中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030405

「石」在好玩－探討放石頭的規律

學校名稱：南投縣立中興國民中學

作者：	指導老師：
國二 林信夫 國二 林大維 國二 賴昱豪	李昆蓉

關鍵詞：牛頓插值定理、費氏數列、
二階非齊次遞迴式

摘要

為了在放石頭的限制之下，找出$(n \times m)$大小的方格圖，可以放幾顆石頭，並找出通式，本研究由1×1的方格圖開始慢慢擴展，求出數據，然後利用數據找出規律並利用階差數列、牛頓插值定理找出$R(n \times 1)$、$R(n \times 2)$、$R(n \times 3)$、$R(n \times 4)$的通式，並預測$R(n \times m)$會是n的m次方。再藉由費氏數列、二階非齊次遞迴式的解法等方法找出$R(1 \times m)$、$R(2 \times m)$、$R(3 \times m)$的通式及$R(4 \times m)$的遞迴式 。透過整合利用階梯式累加法用$excel$表格整理區塊和區塊間的方法數差，始能快速找出第n列的通式，而求出$R(n \times 5)$、$R(n \times 6)$的通式。希望利用這些通式，透過整合推出方格圖大小$(n \times m)$的通式。

壹、 研究動機

從小我們就對數學很有興趣，喜歡研究各種數學題型，一次上獨立研究課時，老師給了一道在科學研習月刊的數學題目，名字叫做「放石頭」:「小志在如圖 1 的表格中玩放石頭的遊戲，他要在每一直行放一個石頭，且從左側第一行開始放。但是有一個特殊的規定，就是新放下去的石頭的左上角方向一路延伸都不可以有已經放好的石頭。比如說，前四行已經放好了石頭，則現在要在第五行放新的石頭，只剩下兩格可以放（打叉的兩格不能放），如圖 2。」在探究的過程中，誘發了同組同學們的興趣，心動不如馬上行動，就有了接下來的一連串數學推導的過程。

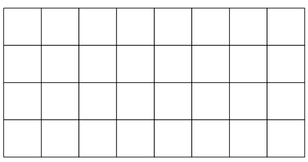


圖 1

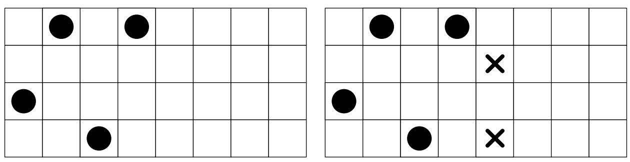


圖 2

貳、 研究目的

一、找出$R(n \times 1)$、$R(n \times 2)$、$R(n \times 3)$、$R(n \times 4)$、$R(n \times 5)$、$R(n \times 6)$的通式。

二、找出$R(1 \times m)$ 、$R(2 \times m)$ 、$R(3 \times m)$ 、$R(4 \times m)$的通式。

三、找出$R(n \times m)$的規律。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、Excel、Word

肆、 研究過程或方法

一、 文獻探討

我們進入全中小學科學展覽會，找到了相關的兩篇作品，本研究將找到的作品進行整理，研究分析如下表 1：

表1：文獻資料

屆數	組別	作品名稱	研究方法	研究結果
59	國中組	放石頭問題的探討	一、由 $n\times(m-1)$ 方格圖的所有可能數導到$n\times m$方格圖的所以可能數。 二、聯立方程式。 三、費式數列。	一、聯立方程式猜測$T(n\times 3)$方程式並證明。 二、找出$T(3\times n)=F_{n+5}-(n-4)$。 三、找出$T(4\times m)$的遞迴式。
59	國小組	動動腦 FUN 石頭	一、費式數列。 二、找出子圖間的遞迴關係。	一、求出$A_m(n)$代表m列n行方陣中，符合「放石頭規定」的放法數量。 (一) $m=1$，$A_1(n)=1$。 (二) $m=2$，$A_2(n)=n+1$。 (三) $m=3$，$A_3(n)=F_{n+5}-(n-4)$。 (四) $m=4$，$A_4(n)=2A_4(n-1)-A_4(n-4)+B_2(4,n)+B_2(4,n-2)$。

這兩篇都沒有找到$n\times m$方格圖的通解，於是朝著這個方向研究，本研究嘗試運用方格圖窮舉法先找出第n列的通式，再運用樹枝狀推導$(n\times m)$方格圖的可能數將其轉化成表格，運用加法原理計數找出第m行的通式。最後歸納統整希望找出$(n\times m)$方格圖通式的方式。

二、放石頭的位置規定

(一) 在$(n\times m)$的方格圖中，在每一直行放一顆石頭，且從左側第一行開始放。

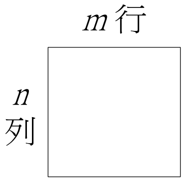


圖3

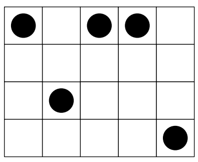
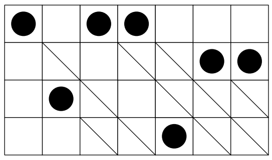


圖4

(二) 放下去的石頭向右下一格都不可以再放石頭。



註 為不能放

圖5

(三) 方格圖位置記號。

1. 方格圖的列數為n、行數為m，則方格圖的大小記為$(n \times m)$。
2. 方格圖上的位置，第n列、第m行的位置記為$C(n,m)$。
3. 圖上位置第n列、第m行有石頭記為$C(n,m) = T$，沒石頭記為$C(n,m) = F$。
4. 在放石頭的限制下，考慮所有放石頭的情形，對於$(n \times m)$的方格圖，所有放的方法數記為$R(n \times m)$。

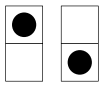
三、尋找規則－(n列的推法)

(一) 尋找規則－$(n \times 1)$放石頭方法數的通式

1. $R(1 \times 1) = 1$ 2. $R(2 \times 1) = 1 + 1 = 2$ 3. $R(3 \times 1) = 1 + 1 + 1 = 3$

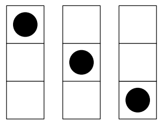
1種

圖6



1種 1種

圖7



1種 1種 1種

圖8

【觀察與發現】統整$R(n \times 1)$放石頭方法數於表2觀察發現數列〈a_n〉：1、2、3⋯⋯

表2：$R(n \times 1)$放石頭的方法數

方格圖	$R(1 \times 1)$	$R(2 \times 1)$	$R(3 \times 1)$
可放石頭數量	1	2	3

【通式推導】由觀察可發現，$R(n \times 1) = n$

【證明】因為放石頭的規則規定，在圖形上的任何一列都必須要放一個石頭，也只能放一個，所以當方格圖只有一列，那一列有幾格就可以有幾種擺放可能，由以上推論以及數據證明，推出$R(n \times 1) = n$。

定理一、$n \in N$，$R(n \times 1) = n$

(二)　尋找規則－$(n \times 2)$放石頭的方法數的通式

1. $R(1 \times 2) = 1$

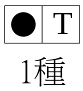


圖9

2. $R(2 \times 2) = 1 + 2 = 3$

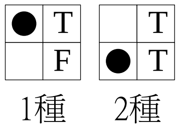


圖10

3. $R(3 \times 2) = 2 + 2 + 3 = 7$

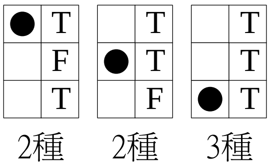


圖11

4. $R(4 \times 2) = 3 + 3 + 3 + 4 = 13$

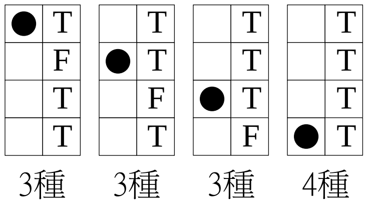


圖12

【觀察與發現】統整$R(n \times 2)$放石頭方法數於表3觀察發現數列〈a_n〉：

1、3、7、13……

表3：$R(n \times 2)$放石頭的方法數

$(n \times 2)$方格圖	$R(1 \times 2)$	$R(2 \times 2)$	$R(3 \times 2)$	$R(4 \times 2)$
可放石頭方法數	1	3	7	13

【通式推導】根據觀察發現數列〈a_n〉$= 1$、3、7、13 ...，本研究利用階差數列找出$R(n \times 2)$的通式。

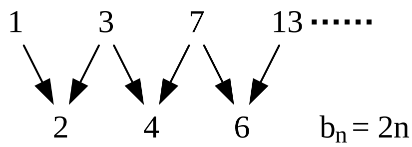
$R(1 \times 2) = 1$

$R(2 \times 2) = 3$

$R(3 \times 2) = 7$

$R(4 \times 2) = 13$

階差數列



$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \times \frac{n \times (n-1)}{2}$$

$$= n^2 - n + 1$$

【預測】：利用階差數列得知，$R(n \times 2) = n^2 - n + 1$，因此本研究猜想

$R(n \times 2) = n^2 - n + 1$，為了確保此通式正確性，本研究加以證明。

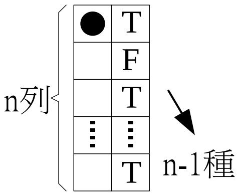


圖13

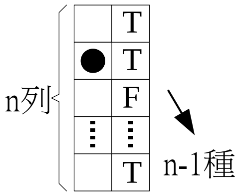


圖14

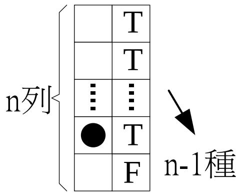


圖15

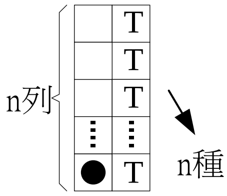


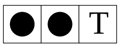
圖16

由(1×2)的圖形到(4×2)的圖形推演至$(n \times 2)$，如果第一行的石頭放在第一列$C(1,1)$，則在第二行共有$(n-1)$個位置能夠放石頭(如圖13)；如果第一行的石頭放在第二列$C(1,2)$，則在第二行共有$(n-1)$個位置可放石頭(如圖14)；如果第一行的石頭放在$(n-1)$列，則第二行共有$(n-1)$個位置放石頭(如圖15) ；如果第一行的石頭放在最後一列，則在第二行共有n個位置能夠放石頭(如圖16)。由以上可得$R(n \times 2)$的通式為$R(n \times 2) = (n-1)(n-1) + n$化簡後得$R(n \times 2) = n^2 - n + 1$。

定理二、$n \in N$，$R(n \times 2) = n^2 - n + 1$

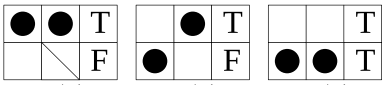
(三) 尋找規則－$(n \times 3)$放石頭方法數的通式

1. $R(1 \times 3) = 1$



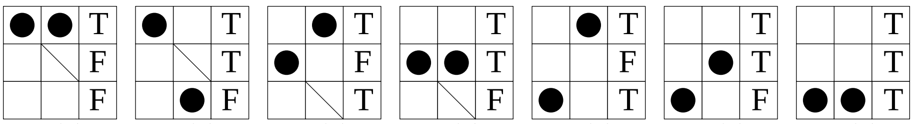
1種
圖17

2. $R(2 \times 3) = 1 + 1 + 2 = 4$



1種 1種 2種
圖18

3. $R(3 \times 3) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 14$



1種 2種 2種 2種 2種 2種 3種
圖19

4. $R(4 \times 3) = 2 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 36$

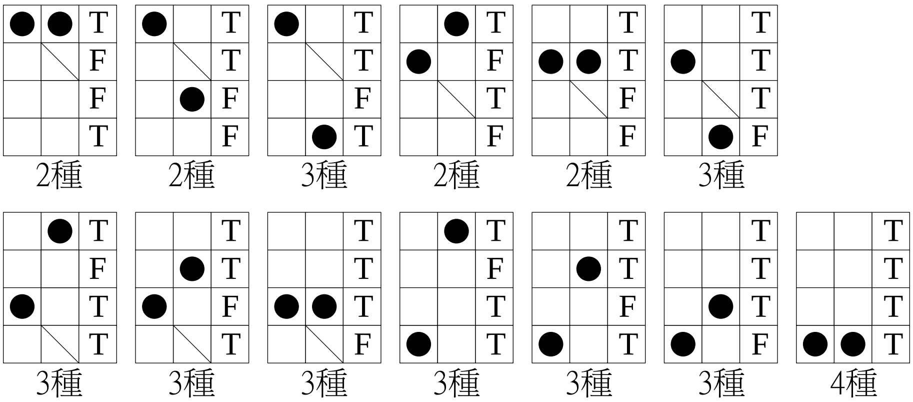


圖20

5. $R(5\times 3)=76$(詳見數學紀錄簿中)

【觀察與發現】統整$R(n\times 3)$放石頭方法數於表 4，經證明$R(n\times 1)=n$，$R(n\times 2)\ =n^2-n+1$推測$R(n\times 3)$等於n的 3 次多項式，利用牛頓插值定理推算通式。

表 4：$R(n\times 3)$放石頭的方法數

$(n\times 3)$方格圖	$R(1\times 3)$	$R(2\times 3)$	$R(3\times 3)$	$R(4\times 3)$	$R(5\times 3)$
可放石頭方法數	1	4	14	36	76

