中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030407

找回消失的正 N 邊形

學校名稱：臺南市私立瀛海高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國一 黃博瑞	黃世諺
國二 蘇鈺愷	楊詠晴

關鍵詞：正多邊形、尺規作圖、圓內接正多邊形

摘要

本篇作品旨在探討已知平面上n個點，分別落在正n邊形的各邊上，能否藉由這n個點找出正n邊形？而找出的正n邊形是否唯一呢？我們利用數學繪圖軟體 Geogebra 結合國中所學的幾何尺規作圖觀念作圖，從正三角形開始探討，進而延伸到正方形、正五邊形、…、正八邊形，最後探討至正n邊形。

作圖探討後我們發現當邊數較小的時候，可以透過平行或是邊長相等的概念畫出正多邊形；但邊數較大的時候，就需要透過圓內接多邊形的性質才能畫出正多邊形。我們透過圖形也發現平面上只要給定$n-1$個點，即可畫出正n邊形，且除了正三角形畫出來的不只一個，其餘的正多邊形都只能畫出唯一一個，最後我們利用三角形的全等及圓內接多邊形的性質證明之。

壹、 研究動機

從歷屆數學科展的資料中發現，有些人的研究靈感是來自於這個網站：http://mathafou.free.fr/index_en.html，好奇之下也去了這個網站瀏覽看看。尋寶中在幾何問題集錦發現了一個有趣的問題，其描述如下：

我在沙灘上畫一個等邊三角形。我在每一側都放了一塊石頭。兩天後，石頭仍然在哪裡，但是風把三角形吹走了。你能再從石頭上找到三角形嗎？

這個問題引起了我們的興趣，因此決定以消失的n邊形作為我們的研究題目，除了想要知道能不能畫回原來的正三角形之外，也好奇的想要知道如果消失的是正n邊形的話，能不能夠再被找回來？研究就從這裡開始。

貳、 研究目的

一、已知平面上三點，分別落在各邊上，能否畫出正三角形？畫出的正三角形是否唯一呢？
　　若不是唯一，能否找到「最大邊長」的一個正三角形？

二、已知平面上四點，分別落在各邊上，能否畫出正方形？畫出的正方形是否唯一呢？

三、已知平面上已知平面上n點，分別落在各邊上，能否畫出正n邊形？

參、 研究設備及器材

筆、紙、尺規、電腦、數學繪圖軟體 GeoGebra

肆、 研究過程與方法

一、 先備知識

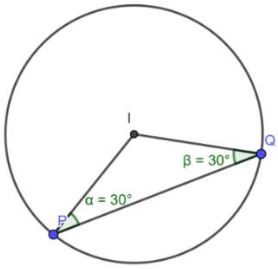
(一) 過兩點做一圓使得此兩點所形成的劣弧為特定角度，例如$120°$：

已知P、Q兩點，做一圓圓心為I，使得圓心角PIQ為$120°$，則$\angle IPQ=\angle IQP=30°$，

所有對到PQ劣弧的圓周角皆為$60°$。

[法一] 以數學繪圖軟體作圖如下:

1. 選取「線段」工具，畫$\overline{PQ}$。
2. 選取「畫指定角工具」，依序選取Q、P兩點(先選一點，在選旋轉中心點，在輸入指定角，跳出畫指定角對話方塊，輸入$30°$，選擇逆時針方向。
3. 選取「射線」工具，依序選取P、Q'兩點，完成$\overrightarrow{PQ'}$的連接。
4. 重複第二步驟，選取「畫指定角工具」，依序選取P、Q兩點，跳出畫指定角對話方塊，輸入$30°$，選擇順時針方向。
5. 重複第三步驟，選取「射線」工具，依序選取Q、P'兩點，完成$\overrightarrow{QP'}$的連接。
6. 選取「交點」工具，畫出$\overrightarrow{PQ'}$和$\overrightarrow{QP'}$交點I。
7. 利用「選取」工具，分別依序選取$\overrightarrow{PQ'}$和$\overrightarrow{QP'}$和點P'、Q'兩點，按右鍵隱藏物件。連接$\overline{PI}$、$\overline{IQ}$。
8. 選取「畫圓工具」，依序選取圓心I和P或Q任一點，畫出圓心為I，過P、Q兩點的圓。



【圖 1】

[法二] 以簡易尺規作圖如下：

1. 以$\overline{PQ}$為邊長作一正三角形$\Delta PQR'$(分別以P 、Q兩點為圓心，$\overline{PQ}$長度為半徑，

   向外分別畫圓弧，相交於R'點，連接$\overline{PR'}$ 、$\overline{R'Q}$)。

2. 分別作$\overline{PQ}$ 、$\overline{PR'}$的中垂線，交於I點。

3. 以點I為圓心，I與P的距離為半徑作圓，所畫出之PQ，即為所求。

二、 分段討論

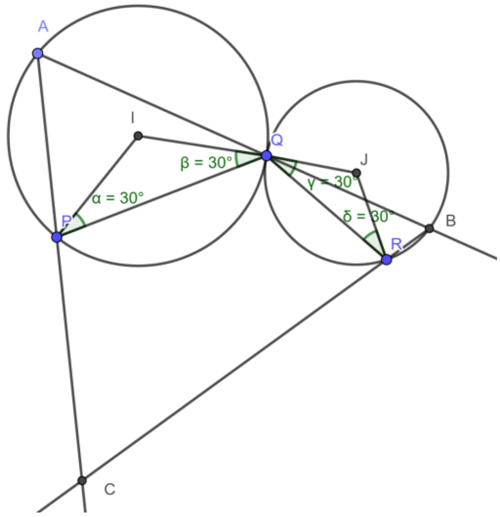
(一) 平面上，給定三點，畫出正三角形。

1. 已知平面上三點P 、Q 、R ，畫出一個正三角形ABC 。

(1) 分別作圓心I和圓心J ，使得所有對到PQ和QR劣弧的圓周角皆為$60°$ ，即 $\angle PIQ = \angle QJR = 120°$ 。

(2) 在圓I上任取一點動點A，作$\overrightarrow{AP}$和$\overrightarrow{AQ}$ ，使得$\overrightarrow{AQ}$交圓J於一點，取交點為B 。

(3) 作$\overrightarrow{BR}$ ，交$\overrightarrow{AP}$於一點，取交點為C ，則ΔABC即為所求。



【圖 2】

證明：

如【圖 2】所示，$\angle IPQ = \angle IQP = 30°$，則$\angle PIQ = 120° = PQ$，而$\angle PAQ$為圓周角，其角度為$PQ$所對圓心角$\angle PIQ$的一半，因此$\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle PIQ = 60°$；同理可證，$\angle QBR = 60°$，則可推得$\angle BAC$亦為$60°$，可得$\Delta ABC$為正三角形，即等邊三角形。

此等邊三角形是否唯一？由於點A為動點，隨著點A在圓I上移動，等邊三角形會跟著移動，圓上的點A可以有無限多個點，因此有無限多個等邊三角形。而當A、B之間的距離最大時，此等邊三角形會有最大邊長。

2. 已知平面上三點P、Q、R，作正三角形ABC時，任何的割線AQB都會給出等邊三角形嗎？

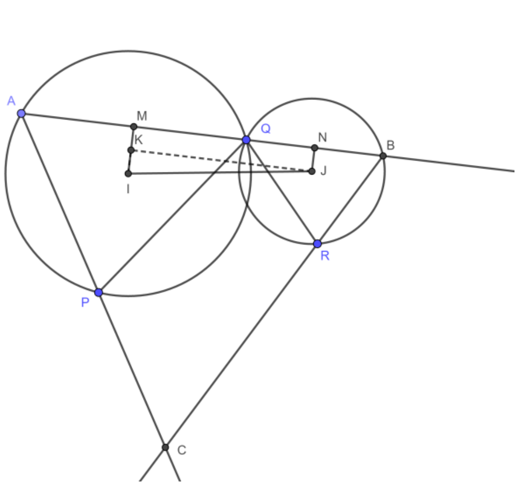
不一定，如【圖 8】所示，當動點A落在PQ的劣弧上時，此時是無法形成正三角形的。

3. 最大的正三角形會有最大的邊長，即最大的割線AQB，何時會有最大的割線AQB？

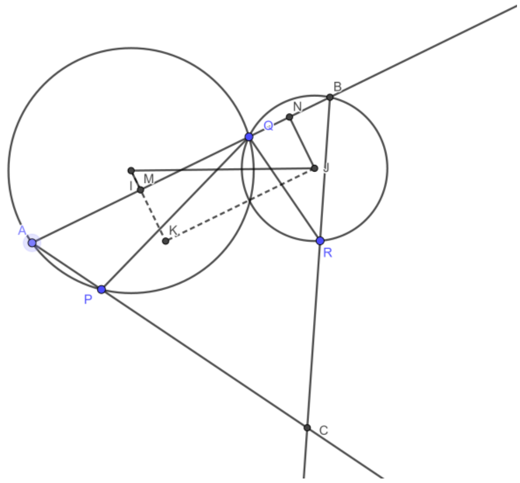
證明：

如【圖 3】所示，過圓心 I 、 J 分別作 $\overline{IM}$ 、 $\overline{JN}$ 垂直割線 AQB 於 M 、 N 兩點。過 J 作 $\overline{KJ}$ 垂直 $\overline{IM}$ 於 k 。 $\overline{IM}$ 、 $\overline{JN}$ 分別為 $\overline{AQ}$ 、 $\overline{QB}$ 的弦心距，所以 $\overline{AQ}=2\overline{MQ}$ 、 $\overline{QB}=2\overline{NQ}$ ， $\overline{AB}=2\overline{MN}=2\overline{KJ}$ 。在 ΔIJK ，因為 ΔIJK 為直角三角形，所以斜邊 $\overline{IJ}\geq\overline{KJ}$ ，如【圖 3】、【圖 4】、【圖 6】所示。當 $\overline{AB}//\overline{IJ}$ 時，如【圖 5】所示， $\overline{AB}=2\overline{IJ}$ 為最大值，可形成最大邊長的正三角形。

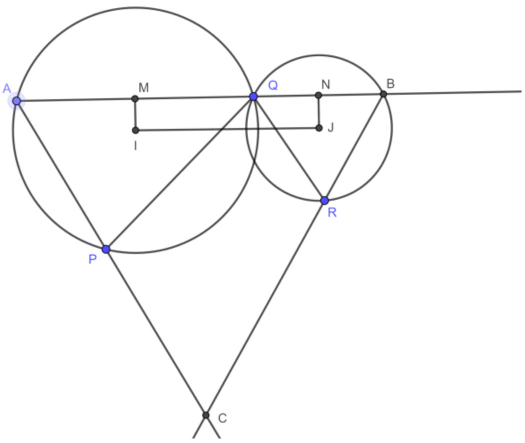
4. 已知平面上兩點 P 、 Q ，作正三角形 ABC 時，顯而易見，可以做出無限多個正三角形。



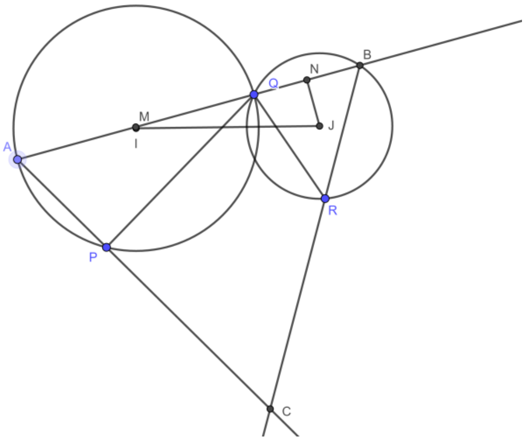
【圖 3】



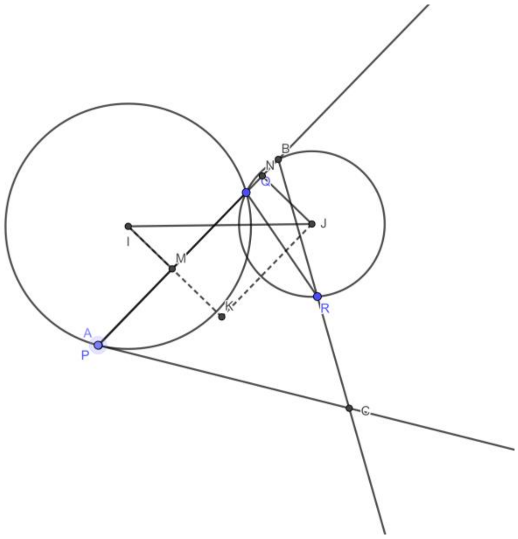
【圖 4】



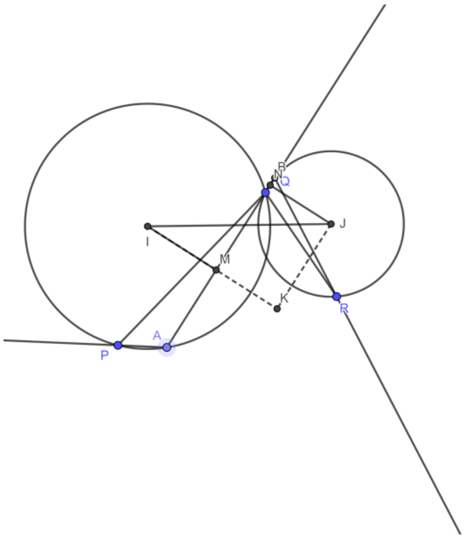
【圖 5】



【圖 6】



【圖 7】



【圖 8】

(二) 平面上，給定幾點，畫出正方形。

1. 已知平面上四點 P 、Q 、R 、S ，畫出一個正方形 $ABCD$ 。

(1) 連接 P 、Q 和 R 、S ，作 $\overline{PQ}$ 、$\overline{RS}$ 。分別取 P 、Q 之中心點 I 和 R 、S 之中心點 J 。

