中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

探究精神獎

030406

挑剔環

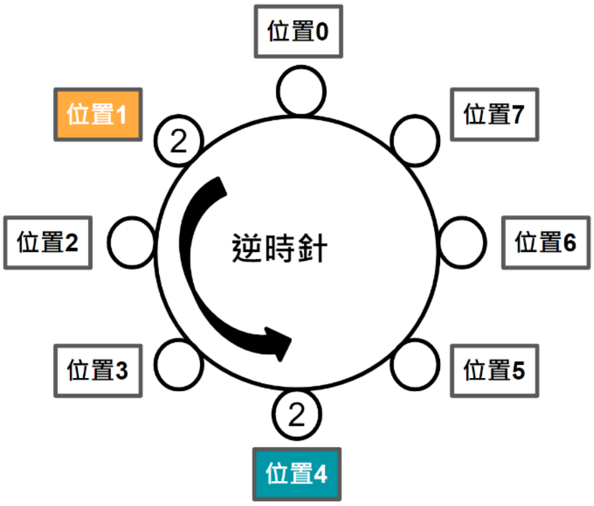
學校名稱：嘉義縣私立協同高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國三 陳子彙	黃明真
國三 蔡宇晴	郭建載

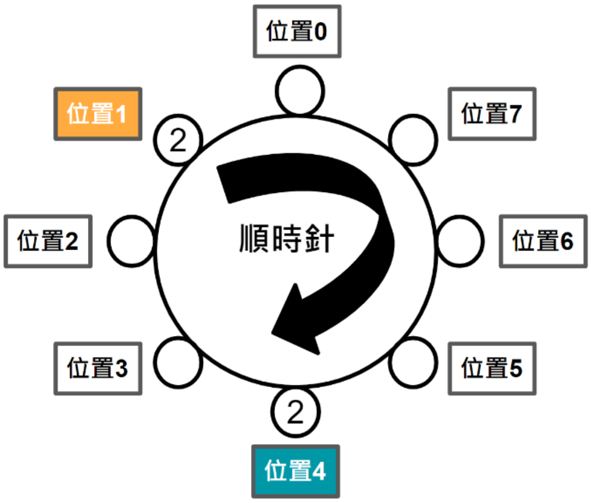
關鍵詞：挑剔數列、環狀排列

摘要

將兩組{ 1，2，⋯，n }任意排成環狀，若對所有數 $m \in \{ 1，2，\cdots，n \}$，m 與 m 之間繞順時針的間隔數為 m 或繞逆時針的間隔數為 m 成立，則稱此環狀排列為「挑剔環」。



圖(一)



圖(二)

以圖(一)、圖(二)為例：

數字 2 圖(一)的<u>較小</u>位置值是 1，<u>較大</u>位置值是 4，從位置 1 向左邊繞，繞到位置 4，為逆時針。故以 d(2，2，逆)=2 表示；圖(二)的<u>較小</u>位置值是 1，<u>較大</u>位置值是 4，從位置 1 向右邊繞，繞到位置 4，為順時針。故以 d(2，2，順) = 4 表示。

壹、研究動機

老師在上課介紹挑剔數列，覺得非常有趣。但因挑剔數列的發展有限，本組便以挑剔環的形式擴大挑剔數列的使用方法與範圍。

貳、研究目的

一、 黃皓倫[2]報告中，可以將數字依照 4k+1、4k+2、4k+3、4k 分別使用專一的方式，來求出每個數字的其中一組解。我們想藉此探討:

1. 是否有方法可將所有的解都找出。
2. 因 4k+3 和 4k 為相鄰兩數，數列僅多兩個數字，欲求其快速排法。

二、 黃皓倫[2]已證明當 $n = 4k + 1$ 和 $n = 4k + 2$ (k 為非負整數)時不存在挑剔數列，並找出一種排法能排出 2n 位的挑剔數列，以及證明此排法並反推 $n = 4k$ 和 $n = 4k + 3$ 時一定有挑剔數列存在。以挑剔數列成立的條件，觀察挑剔環成立的條件並加以證明：

1. 當 $n = 4k + 1$ 和 $n = 4k + 2$ (k 為非負整數)時，是否存在挑剔環？
2. 當 $n = 4k$ 和 $n = 4k + 3$ (k 為非負整數) 時，形成挑剔環的排列數是否大於形成挑剔數列排列數？
3. 找出挑剔環排列規則。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦

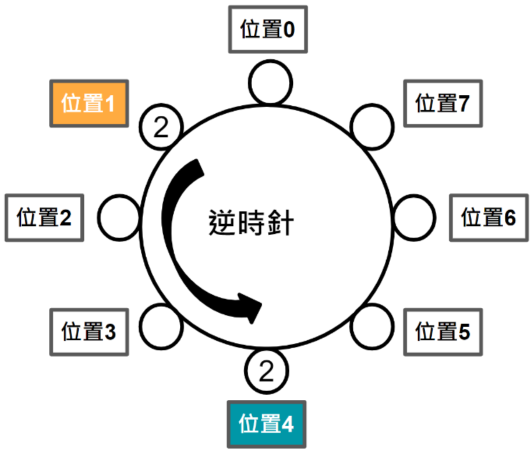
肆、研究過程或方法

一、簡述挑剔數列、挑剔環的觀察與發現

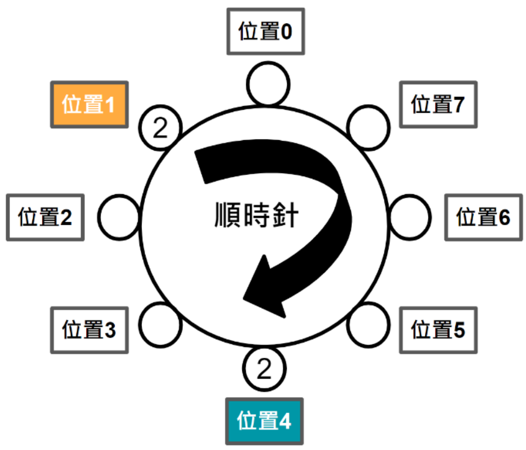
將兩組{ 1，2，⋯，n }任意排成環狀，若對所有數 $m \in$ { 1，2，⋯，n }，兩個 m 之間繞順時針的間隔數為 m 或繞逆時針的間隔數為 m 成立，則稱此環狀排列為「挑剔環」。

d (m，m，順或逆) = m 與 **挑剔環** 之定義:

兩個數字 m 填寫位置分別為 m_1 與 m_2 時，m_1 為較小的位置值；m_2 為較大的位置值；m 為間隔數；順或逆意即順時針或逆時針，順逆時針的判斷是由兩數的位值中較小者向較大者的方向。



圖(一)



圖(二)

以圖(一)、圖(二)為例：

圖(一)數字 2 的較小位置值是 1，較大位置值是 4，從位置 1 向左邊繞，繞到位置 4，為逆時針。故以 $d(2，2，逆)=2$；圖(二)的較小位置值是 1，較大位置值是 4，從位置 1 向右邊繞，繞到位置 4，為順時針。故以 $d(m，m，順) = 2n-m-2$ 表示， 即為 $d(2，2，順)=4$。

若 $d(m，m，順) = m$ 或 $d(m，m，逆) = m$ 成立，則稱為 $d(m，m，順或逆) = m$。

當所有 m=1,2,3,⋯,n 都滿足 $d(m，m，順或逆) = m$，稱這個環狀排列為**挑剔環**。

黃皓倫[2]報告得知挑剔數列可用特定的方法找出每個 n 的一個特定解，令 a_k 為數字 k 排成挑剔數列時的較小位置編號，我們推導出位置編號總和公式：

$$2(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)+(1+2+3+\dots+n)+n = 1+2+3+\dots+2n。$$

藉由推導出公式，討論 n 挑剔數列的所有可能性。例如 n=4 時，可知 a_1 , a_2, a_3, a_4 必為 1,2,3,5 以各種順序排列。接著便可以對此加以探討，得知 n=4 的挑剔數列，必只有兩解。其他數字亦可以此解法討論出所有解。

另外，我們還從黃皓倫[2]報告中得知，在 n=4k+3 和 n=4k 才會存在。我們定義挑剔環(定義如上述)，並證明挑剔環在 n 為多少時存在。

分別利用算出真實總間隔數及順＋逆時針總間隔數之差別來證明，並歸納出以下表格：

	$n=4k+1$	$n=4k+2$	$n=4k+3$	$n=4k$
真實總間隔數	不為 4 的倍數	不為 4 的倍數	4 的倍數	4 的倍數
順＋逆時針總間隔數	4 的倍數	4 的倍數	4 的倍數	4 的倍數
是否成立	不成立	不成立	成立	成立

成立與否是否與挑剔數列相同	相同	相同	相同	相同
是否比挑剔數列多解	相同(皆無解)	相同(皆無解)	是	是

表(一)

在研究過程中，發現挑剔數列必定具備以下八點性質：

性質 1：若 a_k 為數字 k 排成挑剔數列時的較小位置編號(編號由左至右)，則數字 k 的較大位置編號 $a_k' = a_k + k + 1$。

性質 2：兩組{ 1、2、…..、n }直線排列，若其較小位置編號總和($a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$) $\notin$ N，則無法形成挑剔數列。