【通式推導】利用牛頓插值定理得出$R(n\times 3)$的通式

n	2	3	4	5
$f(n)$	4	14	36	76

$$\frac{14-4}{3-2}=10 \qquad \frac{36-14}{4-3}=22 \qquad \frac{76-36}{5-4}=40$$

$$\frac{22-10}{4-2}=\frac{12}{2}=6 \qquad \frac{40-22}{5-3}=\frac{18}{2}=9$$

$$\frac{9-6}{5-2}=1$$

$4+10(n-2)+6(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)$

$=4+10n-20+(n^2-5n+6)+(n^2-5n+6)(n-4)$

$=4+10n-20+6n^2-30n+36+n^3-4n^2-5n^2+20n+6n-24$

$=n^3-3n^2+6n-4$ (註：$n\geq 2$)

由牛頓插值定理得出$R(n\times 3)=n^3-3n^2+6n-4$

【證明】在$(n\times 3)$的方格圖中，以1×3的圖形到4×3圖形推演至$(n\times 3)$，將石頭放在$C(1,1)$，第二行的石頭放在除了$C(2,2)$之外都有$(n-2)$種可能(圖21)，而放在$C(n,2)$

有$(n-2)+1$種可能(圖22)($C(2,2)=F(n-1)$(圖23))，所以得出如果第一行的石頭放在$C(1,1)$，方法數共有$(n-1)(n-2)+1$種。而如果第一行的石頭放在$C(2,1)$也是一樣的情況$(n-1)(n-2)+1$。到了第一列的石頭放在$(n-1,1)$，第二行的石頭放在除了$C(n,1)$時，方法數都是$(n-1)$種(圖24)，而$C(n,2)$不能放$(n-1)$(圖25)，所以第一行的石頭如果放在$C(n-1,1)$，方法數總共有$(n-1)^2$種可能。到了第一行的石頭放在$C(n,1)$，在第二行中，第一列到第n列都可以放石頭(圖26)，而當第二行的石頭放在$C(1,2)$到$C(n-1,2)$，都可以有$(n-1)$種可能可以放(圖27)，而第二行的石頭放在$C(n,2)$，第三行時就有(n)種排法，所以在第一行的石頭如果放在$C(n,1)$，方法數共有$n(n-1)+1$種可能。以上的推論得知，$R(n\times 3)=1+n(n-1)+(n-1)^2+[(n-1)(n-2)+1](n-2)$化簡後得$n^3-3n^2+6n-4$，(通式在$n>1$時才成立，因為在推導通式時，過程中並沒有用到$R(1\times 3)$)。

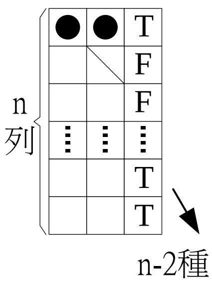


圖21

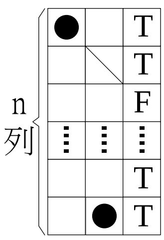


圖22

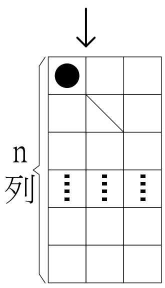


圖23

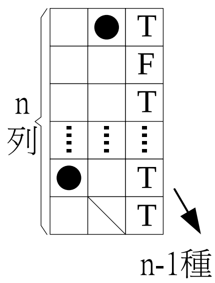


圖24

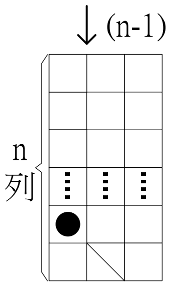


圖25

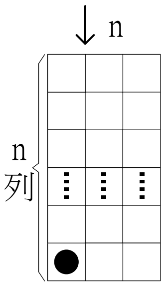


圖26

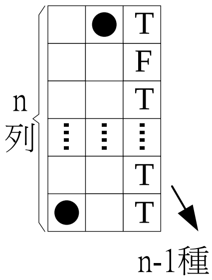
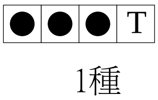


圖27

定理三、$n\in N$，$R(n\times 3)=n^3-3n^2+6n-4\ (n\geq 2)$，但$R(1\times 3)=1$

(四)　尋找規則－$(n\times 4)$放石頭方法數的通式

1. $R(1\times 4)=1$　　2. $R(2\times 4)=1+1+1+2=5$



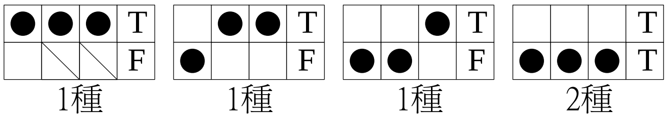


圖28　　　　圖29

3. $R(3\times 4)=1+2+2+1+2+2+2+1+2+2+2+2+2+3=26$

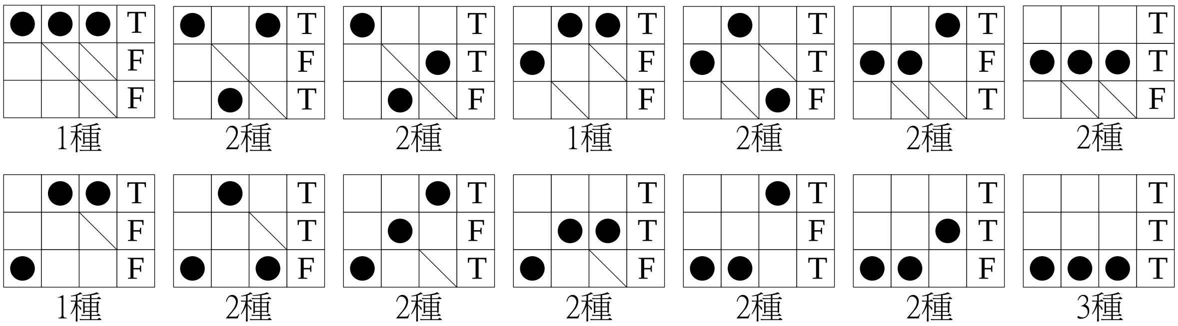


圖30

4. $R(4\times 4)=1+2+2+2+2+2+3+2+2+2+2+3+3+3+2+$

$2+3+2+2+3+3+3+3+2+2+3+2+2+3+3+3+3+3+3+$

$3+3+4=90$

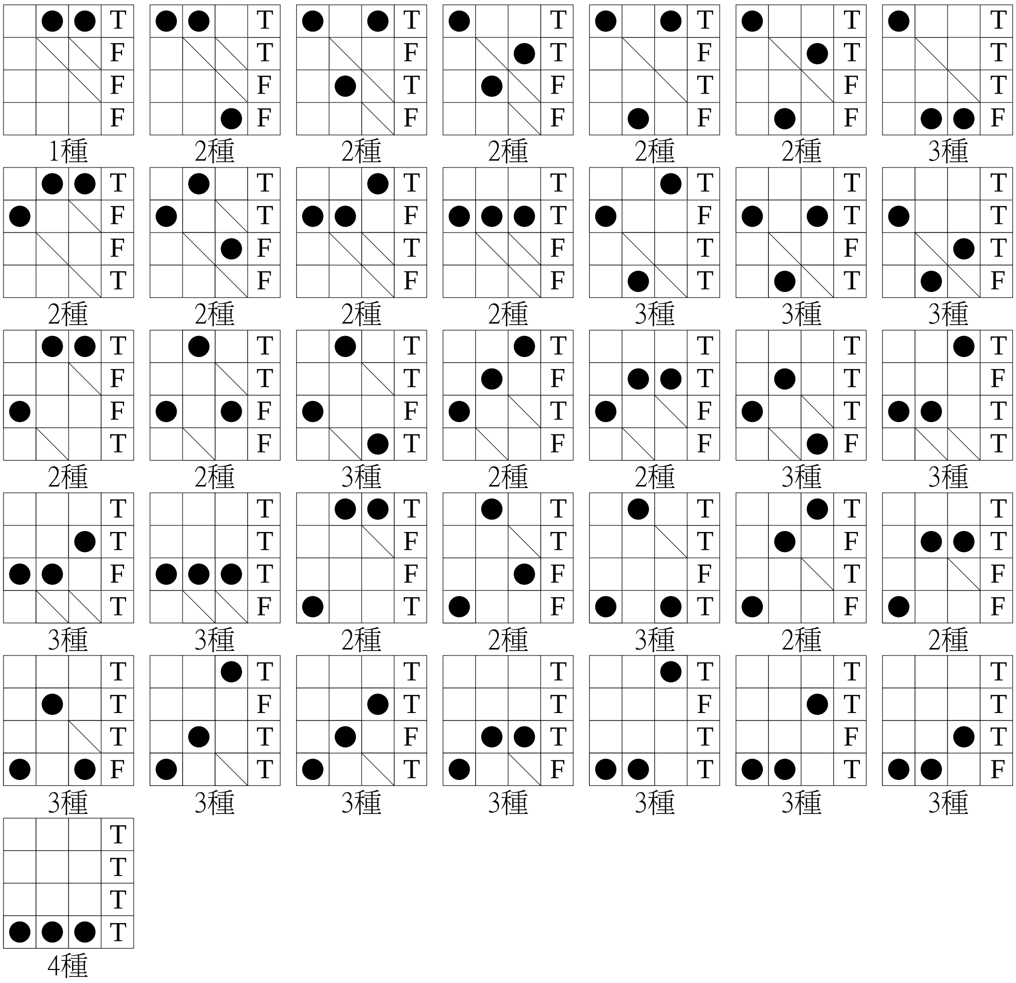


圖31

【觀察與發現】統整$R(n\times 4)$放石頭方法數於表5、表6，經證明$R(n\times 1)=$

n，$R(n \times 2)\ = n^2 - n + 1$，$R(n \times 3) = n^3 - 3n^2 + 6n - 4$推測$R(n \times 4)$等於$n$的4次多項式，利用牛頓插值定理推算通式。

表5：$R(n \times 4)$放石頭的方法數-1

$(n \times 4)$方格圖	$R(1 \times 4)$	$R(2 \times 4)$	$R(3 \times 4)$	$R(4 \times 4)$
可放石頭方法數	1	5	26	90

表6：$R(n \times 4)$放石頭的方法數-2

$(n \times 4)$方格圖	$R(5 \times 4)$	$R(6 \times 4)$	$R(7 \times 4)$	$R(8 \times 4)$
可放石頭方法數	246	560	1146	2106

在推導$R(n \times 3)$的通式時發現，推導時無法使用$n = 1$的數據，而本研究在推導$R(n \times 4)$的通式時也發現，$n = 1$、$n = 2$的數據也是無法使用的。(詳見數學紀錄簿)

【通式推導】利用牛頓插值定理得出$R(n \times 4)$的通式

n	3	4	5	6	7
$f(n)$	26	90	246	566	1146

$$\frac{90-26}{4-3} = 64 \qquad \frac{246-90}{5-4} = 156 \qquad \frac{566-246}{6-5} = 320 \qquad \frac{1146-566}{7-6} = 580$$

$$\frac{156-64}{5-3} = 46 \qquad \frac{320-156}{6-4} = 82 \qquad \frac{580-320}{7-5} = 130$$

$$\frac{82-46}{6-3} = 12 \qquad \frac{130-82}{7-4} = 16$$

$$\frac{16-12}{7-3} = 1$$

$26 + 64(n-3) + 46(n-3) + (n-4) + 12(n-3)(n-4)(n-5) + (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$

$= 26 + 64n - 192 + 46(n^2 - 7n + 12) + 12(n^2 - 7n + 12)(n-5) + (n^2 - 9n + 18)(n^2 - 9n + 20)$

$= -166 + 64n + 46n^2 - 322n + 552 + 12(n^3 - 7n^2 + 12n - 5n^2 + 35n - 60) + (n^2 - 9n)^2 + 38(n^2 - 9n) + 360$

$= -166 + 64n + 46n^2 - 322n + 552 + 12n^3 - 84n^2 + 144n - 60n^2 + 420n - 720 + n^4 - 18n^3 + 81n^2 + 38n^2 - 342n + 360$

$= n^4 + (12n^3\text{-}18n^3) + (46n^2\text{-}84n^2\text{-}60n^2\text{+}81n^2\text{+}38n^2) + (64n\text{-}322n\text{+}144n\text{+}420n\text{-}342n) + (\text{-}166\text{+}552\text{-}720\text{+}360)$

$= n^4 - 6n^3 + 21n^2 - 36n + 26$

定理四、$n \in N$，$R(n \times 4) = n^4 - 6n^3 + 21n^2 - 36n + 26\ (n \geq 3)$，
但$R(1 \times 4) = 1$，$R(2 \times 4) = 5$

推測：
1. $n \in N$，$R(n \times 5)$為n的五次多項式。
2. $n \in N$，$R(n \times m)$，m必為n的m次多項式。