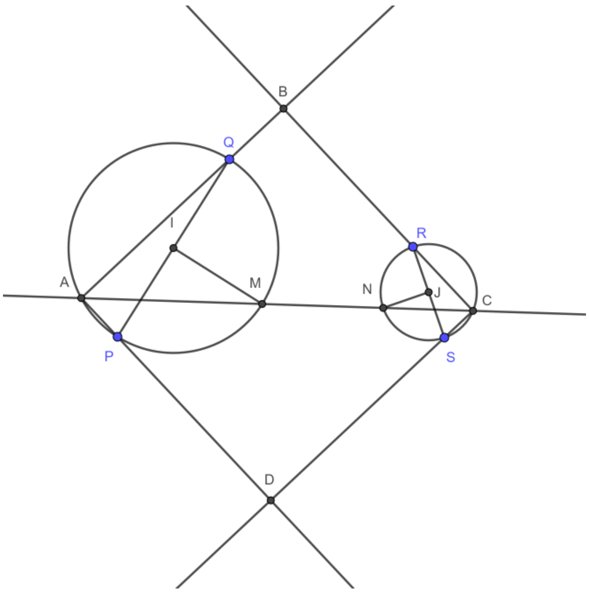
(2) 分別以 I 、J 為圓心，$\overline{PI}$ 、$\overline{JS}$ 為半徑作圓。

(3) 分別在 $\overline{PQ}$ 、$\overline{RS}$ 上作中垂線交圓 I 、J 於 M 、N 兩點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I 於點 A 和圓 J 於點 C 。

(5) 作 $\overrightarrow{AQ}$ 和 $\overrightarrow{CR}$ ，交於點 B 。

(6) 作 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{CS}$ ，交於點 D 。正方形 $ABCD$ 即為所求。

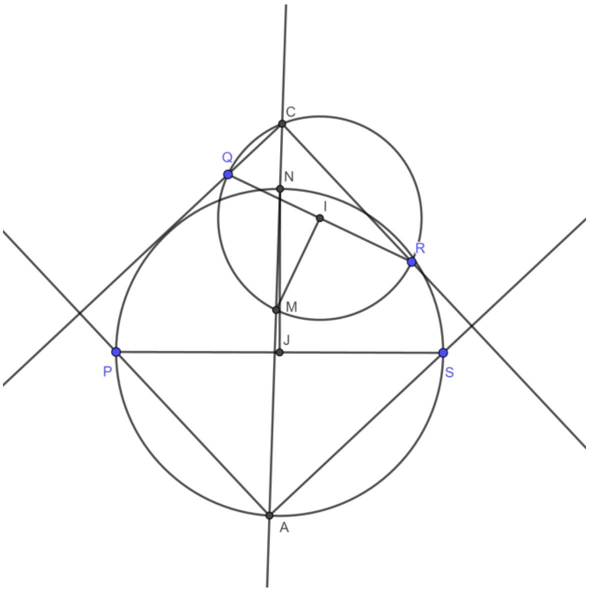


【圖 9】

證明：

I 為圓心，且 $\overline{IM}$ 為直徑 $\overline{PQ}$ 上的中垂線，因此 $\angle PIM = \angle QIM = 90°$ 。而 $\angle PAQ$ 所對圓弧為 $180°$ ，可推得 $\angle PAQ = 90°$ ；$\angle MAQ$ 所對圓弧為 $90°$ ，可推得 $\angle MAQ = 45°$ 。同理可證，$\angle RCS = 90°$ 、$\angle BCN = 45°$ 。由上述可證明 ΔABC 為等腰直角三角形，同理可證 ΔACD 亦為等腰直角三角形，所以 $ABCD$ 為正方形。

2. 同第 1 點的方法，但是改為以 $\overline{QR}$ 、 $\overline{PS}$ 取中點 I 、 J 。



【圖 10】

3. 已知平面上三點 P 、 Q 、 R ，畫出一個正方形 $ABCD$ 。

(1) 連接 P 、 Q 和 Q 、 R ，作 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{QR}$ 。分別取 P 和 Q 與 Q 和 R 之中心點，即中點 J 、 I 。

(2) 分別以 I 、 J 為圓心， $\overline{IR}$ 、 $\overline{JQ}$ 為半徑作圓。

(3) 分別在 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{RS}$ 上作中垂線交圓 I 、 J 於 M 、 N 兩點。

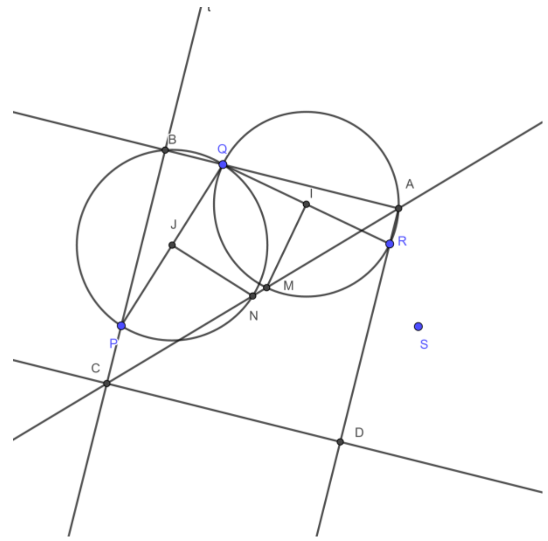
(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I 於點 A 。

(5) 作 $\overrightarrow{AQ}$ 和 $\overrightarrow{AR}$ 。

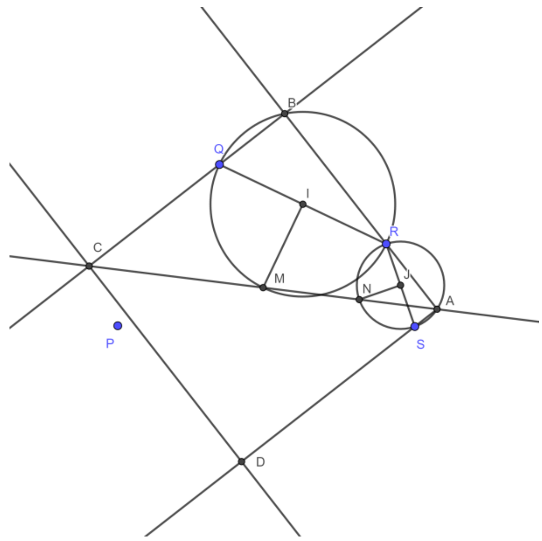
(6) 過點 P 向 $\overrightarrow{AQ}$ 做垂線，交 $\overrightarrow{AQ}$ 於點 B ，交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於點 C 。

(7) 過點 C 向 $\overrightarrow{AR}$ 做垂線，交 $\overrightarrow{AR}$ 於點 D ，正方形 $ABCD$ 即為所求，如【圖 11】所示。

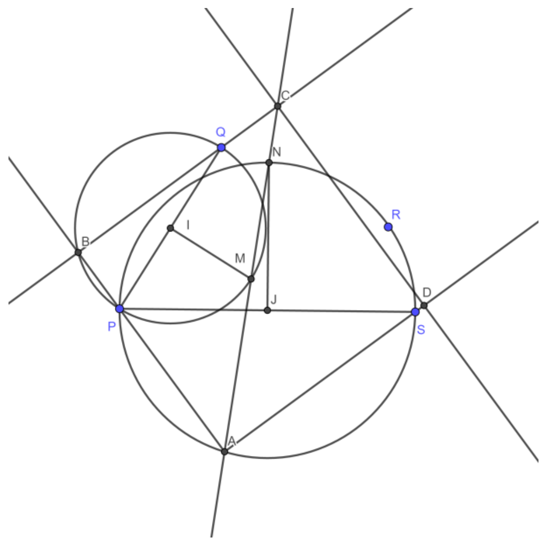
平面中P、Q、R、S四點中，任取三點做出四個正方形，例如【圖 11】中是取P、Q、R三點，【圖 12】是取Q、R、S三點，【圖 13】是取P、Q、S，【圖 14】則是取P、R、S，總共可以做出四個正方形。



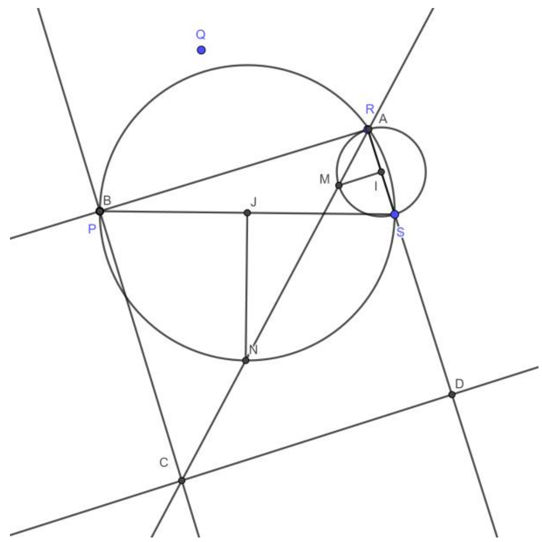
【圖 11】



【圖 12】



【圖 13】



【圖 14】

(三) 平面上，給定各邊各一點，共五點，畫出正五邊形。

1. 已知平面上五點 P 、 Q 、 R 、 S 、 T ，畫出一個正五邊形 $ABCDE$ 。

(1) 連接 P 、 Q 和 S 、 T ，在同側分別作 $\angle PQI = \angle OPI = 18°$ 、 $\angle JST = \angle JTS = 18°$ ，則 $\angle PIQ = \angle SJT = 144°$ 。

(2) 分別以 I 、 J 為圓心，作 $\overline{PI}$ 、 $\overline{JS}$ 為半徑作圓。

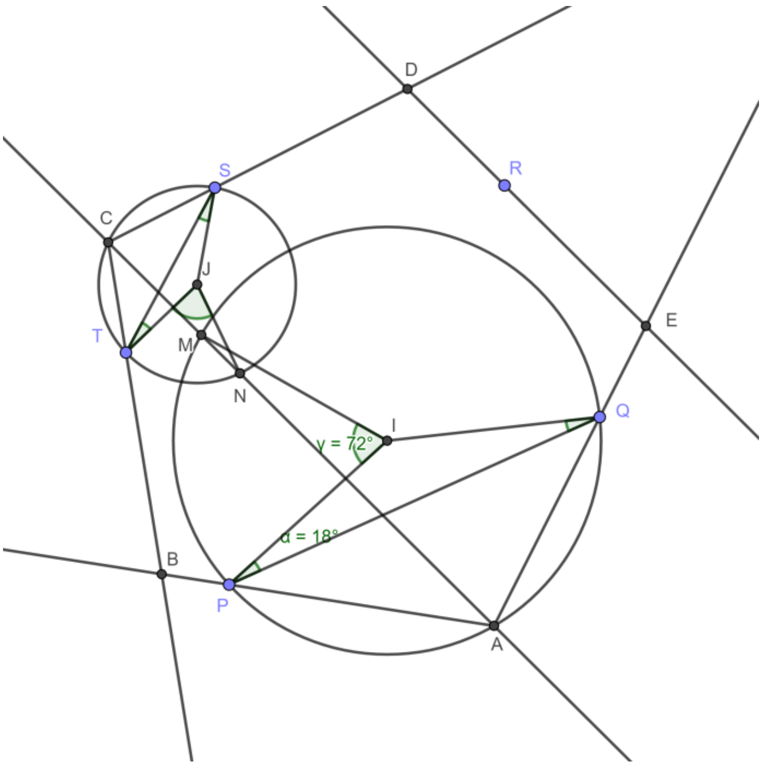
(3) 在圓 I 、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle PIM = \angle TJN = 72°$ ，點 M 、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I 、圓 J 於點 A 和點 C 。

(5) 作 $\overrightarrow{AQ}$ 、 $\overrightarrow{AP}$ 、 $\overrightarrow{CT}$ 和 $\overrightarrow{CS}$ ，取 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{CT}$ 的交點為點 B 。

(6) 過 R 點作 $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{MN}$ 。

(7) 取 $\overleftrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{CS}$ 、 $\overrightarrow{AQ}$ 的交點為點 D 、點 E ，則五邊形 $ABCDE$ 即為所求。



【圖 15】

證明：

$\because$ I為圓心，且$\angle$IPQ=$\angle$IQP=18°，$\angle$PIQ=144°，又$\angle$PAQ的角度為所對優弧PQ的一半，

$\therefore \angle PAQ=\frac{1}{2}(360°-144°)=108°$。同理可證，$\angle TCS=108°$。

在ΔABC中，$\angle BCA=\angle TCN=\frac{1}{2}TN=36°$，$\angle BAC=\angle PAM=\frac{1}{2}PM=36°$，

$\therefore \angle ABC=180°-36°-36°=108°$。$\angle DCA=\angle TCS-\angle TCN=108°-36°=72°$。

$\because \overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{MN} \therefore \overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{CA}$，$\angle CDE=180°-\angle DCA=180°-72°=108°$(同側內角互補)。