性質 3：若挑剔數列不成立，則總空格數與 n 的奇偶性質不相同

性質 4：當 $n = 4k$、$n = 4k + 3$ 皆可形成挑剔環 ，其中 $n \in N, k \in \{0\} \cup N$

性質 5：當 $n = 4k + 1$、$n = 4k + 2$ 皆無法形成挑剔環 ，其中 $n \in N, k \in \{0\} \cup N$

性質 6：若 x 與 x 順時針的間隔數為奇數，則其逆時針的間隔數亦為奇數。

性質 7：若 y 與 y 順時針的間隔數為偶數，則其逆時針的間隔數亦為偶數。

性質 8：兩組{ 1、2、……、n }環狀排列，則其可形成「挑剔環」的條件為：

其「真實總間隔數」為 4 的倍數

然而討論每個數的所有解非常費時費力，因此利用從大於 $\frac{n}{2}$ 的數字起，在 a_k 上填入 d=-2 的等差數列，雖然此方法只適用於 $n \leq 16$ 的狀況下，但排列方式容易許多。且相鄰 n = 4k+3 與 n = 4k + 4 的挑剔數列僅差兩個 4k + 4，也找出其快速排法。

最後整理出和黃皓倫[2]報告最大的差異，統整成以下表格:

使用此方法可得結果	可得挑剔數列解數	做法複雜度	做法統一度	其他
黃皓倫[2]成果	1	較複雜	須針對各數字使用對應方法	無
此報告成果	所有解	耗時長但作法容易	每個數字作法皆統一	提供程式縮小搜尋範圍，提升效率

表(二)

（一）挑剔數列位置值與其性質

性質 1：若 a_k 為數字 k 排成挑剔數列時的較小位置編號(編號由左至右)，則數字 k 的較大位置編號 $a_k' = a_k + k + 1$。

證明：當第一個位置值為 a_k ，由挑剔數列定義可知可知，其第二個位置值會是 a_k 加上相隔的 k ，最後再加上那個位置本身數 1，即可得公式 $a_k' = a_k + k + 1$。

1. 以 $n = 3$ 為例，挑剔數列：3，1，2，1，3，2。其中數字 2 的較小位置編號 $a_2 = 3$，較大位置編號 $a_2' = 6\ (= a_2 + 2 + 1)$

數字	較小位置編號 a_k	較大位置編號 $a_k' = a_k + k + 1$
1	2	$2 + 1 + 1 = 4$
2	3	$3 + 2 + 1 = 6$
3	1	$1 + 3 + 1 = 5$

表(三)

若挑剔數列的排序未知，則由性質 1：

位置編號總和為$[\ a_1 + (\ a_1 + 1 + 1\ )\ ] + [\ a_2 + (\ a_2 + 2 + 1\ )\ ] + [\ a_3 + (\ a_3 + 3 + 1\ )\ ]$

$= 2\cdot(\ a_1 + a_2 + a_3\ ) + 9$

而兩組{ 1、2、3 }的位置編號總和 $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

可推得 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$

2. 以 $n = 4$ 為例

數字	較小位置編號 a_k	較大位置編號 $a_k' = a_k + k + 1$
1	2	$2 + 1 + 1 = 4$
2	5	$5 + 2 + 1 = 8$
3	3	$3 + 3 + 1 = 7$
4	1	$1 + 4 + 1 = 6$

表(四) : $n = 4$，挑剔數列：4，1，3，1，2，4，3，2

若挑剔數列的排序未知，則由性質 1：位置編號總和為

$[\ a_1 + (\ a_1 + 1 + 1\ )\ ] + [\ a_2 + (\ a_2 + 2 + 1\ )\ ] + [\ a_3 + (\ a_3 + 3 + 1\ )\ ] + [\ a_4 + (\ a_4 + 4 + 1\ )\ ]$

$= 2\cdot(\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4\ ) + 14$

而兩組{ 1、2、3、4 }的位置編號總和 $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

可推得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11$

由上述分析，可推得數列的位置編號總和為：

$2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)+(1+2+3+\ldots+n)+n=1+2+3+\ldots+2n$

3. 已知 $n=5$ 無法形成挑剔數列，分析其<u>較小</u>位置編號總和($a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$)的性質

$2\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+(1+2+3+4+5)+5=1+2+3+\ldots+10$

即 $2\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+20=55\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{35}{2}$ 非整數

但由性質 1 定義：a_k 為位置編號，對所有 $a_k\in\mathrm{N}$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\in\mathrm{N}$，顯然不符，故 $n=5$ 無法形成挑剔數列。

由上述觀察可得性質 2：

性質 2：兩組{ 1、2、⋯..、n }直線排列，若其<u>較小</u>位置編號總和($a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$) $\notin\mathrm{N}$，則無法形成挑剔數列。

證明：因 $a_1,a_2,a_3,\ldots a_n$ 皆為整數，故 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ 必為整數。

（二）以性質 2 證明挑剔數列的存在與否

1. 當 $n=4\mathrm{k}$ 時

$2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k})+(1+2+3+\ldots+4k)+4k=(1+2+\ldots+8k)$

$2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k})=(4k+1)+(4k+2)+\cdots+(4k+4k)-4k$

$$=\frac{4k(12k+1)}{2}-4k=2k(12k-1) \text{ 為偶數}$$

故 $2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k})$ 亦為偶數，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k}$ 為整數

後續說明如何求出挑剔數列。

2. 當 $n=4\mathrm{k}+1$ 時

$2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{4k+1})+[1+2+\ldots+(4k+1)]+(4k+1)=(1+2+\ldots+(8k+2))$

$2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{4k+1})=(4k+2)+(4k+3)+\cdots+(8k+2)-(4k+1)$

$$=\frac{(4k+1)(12k+4)}{2}-(4k+1)=(4k+1)(6k+1)$$

因為 $(4k+1)(6k+1)$ 為奇數

故 $2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k+1})$ 為奇數，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k+1}$ 為非整數。

無法形成挑剔數列。

3. 當 $n=4\mathrm{k}+2$ 時

$2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{4k+2})+[1+2+\ldots+(4k+2)]+(4k+2)=(1+2+\ldots+(8k+4))$

$2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{4k+2})=(4k+3)+(4k+4)+\cdots+(8k+4)-(4k+2)$

$$=\frac{(4k+2)(12k+7)}{2}-(4k+2)=(4k+2)\frac{(12k+5)}{2}=(4k+1)(12k+4)$$

因為$(4k+1)(12k+4)$為奇數

故 $2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k+2})$ 為奇數，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k+2}$ 為非整數。

無法形成挑剔數列。

4. 當 $n=4k+3$ 時

$2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{4k+3})+[1+2+\ldots+(4k+3)]+(4k+3)=1+2+\ldots+(8k+6)$

$2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{4k+3})=(4k+4)+(4k+5)+\cdots+(8k+6)-(4k+3)$

$$=\frac{(4k+3)(12k+10)}{2}-(4k+3)=(4k+3)\frac{(12k+8)}{2}=(4k+3)(6k+4)$$

因為$(4k+3)(6k+4)$為偶數

故 $2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k+3})$ 為偶數，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{4k+3}$ 為整數。

後續說明如何求出挑剔數列。

（三）挑剔數列的空格數及其性質

1.定義間隔數、空格數：

兩個數字 m 之間必須有 m 個數字，稱之為**間隔數** $d(m，m)=m$。以位置編號考慮就形成兩個數字 m 之間位置編號差為 $m+1$，稱之為**空格數** $s(m，m)=m+1$。

若欲形成挑剔數列，依照定義，

以挑剔數列 $n=3$ 為例，2_3_1_2_1_3，間隔數 $d(2，2)=2$，而空格數 $s(2，2)=3$。

性質 3：若挑剔數列不成立，則總空格數與 n 的奇偶性質不相同

證明：

兩組{ 1、2、…..、n }直線排列，則

總間隔數：$\sum_{m=1}^{n} d(m，m)=1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

總空格數$\sum_{m=1}^{n} s(m，m)=\sum_{m=1}^{n}[d(m，m)+1]=\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n(n+3)}{2}$

分析總間隔數$\sum_{m=1}^{n} d(m，m)$與總空格數$\sum_{m=1}^{n} s(m，m)$ 的奇偶數性質關係：

1. $n=4k+1$ 奇數

總間隔數：$\frac{n(n+1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 為奇數

總空格數：$\dfrac{n(n+3)}{2}$ = 2 (k + 1) (4k + 1) 為偶數

$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m)$ 與 n 的奇偶數性質<u>不相同</u>

因 $\sum_{m=1}^{n} d\ (m，m)$ 為奇數，$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m) = \sum_{m=1}^{n} d\ (m，m) + n$　奇數 + 奇數 = 偶數

2. n = 4k + 2 偶數

總間隔數：$\dfrac{n(n+1)}{2}$ = (2k + 1) (4k + 3) 為奇數

總空格數：$\dfrac{n(n+3)}{2}$ = (2k + 1) (4k + 5) 為奇數

$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m)$ 與 n 的奇偶數性質<u>不相同</u>

因 $\sum_{m=1}^{n} d\ (m，m)$ 為奇數，$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m) = \sum_{m=1}^{n} d\ (m，m) + n$　奇數 + 偶數 = 奇數

3. n = 4k + 3 奇數

總間隔數：$\dfrac{n(n+1)}{2}$ = 2 (k + 1) (4k + 3) 為偶數

總空格數：$\dfrac{n(n+3)}{2}$ = (2k + 3) (4k + 3) 為奇數

$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m)$ 與 n 的奇偶數性質<u>相同</u>

因 $\sum_{m=1}^{n} d\ (m，m)$ 為偶數，$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m) = \sum_{m=1}^{n} d\ (m，m) + n$　偶數 + 奇數 = 奇數