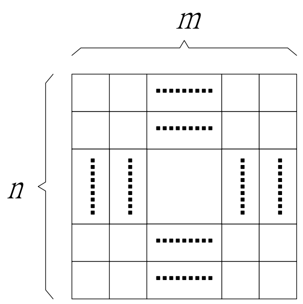
四、m行推法解釋

(一)　符號定義

n：直排格數

m：橫排格數

$n \times m$：在$n \times m$範圍內擺石頭的方法數



$n(1) \times m$：每行有n格，第1行由上往下數第1格開始到第m行範圍內的放石頭方法

$n(n) \times m$：每行有n格，第1行由上往下數第n格開始到第m行範圍內的放石頭方法

圖32

第1格開始到第m行範圍 ~ 第n格開始到第m行範圍

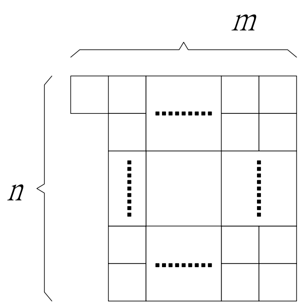


圖33

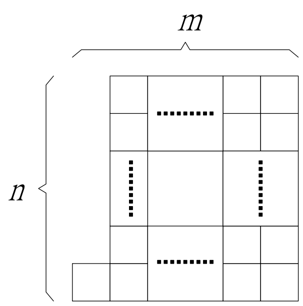


圖34

(二)　推法解說

利用表格方式，找到一個規律，如要求$n \times m$，可將其分為n層，第1層是從第一列第一個延伸出的擺法設為$n(1)$，第2層是從第一列第二個延伸出的擺法設為$n(2)$等，以此類推，可製作出一個表格，若想知道$n \times m$便將第m行的$n(1)$~$n(n)$加起來就行。例$(2 \times 3) = 1 + 3 = 4$

表7

	1(1)	2(1)	2(2)
第 1 行	1	1	1
第 2 行	1	1	2
第 3 行	1	1	3
第 4 行	1	1	4
第 5 行	1	1	5
第 6 行	1	1	6

要使用這個方式，首先要完成表格，本研究使用的推法是將各層編號，第一層為1，第二層2，並以顏色區分，以2×4為例，如表8：

表8

1	1	1	1
2	2	2	2

接著將各層單獨拿出來畫圖：

2(1)

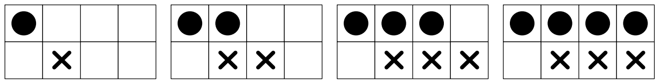


圖35

2(2)

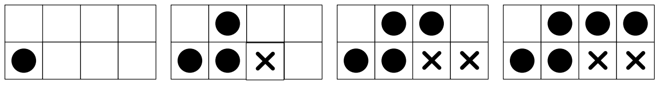


圖36

從這裡發現一個規律，將數字代號帶入圖片中。

2(1)

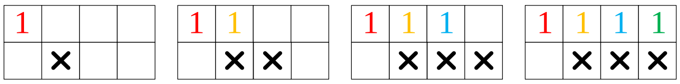


圖37

2(2)

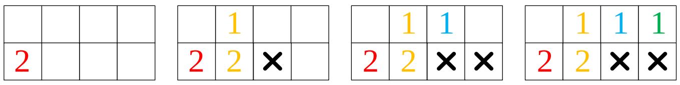


圖38

可發現「前一列a的位置有放石頭時其包含的下一列$a+1$的位置不能放石頭」

五、尋找規則－(m行的推法)

(一)　($1 \times m$)放石頭方法數的通式

1(1)

1	1	1	1	1	1

圖39

【觀察與發現】將各格代表的數字編號填上去，由於1只有1層，不會有不合的地方出現。

表9

m	1	2	3	4	5	6
1(1)	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

【通式推導與證明】　表10$(1\times m)$放石頭的方法數

1 \ m	1	2	3	4	5	6	……	m
1(1)	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

由表10可得出$1\times m$規律：$R(1\times m)=1$

定理五、$m\in N$，$R(1\times m)=1$

(二)　$(2\times m)$放石頭方法數的通式

2(1)

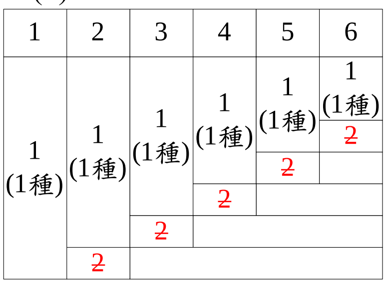


圖 40

表 11　$R(2\times m)$放石頭的方法數

2 \ m	1	2	3	4	5	6
2(1)	1	1	1	1	1	1
2(2)	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7

2(2)

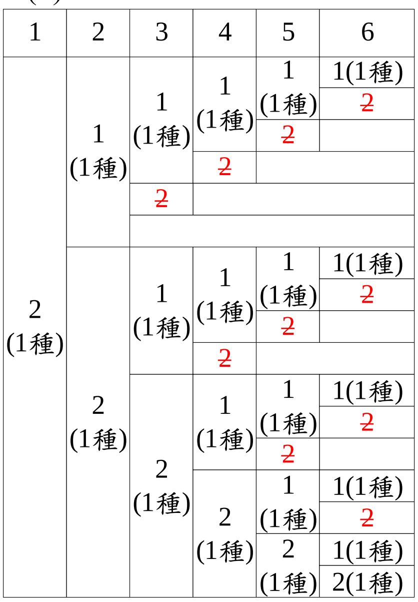


圖41

【觀察與發現】

首先將第一列第一個編號1，其後接的兩格為兩種可能的擺法編號1、2，第2種可能性因規則原因無法成立故以~~2~~標示，且~~2~~後的擺法也皆無法成立故空白。

以此類推，黑色數字後方格子填上可能的擺法編號且依規則將不可能的擺法編號標以紅色並劃掉，在被劃掉的數字後全以空白表示。將各列未

被劃掉的數字個數計算出。可得：

2(1)規律為：　　　　　　　　表12

m	1	2	3	4	5	6
2(1)	1	1	1	1	1	1

2(2)規律為：　　　　　　　　表13

m	1	2	3	4	5	6
2(2)	1	2	3	4	5	6

【通式推導】

$(2\times m)$

$$R(2\times 1)=2(1)\times 1+2(2)\times 1=1+1=2$$

$$R(2\times 2)=2(1)\times 2+2(2)\times 2=1+2=3$$

$$R(2\times 3)=2(1)\times 3+2(2)\times 3=1+3=4$$

$$\vdots$$

$$R(2\times m)=2(1)\times m+2(2)\times m=1+m=1+m$$

【證明】

2(1)

由第一行第1格出發，其後接的兩格1、2，1可以放石頭，2不行，接著不斷重複，1後必定為1、2，2必定不可放。由此得知：「1的後面接1、2，2不可放石頭」為2(1)的循環。因此可知道，不管m為何，其擺法皆只有一種。

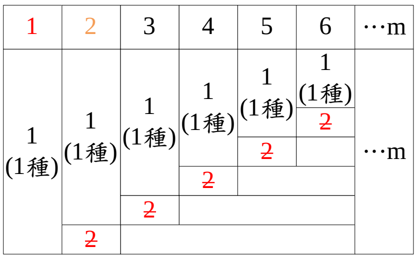


圖42 2(1)

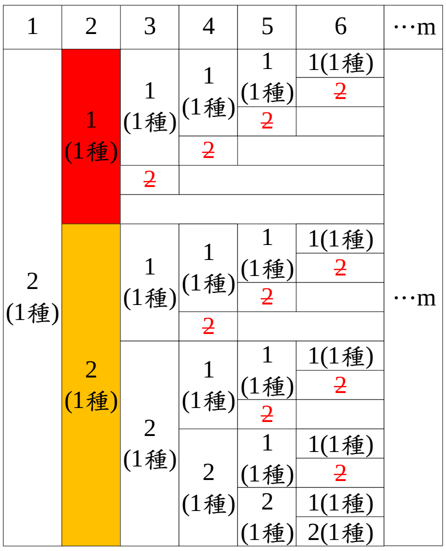


圖43 2(2)

2(2)

由第一行的第2格延伸排法，2後1、2，1後再接1、~~2~~，~~2~~不可放，可找出規律「1的後面接1、2，2不可放石頭」2後則再次接1、2……不斷重複2(2)的表格必為「2的後面必接1，2，1、2皆可放石頭」且「1的後面接1、~~2~~，~~2~~不可放石頭」因此可得知，2(2)的排法為前1行的排法數+1(每一行只有一個2，其餘都是1，2後有1、2，所以+1，其餘1後只有1，因此2(2)為前1行的排法數+1)恰好等於m之值，所以$R(2\times m)=2(1)+2(2)=1+m$。

定理六、$m\in N$，$R(2\times m)=1+m$

(三)　$(3\times m)$放石頭方法數的通式

前面的規則:「前一列有a時其包含的下一列$a+1$的位置不能放石頭」其實並不完整，本研究將剛剛發現的規則統整，歸納出以下規則： 前一列a位置有放石頭時，其包含的下一列$a+1$位置不可放石頭，其包含的下下列$a+2$位置亦不可放石頭……，以此類推。