同理可證，$\angle AED=108°$。$\therefore$ 五邊形ABCDE的五個角皆為108°，即ABCDE為等角五邊形。

又四邊形ACDE中，$\angle CAE+\angle CDE=72°+108°=180°$(對角互補)

$\therefore$ ACDE為圓內接四邊形。

連接$\overline{BE}$，交$\overline{AC}$於點 U。作 $\overline{DF}//\overline{CB}$ ，交$\overline{BE}$於點 F。

$\because \overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{CA}$且$\overline{DF}//\overline{CB} \therefore \angle FDE=108°-72°=36°$，$\angle DFE=108°-36°=72° \therefore \angle DEF=72°$，$\overline{DF}//\overline{DE}$ 。

四邊形 BCDE 中，$\because \angle BCD+\angle BED=108°+72°=180°$(對角互補)

$\therefore$BCDE 為圓內接四邊形。

$\because$ 三點決定一個圓，而四邊形 ACDE 和四邊形 BCDE 中，重複三個點，

$\therefore$五邊形 ABCDE 為圓內接五邊形。

分別作$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的中垂線$\overline{GO}$、$\overline{HO}$相交於點 O，

連接$\overline{OA}$，以$\overline{OA}$為半徑，點 O 為圓心作圓 O，五邊形 ABCDE 即為圓 O 的圓內接五邊形。

分別連接$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$。

在ΔCOB、ΔAOB 中，$\overline{CB}=\overline{AB}$，$\overline{CO}=\overline{AO}$、$\overline{OB}=\overline{OB}$，

$\therefore \Delta COB \cong \Delta AOB$(SSS 全等)，$\angle CBO=\angle ABO$。

$\because \angle CBO+\angle ABO=\angle CBA=108°$，$\therefore \angle CBO=\angle ABO=54°$、$\angle BCO=\angle BAO=54°$。

作$\overline{OK}$垂直$\overline{CD}$於點 K，$\because \overline{OC}=\overline{OD}$，$\therefore \overline{OK}$為中垂線，$\overline{CK}=\overline{KD}$。

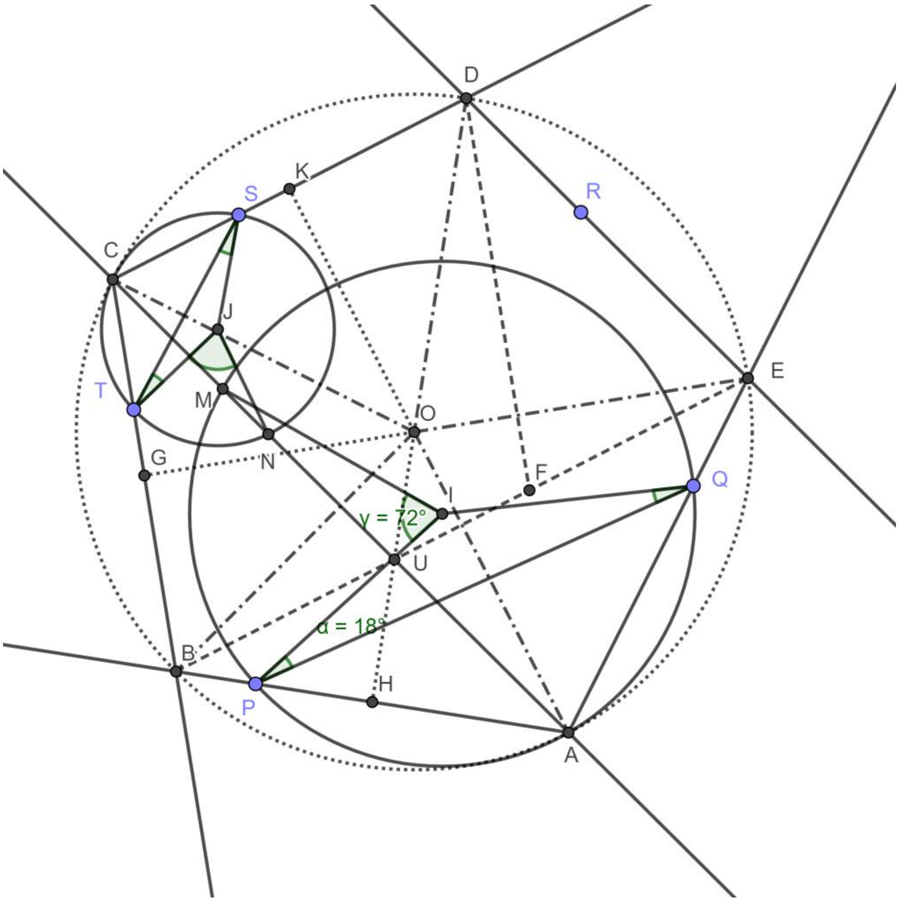
在ΔGCO、ΔKCO 中，$\overline{CO}=\overline{CO}$、$\angle CGO=\angle CKO=90°$，$\angle GCO=54°$，

$\angle$KCO$= \angle \mathrm{KCG} - \angle \mathrm{OCG} = 108° - 54° = 54°$，

$\therefore \Delta$GCO$\cong \Delta$KCO(AAS 全等)，$\overline{\mathrm{GC}} = \overline{\mathrm{KC}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{CB}}$，$\therefore \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{BC}}$。

同理可證，$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{AE}}$，∴五邊形 ABCDE 的五邊等長，ABCDE 為等邊五邊形。

∴ABCDE 為正五邊形。如【圖 16】所示。



【圖 16】

考慮若某兩點落在同一邊上，即給定的點與正五邊形上的頂點重合。可能狀況如下：

當 $\overleftrightarrow{MN}$ 通過點 S 時，則 C、S 重合，過點 C 做平行於 $\overleftrightarrow{BE}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{RE}$ E 於 D 點。仍可做出正五邊形，重合於原來的五邊形，如【圖 17】所示。

移動點 S，當點 S 落在 $\overleftrightarrow{BE}$ 上時，則 D、S 重合，仍為原來的五邊形，如【圖 18】所示。

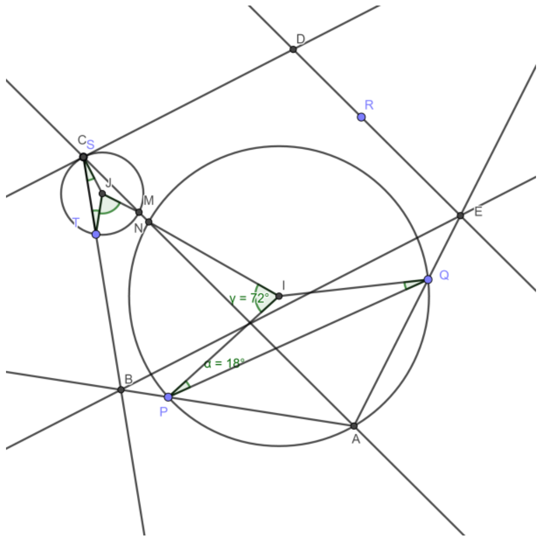
若 $\overleftrightarrow{MN}$ 通過點 T 時，則 C、T 重合，過點 C 做平行於 $\overleftrightarrow{AD}$ 的直線，交 $\overrightarrow{AP}$ 於點 B，仍可做出正五邊形，重合於原五邊形，如【圖 19】所示。

移動點 T，當點 T 落在 $\overrightarrow{AP}$ 上時，則 T、B 重合，仍為原來的正五邊形，如【圖 20】所示。

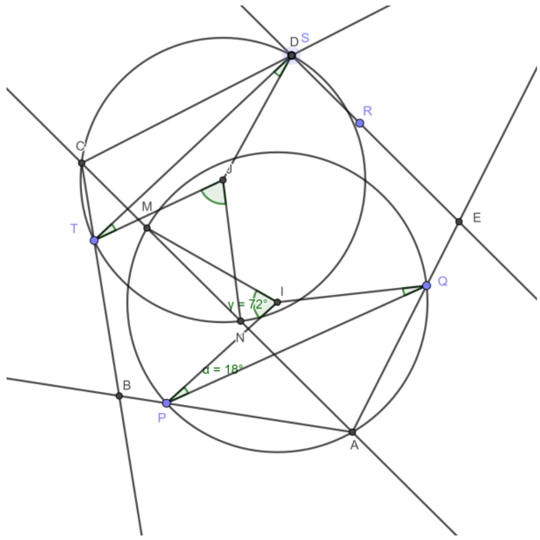
移動點 P，若 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{CT}$ 之交點恰與點 P 重合，仍為正五邊形，如【圖 21】所示。

若 $\overleftrightarrow{MN}$ 通過點 P 時，則 A、P 重合，過點 P 做平行於 $\overleftrightarrow{CE}$ 的直線，交 $\overrightarrow{CT}$ 於點 B，仍可做出正五邊形，重合於原五邊形，如【圖 22】所示。

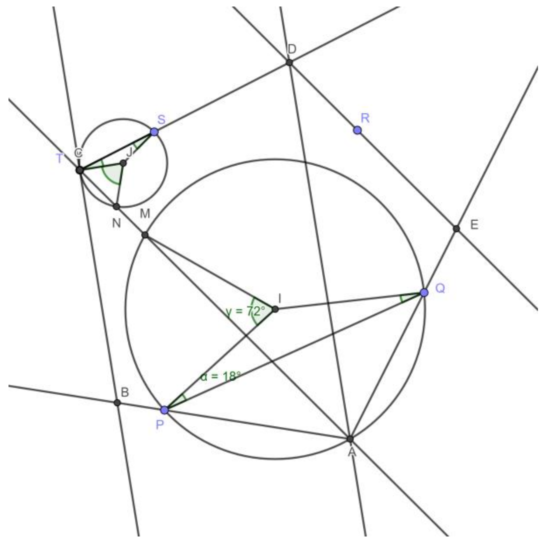
移動點 Q 的結果，與移動點 S 的結果相同，如【圖 23】、【圖 24】所示。