4. n = 4k 偶數

總間隔數：$\dfrac{n(n+1)}{2}$ = 2k (4k + 1) 為偶數

總空格數：$\dfrac{n(n+3)}{2}$ = 2k (4k + 3) 為偶數

$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m)$ 與 n 的奇偶數性質<u>相同</u>

因 $\sum_{m=1}^{n} d\ (m，m)$ 為偶數，$\sum_{m=1}^{n} s\ (m，m) = \sum_{m=1}^{n} d\ (m，m) + n$　偶數 + 偶數 = 偶數

（四）挑剔數列的排列方法

在黃皓倫[2]報告中，其排列方法只能解出一解，且須以 $\frac{n}{4}$ 判斷其排列方式。在此我們提出一種所有數皆可套用，且可解出所有解之方法。

1. 根據挑剔數列性質 1，$n = 3$ 時，$a_1 + a_2 + a_3 = 6$

分析：(a_1，a_2，a_3) 必為(1，2，3)的各種可能排列

(1) 若 $a_1 = 1$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = 3$　不合

(2) 若 $a_2 = 1$，則 $a_2' = a_2 + 2 + 1 = \underline{4}$

a.若 $a_1 = 2$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = \underline{4}$　不合

b.若 $a_3 = 2$，則 $a_3' = a_3 + 3 + 1 = 6$

$a_1 = 3$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = 5$　符合　　解為： 2 3 1 2 1 3

(3) 若 $a_3 = 1$，則 $a_3' = a_3 + 3 + 1 = \underline{5}$

a.若 $a_1 = 2$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = 4$

$a_2 = 3$，則 $a_2' = a_2 + 2 + 1 = 6$　符合　　解為： 3 1 2 1 3 2

b.若 $a_2 = 2$，則 $a_2' = a_2 + 2 + 1 = \underline{5}$　不合

故可此分析得出：$n = 3$ 的挑剔數列恰有兩組解。

2. 根據挑剔數列性質 1，$n = 4$ 時，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11$

分析：(a_1，a_2，a_3，a_4) 必為(1，2，3，5) 的各種可能排列　4! = 24 種

(1) 若 $a_1 = 1$，則 $a_2 + a_3 + a_4 = 10$　(a_2，a_3，a_4) 必為(2，$\underline{3}$，5) 的各種可能排列

$a_1' = a_1 + 1 + 1 = \underline{3}$　不合

(2) 若 $a_2 = 1$，則 $a_1 + a_3 + a_4 = 10$　(a_1，a_3，a_4) 必為(2，3，$\underline{\underline{5}}$) 的各種可能排列

$a_2' = a_2 + 2 + 1 = \underline{4}$

a.若 $a_1 = 2$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = \underline{4}$

b.若 $a_1 = 3$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = \underline{\underline{5}}$　不合

c.若 $a_1 = 5$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = 7$

$a_3 + a_4 = 5$　(a_3，a_4) 必為(2，3) 的各種可能排列

$a_3 = 3$，$a_4 = 2 \Rightarrow a_3' = \underline{7}$，$a_4' = \underline{7}$　不合

$a_3 = 2$，$a_4 = 3 \Rightarrow a_3' = 6$，$a_4' = 8$　符合　　解為： 2 3 4 2 1 3 1 4

(3) 若 $a_3 = 1$，則 $a_1 + a_2 + a_4 = 10$ （a_1，a_2，a_4）必為(2，3，$\underline{\underline{5}}$) 的各種可能排列

$a_3' = a_3 + 3 + 1 = \underline{\underline{5}}$ 不合

(4) 若 $a_4 = 1$，則 $a_1 + a_2 + a_3 = 10$ （a_1，a_2，a_3）必為(2，3，$\underline{\underline{5}}$) 的各種可能排列

$a_4' = a_4 + 4 + 1 = 6$

a.若 $a_1 = 2$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = 4$

$a_2 + a_3 = 8$ （a_2，a_3）必為(3，5) 的各種可能排列

$a_2 = 3$，$a_3 = 5 \Rightarrow a_2' = 6$，$a_3' = 9 > 8$ 不合

$a_2 = 5$，$a_3 = 3 \Rightarrow a_2' = 8$，$a_3' = 7$ 符合 解為：4 1 3 1 2 4 3 2

b.若 $= 3$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = \underline{\underline{5}}$ 不合

c.若 $_1 = \underline{\underline{5}}$，則 $a_1' = a_1 + 1 + 1 = \underline{7}$

$a_2 + a_3 = 5$ （a_2，a_3）必為(2，3) 的各種可能排列

$a_2 = 2$，$a_3 = 3 \Rightarrow a_2' = \underline{\underline{5}}$，$a_4' = \underline{7}$ 不合

$a_2 = 3$，$a_3 = 2 \Rightarrow a_3' = 6$，$a_4' = \underline{6}$ 不合

故可此分析得出：$n = 4$ 的挑剔數列恰有兩組解。

3. 根據挑剔數列性質 1：

$2\cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2n$

當 $n = 7$ 時，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 35$

除了 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 之總和要成立外，還須符合下列原則:

在第一位置值中(位置值較小者)，位置 1 和位置 2 必填，最後兩位置必不填。

原因：

1. 位置 1 和位置 2 必填：在此 n 個數中所填的是每個數的第一位置值(較小者)。若位置 1 不填，代表他是較大的位置值，則不符合，因為沒有比位置 1 更小的位置值。位置 2 也是必填，若位置 2 不填，代表那個數最小的位置值將會是位置 1，但位置 1 和位置 2 之間並無間隔數，故不符合。所以位置 1 和位置 2 是必填的。

2. 最後兩位置必不填：若倒數第二個位置(2n-1)填第一位置值，那該數的第二位置值只能填在位置 2n 上，但位置 2n-1 和位置 n 之間並無間隔數，故不符合。位置 n 也是不能填，若這個位置為第一位置值，但它已經是最後一個位置了，便沒地方放置第二位置值，故也不成立。所以位置 2n-1 和位置 n 是必不填的。

(<u>位置 1，位置 2</u>，位置 3，………….，位置 11，位置 12，<u>位置 13，位置 14</u>)

必填　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　必為較大數 a_k'位置

以挑剔數列 $n = 7$ 舉例時，$a_k \leqq 12$

(a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7) 必為下列組合的各種可能排列：

(1，2，3，4，6，7，12) (1，2，3，4，5，8，12) (1，2，3，4，6，8，11)

(1，2，3，5，6，7，11) (1，2，3，4，6，9，10) (1，2，3，4，7，8，10)

(1，2，4，5，6，7，10) (1，2，4，5，6，8，9) (1，2，3，5，7，8，9)

(1，2，3，5，6，8，10) (1，2，3，4，5，9，11)

對應黃皓倫[2]報告，下列為黃皓倫[2]所得之 n=7 時的 26 組解(不含正反）：

A: 73625324765141 B: 72462354736151 C: 71416354732652 D: 74151643752362 E: 27423564371516 F: 57416154372632 G: 57263254376141 H: 17126425374635 I: 26721514637543 J: 62742356437151 K: 51716254237643 L: 23726351417654 M: 35743625427161 N: 72632453764151 O: 72452634753161 P: 71316435724625 Q: 73161345726425 R: 37463254276151 S: 57236253471614 T: 57141653472362 U: 17125623475364 V: 36713145627425 W: 52732653417164 X: 41716425327635 Y: 24723645317165 Z: 35723625417164

後續的符號說明，舉例 A’ 表示當圍成環時，與黃皓倫[2]的 A 圍成環時同方向是相同環；A” 表示當圍成環時，與黃皓倫[2]的 A 圍成環時反方向是相同環。

(a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7)	對應解
(1，2，3，4，6，7，12)	B 72462354736151 J 62742356437151 M35743625427161 N72632453764151 O72452634753161 R37463254276151
(1，2，4，5，6，7，10)	B” 15163745326427 J” 15173465324726 M” 16172452634753 N” 15146735423627 O” 16135743625427 R” 15167245236473

(1，2，3，4，5，8，12)	A 73625324765141 G57263254376141 H” 53647352462171 U” 46357432652171
(1，2，4，5，6，8，9)	H17126425374635 U17125623475364 A “14156742352637 G” 14167345236275
(1，2，3，4，6，8，11)	D74151643752362 T57141653472362 K” 34673245261715 I” 34573641512762 Y” 56171354632742 P” 52642753461317
(1，2，3，5，6，8，10)	K51716254237643 I26721514637543 Y24723645317165 P71316435724625 D” 26325734615147 T “26327435614175
(1，2，3，4，6，9，10)	W 52732653417164 Z 35723625417164 Q” 52462754316137 V” 52472654131763
(1，2，3，4，7，8，10)	Q 73161345726425 V 36713145627425 W” 46171435623725 Z” 46171452632753
(1，2，3，5，7，8，9)	L 23726351417654 X 41716425327635 S” 41617435263275 F” 23637345161475
(1，2，3，4，5，9，11)	S57236253471614 F57416154372632 L” 45671415362732 X” 53672352461714
(1，2，3，5，6，7，11)	C 71416354732652 E 27423564371516 C” 25623745361417 E” 61517346532472
(1，3，4，5，6，7，9)	無

表(五)

表格中反著寫會被歸類在同組的另一種用陰影表示(a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7)。)

例如：72632453764151 屬於(1，2，3，4，6，7，12)；而將其反著寫的話則為15146735423627 屬於(1，2，4，5，6，7，10)。

發現：

1.當 (a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7)為 (1，2，3，5，6，7，11)時，發現若反著看仍然相同，其原因如圖(三)所示，這個數列會自己呈現對稱的情況，因此倒著看也會相同。