【觀察與發現】

統計3(1)的資訊，得表格如下：　　表14

m	1	2	3	4	5	6
3(1)	1	2	3	5	8	13

觀察規律：

發現3(1)具有費氏數列規則：1、2、3、5、8、13……，黃色部分為兩個數列相同部分，推斷出一個可能：將3(1)的數列設為A_1～A_m

$A_1=F_1$、$A_2=F_2$、$A_3=F_3$、$A_4=F_4$、$A_5=F_5$、……以此類推。

3(1)的規律：$3(1)\times m=F_m$

統計3(2)的資訊，得表格如下：　　表15

m	1	2	3	4	5	6
3(2)	1	2	4	7	12	20

可推出3(2)規律為：前兩項為1、2，接下來每一項皆為其「前2項加總+1的數值」。

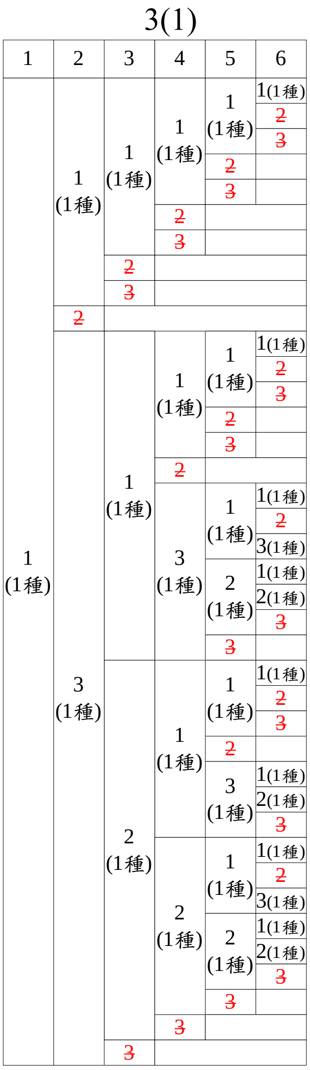


圖44

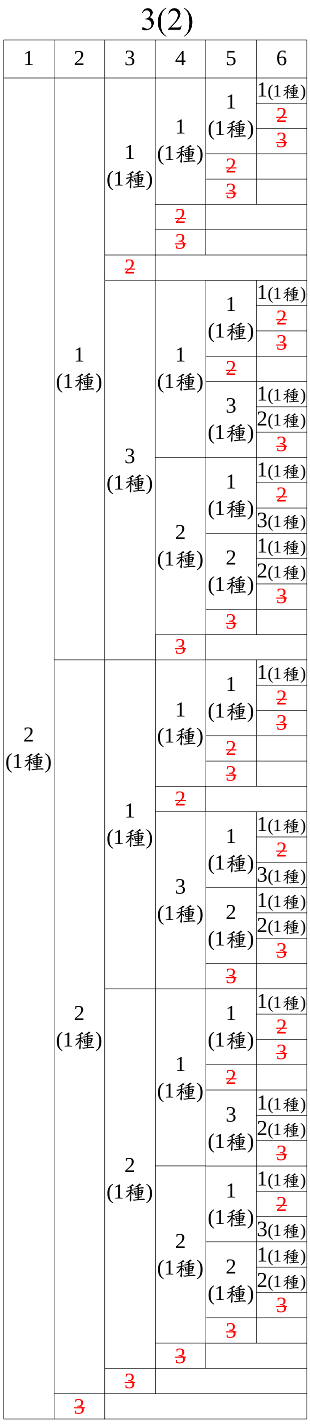


圖45

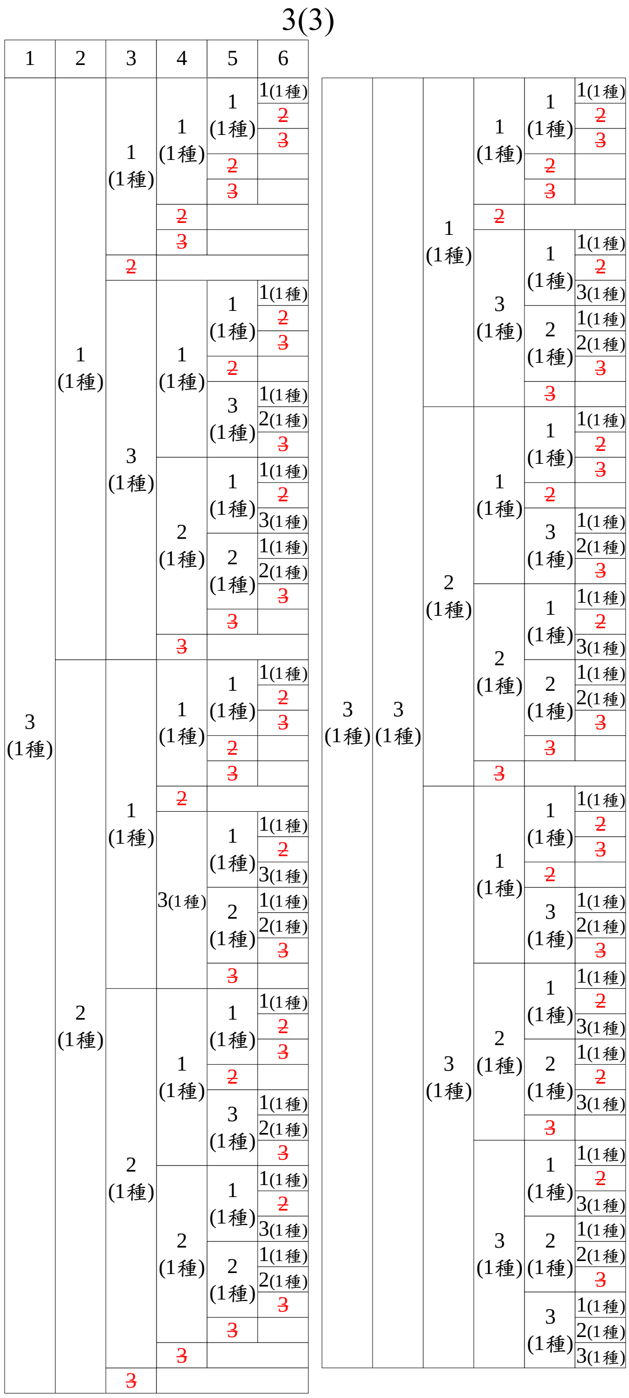


圖46

ex：

$3(2)\times 3 = 1 + 2 + 1 = 4$；$3(2)\times 5 = 4 + 7 + 1 = 12$【除第1、2項外】

$3(2)\times m = 3(2)\times(m-1) + 3(2)\times(m-2) + 1$

統計3(3)的資訊，得表格如下：　　表16

m	1	2	3	4	5	6
3(3)	1	3	7	14	26	46

觀察上表，找到3(3)的規律為：

$3(3)\times m = 3(3)\times(m-1) + 3(3)\times(m-2) + m$【$3(3)\times 1$、$3(3)\times 2$例外】

將3(1)～3(3)資料統計，將$3(1)\times m$～$3(3)\times m$加總得出$3\times m$之數列

表17$(3\times m)$放石頭方法數

m	1	2	3	4	5	6
3(1)	1	2	3	5	8	13
3(2)	1	2	4	7	12	20
3(3)	1	3	7	14	26	46
3	3	7	14	26	46	79

觀察表17，發現可推斷$3(3)\times m = 3\times(m-1)$

為了保險，本研究往回檢查推數值的過程，發現

將3(1)、3(2)、3(3)各擷取一部份並縮小，可拼湊出3(3)的一部分

3(1)

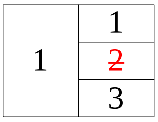


圖47

3(2)

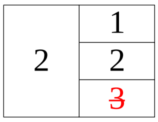


圖48

3(3)

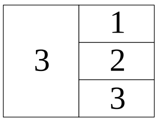


圖49

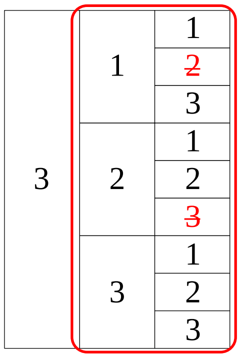


圖 50

圈起來的部分恰好是上面三個表格組成的部分

$3\times m = 3(1)\times m + 3(2)\times m + 3(3)\times m$

從$3(3)\times m$的第2列開始，剛好對應的是$3\times m$的第1列，符合之前推斷的

$3(3)\times m = 3\times(m-1)$

【通式推導】

根據費式數列的線性疊合，得到的通式為$a_m = p(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{m-1} + q(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{m-1}$

<u>3(1)通式</u>

3(1)：1，2，3，5，8，13⋯⋯　起始條件$a_1=1$，$a_2=2$代入通式

$$1 = p(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + q(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 = p+q \qquad (1)$$

$$2 = p(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + q(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\sqrt{5} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1)式代(2)式，再化簡為 $p-q=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………(3)

解聯立(1)、(3)式，可得 $p=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ ，$q=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}$

$$a_m=(\frac{5+3\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{m-1}+(\frac{5-3\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{m-1}$$

3(2)通式

3(2) ∶1 ，2 ，4 ，7 ，12 ，20……

$$(a_{m+2}+1)=(a_{m+1}+1)+(a_m+1)$$

2 ，3 ，5 ，8 ，13 ，21

用語3(1)同樣方法得到： $p=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$ ，$q=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$

$$a_m=(\frac{5-2\sqrt{5}}{5})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{m-1}+(\frac{5+2\sqrt{5}}{5})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{m-1}-1$$

3(3)規律(依下表18)

3(3)：1 ，3 ，7 ，14 ，26……

3(1) + 3(2) + 3(3)的第一項等於3(3)的第二項：$1+1+1=3$

3(1) + 3(2) + 3(3)的第二項等於3(3)的第三項：$2+2+3=7$

可得$3(3)\times m=3(1)\times(m-1)+3(2)\times(m-1)+3(3)\times(m-1)$

表18

m	1	2	3	4	5	6
3(1)	1	2	3	5	8	13
3(2)	1	2	4	7	12	20
3(3)	1	3	7	14	26	46
3	3	7	14	26	46	79

$3\times m$的通式

求解$F_m=F_{m-1}+F_{m-2}+m+1$,邊界條件$F_1=3,F_2=7$

$$F_m=F_{m-1}+F_{m-2}+m+1$$

令特解$F_m{}^{(p)}=Am+B$ 則可得

$$A_m+B=A(m-1)+B+A(m-2)+B+m+1$$

上式化簡為$Am+B=Am-A+B+Am-2A+B+m+1$

$-Am+3A-B=m+1$

$\because -Am=m \quad \therefore A=-1$

$3A-B=1$

將$A=-1$代入$3A-B=1 \qquad \therefore B=-4$

利利用特徵方程式$r^2-r-1=0$

$r=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

可得$r_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；$r_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

綜合$F_m{}^{(p)}$和$F_m{}^{(h)}$得到

$$F_m=F_m{}^{(p)}+F_m{}^{(h)}=C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m+C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^m-m-4$$

$F_1=3, F_2=7$

$$F_m=C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m+C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^m-m-4$$

$$\begin{cases} 8=\dfrac{1}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\sqrt{5}}{2}(C_1-C_2)\ldots.(1) \\ 13=\dfrac{3}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\sqrt{5}}{2}(C_1-C_2)\ldots.(2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$； $5=C_1+C_2$；$C_1=5-C_2\ldots.(3)$

利用代入消去法將C_1代入(1)式

$$8=\frac{1}{2}(5-C_2+C_2)+\frac{\sqrt{5}}{2}(5-C_2-C_2)=\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{5}}{2}-\sqrt{5}C_2$$

$$\frac{11}{2}-\frac{5\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}C_2$$

$$C_2=\frac{5}{2}-\frac{11\sqrt{5}}{10}$$

$$C_1=5-C_2=5-\left(\frac{5}{2}-\frac{11\sqrt{5}}{10}\right)=\frac{10}{2}-\frac{5}{2}+\frac{11\sqrt{5}}{10}=\frac{5}{2}+\frac{11\sqrt{5}}{10}$$

$$F_m=(\frac{5}{2}+\frac{11\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m+(\frac{5}{2}-\frac{11\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^m-m-4$$

【證明】

3(1) (圖51)

將各行、各數字以顏色區分，1後可接1、3(2不可接)，1後便都只可接1，3後可接1、2(3不可接)，1後可接1、3(2不可接)，且其後數字、排序、表格結構皆與1後相同(顏色不同)，2後可接1、2(3不可接)，1後可接1、3(2不可接)，且其後數字、排序、表格結構皆與1後相同(顏色不同)，2後可接1、2(3不可接)，且其後數字、排序、表格結構皆與2後相同(顏色不同)，依上述可會繪製出3(1)的循環圖(圖52)：

依圖52可知每當經過1、2、3時便會多一分枝(擺放方式)且3延伸的數=2延伸的數，可將圖更改為圖53，並可依此再推算出圖54，圖中可知因為從第3層開始，組成的方塊為前兩層的方塊，且1後必為1；3後必為3、1；1後必為1、3。所以除第1、2層以外，每層都為其前2層所組成，因此$3(1)\times m=3(1)\times(m-1)+\ 3(1)\times(m-2)$也等於$3(1)\times m=F_{m+1}$

3(2)(請參照圖55)

將各行、各數字以顏色區分，2後可接1、2(3不可接)。其後數字、排序、表格結構皆與3(1)的2後相同(顏色不同)，可將3(2)視為是從3(1)的2開始，規律與其相同，可將3(2)的規律畫成圖56，可將3替換成2便可推算出圖57。

依圖可知，若將最左邊的白框1省略，剩下的便會是由其前兩層綜合而成，因此3(2)的公式為前兩層加總再加1(白框1)也就是：

$3(2)\times m=3(2)\times(m-1)+\ 3(2)\times(m-2)+1$

3(3)

$3(3)\times m$就是由圖58圈起來的部份：由$3(1)\times 2$、$3(2)\times 2$、$3(3)\times 2$組成。因此3(3)公式為：

$3(3)\times m=3\times(m-1)$

$$=3(1)\times(m-1)+\ 3(2)\times(m-1)+\ 3(3)\times(m-1)$$

定理七、$m \in N$，$R(3 \times m) = \left(\frac{5}{2} + \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{5}{2} - \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m - m - 4$