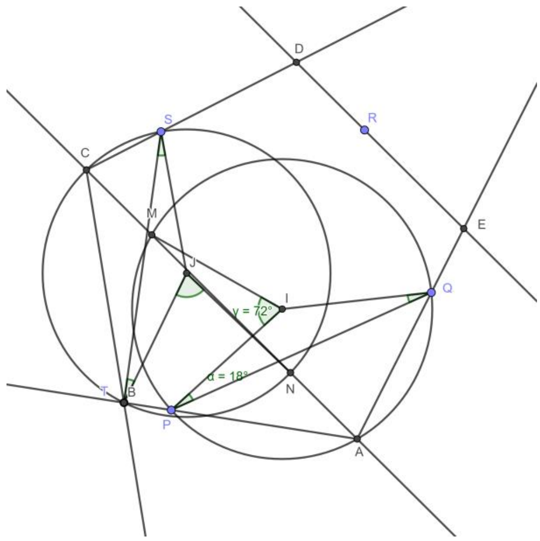
【圖 17】



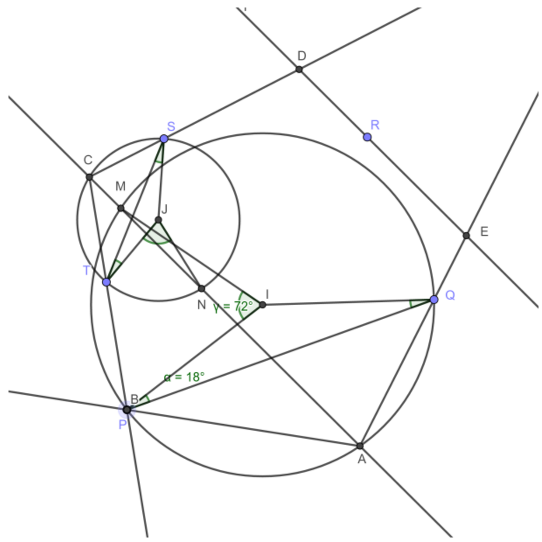
【圖 18】



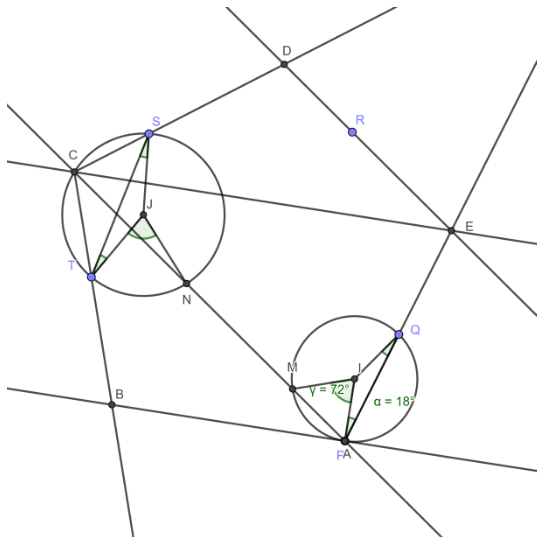
【圖 19】



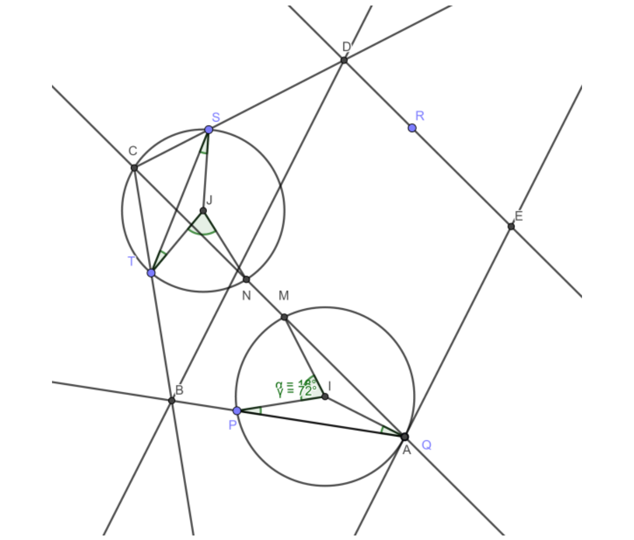
【圖 20】



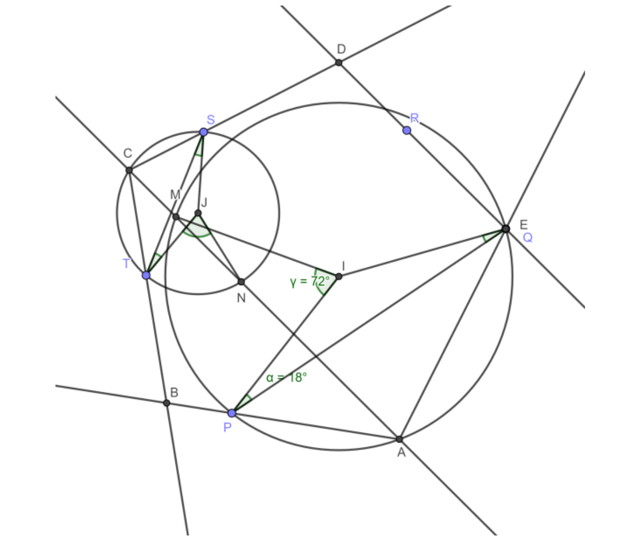
【圖 21】



【圖 22】



【圖 23】



【圖 24】

(四) 平面上，給定幾點，畫出正六邊形

1. 已知平面上六點 P 、 Q 、 R 、 S 、 T 、 U ，分別落於各邊上，畫出一個正六邊形 $ABCDEF$ 。

(1) 連接 P 、 Q 和 T 、 U ，在同側分別作 $\angle PQI = \angle QPI = 30°$ 、 $\angle JTU = \angle JUT = 30°$ ，則 $\angle PIQ = \angle TJU = 120°$ 。

(2) 分別以 I 、 J 為圓心，以 $\overline{PI}$ 、 $\overline{JT}$ 為半徑作圓。

(3) 在圓 I 、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle PIM = \angle UJN = 60°$ ，點 M 、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

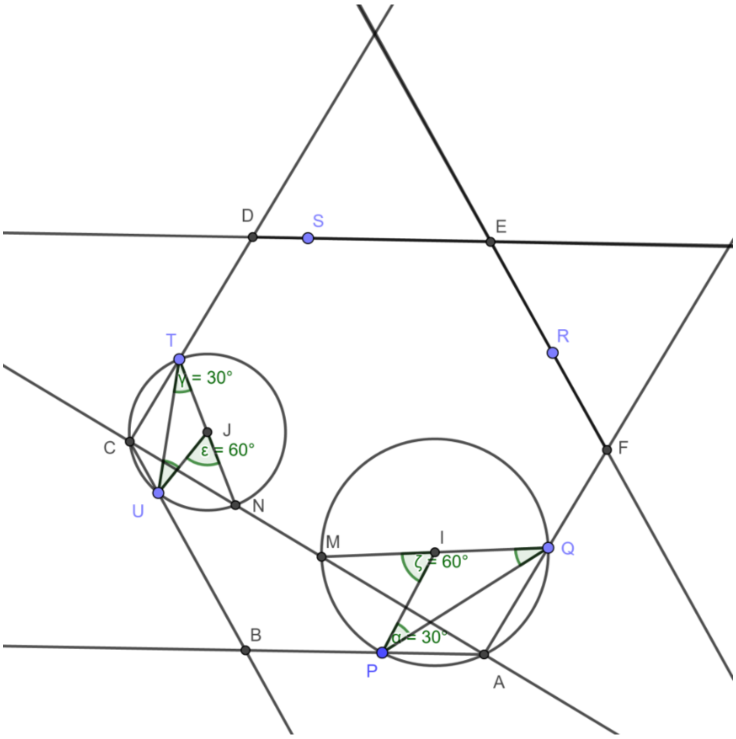
(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I 、圓 J 於點 A 和點 C 。

(5) 作 $\overrightarrow{AQ}$ 、 $\overrightarrow{AP}$ 、 $\overrightarrow{CT}$ 和 $\overrightarrow{CU}$ ，取 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{CT}$ 的交點為點 B 。

(6) 過 R 點作 $\overleftrightarrow{EF}$ 平行於 $\overleftrightarrow{CB}$ ，交 $\overrightarrow{AQ}$ 於點 F ；即 $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{CB}$ 。

(7) 過 S 點作 $\overleftrightarrow{DE}$ 平行於 $\overleftrightarrow{BA}$ ，交 $\overrightarrow{CT}$ 於點 D ；即 $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BA}$ 。

(8) 設 $\overleftrightarrow{EF}$ 和 $\overleftrightarrow{DE}$ 相交於點 E ，則六邊形 $ABCDEF$ 即為所求。



【圖 25】

證明：

∵I 為圓心，且∠IPQ=∠IQP=30°，∠PIQ=120°，∠PAQ 的角度為所對$\overset{\frown}{PQ}$優弧的一半，

∴∠PAQ=$\frac{1}{2}(360° - 120°) = 120°$。同理可證，∠TCU=120°。

在ΔABC 中，∠BCA=∠UCN =$\frac{1}{2}\overset{\frown}{UN}$=30°，∠BAC=∠PAM = $\frac{1}{2}\overset{\frown}{PM}$=30°，

∴∠ABC=$180° - 30° - 30° = 120°$，$\overline{AB} = \overline{BC}$。∠DCA =∠TCU $- \angle UCN = 120° - 30° = 90°$。同理可證，∠FAC= 90°。

∵∠DCA+∠FAC $= 180°$，∴$\overline{CD} // \overline{AF}$ (同側內角互補)。

延長$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{FA}$兩射線，設交於點 K。

在ΔABK 中，∠ABK =$180° - \angle ABC = 180 - 120° = 60°$，$\angle BAK = 180° - \angle BAF = 180 - 120° = 60°$，∴$\angle BAK = 180 - 120° = 60°$。

$\because \overleftrightarrow{BC}//\overleftrightarrow{FE}$，$\therefore \angle EFA = \angle EFK = 180° - 60° = 120°$ (同側內角互補)。

作$\overleftrightarrow{BL}$垂直$\overline{AC}$於點 L，並取$\overline{BL} = \overline{LO}$，則$\angle CBL = 90° - \angle BCL = 90° - 30° = 60°$。

在ΔCBL、ΔCOL 中，$\overline{CL} = \overline{CL}$，$\overline{BL} = \overline{OL}$，$\angle CLB = \angle CLO = 90°$，

$\therefore \Delta CBL \cong \Delta COL$(SAS 全等)，$\overline{CB} = \overline{CO}$，$\angle CBL = \angle COL = 60°$，$\angle BCL = \angle OCL = 30°$。

$\therefore \Delta BCO$ 為正三角形。同理可證ΔABO 亦為正三角形，$\angle BOA = \angle OAB = 60°$。

又$(\angle COB + \angle BOA) + \angle OAB = 180°$(同側內角互補)，

$\therefore \overline{CO}//\overline{BA}$，四邊形 COAB 為平行四邊形，且四邊等長，故為菱形。

延長$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{DC}$兩射線，設交於點 G。在ΔGCB 中，$\angle GCB = 180° - \angle DCB = 180 - 120° = 60°$，$\angle CBG = 180° - \angle CBA = 180 - 120° = 60°$，$\therefore \angle CGB = 180 - 120° = 60°$。

又$\because \overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{BA}$，$\therefore \angle CDE = \angle GDE = 180 - 60° = 120°$ (同側內角互補)。

同理可證，延長$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{EF}$兩射線，設交於點 H。

在ΔAFH 中，$\angle AFH = 180° - \angle EFA = 180 - 120° = 60°$，$\angle FAH = 180° - \angle BAF = 180 - 120° = 60°$，$\therefore \angle AHF = 180 - 120° = 60°$。

又$\because \overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{BA}$，$\therefore \angle DEF = \angle DEH = 180 - 60° = 120°$ (同側內角互補)。

$\therefore$六邊形 ABCDEF 為等角六邊形。

取$\overline{CD}$中點V，連接$\overline{DV}//\overline{VB}$。

$\because \angle DCB + \angle CBO = 120° + 60 = 180°$，$\therefore \overline{CD}//\overline{BO}$ (同側內角互補)。

在ΔVCD、ΔVOB 中，$\overline{CV} = \overline{OV}$，$\angle VCD = \angle VOB = 60°$，$\angle CDV = \angle OBV$(內錯角相等)，

$\therefore \Delta VCD \cong \Delta VOB$(AAS 全等)，$\overline{CD} = \overline{OB}$，$\overline{VD} = \overline{VB}$。

又ΔBCD 為正三角形，$\therefore\overline{VB}$為ΔBCD 之中線，亦為中垂線，

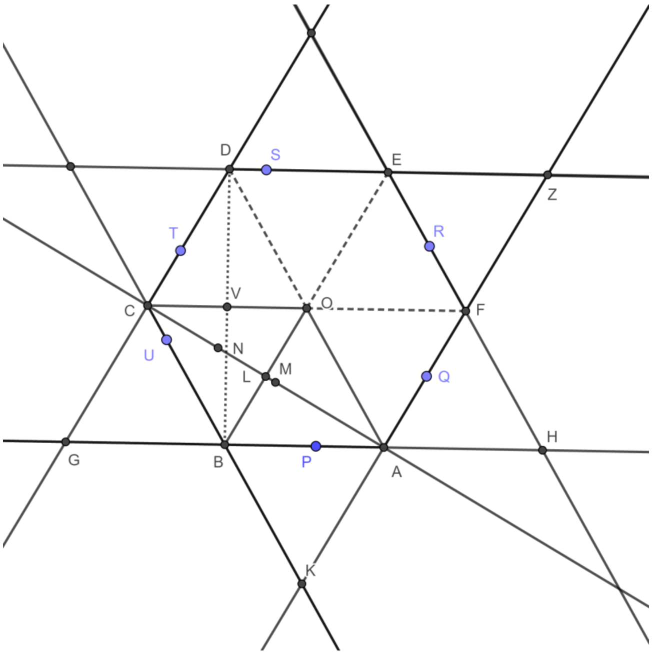
$\therefore\angle CVD=\angle OVB=90°$，$\angle CDV=\angle OBV=30°$。

連接$\overline{DO}$，在ΔVCD、ΔVOD 中，$\overline{CV}=\overline{OV}$，$\overline{DV}=\overline{DV}$，$\angle DVC=\angle DVO=90°$，

$\therefore\Delta VCD\cong\Delta VOD$(SAS 全等)，$\overline{CD}=\overline{OD}$，$\angle DCV=\angle DOV=60°$，$\therefore\Delta$CDO 亦為正三角形。

連接$\overline{OE}$、$\overline{OF}$，依序同理可證，ΔAOF、ΔODE、ΔOEF 皆為正三角形，

$\therefore$六邊形 ABCDEF 為等邊六邊形，亦為正六邊形。



【圖 26】

2. 已知平面上五點，分別落於其中五個邊上，畫出一個正六邊形 ABCDEF。

如【圖 27】所示，若只有五點(少了點 P)，從 R、S、T、U 四點著手，仍可畫出正六邊形 ABCDEF。

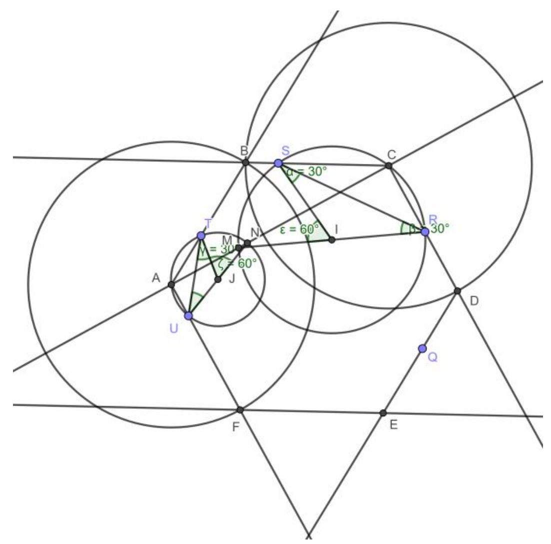
如【圖 28】所示，若只有五點(少了點 Q)，從 R、S、T、U 四點著手，仍可畫出正六邊形 ABCDEF。