□ □ □ ○ □ □ □ ○ ○ ○ □ ○ ○ ○

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\underline{11}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\underline{7}$ $\underline{6}$ $\underline{5}$ $\boxed{11}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$

2.當 (a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7)為 (1，3，4，5，6，7，9) 時，雖符合 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 35$ ，但並無法排列出挑剔數列，求其原因。

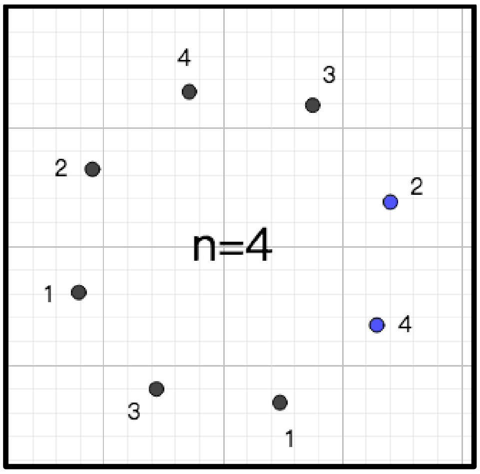
(1，3，4，5，6，7，9)無法成立原因

上述中的原則有提到位置值 1,2 必須填入 a_k ，故此組不合。

二、挑剔環的觀察與發現（挑剔環定義如摘要所示）

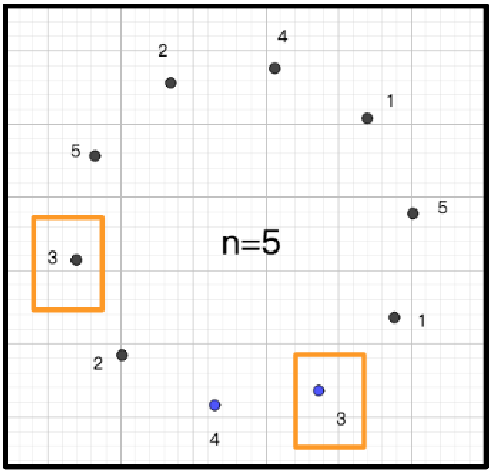
（一）觀察 n = 4k，n = 4k + 1， n = 4k + 2，n = 4k + 3 挑剔環是否能成立：

n = 4k　必定成立 (如圖(四))



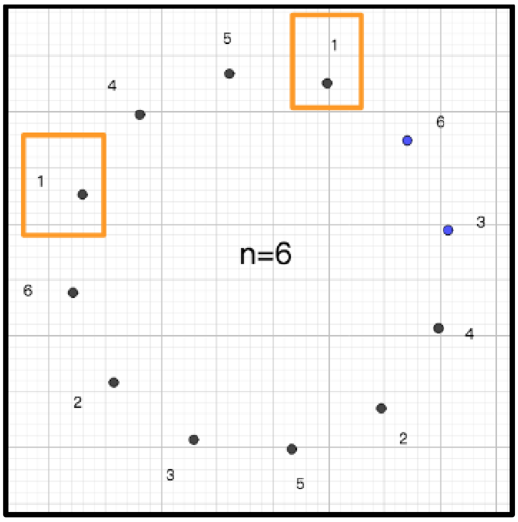
圖(四)

n= 4k + 1　仍然不成立 (如圖(五))



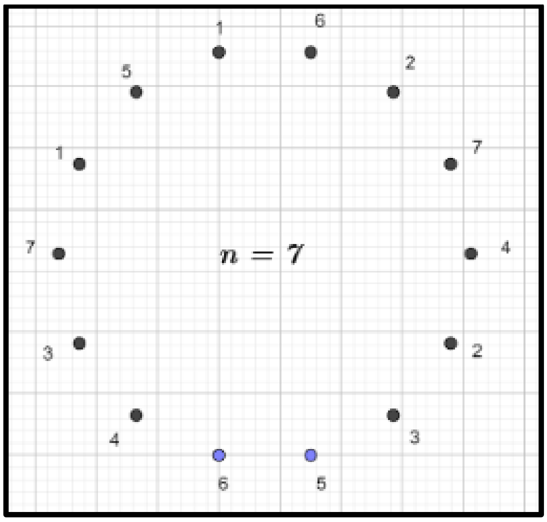
圖(五)

n = 4k + 2　仍然不成立 (如圖(六))



圖(六)

n = 4k + 3　必定成立 (如圖(七))



圖(七)

經初步觀察發現：可否成立的情形與挑剔數列相同，但若成立，因挑剔環可順時針或逆時針繞，應可得更多解。

（二）觀察為何挑剔環會有存在與不存在之狀況

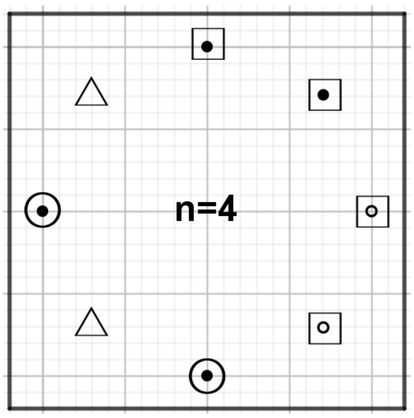
1. 經觀察發現：n = 4k + 1 或 4k + 2 所排成的挑剔環，最後一個被填入的數字間的間隔數皆為最後一個被填入的數−1 或+1。例如在 $n = 5$ 挑剔環中，依序填入 5、1、4、2，最後填入的數為 3。而兩個數字 3 間的間隔數為 2 (或 6)，即間隔數 = 3−1。
2. 因所有奇數+1 或−1 後皆變為偶數，且所有偶數+1 或−1 後皆變為奇數。因此推論，造成 $n = 4k + 1$，$n = 4k + 2$ 無法形成挑剔環的原因可能與奇、偶數性質有關。
3. 假設：奇數皆令為 1，故其間隔數 = 1；偶數皆令為 0，故其間隔數 = 0。每一種顏色代表一個數字，同一種圖形代同一個數字。

1. 以 $n = 4$ 為例：

1、2、3、4 中有兩個偶數⊡、⧇ (代表 2、4)，有兩個奇數△、⊙ (代表 1、3)。兩個奇數△的間隔數 = 1，兩個奇數⊙的間隔數 = 1。因偶數間的間隔數 = 0，因此當奇數有偶數個△、⊙時，總間隔數為偶數，即可成環。

2. 以 $n = 5$ 為例：

1、2、3、4、5 中有兩個偶數⊡、⧇ (代表 2、4)，有三個奇數△、⊙、★ (代表 1、3、5)。總間隔 = 3 為奇數。但因總個數 = $2 \cdot n$ 為偶數，故無法成環。



圖(八)

圖(九)

3. 以 $n = 6$ 為例：

1、2、3、4、5、6 中有三個偶數⊡、⧇、□ (代表 2、4、6)，有三個奇數△、⊙、★ (代表 1、3、5)。總間隔 = 3 為奇數，故無法成環。

4. 以 $n=7$ 為例：

1、2、3、4、5、6、7 中有三個偶數$\boxed{\cdot}$、$\boxed{\circ}$、□ (代表 2、4、6)，有四個奇數△、⊙、★、▲ (代表 1、3、5、7)。四種奇數的總間隔 = 4 為偶數，即可成環。

(三) 根據上述觀察，找出是否可以形成挑剔環有以下規則。

n	以 $4k+x$ 表示	奇數個數	偶數個數	是否可以形成挑剔環？
3	4k + 3	2	1	是
4	4k	2	2	是
5	4k + 1	3	2	否
6	4k + 2	3	3	否
7	4k + 3	4	3	是
8	4k	4	4	是
9	4k + 1	5	4	否
10	4k + 2	5	5	否
11	4k + 3	6	5	是
12	4k	6	6	是
13	4k + 1	7	6	否
14	4k + 2	7	7	否

表(六)

由此表格可知：當 $n=4k+1$、$n=4k+2$ 皆無法形成挑剔環 (1、⋯.、n 中 有奇數個奇數)。當 $n=4k$、$n=4k+3$ 皆可形成挑剔環 (1、⋯.、n 中 有偶數個奇數)。因此更確信是否可以形成挑剔環必與奇數、偶數性質有關。

（四）證明挑剔環是否存在

性質 4：當 $n=4k$、$n=4k+3$ 皆可形成挑剔環 ，其中 $n \in N, k \in \{0\} \cup N$

性質 5：當 $n=4k+1$、$n=4k+2$ 皆無法形成挑剔環 ，其中 $n \in N, k \in \{0\} \cup N$

證明：

1. 證明順逆時針間隔數奇偶狀況必相同

1.1 令 x 為奇數，y 為偶數；x，$y \in \{ 1、2、\cdots\cdots、n \}$，$n \in N$

性質 6：若 x 與 x 順時針的間隔數為奇數，則其逆時針的間隔數亦為奇數。

證明：

x 與 x 順時針的間隔數 = x 為奇數，則其逆時針的間隔數為 $2n - 2 - x$，即為偶數-偶數-奇數，其值必為奇數。

x 與 x 逆時針的間隔數 = x 為奇數，則其順時針的間隔數 = $2n - 2 - x$，即為偶數-偶數-奇數，其值必為奇數。

性質 7：若 y 與 y 順時針的間隔數為偶數，則其逆時針的間隔數亦為偶數。

證明：

y 與 y 順時針的間隔數 = y 為偶數，則其逆時針的間隔數 = $2n - 2 - y$，即為偶數-偶數-偶數，其值必為偶數。

g4jy 與 y 逆時針的間隔數 = y 為偶數，則其順時針的間隔數 = $2n - 2 - y$，即為偶數-偶數-偶數，其值必為偶數。

(三) 計算真實總間隔數與性質 3、性質 4 所述順時針與逆時針總間隔數比較。

定義：對所有 $m \in \{1、2、\cdots\cdots、n\}$，$n \in \mathrm{N}$ m、m 的順時針間隔數 m 與逆時針間隔數 $2n - 2 - m$ 的和的總和為"真實總間隔數" 。

n	例	真實順時針間隔數	真實逆時針間隔數	真實總間隔數
4k + 3	3	1 + 2 + 3 = 6	3 + 2 + 1 = 6	6 + 6 = 12 為 4 的倍數
4k	4	1 + 2 + 3 + 4 = 10	5 + 4 + 3 + 2 = 14	10 + 14 = 24 為 4 的倍數
4k + 1	5	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15	7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 25	15 + 25 = 40 為 4 的倍數
4k + 2	6	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21	9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39	21 + 39 = 60 為 4 的倍數