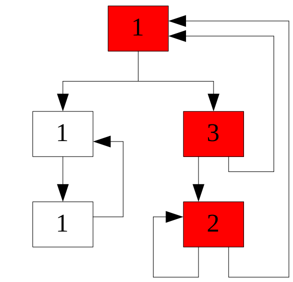


圖52

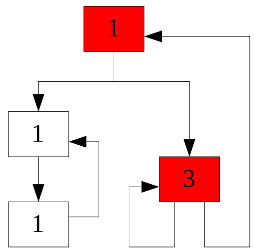


圖53

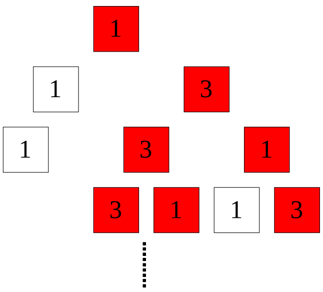


圖54

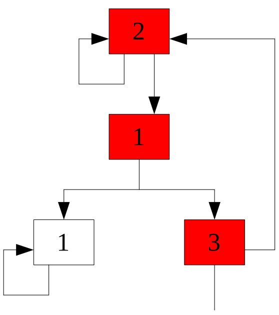


圖56

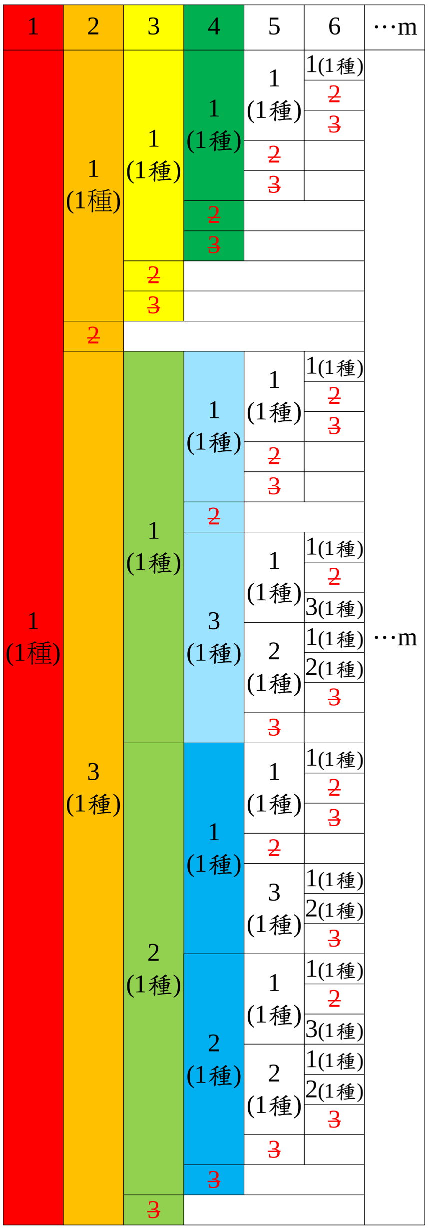


圖51

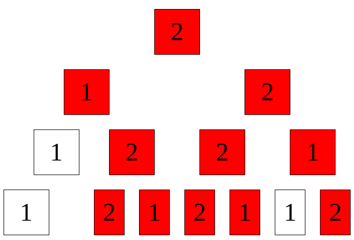


圖57

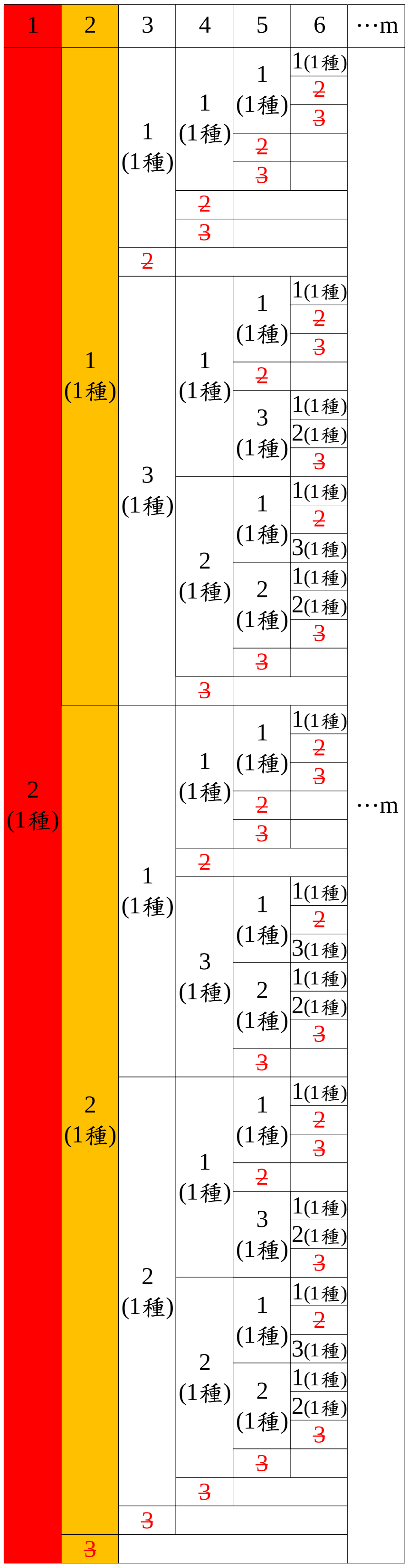


圖55

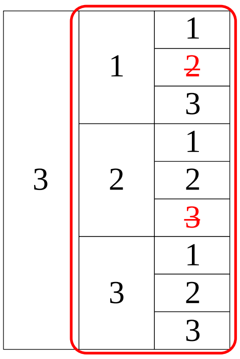


圖58

(四)　$(4 \times m)$放石頭的方法數

(方法數推算詳於數學紀錄本)

表19$(4 \times m)$放石頭的方法數

m	1	2	3	4	5	6
4(1)=a_m	1	3	7	14	30	62
4(2)=b_m	1	3	7	17	38	82
4(3)=c_m	1	3	9	23	54	122
4(4)=d_m	1	4	13	36	90	212
4	4	13	36	90	212	478

$(4 \times m)$的遞迴式

$$\begin{cases} a_m = b_{m-1} + (b_{m-1} - c_{m-2}) + (b_{m-2} - c_{m-3} + 1) & m \geq 4 \\ b_m = a_{m-2} + a_{m-1} + b_{m-1} & m \geq 3 \\ c_m = a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1} & m \geq 2 \\ d_m = a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1} + d_{m-1} & m \geq 2 \end{cases}$$

發現遞迴式$b_m = a_{m-2} + a_{m-1} + b_{m-1}$　$(m \geqq 3)$　亦適用在$(n \times m)$上的$n(n-2) \times m$

六、$R(n \times m)$通式推導－m行部分

參考表20，以黑色部分為一個小統整，分別為n=1~$n = 8$各層，各層皆分有$n(1)$~$n(n)$行數據及黑色部分的小統整$(n \times m)$。整理出此表，可發現一些規律：

(一)　彩色的部分，可看到其是一個倒著的階梯往下一層減少一格，並從每個$n(n)$為起始點，每一格都會和那一種顏色的那一列最上方的數據相等，且從1(1)開始的階梯會是3格，2(2)是4格，依此類推。

表20

1(1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2(1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2(2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3(1)	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
3(2)	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376	609	986	1596
3(3)	1	3	7	14	26	46	79	133	221	364	596	972	1581	2567	4163
3	3	7	14	26	46	79	133	221	364	596	972	1581	2567	4163	6746
4(1)	1	3	7	14	30	62	127	257	515						
4(2)	1	3	7	17	38	82	174	363	747	1519					
4(3)	1	3	9	23	54	122	266	567	1187	2449					
4(4)	1	4	13	36	90	212	478	1045	2232	4681					
4	4	13	36	90	212	478	1045	2232	4681	8649	0	0	0	0	0
5(1)	1	4	13	36	90	238	609								
5(2)	1	4	13	36	104	282									
5(3)	1	4	13	43	128	358	968								
5(4)	1	4	16	55	170	492	1370								
5(5)	1	5	21	76	246	738	2108								
5	5	21	76	246	738	2108									
6(1)	1	5	21	76	246	738									
6(2)	1	5	21	76	246	828									
6(3)	1	5	21	76	282	968									
6(4)	1	5	21	89	338	1188	3968								
6(5)	1	5	25	109	426	1538	5260								
6(6)	1	6	31	140	566	2104	7364	16592							
6	6	31	140	566	2104	7364	16592								
7(1)	1	6	31	140	566	2104	7364								
7(2)	1	6	31	140	566	2104									
7(3)	1	6	31	140	566	2350									
7(4)	1	6	31	140	642	2708									
7(5)	1	6	31	161	752	3232	12498								
7(6)	1	6	36	191	912	4004	16502								
7(7)	1	7	43	234	1146	5150	21652								
7	7	43	234	1146	5150	21652									
8(1)	1	7	43	234	1146	5150	21134								
8(2)	1	7	43	234	1146	5150	21134								
8(3)	1	7	43	234	1146	5150									
8(4)	1	7	43	234	1146										
8(5)	1	7	43	234											
8(6)	1	7	43	265	1478										
8(7)	1	7	49	307	1742										
8(8)	1	8	57	364	2106										
8	8	57	364	2106											

(二)　發現每一個$n(1)$~$n(n)$的倒數行數一樣時，規律也會相同(目前只發現到倒數第3行)

如：
$$n(n)\times m = n(n)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$$
$$n(n-1)\times m = n(n-1)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$$
$$n(n-3)\times m = n(n-3)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$$
$$+n(1)\times(m-2)$$

七、$R(n\times m)$通式推導－n列部分

(一)　推導方式

為了要推導$R(n\times m)$的通式，本研究使用另一種方式來推導一般式。以$R(n\times 3)$舉例，本研究將放在第一列的石頭記為「1」、第二列的記為「2」、第三列的記為「3」……。在$R(3\times 3)$的圖形中第一行可放的位置分別為第一列、第二列、第三列在圖中記為「1 2 3」(如圖59)。

1	2	3

圖59

1	2	3
1　3	1　2	1 2 3

圖60

當第一行的石頭放在第一列時，在第二行可放石頭的位置分別有第一列和第三列，在圖59中「1」的下方記「1 3」。而當第一行的石頭放在第二列時，在第二行可放石頭的位置則有第一列和第二列，在圖59中「2」下方記「1 2」。而第一行的石頭放在第三列時，在第二行的第一列、第二列、第三列都可以放，

在圖59中「3」下方記「1 2 3」(如圖60)。

當本研究將第一行的石頭放在第一列、第二行的石頭放在第一列時，在最後一行總共有1種位置可以放石頭，在表格中記為「1」；當第一行的石頭放在第一列、第二行的石頭放在第二列時，在最後一行總共會有2種位置可以放石頭，在表格中記為「2」。將$R(3\times 3)$的方格圖中的在最後一行的可能性以同樣的方式填入表格中(如圖61)，將圖中的數值加總為(3×3)方格圖中可放石頭的方法數$(1+2)+(2+2)+(2+2+3)=14$種。

1	2	2	2	2	2	3	

圖61

2	2	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4

圖62

接下來本研究用同樣的方法作出(4×3)方格圖中可放石頭方法數$(2+2+3)+(2+2+3)+(3+3+3)+(3+3+3+4)=36$，(如圖62)。

觀察圖61和圖62，一個格子稱為方格，由粗線框起來的稱為區塊。鋪黃底方格中的值，較左方區塊相同位置方格中的值多1；而鋪紅底的方格，是左方區塊所沒有的，也就是這個區塊才多出的方格。本研究觀察到：

1. 圖61中的第一個區塊和圖62中的第一個和第二個區塊中的值會等於$R((n-1)\times(m-1))$的值，也就是$R(3\times 3)$第一區塊，總合為$(n-1)(n-2)+1=n^2-3n+3$。
2. 圖61的第二個區塊中有一個方格比第一區塊中的相同位置的方格多1，而圖62的第三個區塊中有一兩個方格比第二區塊中的相同位置的方格多1，也就是$R(n\times 3)$的方格圖中，第$(n-1)$個區塊中有$(n-2)$個方格的值會比第$(n-2)$個區塊相同位置的方格的值多1。
3. 圖61和圖62的最後一個區塊都會比前一區塊多出一個方格，且在$R(n\times 3)$的方格圖中此方格中的值為(n)。

有了以上發現後，可以推導$R(n\times 3)$的一般式，採疊加的方式(如圖63)，將個各式子乘上相對應的係數後得$R(n\times 3)$的一般式為$R(n\times 3)=n(n^2-3n+3)+2(n-2)+n$。

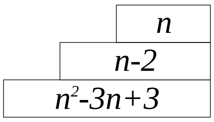


圖63

這個推導通式的方法，可以讓推通式的速度提升許多，在推導$R(n \times m)$通式時，只要推出$R(m \times m)$和$R((m+1) \times m)$的數值就好，例如：推$R(n \times 13)$的通式時，只要推$R(13 \times 13)$和$R(14 \times 13)$的數據，而之前如要運用牛頓插值定理必須要推$R(12 \times 13)$、$R(13 \times 13)$、......、$R(26 \times 13)$共14組數據，所以這種推法可以省下許多時間。

(二)　尋找規則－$(n \times 5)$放石頭的方法數

本研究利用以上方法作出$R(6 \times 5)$、$R(7 \times 5)$的圖(圖64、圖65)和表格(表21至表25、表26至表30)，並求出數據(表31、表32)。

表21

第一、二區塊

2	2	3	3	3
2	2	3	3	3
3	3	3	3	3
2	2	3	4	4
2	2	3	3	3
3	3	3	3	3
3	3	3	3	3
3	3	3	4	4
3	3	3	3	3
3	3	4	3	3
3	3	4	3	3
3	3	4	4	4
4	4	4	4	4
			4	4
			4	4
			4	4
				4
				4
				4
				4
				5

表22

第三區塊

3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
			4	4
			4	4
			4	4
				5
				5
				5
				5
				5

表23

第四區塊

3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
4	4	4	4	4
3	3	3	4	5
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
4	4	4	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	5
3	3	3	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	5
4	4	4	4	4
				4
				4
				4
				5
				5
				5
				5
				5
				5

表24

第五區塊

3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
4	4	4	4	4
3	3	3	4	5
3	3	3	4	4
3	3	3	4	4
4	4	4	4	4
3	3	3	4	4
3	3	3	4	5
3	3	3	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	5
4	4	4	4	4
4	4	4	5	4
4	4	4	5	4
4	4	4	5	4
4	4	4	5	5
5	5	5	5	5
				5
				5
				5
				5

表25

第六區塊

3	3	3	4	4	4
3	3	3	4	4	4
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	5	5
3	3	3	4	4	4
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4
3	3	3	4	5	5
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5
4	4	4	4	4	4
4	4	4	5	4	4
4	4	4	5	4	4
4	4	4	5	4	4
4	4	4	5	5	5
5	5	5	5	5	5
				5	5
				5	5
				5	5
				5	5
					5
					5
					5
					5
					5
					6