如【圖 29】所示，若只有五點(少了點 R)，從 P、Q、T、U 四點著手，仍可畫出正六邊形 ABCDEF。

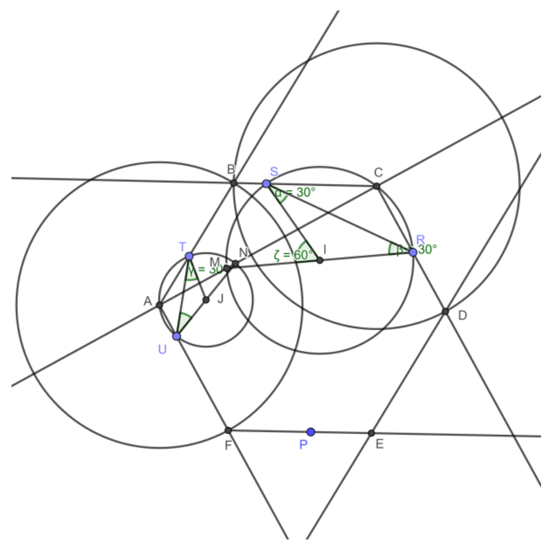
如【圖 30】所示，若只有五點(少了點 S)，從 P、Q、T、U 四點著手，仍可畫出正六邊形 ABCDEF。

如【圖 31】所示，若只有五點(少了點 T)，從 P、Q、R、S 四點著手，仍可畫出正六邊形 ABCDEF。

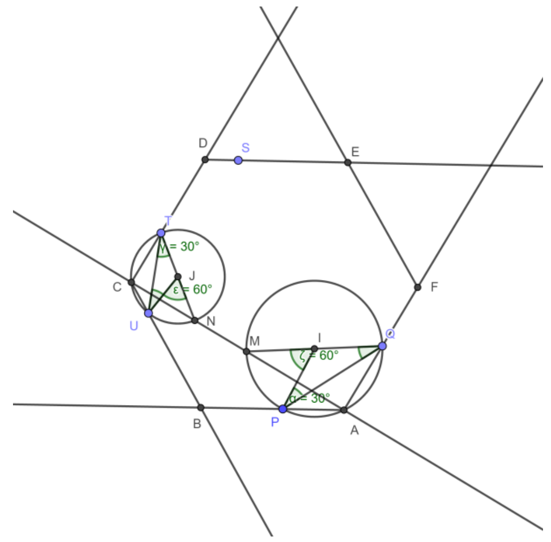
如【圖 32】所示，若只有五點(少了點 U)，從 P、Q、R、S 四點著手，仍可畫出正六邊形 ABCDEF。



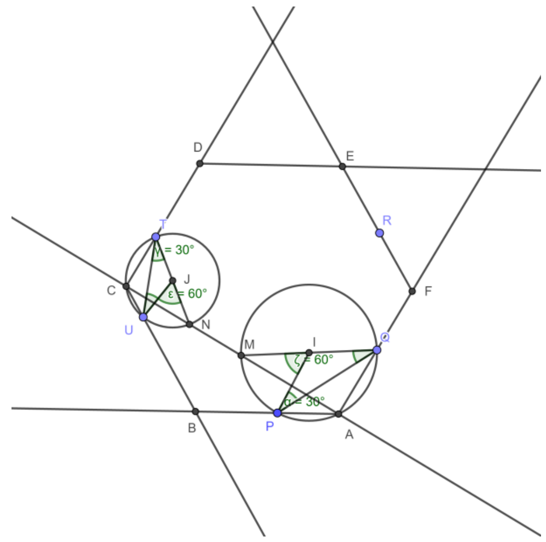
【圖 27】



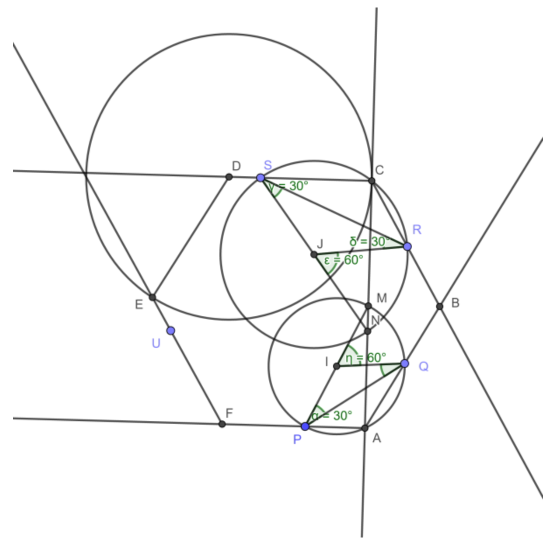
【圖 28】



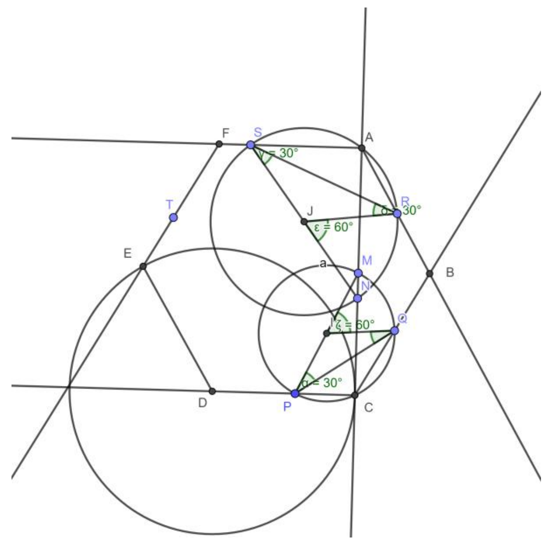
【圖 29】



【圖 30】



【圖 31】



【圖 32】

(五) 平面上，給定七點，分別落在各邊上，畫出正七邊形

1. 已知平面上七點 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7，分別落於各邊上，畫出一個正七邊形 $ABCDEFG$。

(1) 連接 A_1、A_2 和 A_6、A_7，在同側分別作 $\angle IA_1A_2 = \angle IA_2A_1 = 90° - \dfrac{360°}{7}$、$\angle JA_6A_7 = \angle JA_7A_6 = 90° - \dfrac{360°}{7}$，則 $\angle A_1IA_2 = \angle A_6JA_7 = \dfrac{360°}{7} \times 2$

(2) 分別以 I、J 為圓心，作 $\overline{A_1I}$、$\overline{JA_7}$ 為半徑作圓。

(3) 在圓 I、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle A_1IM = \angle A_7JN = \dfrac{360°}{7}$，點 M、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

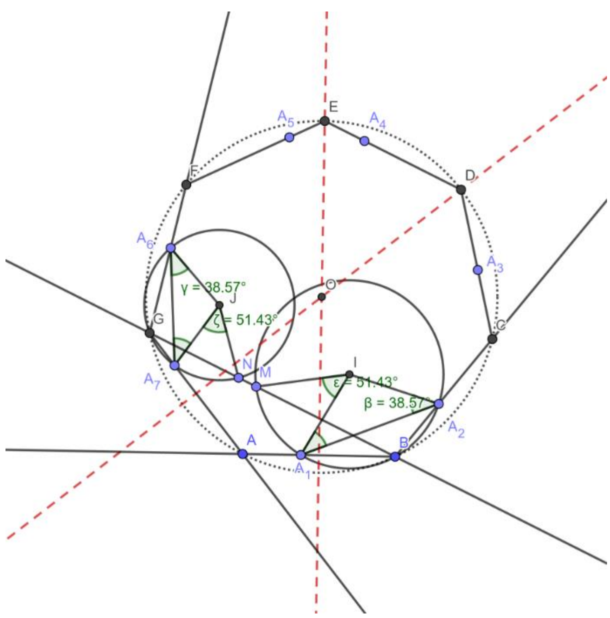
(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I、圓 J 於點 B 和點 G。

(5) 作 $\overrightarrow{BA_1}$、$\overrightarrow{BA_2}$、$\overrightarrow{GA_6}$、$\overrightarrow{GA_7}$，取、$\overrightarrow{BA_1}$、$\overrightarrow{GA_7}$ 的交點為點 A。

(6) 分別作 $\overline{AB}$、$\overline{AG}$ 的中垂線交於點 O，以點 O 為圓心，$\overline{OA}$ 半徑為圓心作圓。

(7) 設此圓分別交 $\overrightarrow{BA_2}$、$\overrightarrow{GA_6}$ 及 $\overline{AB}$、$\overline{AG}$ 的中垂線於點 C、F、E 和 D。

(8) 連接 $\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$，則七邊形 $ABCDEFG$ 即為所求。



【圖 33】

證明：

如【圖 34】所示，$\because$ I 為圓心，且 $\angle IA_1A_2=\angle IA_2A_1=90°-\frac{360°}{7}\fallingdotseq 38.57°$，

$\angle A_1IA_2=180°-(\angle IA_1A_2+\angle IA_2A_1)=\frac{360°}{7}\times 2\fallingdotseq 102.86°$，

$\angle A_1BA_2$ 的角度為所對 A_1A_2 優弧的一半

$\therefore \angle A_1BA_2=\frac{1}{2}(360°-\frac{360°}{7}\times 2)=180°-\frac{360°}{7}$ (即正七邊形的角度)。

同理可證，$\angle A_6GA_7=180°-\frac{360°}{7}$ 。

在ΔABG 中，

$\angle BGA=\angle NGA_7=\frac{1}{2}NA_7=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{7}\fallingdotseq 25.715°$，$\angle ABG=\angle MBA_1=\frac{1}{2}MA_1=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{7}\fallingdotseq 25.715°$，

$\therefore \angle BAG=180°-\frac{360°}{14}\times 2=180°-\frac{360°}{7}$ 。

$\angle FGB=\angle FGA-\angle BGA=(180°-\frac{360°}{7})-\frac{360°}{14}\fallingdotseq 102.86°$，$\overline{AB}=\overline{AG}$。

$\because \overleftrightarrow{OM_1}$為$\overline{AB}$的中垂線，

$\therefore$ 在 ΔOAM_1、ΔOBM_1 ΔOAM_1、ΔOBM_1中，$\angle OM_1A=\angle OM_1=90°$，$\overline{OM_1}=\overline{OM_1}$、$\overline{AM_1}=\overline{BM_1}$，

$\therefore \Delta OAM_1\cong\Delta OBM_1$(SAS 全等)，$\angle AOM_1=\angle BOM_1$，$\angle OAM_1=\angle OBM_1$，

$\overline{OA}=\overline{OB}$，點 B 在圓 O 上。

同理可證，$\Delta OGM_7\cong\Delta OAM_7$(SAS 全等) ，$\angle OGM_7=\angle OAM_7$，$\angle GOM_7=\angle AOM_7$，

$\overline{OG}=\overline{OA}$，點 G 在圓 O 上。

又在ΔOAM_1、ΔOAM_7中，$\overline{OA}=\overline{OA}$，$\angle OM_1A=\angle OM_1B=90°$，$\overline{AM_1}=\overline{AM_7}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AG}$ 、

$\overline{AM_1}=\overline{BM_1}$，

$\therefore \Delta OAM_1\cong\Delta OAM_7$ (RHS 全等)，$\angle AOM_1=\angle AOM_7$，$\angle OAM_1=\angle OAM_7$，$\overline{OM_1}=\overline{OM_7}$。

$\angle OAM_1+\angle OAM_7=\angle GAB$，

$\angle OAM_1=\angle OAM_7=\frac{1}{2}(180°-\frac{360°}{7})=90°-\frac{360°}{14}=\angle OBM_1$。

$\angle OBC=\angle A_1BA_2-\angle OBM_1=(180°-\frac{360°}{7})-(90°-\frac{360°}{14})=90°-\frac{360°}{14}=\angle OBM_1$。

作$\overline{BC}$中垂線$\overline{OM_2}$。

在ΔOBM_1、ΔOBM_2中，$\overline{OB}=\overline{OB}$，$\angle OM_1B=\angle OM_2B=90^\circ$，$\angle OBM_1=\angle OBM_2$，

$\therefore \Delta OBM_1 \cong \Delta OBM_2$(AAS 全等)，$\angle BOM_1=\angle BOM_2$，$\overline{BM_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{BM_2}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}$。

連接$\overline{OC}$，$\because \overline{OM_2}$為$\overline{BC}$的中垂線，

$\therefore \Delta OBM_2 \cong \Delta OCM_2$(SAS 全等)，$\angle BOM_2=\angle COM_2=90^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\frac{360^\circ}{7})=\frac{360^\circ}{14}$，

$\angle OBM_2=\angle OCM_2=90^\circ-\frac{360^\circ}{14}=\angle OAB=\frac{1}{2}(180^\circ-\frac{360^\circ}{7})$。

$\therefore OAB \cong \Delta OCB$(SAS 全等)。

作$\overline{FG}$中垂線$\overline{OM_6}$，

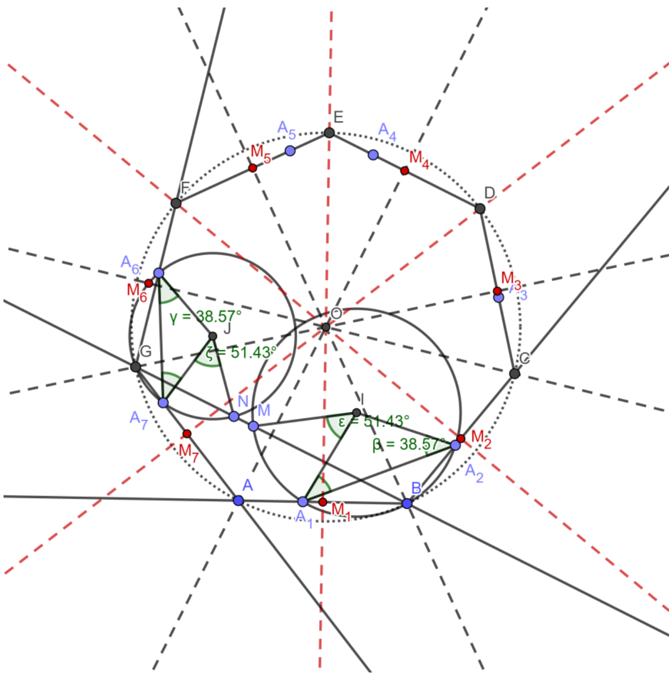
同理可證，$\Delta OGM_7 \cong \Delta OGM_6$(AAS 全等)，$OGA \cong \Delta OGF$(SAS 全等)，$\overline{AG}=\overline{FG}$。