表(七)

性質 8：兩組$\{1、2、\cdots\cdots、n\}$環狀排列，則其可形成「挑剔環」的條件為：其「真實總間隔數」為 4 的倍數

證明：

總間隔數公式 = $n \cdot (2n - 2) = 2n \cdot (n - 1)$

任一數 m 與 m 的順時針間隔數與逆時針間隔數的和必為 $2n - 2$

其中 兩組$\{1、2、\cdots\cdots、n\}$的總數為 $2n$，減去 m 與 m 兩個數，即為 m 與 m 的順時針間隔數與逆時針間隔數的和。

因 n 或 $n-1$ 其中之一必為偶數，故總間隔數必為 4 的倍數。

n = 4k

真實總間隔數公式 $2n\cdot(n-1)=8k(4k-1)$ 為 4 的倍數

$n=4k+1$

真實總間隔數公式 $2n\cdot(n-1)=8k(4k+1)$ 為 4 的倍數

$n=4k+2$

真實總間隔數公式 $2n\cdot(n-1)=4(2k+1)(4k+1)$ 為 4 的倍數

$n=4k+3$

真實總間隔數公式 $2n\cdot(n-1)=4(2k+1)(4k+1)$ 為 4 的倍數

(二) 由表(一)及性質 3、性質 4，分析順時針與逆時針總間隔數的性質：

1. 當 $n=4k$ 時，{ 1、2、……、n }中數字為偶數的共有偶數個，數字為奇數的共有偶數個。

   順時針與逆時針總間隔數 = (數字為奇數·2) ·偶數個 + (數字為偶數·2) · 偶數個

   為 4 的倍數。

   故當 $n=4k$ 時，順時針與逆時針總間隔數為 4 的倍數。

2. 當 $n=4k+1$ 時，{ 1、2、……、n }中數字為偶數的共有偶數個，數字為奇數的共有奇數個。

   順時針與逆時針總間隔數 = (數字為奇數·2) ·奇數個 + (數字為偶數·2) ·偶數個

   為偶數，但不是 4 的倍數。

   故當 $n=4k+1$ 時，順時針與逆時針總間隔數為偶數，但不是 4 的倍數。

3. 當 $n=4k+2$ 時，{ 1、2、……、n }中數字為偶數的共有奇數個，數字為奇數的共有奇數個。

   順時針與逆時針總間隔數 = (數字為奇數·2) ·奇數個 + (數字為偶數·2) ·奇數個

   為偶數，但不是 4 的倍數。

   故當 $n=4k+2$ 時，順時針與逆時針總間隔數為偶數，但不是 4 的倍數。

4. 當 $n=4k+3$ 時，{ 1、2、……、n }中數字為偶數的共有奇數個，數字為奇數的共有偶數個。

   順時針與逆時針總間隔數 = (數字為奇數·2) ·偶數個 + (數字為偶數·2) ·奇數個

   為 4 的倍數。

   故當 $n=4k+3$ 時，順時針與逆時針總間隔數為 4 的倍數。

(四) 由性質 5 可知，形成「挑剔環」的條件為：其「真實總間隔數」為 4 的倍數。但由表(一)及性質 3、性質 4：當 $n = 4k + 1$ 及 $n = 4k + 2$ 時，順時針與逆時針總間隔數卻不是 4 的倍數。由此可知，當 $n = 4k + 1$ 及 $n = 4k + 2$ 時，順時針與逆時針總間隔數無法符合環「真實總間隔數」。因此得證，當 $n = 4k + 1$ 及 $n = 4k + 2$ 時，無法形成「挑剔環」。

當 $n = 4k$ 及 $n = 4k + 3$ 時，順時針與逆時針總間隔數為 4 的倍數。由此可知，當 $n = 4k$ 及 $n = 4k + 3$ 時，順時針與逆時針總間隔數符合環「真實總間隔數」。因此得證，當 $n = 4k$ 及 $n = 4k + 3$ 時，可形成「挑剔環」。

故性質 3，性質 4 得證。

八、根據 2003 第二屆旺宏金牌獎作品黃皓倫[2]得知，$n = 7$ 的挑剔數列共有 52 組解 (26 組，前後相反)。而以程式運算，挑剔環組數超過 52 組。(以下為其中 80 組，若屬於“挑剔環亦為挑剔數列組”，則前頭英文字母為其對應黃皓倫[2]報告中的解， A’意為當圍成環時, 跟黃皓倫[2]的 A 圍成環時同方向是相同環；標上 A”意為：當圍成環時, 跟黃皓倫[2]的 A 圍成環時反方向是相同環）

挑剔環亦為挑剔數列組：

A’[1, 4, 1, 7, 3, 6, 2, 5, 3, 2, 4, 7, 6, 5]	A”[1, 4, 1, 5, 6, 7, 4, 2, 3, 5, 2, 6, 3, 7]
B’[1, 5, 1, 7, 2, 4, 6, 2, 3, 5, 4, 7, 3, 6]	B”[1, 5, 1, 6, 3, 7, 4, 5, 3, 2, 6, 4, 2, 7]
C’[1, 4, 1, 6, 3, 5, 4, 7, 3, 2, 6, 5, 2, 7]	C”[1, 4, 1, 7, 2, 5, 6, 2, 3, 7, 4, 5, 3, 6]
D’[1, 5, 1, 6, 4, 3, 7, 5, 2, 3, 6, 2, 7, 4]	D”[1, 5, 1, 4, 7, 2, 6, 3, 2, 5, 7, 3, 4, 6]
J’ E’[1, 5, 1, 6, 2, 7, 4, 2, 3, 5, 6, 4, 3, 7]	J” E”[1, 5, 1, 7, 3, 4, 6, 5, 3, 2, 4, 7, 2, 6]
F’[1, 6, 1, 5, 4, 3, 7, 2, 6, 3, 2, 5, 7, 4]	F”[1, 6, 1, 4, 7, 5, 2, 3, 6, 2, 7, 3, 4, 5]
G’[1, 4, 1, 5, 7, 2, 6, 3, 2, 5, 4, 3, 7, 6]	G”[1, 4, 1, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 3, 6, 2, 7, 5]
H’[1, 7, 1, 2, 6, 4, 2, 5, 3, 7, 4, 6, 3, 5]	H”[1, 7, 1, 5, 3, 6, 4, 7, 3, 5, 2, 4, 6, 2]
I’[1, 5, 1, 4, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 2, 6, 7, 2]	I”[1, 5, 1, 2, 7, 6, 2, 3, 4, 5, 7, 3, 6, 4]
K’[1, 7, 1, 6, 2, 5, 4, 2, 3, 7, 6, 4, 3, 5]	K”[1, 7, 1, 5, 3, 4, 6, 7, 3, 2, 4, 5, 2, 6]
L’[1, 4, 1, 7, 6, 5, 4, 2, 3, 7, 2, 6, 3, 5]	L”[1, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 3, 2, 4, 5, 6, 7]
O” M’[1, 6, 1, 3, 5, 7, 4, 3, 6, 2, 5, 4, 2, 7]	O’ M”[1, 6, 1, 7, 2, 4, 5, 2, 6, 3, 4, 7, 5, 3]
N’[1, 5, 1, 7, 2, 6, 3, 2, 4, 5, 3, 7, 6, 4]	N” α’[1, 5, 1, 4, 6, 7, 3, 5, 4, 2, 3, 6, 2, 7]
P’[1, 3, 1, 6, 4, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 2, 5, 7]	P”[1, 3, 1, 7, 5, 2, 6, 4, 2, 7, 5, 3, 4, 6]
Q’[1, 6, 1, 3, 4, 5, 7, 2, 6, 4, 2, 5, 7, 3]	Q”[1, 6, 1, 3, 7, 5, 2, 4, 6, 2, 7, 5, 4, 3]
R’[1, 5, 1, 3, 7, 4, 6, 3, 2, 5, 4, 2, 7, 6]	R”[1, 5, 1, 6, 7, 2, 4, 5, 2, 3, 6, 4, 7, 3]
S’[1, 6, 1, 4, 5, 7, 2, 3, 6, 2, 5, 3, 4, 7]	S”[1, 6, 1, 7, 4, 3, 5, 2, 6, 3, 2, 7, 5, 4]
T’[1, 4, 1, 6, 5, 3, 4, 7, 2, 3, 6, 2, 5, 7]	T”[1, 4, 1, 7, 5, 2, 6, 3, 2, 7, 4, 3, 5, 6]
U”[1, 7, 1, 4, 6, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 2]	U’[1, 7, 1, 2, 5, 6, 2, 3, 4, 7, 5, 3, 6, 4]
V’[1, 3, 1, 4, 5, 6, 2, 7, 4, 2, 5, 3, 6, 7]	V”[1, 3, 1, 7, 6, 3, 5, 2, 4, 7, 2, 6, 5, 4]
W’[1, 7, 1, 6, 4, 5, 2, 7, 3, 2, 6, 5, 3, 4]	W”[1, 7, 1, 4, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 2, 5, 4, 6]
X’[1, 7, 1, 6, 4, 2, 5, 3, 2, 7, 6, 3, 5, 4]	X”[1, 7, 1, 4, 5, 3, 6, 7, 2, 3, 5, 2, 4, 6]