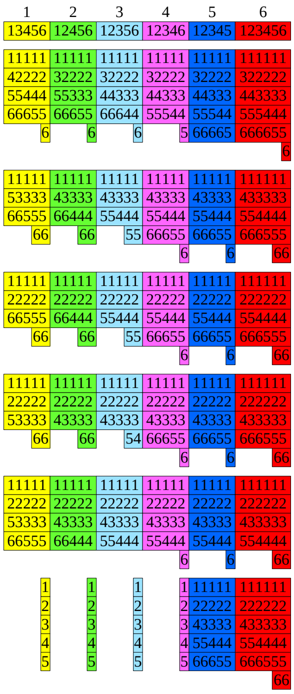


圖64

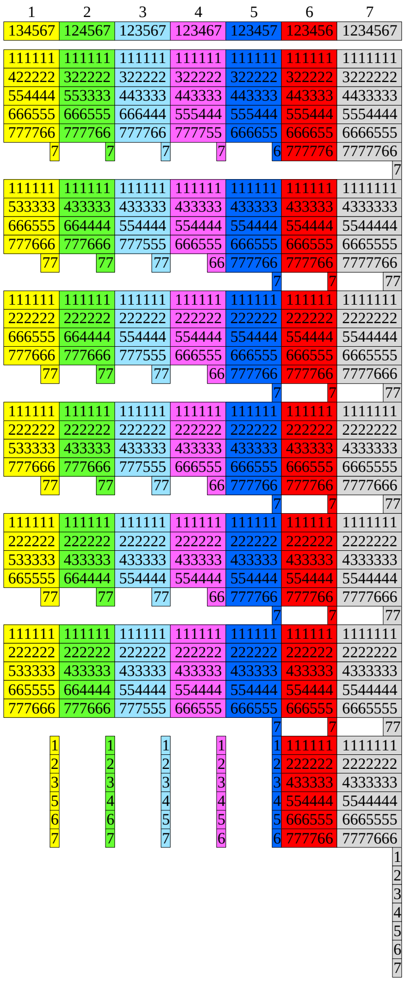


圖65

表26　表27　表28　表29　表30

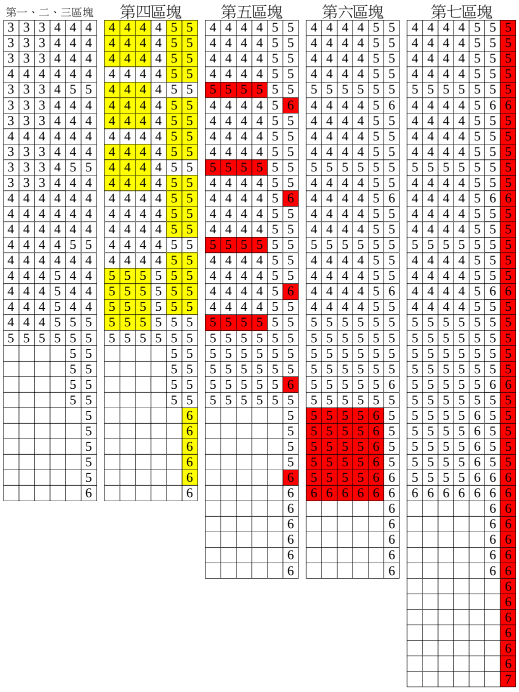


表31：$R(6\times 5)$數據

6(1)、6(2)	6(3)	6(4)	6(5)	6(6)
246	282	338	426	566

表32：$R(7\times 5)$數據

7(1)、7(2)　、7(3)	7(4)	7(5)	7(6)	7(7)
566	642	752	912	1146

1. 表21和表26：這兩個表的值加總分別為246和566，也分別是$R(5\times 4)$和$R(6\times 4)$的數值，也就是$n^4-10n^3+45n^2-100n+90$。
2. 表22和表27：這兩個表的值加總後分別為282和642，相較於前一個區塊多出　$[(n-4)^3+(n-4)(n-3)+2(n-3)^2+(n-2)]+3[(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]=(n^3-9n^2+30n-36)$
3. 表23和表28：這兩個表的值加總後分別為338和752，相較於前一個區塊多出$[(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]=(n^3-7n^2+18n-16)$
4. 表24和表29：這兩個表的值加總後分別為426和912，相較於前一個區塊多出$[(n-3)(n-2)(n-1)+(n-3)+(n-1)^2]=(n^3-5n^2+10n-8)$
5. 表25和表30：這兩個表中的值相加後分別的為566和1146，相較於前一個區塊多出$\{(n-2)[(n-2)(n-1)+1]+(n-1)^2+n(n-1)+1\}=(n^3-3n^2+6n-4)$

6．將以上算式乘上相對應的係數(如圖66)

n^3-3n^2+6n-4	$\times 1$
$n^3-5n^2+10n-8$	$\times 2$
$n^3-7n^2+18n-16$	$\times 3$
$n^3-9n^2+30n-36$	$\times 4$
$n^4-10n^3+45n^2-100n+90$	$\times n$

圖 66

7．得 出 $R(n\times 5)=n(n^4-10n^3+45n^2-100n+90)+4[(n-4)^3+(n-4)(n-3)+2(n-3)^2+(n-2)]+3[(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]+2[(n-3)(n-2)(n-1)+(n-3)+(n-1)^2]+(n^3-3n^2+6n-4)=n^5-10n^4+55n^3-170n^2+290n-212$

> 定理八、$n\in N$，$R(n\times 5)=n^5-10n^4+55n^3-170n^2+290n-212(n\geqq 4)$
> 但$R(1\times 5)=1$、$R(2\times 5)=6$、$R(3\times 5)=46$

(三) 尋找規則－$(n\times 6)$放石頭的方法數

利用上述的作法，作$R(n\times 6)$的通式，得：

1．$R(n\times 6)=n(n^5-15n^4+105n^3-405n^2+840n-738)+5\{(n-5)[(n-5)^3+(n-5)(n-4)]+2(n-5)(n-4)^2+(n-5)(n-3)+(n-4)[3(n-4)^2+2(n-3)]+3(n-2)^2+(n-3)^2+(n-2)\}+4[(n-4)^3(n-3)+(n-4)(n-3)(n-2)+2(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]+3\{\{[(n-3)(n-2)+1](n-4)+(n-2)^2\}(n-4)+(n-3)(n-2)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-3)+(n-1)^2\}+2\{\{[(n-3)(n-2)+1](n-4)+(n-2)^2\}(n-3)+(n-3)(n-2)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-4)+(n-1)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-2)+(n-1)^2\}+(n^4-6n^3+21n^2-36n+26)$

$$=n^6-15n^5+120n^4-575n^3+1695n^2-2805n+2108$$

> 定理九、$n\in N$，$R(n\times 6)=n^6-15n^5+120n^4-575n^3+1695n^2-2805n+2108(n\geqq 5)$
> 但$R(1\times 6)=1$、$R(2\times 6)=7$、$R(3\times 6)=79$、$R(4\times 6)=478$

(四) 通式之間的規律

1．本研究將定理一、二、三、四也用相同方式推過，並保留它們未化簡時的

狀態，希望利用這些式子找出通式之間的規律，這些式子和觀察到的規律分別是：

(1) 定理一：$R(n\times 1)=n$

(2) 定理二：$R(n\times 2)=n(n-1)+1\times 1$

(3) 定理三：$R(n\times 3)=n(n^2-3n+3)+2(n-2)+1\times n$

(4) 定理四：$R(n\times 4)=n(n^3-6n^2+15n-4)+3[(n-3)^2+(n-2)]+2[(n-2)(n-1)]+1[n(n-1)+1]$

(5) 定理八：$R(n\times 5)=n(n^4-10n^3+45n^2-100n+90)+4[(n-4)^3+(n-4)(n-3)+2(n-3)^2+(n-2)]+3[(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]+2[(n-3)(n-2)(n-1)+(n-3)+(n-1)2]+1(n^3-3n^2+6n-4)$

(6) 定理九：$R(n\times 6)=n(n^5-15n^4+105n^3-405n^2+840n-738)+5\{(n-5)[(n-5)^3+(n-5)(n-4)]+2(n-5)(n-4)^2+(n-5)(n-3)+(n-4)[3(n-4)^2+2(n-3)]+3(n-3)^2+(n-3)^2+(n-2)\}+4[(n-4)^3(n-3)+(n-4)(n-3)(n-2)+2(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]+3\{\{[(n-3)(n-2)+1](n-4)+(n-2)^2\}(n-4)+(n-3)(n-2)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-3)+(n-1)^2\}+2\{\{[(n-3)(n-2)+1](n-4)+(n-2)^2\}(n-3)+(n-3)(n-2)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-4)+(n-1)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-2)+(n-1)^2\}+1(n^4-6n^3+21n^2-36n+26)$

2. 觀察以上的通式本研究發現以下規律：

(1) 以上的係數依序為n、$m-1$、$m-2$、$m-3$、...、2、1。(淺藍色)

(2) 係數 n 後的式子為$R((n-1)\times(m-1))$將 n 代入後得出，且$(m\geqq 2)$。(綠色)

(3) 係數$(m-1)$後的式子為$\{[n-(m-1)]^{m-2}+\cdots+(n-2)\}$，$(m\geqq 4)$。(紅色)

(4) 係數(m-2)後的式子為$[\ldots+(n-2)(n-1)]$，$(m\geqq 4)$。(紫色)

(5) 係數 1 後的式子為$R(n\times(m-2))$的通式，$(m\geqq 3)$。(黃色)

伍、 研究結果

一、尋找規則－(n列的推法)

定理一、$n\in N$，$R(n\times 1)=n$

定理二、$n\in N$，$R(n\times 2)=n^2-n+1$

定理三、$n\in N$，$R(n\times 3)=n^3-3n^2+6n-4\ (n\geq 2)$，但$R(1\times 3)=1$

定理四、$n\in N$，$R(n\times 4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26\ (n\geq 3)$，

但$R(1\times 4)=1$，$R(2\times 4)=5$

二、尋找規則－(m行的推法)

定理五、$m\in N$，$R(1\times m)=1$

定理六、$m\in N$，$R(2\times m)=1+m$

定理七、$m\in N$，$R(3\times m)=\left(\frac{5}{2}+\frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m+\left(\frac{5}{2}-\frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m-m-4$

建立$R(4\times m)$的遞迴關係式

$$\begin{cases} a_m=b_{m-1}+(b_{m-1}-c_{m-2})+(b_{m-2}-c_{m-3}+1) & m\geq 4 \\ b_m=a_{m-2}+a_{m-1}+b_{m-1} & m\geq 3 \\ c_m=a_{m-1}+b_{m-1}+c_{m-1} & m\geq 2 \\ d_m=a_{m-1}+b_{m-1}+c_{m-1}+d_{m-1} & m\geq 2 \end{cases}$$

三、尋找規律$R(n\times m)$

定理八、$n\in N$，$R(n\times 5)=n^5-10n^4+55n^3-170n^2+290n-212(n\geqq 4)$

但$R(1\times 5)=1$、$R(2\times 5)=6$、$R(3\times 5)=46$

定理九、$n\in N$，$R(n\times 6)=n^6-15n^5+120n^4-575n^3+1695n^2-2805n+2108$ $(n\geqq 5)$，但$R(1\times 6)=1$、$R(2\times 6)=7$、$R(3\times 6)=79$、$R(4\times 6)=478$

陸、 討論與結論

一、尋找規則－(n列的推法)

(一) 當在尋找規則時，本研究發現$R(n\times m)$的通式為n的m次多項式。此結果與第59屆國中組放石頭問題的探討結果一樣，但本研究使用階差法、牛頓插值定理去猜測通式，再加以證明較解聯立方程式有效率。

二、尋找規則－(m行的推法)

(一) 本研究運用樹枝狀推導$(n\times m)$方格圖的可能數將其轉化成表格，再運用加法原理計數找出第m行的方法數的方法不同於國中組的由$n\times(m-1)$方格圖的所有可能數導到$n\times m$方格圖的所以可能數和國小組的窮舉法。

(二) 本研究利用二階非齊次遞迴式的解法找出$R(3\times m)$的通式為$R(3\times m)=\left(\frac{5}{2}+\frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}+\left(\frac{5}{2}-\frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}-m-4$不同於文獻探討(表1)只找到遞迴式$T(3\times n)=F_{n+5}-(n-4)$及$A_3(n)=F_{n+5}-(n-\ 4)$。

(三) 本研究發現$R(4\times m)$的遞迴式$b_m=a_{m-2}+a_{m-1}+b_{m-1}$，$m\geqq 3$也與第59屆國中組放石頭問題探討的不同，並進階發現$(n\times m)$中，$n(\,n-2)\times m=n(n-2)\times(m-1)+\cdots+n(1)(m-1)+n(1)\times(m-2)$，$n\geq 4$，$m\geq 3$ (省 略 號 為$n(n-2)\times m$~$n(1)\times m$間按順序的數據總和)。

表33

m	1	2	3
4(1)=a_m	1	3	7
4(2)=b_m	1	3	7
4(3)=c_m	1	3	9
4(4)=d_m	1	4	13

表34：第59屆科展放石頭問題

n	1	2	3
4(1)=d_n	1	3	7
4(2)=c_n	1	3	7
4(3)=b_n	1	3	9
4(4)=a_n	1	4	13

舉例：本研究結果是表33：7=3+3+1；第59屆國中組放石頭問題探討得到的結果是表34：7=3+(3-1)+(3-1)

三、尋找規則－($n\times m$的推法)

在探討$n\times m$的推法中本研究也有一些新發現是文獻探討還沒發現的：

(一) 發現每一個$n(1)$~$n(n)$的倒數行數一樣時，規律也會相同(目前只發現到倒數第3行)

如： $n(n)\times m=\ n(n)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$

$n(n-1)\times m=\ n(n-1)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$

$n(n-3)\times m=\ n(n-3)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$

$+n(1)\times(m-2)$

(二) 首先，本研究用牛頓插值定理推$R(n\times m)$的通式時，$R(n\times 3)$需要共4個數據來推導通式，$R(n\times 4)$需要共5個數據來推導通式，所以說要推$R(n\times m)$的通式時，需要$m+1$個數據才能推$R(n\times m)$的通式，較為費時。本研究也發現在

m行的推法中通式較為複雜，所以本研究以n列再進行新的推論，透過整合利用階梯式累加法用$excel$表格整理區塊和區塊間的方法數差，始能快速找出第n列的通式。這個推導通式的方法，可以讓推通式的速度提升許多。比如在推導$R(n \times m)$通式時，只要推出$R(m \times m)$和$R((m+1) \times m)$的數值就好。所以本研究也就再推出定理八和定理九。這方法加速了本研究推導$R(n \times m)$的通式。

柒、 未來展望

這次只觀察到倒數1、2、3行的規律，希望能夠推出更多$n(1) \times m$到$n(n) \times m$的n的數據完善表21，並推出倒數第4、5行以及之後的規律，以期完善表格後可以找到更多n為不同數時的共通點，試圖找出$R(n \times m)$的規律以及推導通式。