$\angle OFG=\angle OGF=\frac{1}{2}(180^\circ-\frac{360^\circ}{7})$。

$\because$ ABCDEFG 為圓內接七邊形，

同理可證$\angle AOB=\frac{360^\circ}{14}\times 2=\frac{360^\circ}{7}=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle DOF=\angle FOG=\angle GOA$，

$\therefore$ 七邊形 ABCDEFG 為正七邊形。



【圖 34】

(六) 平面上，給定八點，分別落在各邊上，畫出正八邊形

1. 已知平面上八點 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7、A_8，分別落於各邊上，畫出一個正七邊形 $ABCDEFGH$ 。

(1) 連接 A_1、A_2 和 A_7、A_8，在同側分別作 $\angle IA_1A_2=\angle IA_2A_1=90°-\dfrac{360°}{8}$、$\angle JA_6A_7=\angle IA_7A_6=90°-\dfrac{360°}{8}$，則 $\angle A_1IA_2=\angle A_6JA_7=\dfrac{360°}{8}\times 2=90°$ 。

(2) 分別以 I、J 為圓心，作 $\overline{A_1I}$、$\overline{JA_8}$ 為半徑作圓。

(3) 在圓 I、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle A_1IM=\angle A_8JN=\dfrac{360°}{8}=45°$，點 M、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

(4) 作直線 MN 分別交圓 I、圓 J 於點 B 和點 H 。

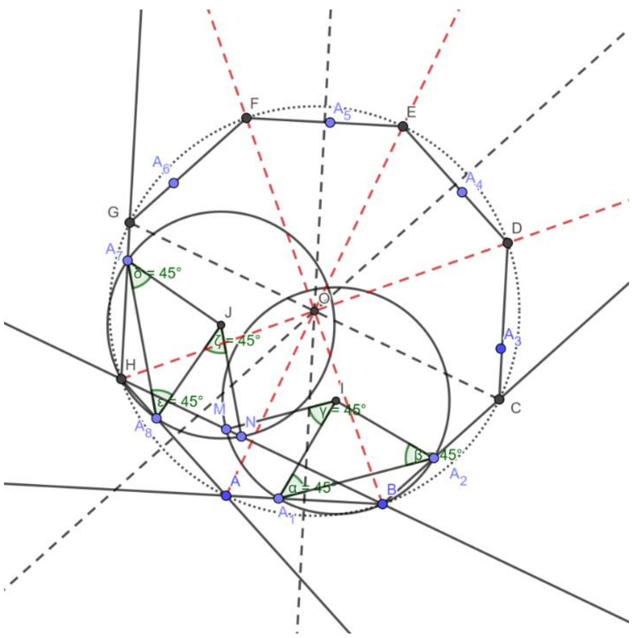
(5) 作 $\overrightarrow{BA_1}$、$\overrightarrow{BA_2}$、$\overrightarrow{HA_7}$、$\overrightarrow{HA_8}$，取 $\overrightarrow{BA_1}$、$\overrightarrow{HA_8}$ 的交點為點 A 。

(6) 分別作 $\overline{AB}$、$\overline{AH}$ 的中垂線交於點 O 。

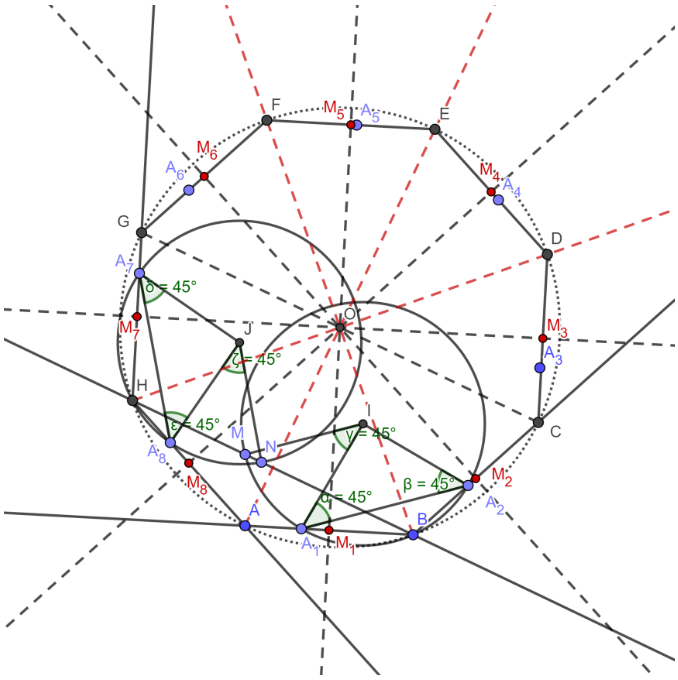
(7) 以點 O 為圓心，$\overline{OA}$ 半徑為圓心作圓，設此圓分別交 $\overrightarrow{BA_2}$、$\overrightarrow{HA_7}$ 於點 C、G 。

(8) 作 $\overleftrightarrow{OA}$、$\overleftrightarrow{OB}$、$\overleftrightarrow{OH}$，交圓 O 於點 E、F、D 。

(9) 連接 $\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$ 則八邊形 $ABCDEFGH$ 即為所求。



【圖 35】



【圖 36】

證明：

如【圖 36】所示，∵ I 為圓心，且$\angle IA_1A_2 = \angle IA_2A_1 = 90° - \dfrac{360°}{8} = 45°$，

$\angle A_1IA_2 = 180° - (\angle IA_1A_2 + \angle IA_2A_1) = \dfrac{360°}{8} \times 2 = 90°$，

$\angle A_1BA_2$ 的角度為所對 A_1A_2 優弧的一半，

$\therefore \angle A_1BA_2 = \dfrac{1}{2}(360° - \dfrac{360°}{8} \times 2) = 180° - \dfrac{360°}{8} = 135°$ (即正八邊形的角度)。

同理可證，$\angle A_7HA_8 = 180° - \dfrac{360°}{8} = 135°$。

在ΔABH 中，$\angle BHA = \angle NHA_8 = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{NA_8} = \dfrac{1}{2} \times 45° = 22.5°$，$\angle ABH = \angle MBA_1 = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{MA_1} = 22.5°$，

$\therefore \angle BAH = 180° - 22.5° \times 2 = 135°$。

$\angle GHB = \angle GHA - \angle BHA = 135° - 22.5° = 112.5°$，$\overline{AB} = \overline{AH}$。

$\because \overleftrightarrow{OM_1}$為$\overline{AB}$的中垂線，

$\therefore$ 在ΔOAM_1、ΔOBM_1中，

$\angle OM_1A = \angle OM_1B = 90°$，$\overline{OM_1} = \overline{OM_1}$、$\overline{AM_1} = \overline{BM_1}$，

$\therefore \Delta OAM_1 \cong \Delta OBM_1$(SAS 全等) $\angle AOM_1 = \angle BOM_1$，$\angle OAM_1 = \angle OBM_1$

，$\overline{OA} = \overline{OB}$，點 B 在圓 O 上。

同理可證，$OHM_8 \cong \Delta OAM_8$(SAS 全等) ，$\angle OHM_8 = \angle OAM_8$，$\angle HOM_8 = \angle AOM_8$，

$\overline{OH} = \overline{OA}$，點 H 在圓 O 上。

又在ΔOAM_1、ΔOAM_8中，

$\overline{OA} = \overline{OA}$，$\angle OM_1A = \angle OM_8A = 90°$，$\overline{AM_1} = \overline{AM_8} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AH}$ 、$\overline{AM_1} = \overline{AM_8}$，

$\therefore \Delta OAM_1 \cong \Delta OAM_8$(RHS 全等)， $\angle AOM_1 = \angle AOM_8$，$\angle OAM_1 = \angle OAM_8$，

$\overline{OM_1} = \overline{OM_8}$。$\angle OAM_1 + \angle OAM_8 = \angle HAB$，

$\angle OAM_1 = \angle OAM_8 = \frac{1}{2}(180° - \frac{360°}{8}) = 90° - \frac{360°}{16} = \angle OBM_1$。

$\angle OBC = \angle A_1BA_2 - \angle OBM_1 = (180° - \frac{360°}{8}) - (90° - \frac{360°}{16}) = 90° - \frac{360°}{16} = \angle OBM_1$。

作$\overline{BC}$中垂線$\overline{OM_2}$。在ΔOBM_1、ΔOBM_2中，

$\overline{OB} = \overline{OB}$，$\angle OM_1B = \angle OM_2B = 90°$，$\angle OBM_1 = \angle OBM_2$，

$\therefore \Delta OBM_1 \cong \Delta OBM_2$(AAS 全等)，

$\angle BOM_1 = \angle BOM_2$，$\overline{BM_1} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{BM_2} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ $\therefore$ $\overline{AB} = \overline{BC}$ 。

連接$\overline{OC}$，$\because$ $\overline{OM_2}$為$\overline{BC}$的中垂線，

$\therefore \Delta OBM_2 \cong \Delta OCM_2$(SAS 全等)，$\angle BOM_2 = \angle COM_2 = 90° - \frac{1}{2}(180° - \frac{360°}{8}) = \frac{360°}{16}$ ，

$\angle OBM_2 = \angle OCM_2 = 90° - \frac{360°}{16} = \angle OAB = \frac{1}{2}(180° - \frac{360°}{8})$ 。

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCB$(SAS 全等)。

作$\overline{GH}$中垂線$\overline{OM_7}$，同理可證，$OHM_8 \cong \Delta OHM_7$(AAS 全等)，$OHA \cong \Delta OHG$(SAS 全等)，

$\overline{AH} = \overline{GH}$。$\angle OGH = \angle OHG = \frac{1}{2}(180° - \frac{360°}{8}) = 67.5°$ 。

$\because$ ABCDEFGH 為圓內接八邊形，同理可證

$\angle AOB = \frac{360°}{16} \times 2 = \frac{360°}{8} = 45° = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle DOF = \angle FOG = \angle GOH = \angle HOA$ ，

$\therefore$ 八邊形 ABCDEFG 為正八邊形。

(七) 平面上，給定n點，分別落在各邊上，畫出正n邊形($n \geq 5$)

1. 若n為奇數，給定n點，A_1、A_2、…、A_n，畫出的正n邊形為$P_1P_2\cdots P_n$。

(1) 連接A_1、A_2和A_{n-1}、A_n，在同側分別作$\angle IA_1A_2=\angle IA_2A_1=90°-\dfrac{360°}{n}$、

$\angle JA_{n-1}A_n=\angle JA_nA_{n-1}=90°-\dfrac{360°}{n}$，則$\angle A_1IA_2=\angle A_{n-1}JA_n=\dfrac{360°}{n}\times 2$。

(2) 分別以I、J為圓心，作$\overline{A_1I}$、$\overline{JA_n}$為半徑作圓。

(3) 在圓I、圓J上，分別畫指定角$\angle A_1IM=\angle A_nJN=\dfrac{360°}{n}$，點$M$、點$N$為圓$I$和圓$J$上的點。

(4) 作$\overleftrightarrow{MN}$分別交圓I、圓J於點P_2和點P_n。

(5) 作$\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$，取$\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$的交點為點$P_1$。

(6) 分別作$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_n}$的中垂線交於點O，以點O為圓心，$\overline{OP_1}$半徑為圓心作圓。

(7) 設此圓分別交$\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$、及$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_n}$的中垂線於點$P_3$、$P_{n-1}$、$P_{\frac{n+1}{2}+1}$和$P_{\frac{n+1}{2}}$。

(8) 作$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$、…、$\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$的中垂線，交圓$O$於各點，直到$n$個點皆被畫出。

(9) 則n邊形$P_1P_2\cdots P_{\frac{n+1}{2}}P_{\frac{n+1}{2}+1}\cdots P_{n-1}P_n$即為所求。

2. 若n為偶數，給定n點，A_1、A_2、…、A_n，畫出的正n邊形為$P_1P_2\cdots P_n$。

(1) 連接 A_1、A_2 和 A_{n-1}、A_n，在同側分別作 $\angle IA_1A_2 = \angle IA_2A_1 = 90° - \dfrac{360°}{n}$、

$\angle JA_{n-1}A_n = \angle JA_nA_{n-1} = 90° - \dfrac{360°}{n}$，則 $\angle A_1IA_2 = \angle A_{n-1}JA_n = \dfrac{360°}{n} \times 2$。

(2) 分別以 I、J 為圓心，作 $\overline{A_1I}$、$\overline{JA_n}$ 為半徑作圓。

(3) 在圓 I、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle A_1IM = \angle A_nJN = \dfrac{360°}{n}$，點 M、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I、圓 J 於點 P_2 和點 P_n。

(5) 作 $\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$，取 $\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$ 的交點為點 P_1。

(6) 分別作 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_n}$ 的中垂線交於點 O，以點 O 為圓心，$\overline{OP_1}$ 半徑為圓心作圓。

(7) 設此圓分別交 $\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$ 於點 P_3、P_{n-1}。

