| \geq 2$

# 討論(1/2)

一、任兩層三角形的三邊延長線共交於三點則此三點共線



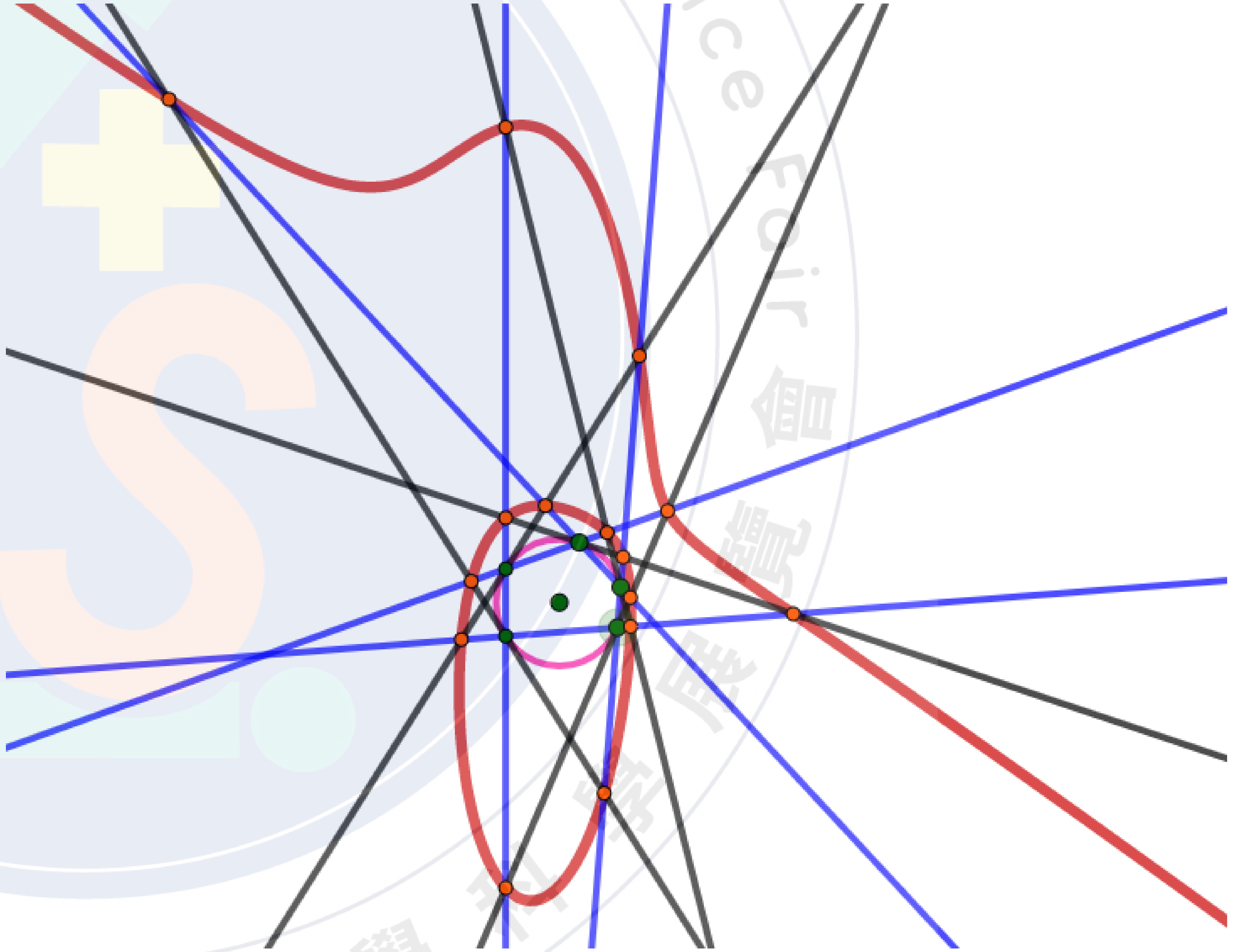

二、二次曲線圖形的判斷



# 討論(2/2)

三、切點$n$邊形與原$n$邊形之邊長延伸線的交點會在同一個$n-2$次曲線上

右圖為$n=5$的情況，可以觀察到原五邊形和切點五邊形會有十五個交點，而此十五個交點會在同一個三次曲線上。



# 結論

**1.共同性質：**

(1)內心位於所夾圓弧中點　(2) $n$個外接圓交於內心

(3)外心連線與原圖形相似　(4)垂心到切點的距離都是內切圓半徑

**2.部分有的性質：**

(1)內心三角形與切點三角形的邊長延伸線交點會三點共線

(2)切點三角形與原三角形的邊長延伸線交點為三點共線，而四邊形則是在同一個二次曲線上

(3)$n \geq 4$時，對角圓交點在內心及對角線上

# 參考文獻


一、劉安家，第57屆中小學科學展覽會，國中組數學科

「從三個交於一點的圓形想起—Miquel’s Theorem 之推廣」

二、張霈萱，2016 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯：

「層出不窮的彩蛋有『心』『跡』—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討」