尋找通式之間規律時，對於某些部份其實特別有感，但又無法將它整理成規則，覺得很可惜。但最後本研究有了一種更快的推法階梯式累加法，推導$R(n \times m)$通式時，只要推出$R(m \times m)$和$R((m+1) \times m)$的數值就好。但還是希望以後能夠利用這種推法，推出更多通式，並觀察到這些通式之間更多的規律，並藉此繼續推導出$R(n \times m)$的通式。

捌、 參考資料及其他

一、游森棚。(民106)，**森棚教官的數學題，科學研習月刊，56 (11)**。

二、鐘國亮(民 103)。**離散數學**。臺北市：東華書局。

三、范志軒。**費波那契數列的一般項表示法**。取自 http://www.hwsh.tc.edu.tw/ischool/public/resource_view/open.php?file=b38c393be59da9b7e5acb45bde07b8c7.pdf

四、李泊潁、王銘于(民 108 年)。**動動腦 FUN 石頭，中華民國第 59 屆中小學科學展覽會作品說明書**。

五、廖亮瑜(民 108 年)。**放石頭問題的探討，中華民國第 59 屆中小學科學展覽會作品說明書**。

【評語】030405

一個有趣的放石頭問題，作者用階梯式累加法、牛頓插值定理與二階非齊次遞迴式等不同的方法與過去作品做比較，發現過去文獻沒得證之結果，作者們針對 $n\le 4$ 或 $m\le 4$ 的棋盤作了討論，給出了很多結果，可以看得出作者們確實花費了許多心思想要解決這個問題，這種精神非常值得鼓勵，並且於最後推導出 $R(n\times m)$ 的通式，為不錯的論證。整體而言作者研究精神佳以及過程討論完整，算是扎實的作品。

作品簡報

「石」在好玩-探討放石頭的規律

組別：國中組

科別：數學科

編號：030405

緒論

研究動機

一次上獨立研究課時，老師給了一道在科學研習月刊的數學題目，名字叫做「放石頭」「小志在如圖1的表格中玩放石頭的遊戲，他要在每一直行放一個石頭，且從左側第一行開始放。但是有一個特殊的規定，就是新放下去的石頭的左上角方向一路延伸都不可以有已經放好的石頭。比如說，前四行已經放好了石頭，則現在要在第五行放新的石頭，只剩下兩格可以放（打叉的兩格不能放），如圖2。」在探究的過程中，誘發了同組同學們的興趣，心動不如馬上行動，就有了接下來的一連串數學推導的過程。

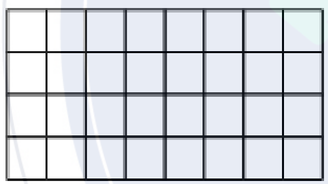


圖1

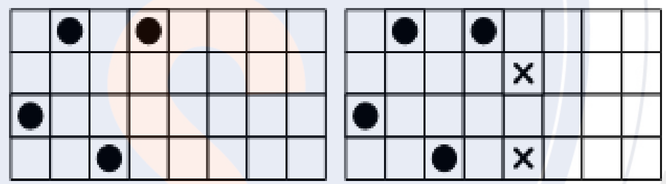


圖2

研究目的

- 找出$R(n\times 1)$、$R(n\times 2)$、$R(n\times 3)$、$R(n\times 4)$、$R(n\times 5)$、$R(n\times 6)$的通式。
- 找出$R(1\times m)$、$R(2\times m)$、$R(3\times m)$、$R(4\times m)$的通式。
- 找出$R(n\times m)$的規律。

研究發現 I - n列的推法

方格圖位置記號

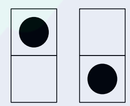
- 方格圖的列數為n、行數為m，則方格圖的大小記為$(n \times m)$。
- 圖上位置第n列、第m行有石頭記為T，沒石頭記為F。
- 在放石頭的限制下，考慮所有放石頭的情形，對於$(n \times m)$的方格圖，所有放的方法數記為$R(n \times m)$。

$(n \times 1)$

$R(1 \times 1) = 1$

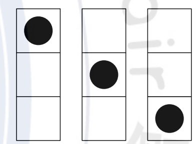
1種

$R(2 \times 1) = 1 + 1 = 2$



1種 1種

$R(3 \times 1) = 1 + 1 + 1 = 3$



1種 1種 1種

【觀察與發現】

方格圖	$R(1 \times 1)$	$R(2 \times 1)$	$R(3 \times 1)$
可放石頭數量	1	2	3

數列〈a_n〉：1、2、3……

【通式推導】由觀察可發現，$R(n \times 1) = n$

【證明】因為放石頭的規則規定，在圖形上的任何一列都必須要放一個石頭，也只能放一個，所以當方格圖只有一列，那一列有幾格就可以有幾種擺放可能，由以上推論以及數據證明，推出$R(n \times 1) = n$。

定理一、$n \in N$，$R(n \times 1) = n$

$(n \times 2)$

【觀察與發現】 〈a_n〉：1、3、7、13……

$(n \times 2)$方格圖	$R(1 \times 2)$	$R(2 \times 2)$	$R(3 \times 2)$	$R(4 \times 2)$
可放石頭方法數	1	3	7	13

階差數列

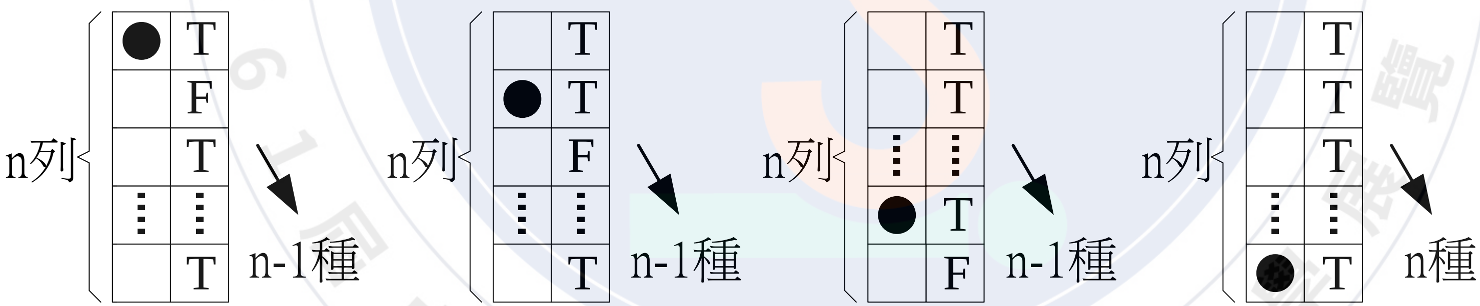
【通式推導】

1　3　7　13……

2　4　6　　$b_n = 2n$

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$$
$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$
$$= 1 + 2 \times \frac{n \times (n-1)}{2}$$
$$= n^2 - n + 1$$

【證明】



定理二、$n \in N$，$R(n \times 2) = n^2 - n + 1$

$(n\times 3)$

【觀察與發現】

$(n\times 3)$方格圖	$R(1\times 3)$	$R(2\times 3)$	$R(3\times 3)$	$R(4\times 3)$	$R(5\times 3)$
可放石頭方法數	1	4	14	36	76

【通式推導】利用牛頓插值定理得出$R(n\times 3)$的通式

n	2	3	4	5
$f(n)$	4	14	36	76

$\frac{14-4}{3-2}=10$ $\quad \frac{36-14}{4-3}=22$ $\quad \frac{76-36}{5-4}=40$

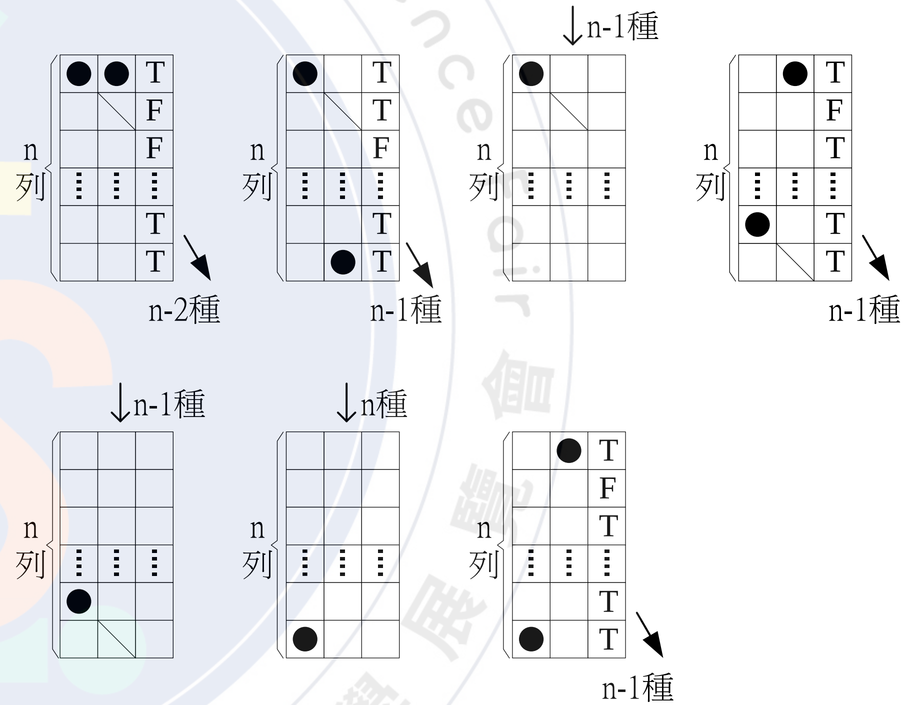
$\frac{22-10}{4-2}=\frac{12}{2}=6$ $\quad \frac{40-22}{5-3}=\frac{18}{2}=9$

$\frac{9-6}{5-2}=1$

$$4+10(n-2)+6(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$=n^3-3n^2+6n-4\ \ (\text{註：}n\geq 2)$$

【證明】



定理三、$n\in N$，$R(n\times 3)=n^3-3n^2+6n-4\ (n\geq 2)$，但$R(1\times 3)=1$

$(n\times 4)$

【觀察與發現】

$(n\times 4)$方格圖	$R(1\times 4)$	$R(2\times 4)$	$R(3\times 4)$	$R(4\times 4)$
可放石頭方法數	1	5	26	90

$(n\times 4)$方格圖	$R(5\times 4)$	$R(6\times 4)$	$R(7\times 4)$	$R(8\times 4)$
可放石頭方法數	246	566	1146	2106

【通式推導】利用牛頓插值定理得出$R(n\times 4)$的通式

n	3	4	5	6	7
$f(n)$	26	90	246	566	1146

$\frac{90-26}{4-3}=64$　$\frac{246-90}{5-4}=156$　$\frac{566-246}{6-5}=320$　$\frac{1146-566}{7-6}=580$

$\frac{156-64}{5-3}=46$　$\frac{320-156}{6-4}=82$　$\frac{580-320}{7-5}=130$

$\frac{82-46}{6-3}=12$　$\frac{130-82}{7-4}=16$

$\frac{16-12}{7-3}=1$

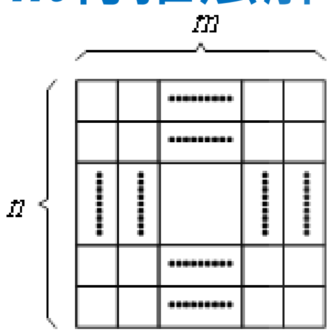
$26+64(n-3)+46(n-3)+(n-4)+$
$12(n-3)(n-4)(n-5)+(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
$=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$(註：$n\geq 3$)

定理四、$n\in N$，$R(n\times 4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26\ (n\geq 3)$但$R(1\times 4)=1$，$R(2\times 4)=5$

推測：
1. $n\in N$，$R(n\times 5)$為n的五次多項式。
2. $n\in N$，$R(n\times m)$為n的m次多項式。

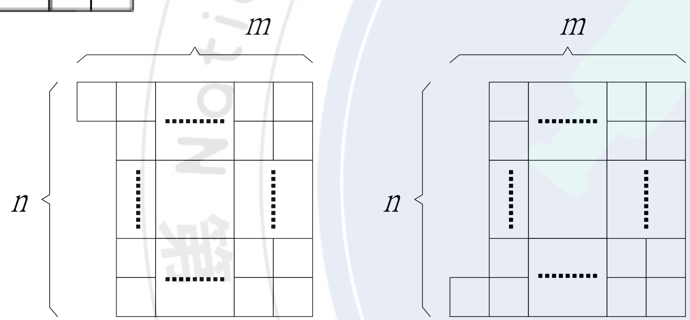
研究發現Ⅱ-m行的推法

m行推法解釋-符號定義



$n(1)\times m$：每行有n格，第1行由上往下數第1格開始到第m行範圍內的放石頭方法

$n(n)\times m$：每行有n格，第1行由上往下數第n格開始到第m行範圍內的放石頭方法



第1格開始到第m行範圍 ~ 第n格開始到第m行範圍

	1(1)	2(1)	2(2)
第1行	1	1	1
第2行	1	1	2
第3行	1	1	3
第4行	1	1	4
第5行	1	1	5
第6行	1	1	6

m行推法解釋

若想知道$(n\times m)$便將第m行的$n(1)$~$n(n)$加起來就行。例$(2\times 3)=1+3=4$

2(1)

1	1	1	1
2	2	2	2

1			
	✕		

1	1		
	✕	✕	

1	1	1	
	✕	✕	✕

1	1	1	1
	✕	✕	✕

2(2)