Y’ [1, 7, 1, 6, 5, 2, 4, 7, 2, 3, 6, 4, 5, 3]   Y” [1, 7, 1, 3, 5, 4, 6, 3, 2, 7, 4, 2, 5, 6]
Z’ [1, 7, 1, 6, 4, 3, 5, 7, 2, 3, 6, 2, 5, 4]   Z” [1, 7, 1, 4, 5, 2, 6, 3, 2, 7, 5, 3, 4, 6]

挑剔環但不為挑剔數列組：

[1, 3, 1, 4, 7, 6, 2, 5, 4, 2, 7, 3, 6, 5]   [1, 3, 1, 5, 6, 3, 7, 2, 4, 5, 2, 6, 7, 4]
[1, 3, 1, 5, 7, 3, 6, 4, 2, 5, 7, 2, 4, 6]   [1, 3, 1, 5, 7, 2, 6, 4, 2, 5, 7, 3, 4, 6]
[1, 3, 1, 6, 4, 3, 7, 5, 2, 4, 6, 2, 7, 5]   [1, 3, 1, 6, 4, 2, 5, 7, 2, 4, 6, 3, 5, 7]
[1, 3, 1, 6, 4, 2, 7, 5, 2, 4, 6, 3, 7, 5]   [1, 3, 1, 7, 5, 3, 6, 4, 2, 7, 5, 2, 4, 6]
[1, 4, 1, 5, 2, 7, 6, 2, 3, 5, 4, 7, 3, 6]   [1, 4, 1, 6, 3, 7, 4, 5, 3, 2, 6, 7, 2, 5]
[1, 5, 1, 2, 6, 4, 2, 7, 3, 5, 4, 6, 3, 7]   [1, 5, 1, 4, 3, 7, 6, 2, 3, 5, 2, 7, 4, 6]
[1, 5, 1, 4, 6, 2, 3, 7, 2, 5, 3, 6, 4, 7]   [1, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 5, 2, 3, 7, 2, 4, 6]
[1, 5, 1, 6, 4, 2, 7, 3, 2, 5, 6, 3, 7, 4]   [1, 5, 1, 6, 4, 7, 2, 5, 3, 2, 6, 7, 3, 4]
[1, 5, 1, 7, 3, 6, 4, 5, 3, 7, 2, 4, 6, 2]   [1, 5, 1, 7, 4, 6, 3, 5, 2, 7, 3, 2, 6, 4]
[1, 6, 1, 2, 5, 7, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 4, 3]   [1, 6, 1, 2, 7, 5, 2, 4, 6, 3, 7, 5, 4, 3]
[1, 6, 1, 3, 4, 5, 7, 3, 6, 4, 2, 5, 7, 2]   [1, 6, 1, 3, 4, 7, 5, 2, 6, 4, 2, 7, 5, 3]
[1, 6, 1, 3, 4, 7, 5, 3, 6, 4, 2, 7, 5, 2]   [1, 6, 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 2, 5, 7, 4, 3]
[1, 6, 1, 3, 7, 5, 4, 3, 6, 2, 7, 4, 2, 5]   [1, 6, 1, 5, 2, 4, 7, 2, 6, 3, 4, 5, 7, 3]
[1, 7, 1, 4, 6, 2, 3, 5, 2, 7, 3, 6, 4, 5]   [1, 7, 1, 4, 6, 5, 3, 7, 4, 2, 3, 6, 2, 5]
[1, 7, 1, 5, 4, 6, 3, 7, 2, 5, 3, 2, 6, 4]   [1, 7, 1, 5, 2, 4, 6, 2, 3, 7, 4, 5, 3, 6]
[1, 7, 1, 5, 2, 6, 3, 2, 4, 7, 3, 5, 6, 4]   [1, 7, 1, 6, 3, 5, 4, 7, 3, 2, 6, 4, 2, 5]

伍、研究結果

一、位置編號總和為:

$$2\cdot(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)+(1+2+3+\dots+n)+n=1+2+3+\dots+2n$$

二、可利用討論(a_1， a_2，a_3 ， ... ， a_n)各種排列方法，數字較大時，討論較複雜，但可以找出所有解的類型。

以 n=7 為例，可以利用此方式找出黃皓倫[2]利用程式找出的所挑剔數列有解。

三、發現以下八大性質(前三者為挑剔數列，後五者為挑剔環)，並成功找出挑剔環是否存在之規律。

<u>挑剔數列性質:</u>

性質 1：若 a_k 為數字 k 排成挑剔數列時的較小位置編號(編號由左至右)，則數字 k 的較大位置編號 $a_k'=a_k+k+1$。

性質 2：兩組{ 1、2、⋯..、n }直線排列，

若其較小位置編號總和($a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$) $\notin$ N，則無法形成挑剔數列；

若可形成挑剔數列，則其較小位置編號總和($a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$) $\in$ N。

性質 3：若挑剔數列不成立，則總空格數與 n 的奇偶性質不相同

挑剔環性質:

性質 4：當 $n = 4k$、$n = 4k + 3$ 皆可形成挑剔環，其中 $n \in N, k \in \{0\} \cup N$

性質 5：當 $n = 4k + 1$、$n = 4k + 2$ 皆無法形成挑剔環，其中 $n \in N, k \in \{0\} \cup N$

性質 6：若 x 與 x 順時針的間隔數為奇數，則其逆時針的間隔數亦為奇數。

性質 7：若 y 與 y 順時針的間隔數為偶數，則其逆時針的間隔數亦為偶數。

性質 8：兩組{ 1、2、……、n }環狀排列，則其可形成「挑剔環」的條件為：

其「真實總間隔數」為 4 的倍數

四、n 相同時，挑剔環的解多於或等於挑剔數列。

陸、討論

一、 找出挑剔數列的規則並套用至挑剔環上。

在章節肆、一，我們已詳述 a_k 與 a_k+k+1 其關聯性，以及其所延伸之公式。並列出 n=3 以及 n=4 所得出之表格。

二、 我們嘗試更多組數字，n=7、n=8(如下)。

數字	1	2	3	4	5	6	7
a_k	8	1	2	9	7	5	3
$a_k' = a_k + k + 1$	10	4	6	14	13	12	11

表(八) (n=7 為例 2,3,7,2,6,3,5,1,4,1,7,6,5,4)

數字	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k	8	1	2	11	9	7	5	3
a_k'	10	4	6	16	15	14	13	12

表(九) (n=8 為例 2,6,8,2,1,7,1,4,6,5,3,8,4,7,3,5)

三、由表(八)、表(九)我們發現規律。當 n 為偶數，則數字值最大的 $\frac{n}{2}+1$ 位呈公差為 2 的等差數列。當 n 為奇數時，則數字值最大的 $\frac{n+1}{2}$ 位呈公差為 2 的等差數列。

四、再經過 n=11、12、15、16 的排列，我們發現前幾位數字會一樣(共幾位數字一樣則視數字本身而定)。

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_k	12	1	2	3	10	15	13	11	9	7	5
a_k'	14	4	6	8	16	22	21	20	19	18	17

表(十) (n=11 為例 2,3,4,2,11,3,10,4,9,5,8,1,7,1,6,5,11,10,9,8,7,6)

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_k	12	1	2	3	10	17	15	13	11	9	7	5
a_k'	14	4	6	8	16	24	23	22	21	20	19	18

表(十一) (n=12 為例 2,3,4,2,12,3,11,4,10,5,9,1,8,1,7,5,6,12,11,10,9,8,7,6)

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k	18	1	2	3	10	5	14	21	19	17	15	13	11	9	7
a_k'	20	4	6	8	16	12	22	30	29	28	27	26	25	24	23

表(十二) (n=15 為例 2,3,4,2,6,3,15,4,14,5,13,6,12,7,11,5,10,1,9,1,8,7,15,14,13,12,11,10,9,8)

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_k	18	1	2	3	10	5	14	23	21	19	17	15	13	11	9	7
a_k'	20	4	6	8	16	12	22	32	31	30	29	28	27	26	25	24

表(十三) (n = 16 為例 2,3,4,2,6,3,16,4,15,5,14,6,13,7,12,5,11,1,10,1,7,8,16,15,14,13,12,11,10,9,8)

五、以上挑剔數列皆是運用我們發現的規律排列出的挑剔數列，連成一環便可形成挑剔環。
另外，發現在粗框中的數字皆會相同，並且每差 4n，重複的數字便會多兩組。

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_k	24	1	2	3	10	5	14	7	18	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9
a_k'	26	4	6	8	16	12	22	16	28	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29

表(十四) (n=19 時，使用前述排列法不成立)

七、然而，再嘗試 n=19 時，我們卻發現此規律已無法套用，因為位置 16 重複了兩次。目前尚無法證明此事發生的原因，我們會列入未來展望。

八、在 n=7 時，不僅僅發現可以利用表四之等差數列來排列，亦可用下列等差數列：

(一)等差數列為 1,3,5，公差為 2 的數列。

數字	1	2	3	4	5	6	7
a_k	12	4	2	8	5	3	1
a_k'	14	7	6	13	11	10	9

表(十五) (n = 7 為例 7,3,6,2,5,3,2,4,7,6,5,1,4,1)