(8) 作 $\overleftrightarrow{OP_1}$、$\overleftrightarrow{OP_2}$、$\overleftrightarrow{OP_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{OP_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{OP_n}$，交圓 O 於各點，直到 n 個點皆被畫出。

(9) 則 n 邊形 $P_1P_2 \cdots P_{n-1}P_n$ 即為所求。

伍、 研究結果

一、畫出正三角形，也透過圖形確定不是唯一。但是可以找出最大邊長的正三角形。

二、根據條件可以畫出正方形，正五邊形、正六邊形，並提出證明。

三、利用動態幾何軟體可以分析正三角形的頂點移動的圖形。

四、根據條件畫出正七邊形、正八邊形，可以將畫圖方式延伸到正 n 邊形。

五、透過圖形發現少一個點也可以畫出，推論只要透過(n-1)的頂點就可以畫出正 n 邊形。

六、作圖方式需要根據正 n 邊形邊數的奇偶做適度的修正。

陸、 討論

一、當邊數少的時候，可以透過平行或是邊長相等的概念就可畫出正多邊形，例如正方形、正五邊形和正六邊形，但是當邊數多的時候，就需要透過圓內接多邊形的性質才能過畫出圖形，例如正七邊形、正八邊形和正 n 邊形。

二、在證明的過程中，可以發現，只需要利用國小和國中學過的幾何概念，例如三角形全等，圓內接多邊形等概念，就可以證明出來多邊形為正多邊形。

三、只有正三角形有機會因為所給定的三個點的位置造成可以畫出很多個正三角形，因而所畫出的正三角形不是唯一一個，但是卻可以找到一個最大邊長的正三角形。其餘的正多邊形，都只能畫出唯一的一個。

四、正多邊形，減少一個給定的點，也就是減少一個條件，所畫出來的圖形是一樣的正多邊形。

柒、　結論

一、數學的動機來自於解決生活中的問題，而數學的美存在於日常生活之中，希望能夠從中找出規律進而解決相似的問題。我們從一個簡單的數學題目開始著手，最後結合國中數學課程內容中的幾何概念，讓我們在研究的過程中感受到數學帶來的震撼與喜悅。

二、研究的過程雖然很辛苦，但是畫出每一個圖形和完成每一個證明都令我們覺得雀躍，我們竟然能從一個小問題開始，進而完成整個研究，令人感到很有成就感。

三、我們在研究中畫出了正三角形、正方形、…正八邊形，也將畫圖的方法延伸到正 n 邊形。

捌、　參考資料及其他

一、黃家禮編著（1997）。幾何明珠。台北市：九章出版社。

二、嚴鎮軍主編（2020）。初中數學競賽教程。台北市：九章出版社。

三、九章出版社（2001）。巧添輔助線。台北市：九章出版社。

四、 http://mathafou.free.fr/index_en.html

【評語】030407

本作品所考慮的是如下的問題：給平面上落在一個正 n 邊形 n 個邊上的 n 個點，是否可以找回原來的正多邊形？如果可以，該如何作圖？作者們針對正三角形、正方形、正五～八邊形，分別做了討論，給出了作圖方式，並針對作圖方式的合理性給出論證。前半部關於正三角形和正方形的作圖方式頗具巧思，說明也很清楚，值得鼓勵。在討論正八邊形的作圖方式時，作者們的作法是先找出正八邊形的幾個頂點和正八邊形的外接圓，再透過對稱的方式找出其餘的頂點。如果這樣的作圖方法是可行的，那麼對於很多的正偶數邊形，應該都可以透過同樣的方式作圖才是，這有點奇怪。作者們可能忽略了，原本的目標是要找出通過給定的若干個點的一個正多邊形。如何保證所找到的正八邊形確實會通過原本給定的這些點呢？（我們是有可能在同一個圓內找到兩個正多邊形，而這兩個正多邊形是共用一些點的。如何保證所找出的就是我們想找的正確的那一個？）這可能是要進一步好好思考的問題。另一方面，在論述正五邊形和正六邊形的作圖方式正確無誤的這個部分，作者們在說明完作圖所得出的是等角五邊形和等角六邊形後，要進一步說明各邊的長度都相等時，用到了一些作圖過程中不保證一定會有的圖形的特性，這也讓人對作圖方式是否正確有一些疑問。作者們確實給出了一些好的想法，如果能夠更進一步，把一些過程釐清，給出更清楚的論述，作品應該會更完整也更好。

作品簡報

中華民國第61屆中小學科學展覽會
61st 全國科展 in 嘉義

跨越甲子 前進+1

找回消失的正N邊形

數學科

030407

研究目的

一、已知平面上三點，分別落在各邊上，能否畫出正三角形？畫出的正三角形是否唯一呢？若不是唯一，能否找到「最大邊長」的一個正三角形？

二、已知平面上四點，分別落在各邊上，能否畫出正方形？畫出的正方形是否唯一呢？

三、已知平面上已知平面上 n 點，分別落在各邊上，能否畫出正 n 邊形？

三角形

(一) 平面上，給定三點，畫出正三角形。

1. 已知平面上三點 P、Q、R，畫出一個正三角形 ABC。

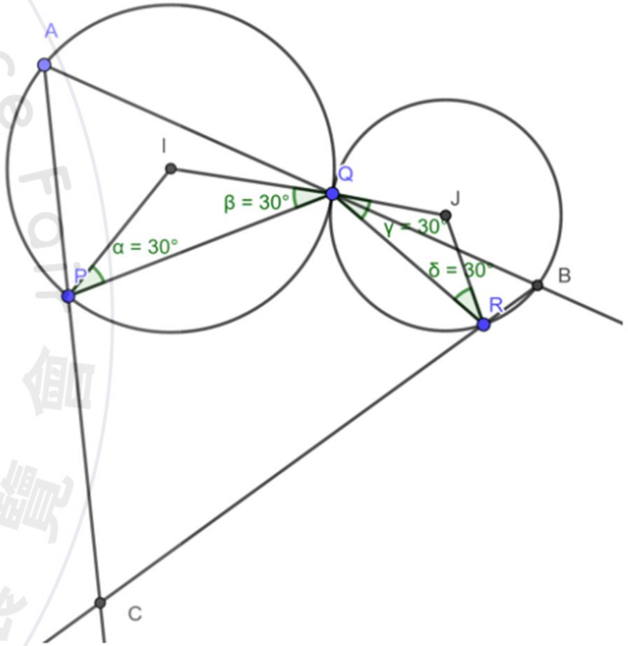
(1) 分別作圓心 I 和圓心 J，使得所有對到 PQ 和 QR 劣弧的圓周角皆為 $60°$，

即 $\angle PIQ = \angle QJR = 120°$。

(2) 在圓 I 上任取一點動點 A，作 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{AQ}$，使得 $\overrightarrow{AQ}$ 交圓 J 於一點，

取交點為 B。

(3) 作 $\overrightarrow{BR}$，交 $\overrightarrow{AP}$ 於一點，取交點為 C，則 ΔABC 即為所求。



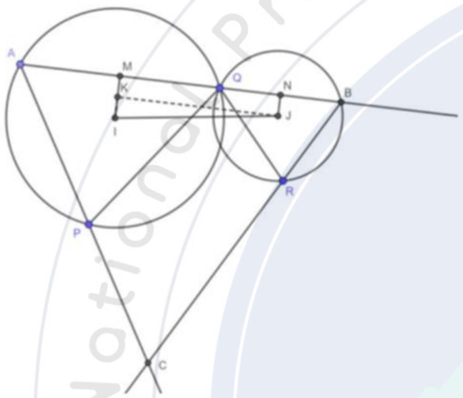
【圖 2】

三角形

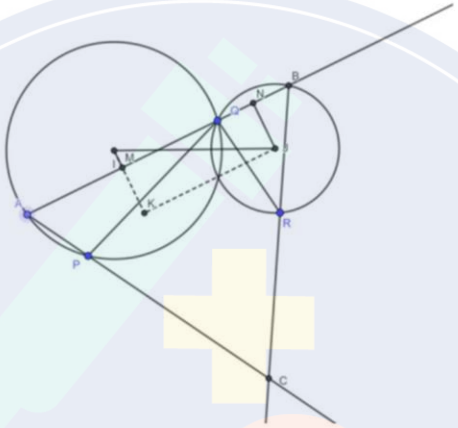
此等邊三角形是否唯一？由於點 A 為動點，隨著點 A 在圓 I 上移動，等邊三角形會跟著移動，圓上的點 A 可以有無限多個點，因此有無限多個等邊三角形。而當 A 、 B 之間的距離最大時，此等邊三角形會有最大邊長。

2. 已知平面上三點 P 、 Q 、 R ，作正三角形 ABC 時，任何的割線 AQB 都會給出等邊三角形嗎？
3. 最大的正三角形會有最大的邊長，即最大的割線 AQB ，何時會有最大的割線 AQB ？
4. 已知平面上兩點 P 、 Q ，作正三角形 ABC 時，顯而易見，可以做出無限多個正三角形。

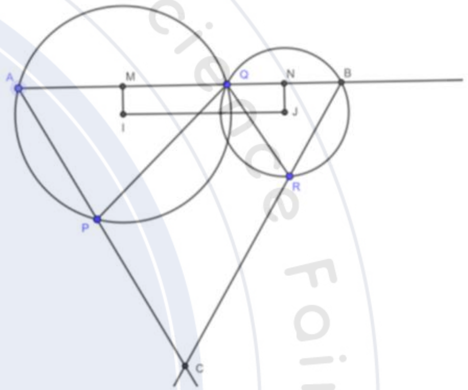
三角形



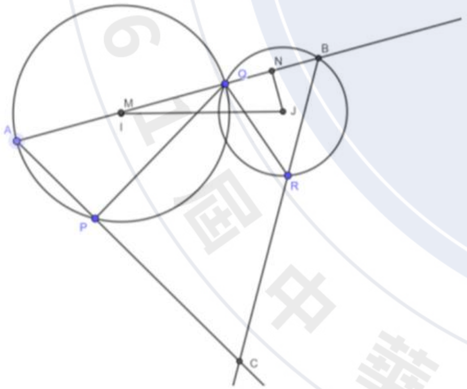
【圖 3】



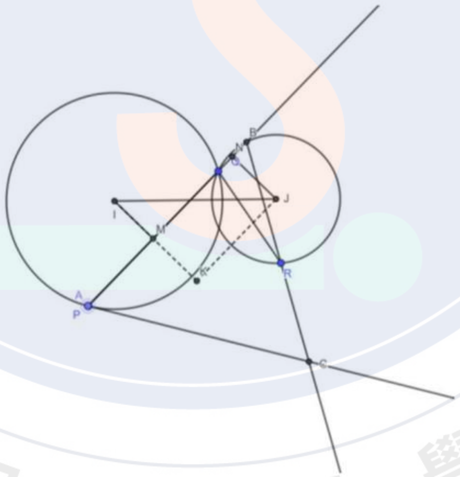
【圖 4】



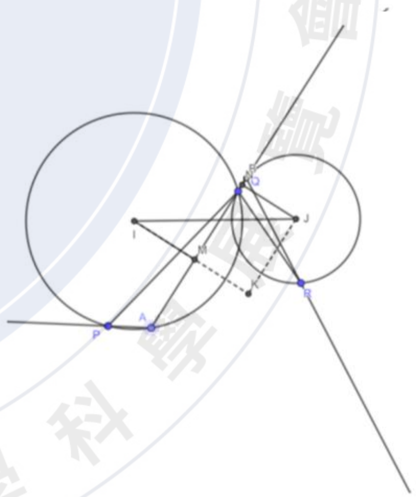
【圖 5】



【圖 6】



【圖 7】



【圖 8】

正方形

(二) 平面上，給定幾點，畫出正方形。

1. 已知平面上四點 P、Q、R、S，畫出一個正方形 $ABCD$。

(1) 連接 P、Q 和 R、S，作 $\overline{PQ}$、$\overline{RS}$。分別取 P、Q 之中心點 I 和 R、S 之中心點 J。

(2) 分別以 I、J 為圓心，$\overline{PI}$、$\overline{JS}$ 為半徑作圓。

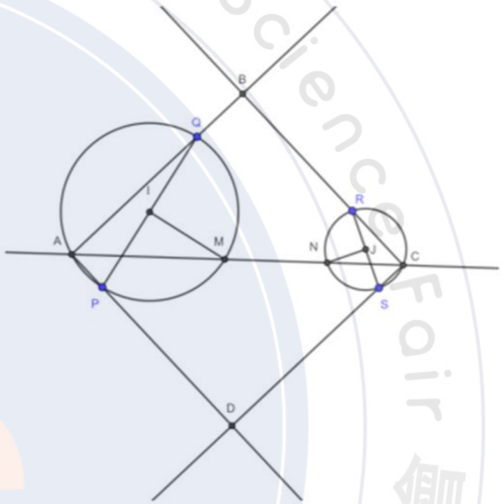
(3) 分別在 $\overline{PQ}$、$\overline{RS}$ 上作中垂線交圓 I、J 於 M、N 兩點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I 於點 A 和圓 J 於點 C。