2			

	1		
2	2	✕	

	1	1	
2	2	✕	✕

	1	1	1
2	2	✕	✕

$(1 \times m)$

【觀察與發現】

m \ 1	1	2	3	4	5	6
1(1)	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

【通式推導與證明】

m \ 1	1	2	3	4	5	6	……	m
1(1)	1	1	1	1	1	1	……	1
1	1	1	1	1	1	1	……	1

$(1 \times m)$規律：$R(1 \times m) = 1$

定理五、$m \in N$，$R(1 \times m) = 1$

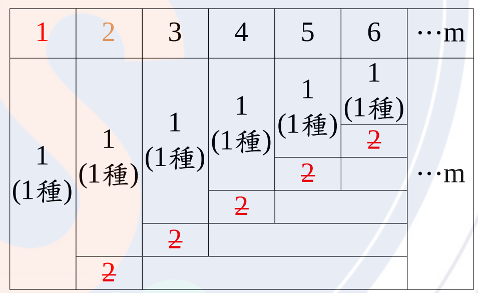
$(2 \times m)$

【觀察與發現】

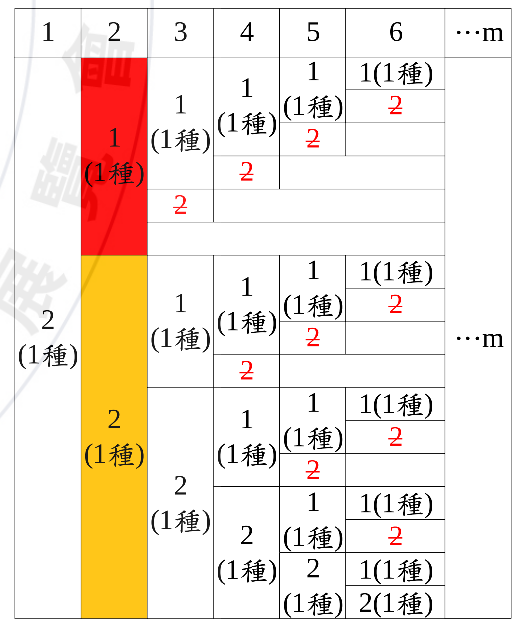
m \ 2	1	2	3	4	5	6
2(1)	1	1	1	1	1	1
2(2)	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7

【證明】

2(1)



2(2)



【通式推導】

$$R(2 \times 1) = 2(1) \times 1 + 2(2) \times 1 = 1 + 1 = 2$$
$$R(2 \times 2) = 2(1) \times 2 + 2(2) \times 2 = 1 + 2 = 3$$
$$R(2 \times 3) = 2(1) \times 3 + 2(2) \times 3 = 1 + 3 = 4$$
$$\vdots$$
$$R(2 \times m) = 2(1) \times m + 2(2) \times m = 1 + m = 1 + m$$

定理六、$m \in N, R(2 \times m) = 1 + m$

$(3 \times m)$

【觀察與發現】

m \ 3	1	2	3	4	5	6
3(1)	1	2	3	5	8	13
3(2)	1	2	4	7	12	20
3(3)	1	3	7	14	26	46
3	3	7	14	26	46	79

【通式推導】利用二階非齊次遞迴式進行$R(3 \times m)$通式推導

求解$F_m = F_{m-1} + F_{m-2} + m + 1$, 邊界條件$F_1 = 3, F_2 = 7$

$$R(3 \times m) = \left(\frac{5}{2} + \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{5}{2} - \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m - m - 4$$

定理七、$m \in N$，$R(3 \times m) = \left(\frac{5}{2} + \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{5}{2} - \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m - m - 4$

$(4 \times m)$

m \ 4	1	2	3	4	5	6
4(1)=a_m	1	3	7	14	30	62
4(2)=b_m	1	3	7	17	38	82
4(3)=c_m	1	3	9	23	54	122
4(4)=d_m	1	4	13	36	90	212
4	4	13	36	90	212	478

$(4 \times m)$的遞迴式

$$\begin{cases} a_m = b_{m-1} + (b_{m-1} - c_{m-2}) + (b_{m-2} - c_{m-3} + 1) & m \geq 4 \\ b_m = a_{m-2} + a_{m-1} + b_{m-1} & m \geq 3 \\ c_m = a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1} & m \geq 2 \\ d_m = a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1} + d_{m-1} & m \geq 2 \end{cases}$$

研究發現Ⅲ－$R(n \times m)$ 通式推導

***n*列部分**

$R(3 \times 3)$

1	2	3

圖3

1			2			3		
1		3	1		2	1	2	3

圖4

$R(3 \times 3)$

1	2	2	2	2	2	3	

圖5

$R(4 \times 3)$

2	2	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4

圖6

n	$\times 1$
$n-2$	$\times 2$
n^2-3n+3	$\times n$

圖7

n^3-3n^2+6n-4	$\times 1$
$n^3-5n^2+10n-8$	$\times 2$
$n^3-7n^2+18n-16$	$\times 3$
$n^3-9n^2+30n-36$	$\times 4$
$n^4-10n^3+45n^2-100n+90$	$\times n$

圖8

- 推導$R(n \times m)$通式時，只要推出$R(m \times m)$和$R((m+1) \times m)$的數值就好。
- 推導$R(n \times 3)$的一般式，採疊加的方式(如圖7)，將各個式子乘上相對應的係數後得$R(n \times 3)$的一般式為$R(n \times 3) = n(n^2 - 3n + 3) + 2(n-2) + n$。

$(n \times 5)$

定理八、$n \in N$，$R(n \times 5) = n^5 - 10n^4 + 55n^3 - 170n^2 + 290n - 212 (n \geqq 4)$
但$R(1 \times 5) = 1$、$R(2 \times 5) = 6$、$R(3 \times 5) = 46$

$(n \times 6)$

定理九、$n \in N$，$R(n \times 6) = n^6 - 15n^5 + 120n^4 - 575n^3 + 1695n^2 - 2805n + 2108 (n \geqq 5)$
但$R(1 \times 6) = 1$、$R(2 \times 6) = 7$、$R(3 \times 6) = 79$、$R(4 \times 6) = 478$

n列部分 - 通式之間的規律

定理一：$R(n\times 1)=n$

定理二：$R(n\times 2)=n(n-1)+1\times 1$

定理三：$R(n\times 3)=n(n^2-3n+3)+2(n-2)+1\times n$

定理四：$R(n\times 4)=n(n^3-6n^2+15n-4)+3[(n-3)^2+(n-2)]+2[(n-2)(n-1)]+1[n(n-1)+1]$

定理八：$R(n\times 5)=n(n^4-10n^3+45n^2-100n+90)+4[(n-4)^3+(n-4)(n-3)+2(n-3)^2+(n-2)]+3[(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]+2[(n-3)(n-2)(n-1)+(n-3)+(n-1)2]+1(n^3-3n^2+6n-4)$

定理九：$R(n\times 6)=n(n^5-15n^4+105n^3-405n^2+840n-738)+5\{(n-5)[(n-5)^3+(n-5)(n-4)]+2(n-5)(n-4)^2+(n-5)(n-3)+(n-4)[3(n-4)^2+2(n-3)]+3(n-3)^2+(n-3)^2+(n-2)\}+4[(n-4)^3(n-3)+(n-4)(n-3)(n-2)+2(n-3)^2(n-2)+(n-2)(n-1)]+3\{\{[(n-3)(n-2)+1](n-4)+(n-2)^2\}(n-4)+(n-3)(n-2)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-3)+(n-1)^2\}+2\{\{[(n-3)(n-2)+1](n-4)+(n-2)^2\}(n-3)+(n-3)(n-2)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-4)+(n-1)^2+[(n-2)(n-1)+1](n-2)+(n-1)^2\}+1(n^4-6n^3+21n^2-36n+26)$

- 係數依序為n、$m-1$、$m-2$、$m-3$、…、2、1。(淺藍色)
- 係數n後的式子為$R((n-1)\times(m-1))$將n代入後得出，且$(m\geqq 2)$。(綠色)
- 係數$(m-1)$後的式子為$\{[n-(m-1)]^{m-2}+\cdots+(n-2)\}$，且$(m\geqq 4)$。(紅色)
- 係數(m-2)後的式子為$[\cdots+(n-2)(n-1)]$，且$(m\geqq 4)$。(紫色)
- 係數1後的式子為$R(n\times(m-2))$的通式，且$(m\geqq 3)$。(黃色)

m行部分

1(1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2(1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2(2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3(1)	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
3(2)	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376	609	986	1596
3(3)	1	3	7	14	26	46	79	133	221	364	596	972	1581	2567	4163
3	3	7	14	26	46	79	133	221	364	596	972	1581	2567	4163	6746
4(1)	1	3	7	14	30	62	127	257	515						
4(2)	1	3	7	17	38	82	174	363	747	1519					
4(3)	1	3	9	23	54	122	266	567	1187	2449					
4(4)	1	4	13	36	90	212	478	1045	2232	4681					
4	4	13	36	90	212	478	1045	2232	4681	8649	0	0	0	0	0
5(1)	1	4	13	36	90	238	609								
5(2)	1	4	13	36	104	282									
5(3)	1	4	13	43	128	358	968								
5(4)	1	4	16	55	170	492	1370								
5(5)	1	5	21	76	246	738	2108								
5	5	21	76	246	738	2108									
6(1)	1	5	21	76	246	738									
6(2)	1	5	21	76	246	828									
6(3)	1	5	21	76	282	968									
6(4)	1	5	21	89	338	1188	3968								
6(5)	1	5	25	109	426	1538	5260								
6(6)	1	6	31	140	566	2104	7364	16592							
6	6	31	140	566	2104	7364	16592								
7(1)	1	6	31	140	566	2104	7364								
7(2)	1	6	31	140	566	2104									
7(3)	1	6	31	140	566	2350									
7(4)	1	6	31	140	642	2708									
7(5)	1	6	31	161	752	3232	12498								
7(6)	1	6	36	191	912	4004	16502								
7(7)	1	7	43	234	1146	5150	21652								
7	7	43	234	1146	5150	21652									
8(1)	1	7	43	234	1146	5150	21134								
8(2)	1	7	43	234	1146	5150	21134								
8(3)	1	7	43	234	1146	5150									
8(4)	1	7	43	234	1146										
8(5)	1	7	43	234											
8(6)	1	7	43	265	1478										
8(7)	1	7	49	307	1742										
8(8)	1	8	57	364	2106										
8	8	57	364	2106											

表一

- 每一個$n(1)$~$n(n)$的倒數行數一樣時，規律也會相同(目前只發現到倒數第3行)(如表一)

$n(n)\times m=n(n)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$；$n(n-1)\times m=n(n-1)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)$；$n(n-2)\times m=n(n-2)\times(m-1)+\cdots+n(1)\times(m-1)+n(1)\times(m-2)$

結論

- 研究發現Ⅰ－(n列的推法)

  定理一、$n \in N$，$R(n \times 1) = n$

  定理二、$n \in N$，$R(n \times 2) = n^2 - n + 1$

  定理三、$n \in N$，$R(n \times 3) = n^3 - 3n^2 + 6n - 4\ (n \geq 2)$，但$R(1 \times 3) = 1$

  定理四、$n \in N$，$R(n \times 4) = n^4 - 6n^3 + 21n^2 - 36n + 26\ (n \geq 3)$，但$R(1 \times 4) = 1$，$R(2 \times 4) = 5$

- 研究發現Ⅱ－(m行的推法)

  定理五、$m \in N$，$R(1 \times m) = 1$

  定理六、$m \in N$，$R(2 \times m) = 1 + m$

  定理七、$m \in N$，$R(3 \times m) = \left(\frac{5}{2} + \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{5}{2} - \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m - m - 4$

  建立$R(4 \times m)$的遞迴關係式

$$\begin{cases} a_m = b_{m-1} + (b_{m-1} - c_{m-2}) + (b_{m-2} - c_{m-3} + 1) & m \geq 4 \\ b_m = a_{m-2} + a_{m-1} + b_{m-1} & m \geq 3 \\ c_m = a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1} & m \geq 2 \\ d_m = a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1} + d_{m-1} & m \geq 2 \end{cases}$$

- 研究發現Ⅲ－$R(n \times m)$

  定理八、$n \in N$，$R(n \times 5) = n^5 - 10n^4 + 55n^3 - 170n^2 + 290n - 212 (n \geqq 4)$

  但$R(1 \times 5) = 1$、$R(2 \times 5) = 6$、$R(3 \times 5) = 46$

  定理九、$n \in N$，$R(n \times 6) = n^6 - 15n^5 + 120n^4 - 575n^3 + 1695n^2 - 2805n + 2108 (n \geqq 5)$

  但$R(1 \times 6) = 1$、$R(2 \times 6) = 7$、$R(3 \times 6) = 79$、$R(4 \times 6) = 478$

參考資料與其他

[1]游森棚。(民106)，**森棚教官的數學題，科學研習月刊，56 (11)**。

[2]鐘國亮(民103)。**離散數學**。臺北市：東華書局。

[3]范志軒。**費波那契數列的一般項表示法**。

[4]李泊潁、王銘于(民108年)。**動動腦FUN石頭，中華民國第59屆中小學科學展覽會作品說明書**。

[5]廖亮瑜(民108年)。**放石頭問題的探討，中華民國第59屆中小學科學展覽會作品說明書**。