(二)等差數列為 1,4,7，公差為 3 的數列。

數字	1	2	3	4	5	6	7
a_k	12	2	6	3	7	4	1
a_k'	14	5	10	8	13	11	9

表(十六) (n=7 為例 7,2,4,6,2,3,5,4,7,3,6,1,5,1)

(三)等差數列為 2,5,8，公差為 3 的數列。

數字	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1	4	9	6	8	5	2
a_k'	3	7	13	11	14	12	10

表(十七) (n=7 為例 1,7,1,2,6,4,2,5,3,7,4,6,3,5)

九、以上可知可用不同的等差數列來排出挑剔數列、挑剔環，但仍不知其規律所在，亦不知其用處，有待未來在討論。

十、利用 n = 4k + 3 與 n = 4k 的關係快速求解（只適用於以上述方法排列出之挑剔數列）

(一) 在排連續的 n = 4k + 3 和 n = 4k 時，發現 n = 4k 僅僅比 n = 4k + 3 多出兩個數字，由上述排法歸納，我們找出以下方法。

(二) 已知 n = 4k + 3 的數列，求 n = 4k 的數列：以 n = 7、n = 8 的挑剔數列為例

1. 先排出 n = 4k + 3 挑剔數列：$n = 7$　2,3,7,2,6,3,5,1,4,1,7,6,5,4

2. 把所有大於的整數都 +1 ：

將大於的整數都 +1： 2,3,8,2,7,3,6,1,5,1,8,7,6,5

3. 將最後面的等差數列兩側加上：

將最後面的等差數列兩側加上 4： 2,3,8,2,7,3,6,1,5,1,4,8,7,6,5,4

4. 即可得到 n = 4k 的挑剔數列：2,3,8,2,7,3,6,1,5,1,4,8,7,6,5,4

(三) 已知 n = 4k 的數列，求 n = 4k + 3 的數列：以 $n = 7$、n = 8 的數列為例

1. 先排出 4k 數列：$n = 8$　　2,3,8,2,7,3,6,1,5,1,4,8,7,6,5,4

2. 將最後一位的數值 m 刪去(連前面一個 m 也去除)：

將最後一位的數值 4 刪去： 2,3,8,2,7,3,6,1,5,1,8,7,6,5

3. 把所有的整數都-1：將的整數都-1： 2,3,7,2,6,3,5,1,4,1,7,6,5,4

4. 則即可得到 n = 4k + 3 的挑剔數列：2,3,7,2,6,3,5,1,4,1,7,6,5,4

十一、比較黃皓倫[2]挑剔數列排列法及本報告提出之排列法：

（一）黃皓倫[2]報告做法針對 n=4k, n=4k+3 分別提出一種排列法，雖然可準確找出解，但做法較為複雜且僅有一解。

（二）根據此報告於研究方法提出之解挑剔環方法，雖過程較攏長，但可求出所有解。且在此之前的程式皆使用暴力解法套出一挑剔環的所有解。若使用此報告提出之方法解挑剔環，則可大大縮小程式搜尋範圍，大幅提升程式效率。

（三）我們的方法可以找出所有的可能性，包括會不成立的情況。

使用此方法可得結果	可得挑剔數列解數	做法複雜度	做法統一度	其他
黃皓倫[2]成果	1	較複雜	須針對各數字使用對應方法	無
此報告成果	所有解	耗時長但作法容易	每個數字作法皆統一	提供程式縮小搜尋範圍，提升效率

表(十八) (同表(二))

柒、結論

一、與挑剔數列情況相同，挑剔環在 $n = 4k + 1$ 和 $n = 4k + 2$ 時，無法形成挑剔環；且在 $n = 4k$ 和 $n = 4k + 3$ 時，則可以形成挑剔環。

二、n 相同時，挑剔環的解必大於或等於挑剔數列。

三、可藉由公式 $2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2n$，以討論方式求出 n 的挑剔數列之所有解。且在 $n \leq 16$，可利用公差 $d = 2$ 的等差數列來排列挑剔數列和挑剔環。

四、可利用 n=4k+3 與 n=4k 之關係，在兩個的解中快速轉換，以便更快求到解。

五、黃皓倫[2]挑剔數列排列法只可找出每個 n 的一種排列法，雖然此報告中的方法較為緩慢，須一一討論，但能找出所有的解。

捌、未來展望

一、證明出挑剔環的解多於挑剔數列，並找出其中的規律。

二、找出挑剔環 ($n \geq 19$)的排列規則。

三、找出不同等差數列對挑剔數列及挑剔環的影響。

四、是否有更快速的方法討論所有解。

玖、參考資料及其他

一、黃皓倫解數學像在玩迷宮(民 92 年 12 月 01 日) 。大紀元轉載自由時報。
民 109 年 12 月 1 日，取自: https：//www.epochtimes.com/b5/3/12/1/n420962.htm

二、黃皓倫(92)。挑剔數列。第二屆旺宏獎。民 109 年 12 月 1 日，取自:
https://www.mxeduc.org.tw/scienceaward/history/projectDoc/2nd/doc/SA2-127.pdf

【評語】030406

本作品考慮的是如下的問題：將兩組 1，2， …，n 這 2n 個整數排在圓周上，使得對於每一個數字 k，兩個 k 之間以順時針或逆時針的方向看，中間會恰有 k 個其它數字。如果對數字 n，構造這樣的排法是可行的，n 應該滿足什麼條件？這是一個非常有意思的問題。原始的問題是考慮將這 2n 個數排成一列，使得對於每一個 1，2， …，n 中的數字 k，兩個 k 之間都會恰有 k 個其它數字，探討排法是否存在的問題。本作品的作者們聰明的把排成一列的條件轉成排成一圈，同時把直線距離變為圓周上的距離，想法別具巧思，值得鼓勵。要解決這樣的問題，必須要先說明對於哪些整數 n，構造滿足條件的排列方式是可行的，而對於哪些整數 n，滿足條件的排列方式是不存在的。針對後一個問題，作者們給出了一個論述，即 n=4k+1 或 4k+2 時這種排列方式是不存在的，作者補正了作品說明書上這個論述證明的瑕疵（兩個奇數相加，得出的數字總和有可能是 4 的倍數），利用順時針的方向標號，再搭配數字奇偶性的討論，給出一個簡單的證明，探究精神值得鼓勵。對於前一個問題，如果能夠針對某一些 n 值，給出建構滿足條件的排列方式的具體做法，會是一個更好的作品。

作品簡報

挑剔環

國中組 數學科

前言：研究問題

- 證明當 $n = 4k + 1$ 和 $n = 4k + 2$ 時不存在挑剔數列，並找出一種排法能排出 $2n$ 位的挑剔數列，以及證明此排法並反推$n = 4k$ 和 $n = 4k + 3$ 時一定有挑剔數列存在。
- 數字n（在挑剔數列成立下）可依照使用專一方式，來求出每個數字的其中一組解。

研究目的、問題

- 是否有方法可將所有的挑剔數列解都找出。
- 因$n = 4k+3$和$n = 4k$為相鄰兩數(k值相同)，數列僅多兩個數字，是否有快速排法？
- 當$n = 4k + 1$ 和 $n = 4k + 2$ 時，是否存在挑剔環？
- 當$n = 4k$ 和 $n = 4k + 3$ 時，形成挑剔環的排列數是否大於形成挑剔數列排列數？
- 找出挑剔環排列規則。

註：k為非負整數

研究方法與研究結果

一、簡述挑剔數列、挑剔環的觀察與發現

將兩組{ 1，2，...，n }任意排成環狀，若對所有數m∊ { 1，2，...，n }，m與m之間繞順時針的間隔數為m [即 d (m，m，順) = m]或繞逆時針的間隔數為m[即 d (m，m，逆) = m]成立，則稱此環狀排列為「挑剔環」。

- 定義 d (a_m，a_m'，順或逆) = m：

a_m為兩數中較小的位置值；a_m'為兩數中較大的位置值；m為為間隔數；順或逆意即順時針或逆時針，順逆時針的判斷是由兩數的位值中較小者向較大者的方向。

二、挑剔數列

性質一：若a_k為數字k排成挑剔數列時的較小位置編號(編號由左至右)，則數字k的較大位置編號$a_k' = a_k + k + 1$。

證明：當第一個位置值為 a_k，由挑剔數列定義可知可知，其第二個位置值會是 a_k 加上相隔的 k，最後再加上那個位置本身數1，即可得公式 $a_k' = a_k + k + 1$。

且由性質一可列出位置編號總和公式：

$2 (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + (1 + 2 + 3 + ... + n) + n = 1 + 2 + 3 + ... + 2n$

位置編號總和及性質

由上述公式可推得較小位置總和，以下以3為例：

以$n = 3$為例，挑剔數列：3，1，2，1，3，2。其中數字2的較小位置編號$a_2 = 3$，較大位置編號$a_2' = 6\ (= a_2 + 2 + 1)$

數字	較小位置編號a_k	較大位置編號$a_k' = a_k + k + 1$
1	2	$2 + 1 + 1 = 4$
2	3	$3 + 2 + 1 = 6$
3	1	$1 + 3 + 1 = 5$

若挑剔數列的排序未知，則由性質1：
位置編號總和為
$[a_1 + (a_1 + 1 + 1)] + [a_2 + (a_2 + 2 + 1)] + [a_3 + (a_3 + 3 + 1)] = 2(a_1 + a_2 + a_3) + 9$
而兩組{1、2、3}的位置編號總和 必為
$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
可推得$a_1 + a_2 + a_3 = 6$，為較小位置編號總和