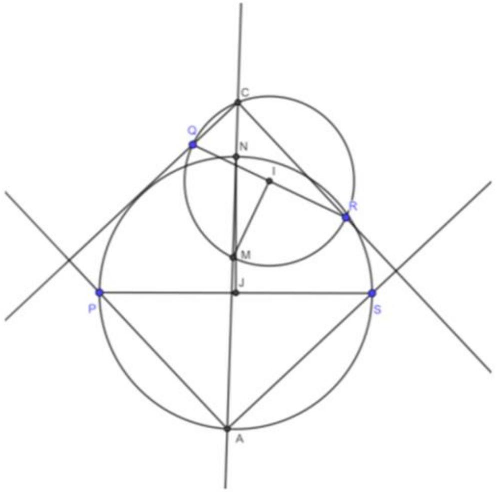
(5) 作 $\overrightarrow{AQ}$ 和 $\overrightarrow{CR}$，交於點 B。

(6) 作 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{CS}$，交於點 D。正方形 $ABCD$ 即為所求。

2. 同第 1 點的方法，但是改為以 $\overline{QR}$、$\overline{PS}$ 取中點 I、J。



【圖 9】



【圖 10】

正方形

3. 已知平面上三點 P、Q、R，畫出一個正方形 $ABCD$。

(1) 連接 P、Q 和 Q、R，作 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$。分別取 P 和 Q 與 Q 和 R 之中心點，即中點 J、I。

(2) 分別以 I、J 為圓心，$\overline{IR}$、$\overline{JQ}$ 為半徑作圓。

(3) 分別在 $\overline{PQ}$、$\overline{RS}$ 上作中垂線交圓 I、J 於 M、N 兩點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I 於點 A。

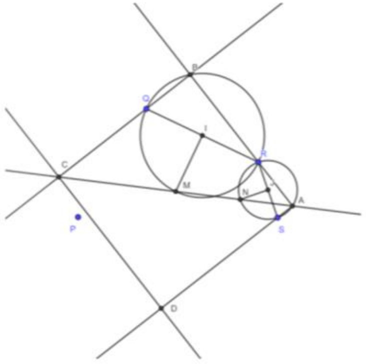
(5) 作 $\overrightarrow{AQ}$ 和 $\overrightarrow{AR}$。

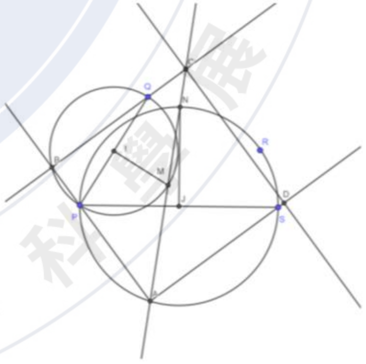
(6) 過點 P 向 $\overrightarrow{AQ}$ 做垂線，交 $\overrightarrow{AQ}$ 於點 B，交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於點 C。

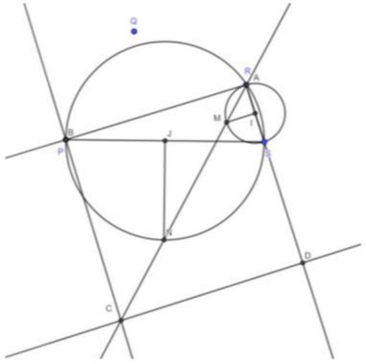
(7) 過點 C 向 $\overrightarrow{AR}$ 做垂線，交 $\overrightarrow{AR}$ 於點 D，正方形 $ABCD$ 即為所求，如【圖 11】所示。

平面中 P、Q、R、S 四點中，任取三點做出四個正方形，【圖 11】是取 P、Q、R 三點，【圖 12】是取 Q、R、S 三點，【圖 13】是取 P、Q、S 三點，【圖 14】是取 P、R、S 三點，總共可以做出四個正方形。


【圖 11】


【圖 12】


【圖 13】


【圖 14】

五邊形

(三) 平面上，給定各邊各一點，共五點，畫出正五邊形。

1. 已知平面上五點 P、Q、R、S、T，畫出一個正五邊形 $ABCDE$。

(1) 連接 P、Q 和 S、T，在同側分別作 $\angle PQI=\angle QPI=18°$、$\angle JST=\angle JTS=18°$，則 $\angle PIQ=\angle SJT=144°$。

(2) 分別以 I、J 為圓心，作 $\overline{PI}$、$\overline{JS}$ 為半徑作圓。

(3) 在圓 I、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle PIM=\angle TJN=72°$，點 M、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I、圓 J 於點 A 和點 C。

(5) 作 $\overrightarrow{AQ}$、$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{CT}$ 和 $\overrightarrow{CS}$，取 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{CT}$ 的交點為點 B。

(6) 過 R 點作 $\overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{MN}$。

(7) 取 $\overleftrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{CS}$、$\overrightarrow{AQ}$ 的交點為點 D、點 E，則五邊形 $ABCDE$ 即為所求。

【圖 15】

五邊形

考慮若某兩點落在同一邊上，即給定的點與正五邊形上的頂點重合。

可能狀況如下：

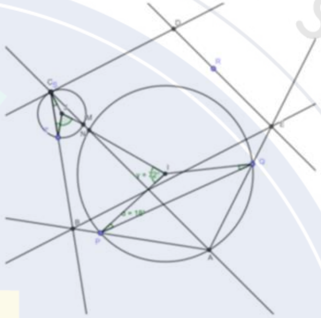
當 $\overleftrightarrow{MN}$ 通過點 S 時，則 C、S 重合，過點 C 做平行於 $\overleftrightarrow{BE}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{RE}$ 於 D 點。仍可做出正五邊形，重合於原來的五邊形，如【圖 17】所示。

移動點 S，當點 S 落在 $\overleftrightarrow{BE}$ 上時，則 D、S 重合，仍為原來的五邊形，如【圖 18】所示。若 $\overleftrightarrow{MN}$ 通過點 T 時，則 C、T 重合，過點 C 做平行於 $\overleftrightarrow{AD}$ 的直線，交 $\overrightarrow{AP}$ 於點 B，仍可做出正五邊形，重合於原五邊形，如【圖 19】所示。

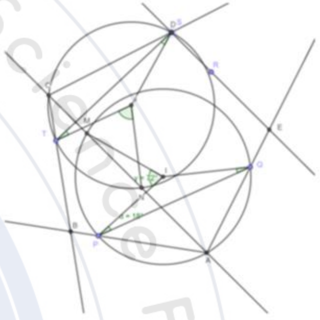
移動點 T，當點 T 落在 $\overrightarrow{AP}$ 上時，則 T、B 重合，仍為原來的正五邊形，如【圖 20】所示。

移動點 P，若 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{CT}$ 之交點恰與點 P 重合，仍為正五邊形，如【圖 21】所示。若 $\overleftrightarrow{MN}$ 通過點 P 時，則 A、P 重合，過點 P 做平行於 $\overleftrightarrow{CE}$ 的直線，交 $\overrightarrow{CT}$ 於點 B，仍可做出正五邊形，重合於原五邊形，如【圖 22】所示。

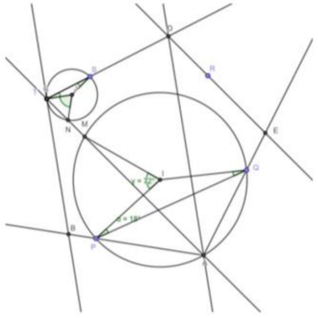
移動點 Q 的結果，與移動點 S 的結果相同，如【圖 23】、【圖 24】所示。



【圖 17】



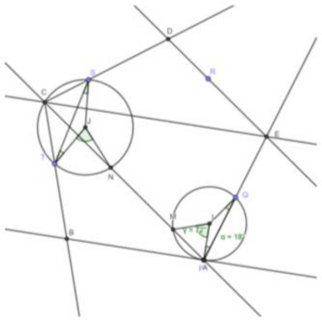
【圖 18】



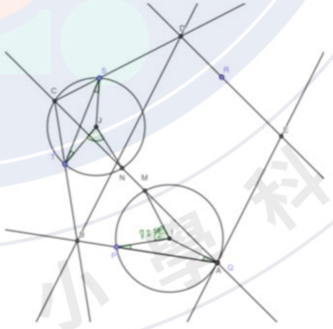
【圖 19】

【圖 20】

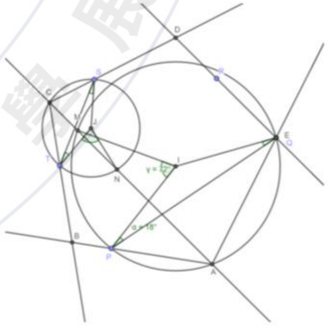
【圖 21】



【圖 22】



【圖 23】



【圖 24】

正N邊形

(七) 平面上，給定 n 點，分別落在各邊上，畫出正 n 邊形 $(n \ge 5)$

1. 若 n 為奇數，給定 n 點，A_1、A_2、…、A_n，畫出的正 n 邊形為 $P_1P_2\cdots P_n$。

(1) 連接 A_1、A_2 和 A_{n-1}、A_n，在同側分別作 $\angle IA_1A_2 = \angle IA_2A_1 = 90° - \dfrac{360°}{n}$、$\angle JA_{n-1}A_n = \angle JA_nA_{n-1} = 90° - \dfrac{360°}{n}$，則 $\angle A_1IA_2 = \angle A_{n-1}JA_n = \dfrac{360°}{n} \times 2$。

(2) 分別以 I、J 為圓心，作 $\overline{A_1I}$、$\overline{JA_n}$ 為半徑作圓。

(3) 在圓 I、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle A_1IM = \angle A_nJN = \dfrac{360°}{n}$，點 M、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I、圓 J 於點 P_2 和點 P_n。

(5) 作 $\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$，取 $\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$ 的交點為點 P_1。

(6) 分別作 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_n}$ 的中垂線交於點 O，以點 O 為圓心，$\overline{OP_1}$ 半徑為圓心作圓。

(7) 設此圓分別交 $\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$、及 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_n}$ 的中垂線於點 P_3、P_{n-1}、$P_{\frac{n+1}{2}+1}$ 和 $P_{\frac{n+1}{2}}$。

(8) 作 $\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$、…、$\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ 的中垂線，交圓 O 於各點，直到 n 個點皆被畫出。

(9) 則 n 邊形 $P_1P_2\cdots P_{\frac{n+1}{2}}P_{\frac{n+1}{2}+1}\cdots P_{n-1}P_n$ 即為所求。

正N邊形

2. 若 n 為偶數，給定 n 點，A_1、A_2、…、A_n，畫出的正 n 邊形為 $P_1P_2\cdots P_n$。

(1) 連接 A_1、A_2 和 A_{n-1}、A_n，在同側分別作 $\angle IA_1A_2=\angle IA_2A_1=90^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$、

$\angle JA_{n-1}A_n=\angle JA_nA_{n-1}=90^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$，則 $\angle A_1IA_2=\angle A_{n-1}JA_n=\dfrac{360^\circ}{n}\times 2$。

(2) 分別以 I、J 為圓心，作 $\overline{A_1I}$、$\overline{JA_n}$ 為半徑作圓。

(3) 在圓 I、圓 J 上，分別畫指定角 $\angle A_1IM=\angle A_nJN=\dfrac{360^\circ}{n}$，

點 M、點 N 為圓 I 和圓 J 上的點。

(4) 作 $\overleftrightarrow{MN}$ 分別交圓 I、圓 J 於點 P_2 和點 P_n。

(5) 作 $\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$，取 $\overrightarrow{P_2A_1}$、$\overrightarrow{P_nA_n}$ 的交點為點 P_1。

(6) 分別作 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_n}$ 的中垂線交於點 O，以點 O 為圓心，$\overline{OP_1}$ 半徑為圓心作圓。

(7) 設此圓分別交 $\overrightarrow{P_2A_2}$、$\overrightarrow{P_nA_{n-1}}$ 於點 P_3、P_{n-1}。

(8) 作 $\overleftrightarrow{OP_1}$、$\overleftrightarrow{OP_2}$、$\overleftrightarrow{OP_3}$、…、$\overleftrightarrow{OP_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{OP_n}$，交圓 O 於各點，直到 n 個點皆被畫出。

(9) 則 n 邊形 $P_1P_2\cdots P_{n-1}P_n$ 即為所求。

研究結果&討論

一、畫出正三角形，也透過圖形確定不是唯一。但是可以找出最大邊長的正三角形。

二、根據條件可以畫出正方形，正五邊形、正六邊形，並提出證明。

三、利用動態幾何軟體可以分析正三角形的頂點移動的圖形。

四、根據條件畫出正七邊形、正八邊形，可以將畫圖方式延伸到正 n 邊形。

五、透過圖形發現少一個點也可以畫出，推論只要透過(n-1)的頂點就可以畫出正 n 邊形。

六、作圖方式需要根據正 n 邊形邊數的奇偶做適度的修正。

七、當邊數少的時候，可以透過平行或是邊長相等的概念就可畫出正多邊形，例如正方形、正五邊形和正六邊形，但是當邊數多的時候，就需要透過圓內接多邊形的性質才能過畫出圖形，例如正七邊形、正八邊形和正 n 邊形。

八、在證明的過程中，可以發現，只需要利用國小和國中學過的幾何概念，例如三角形全等，圓內接多邊形等概念，就可以證明出來多邊形為正多邊形。

九、只有正三角形有機會因為所給定的三個點的位置造成可以畫出很多個正三角形，因而所畫出的正三角形不是唯一一個，但是卻可以找到一個最大邊長的正三角形。其餘的正多邊形，都只能畫出唯一的一個。

十、正多邊形，減少一個給定的點，也就是減少一個條件，所畫出來的圖形是一樣的正多邊形。