由上述分析可知，可利用位置編號總和公式推得較小位置編號總和。並由此可得性質二：

性質2：兩組{1、2、.....、n}直線排列，若其較小位置編號總和$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$不屬於N，則無法形成挑剔數列。

證明：因$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$皆為整數，故$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$必為整數。

** 在作品說明書中有n為各種情況時以此方法證明是否存在之詳細證明。*

挑剔數列的排列方法

以下流程以n = 3為例：

Step 1：根據挑剔數列性質 1 ，推出 n = 3時，較小位置編號總和 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$

Step 2：分析：(a_1 ，a_2 ，a_3) 必為(1，2，3)的各種可能排列

(1) 若$a_1 = 1$，則$a_1' = a_1 + 1 + 1 = 3$ 不合

(2) 若$a_2 = 1$，則$a_2' = a_2 + 2 + 1 = 4$

a.若$a_1 = 2$，則$a_1' = a_1 + 1 + 1 = 4$ 不合

b.若$a_3 = 2$，則$a_3' = a_3 + 3 + 1 = 6$ $a_1 = 3$，則$a_1' = a_1 + 1 + 1 = 5$ 符合

(3) 若$a_3 = 1$，則$a_3' = a_3 + 3 + 1 = 5$

a.若$a_1 = 2$，則$a_1' = a_1 + 1 + 1 = 4$ $a_2 = 3$，則$a_2' = a_2 + 2 + 1 = 6$ 符合

b.若$a_2 = 2$，則$a_2' = a_2 + 2 + 1 = 5$ 不合

故可此分析得出：n = 3的挑剔數列恰有兩組解：2 3 1 2 1 3 、3 1 2 1 3 2

＊除較小位置編號總和須符合推導出數值外，分析各種排列可能時尚需注意：位置1和位置2必為較小位置編號，最後兩位置必為較大位置編號。

挑剔數列排列原則：

- 位置1和位置2必填，最後兩位置必不填。

(位置 1，位置 2，位置 3，…………，位置 11，位置 12，位置 13，位置 14)

必　填　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　必為較大數 a_k'位置

與黃皓倫[2]挑剔數列比較：(n=7中之特例)

- (1，2，3，5，6，7，11) 與自己**互相對稱**

□ □ □ ○ □ □ □ ○ ○ ○ □ ○ ○ ○

1 2 3 11 5 6 7 7 6 5 11 3 2 1

- (1，3，4，5，6，7，9) 無法成立 ⇒不符合上述條件原則
- 其餘皆與黃皓倫[2]挑剔數列符合

定義間隔數、空格數：

- 兩個數字m之間必須有m個數字，稱之為**間隔數** $d(m，m)=m$。
- 兩個數字m之間位置編號差為 $m+1$，稱之為**空格數** $s(m，m)=m+1$。

性質3：若挑剔數列不成立，則總空格數與n的奇偶性質不相同

數值n	空格數奇偶性質 總空格數公式：$\frac{n(n+3)}{2}$	總空格數 V.S. n的奇偶	是否相同
4k+1	$2(k+1)(4k+1) \Rightarrow$ **偶數**	偶數 V.S. 奇數	不相同
4k+2	$(2k+1)(4k+5) \Rightarrow$ **奇數**	奇數 V.S. 偶數	不相同
4k+3	$(2k+3)(4k+3) \Rightarrow$ **奇數**	奇數 V.S. 奇數	相 同
4k	$2k(4k+3) \Rightarrow$ **偶數**	偶數 V.S. 偶數	相 同

三、挑剔環

證明挑剔環成立狀況 觀察

1. 奇數皆令為1，間隔數 = 1；
2. 偶數皆令為0，間隔數 = 0。
3. 同一種圖形代同一個數字。

以n = 5為例：

1、2、3、4、5中有兩個偶數·和。（代表2、4），有三個奇數△、⊙、★（代表1、3、5）。總間隔 = 3 為奇數。但因總個數 = 2n 為偶數，故無法成環。

以此方法，可證明所有挑剔環之成立與否

經觀察及證明推論：

1. 挑剔環可否成立的情形與挑剔數列相同
2. 若成立，因挑剔環可順時針或逆時針繞，應可得更多解

觀察結果：

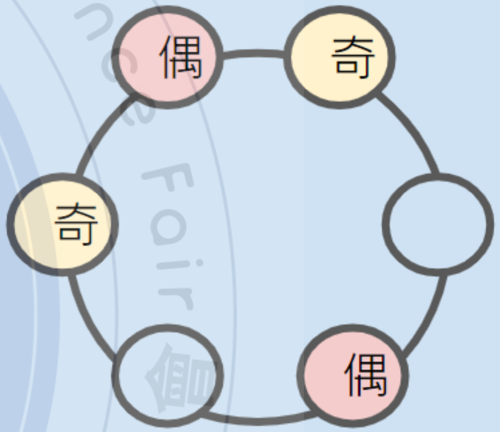
n = 4k 必定成立；n= 4k + 1仍然不成立；n = 4k + 2仍然不成立；n = 4k + 3必定成立

性質4：當n = 4k、n = 4k + 3皆可形成挑剔環，其中 n∈N,k∈{0}∪N

性質5：當n = 4k + 1、n = 4k + 2皆無法形成挑剔環，其中 n∈N,k∈{0}∪N

性質6、7： 若數字與數字順時針的間隔數為奇數，則其逆時針的間隔數亦為奇數；數字為偶數，則順逆時針的間隔數為偶數。

右圖以n=3為例

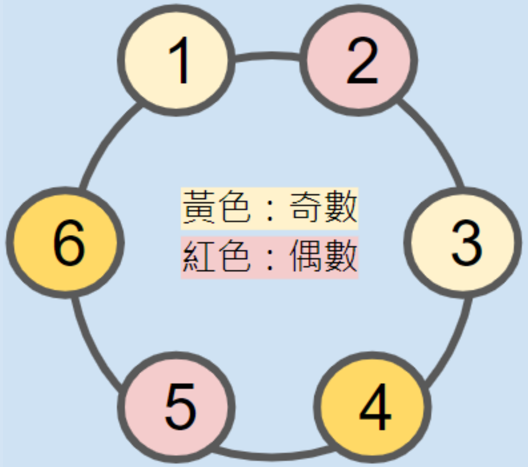


性質8： 兩組{ 1、2、……、n }環狀排列，則其可形成「挑剔環」的條件為：其「真實總間隔數」為4的倍數

總間隔數公式＝$n\ (2n-2)$

＊報告中提出使用真實總間隔數及順逆時針總間隔數之方法證明挑剔環何時成立。但我們發現我們的推算法有紕漏，事實上，無論n為多少，真實總間隔數及順逆時針總間隔數皆為四的倍數，故此法僅能推導出一些性質，並無法證明挑剔環是否成立。

挑剔環是否成立，新證明法



上圖以n=3為例

- ★ 從任意一位置替挑剔環標號，由1至2n。
- ★ **每奇數所佔位置值必為兩奇或兩偶，偶數則必為一奇一偶。**

註：n=4k,n=4k+3時因挑剔數列成立，且挑剔數列本身即為挑剔還的一種，故必成立

下表證明n=4k+1,n=4k+2時為何不成立：

X 2

兩者相減

n	n=4k+1	n=4k+2
總位置數2n	8k+2	8k+4
位置值為奇數和偶數之個數	皆為4k+1	皆為4k+2
1~n之間總偶數數	2k	2k+1
扣除偶數占用格(一奇一偶)	位置值為奇數&偶數	剩下數量皆為2k+1
結果	奇數無法填滿	奇數無法填滿

解釋與討論

- $n \le 16$的快速公差排法：（n = 19以上不適用）

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_k	18	1	2	3	10	5	14	23	21	19	17	15	13	11	9	7
a_k'	20	4	6	8	16	12	22	32	31	30	29	28	27	26	25	24

依序往右由最大數填寫，每往右一格遞減1

➔ 當n為奇數，從 $\frac{n+1}{2}$ 開始

➔ 當n為偶數，從 $\frac{n}{2}$ 開始

- n = 4k + 3與n = 4k的關係快速求解(只適用於以上述快速公差排法排出之數列)：

2,3,7,2,6,3,5,1,4,1,7,6,5,4

將大於 $\frac{n+1}{2}$ 的數皆加1

2,3,8,2,7,3,6,1,5,1,8,7,6,5

最後面公差兩側加上 $\frac{n+1}{2}$

2,3,8,2,7,3,6,1,5,1,4,8,7,6,5,4

結論

- 可藉由位置編號總和公式，以討論方式求出n的挑剔數列之所有解。且在n≤16，可利用公差d = -2的等差數列來排列挑剔數列和挑剔環。
- 利用n=4k+3與 n=4k的相鄰數字關係，在兩者的解中快速轉換，可更快求得解。
- 在n = 4k + 1和n = 4k + 2時，無法形成挑剔環。
- 在n = 4k和n = 4k + 3時，則可以形成挑剔環，且解數多於挑剔數列。
- 黃皓倫[2]挑剔數列排列法只可找出每個n的一種排列法，雖然本報告中的方法較為緩慢，須一一討論，但能找出所有的解。

參考資料

[1]黃皓倫解數學像在玩迷宮(民92年12月01日) 。大紀元轉載自由時報。
https://www.epochtimes.com/b5/3/12/1/n420962.htm
[2]黃皓倫(92)。挑剔數列。第二屆旺宏獎。民109 年12月1日．
https://www.mxeduc.org.tw/scienceaward/old.htm