中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030403

縮放自如，果真有別 -邊長縮放對新圖的探討

學校名稱：雲林縣立雲林國民中學

作者：	指導老師：
國二 王昕榆 國二 陳宥菁	王淑美

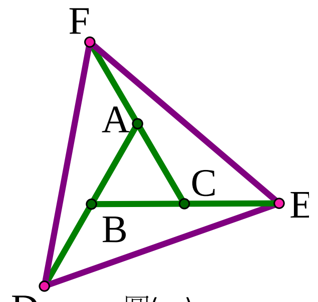
關鍵詞：多邊形、面積比例

摘要

此研究主要在探討多邊形依序以各頂點為縮放中心，將各邊以相同或不同倍率縮放後連接各端點，形成新圖形，探討新圖形與原圖形間形狀、面積及縮放倍率等關係。從基本的正多邊形做起，到一般多邊形及 N 角星形，並將推得的結果應用在較複雜或變化的圖形中。

壹、研究動機

在學習講義上看到這個題目：「ΔABC面積為 1，分別延長 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$到 D、E、F，使$\overline{AB}$=$\overline{BD}$，$\overline{BC}$=$\overline{CE}$，$\overline{CA}$=$\overline{AF}$，連接 $\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FD}$，求ΔDEF的面積?」(答:7)。



圖(一)

題目是三角形，更想進一步探索其他多邊形以各頂點為縮放中心，將各邊以相同或不同比例縮放後連接各端點，所得的新圖形與原圖形形狀、面積的關係?於是就著手進行這項研究。

貳、研究目的

一、探討一多邊形，若以各頂點為縮放中心，將各邊以相同倍率縮放後，連接各端點，所形成的新多邊形與原多邊形形狀、面積、重心位置等關係。

二、探討一多邊形，若以各頂點為縮放中心，將各邊以不同倍率縮放後，連接各端點，所形成的新多邊形與原多邊形形狀、面積的關係。

參、研究設備及器材

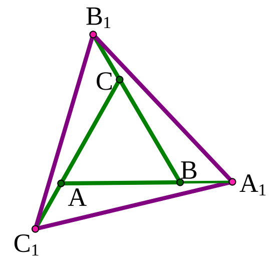
紙、筆、電腦、GSP 繪圖軟體

肆、研究過程或方法

一、多邊形依序以各頂點為縮放中心，將各邊以相同倍率縮放的探討

(一)、正多邊形以各頂點為縮放中心，將各邊做 r 倍縮放

1、正三角形



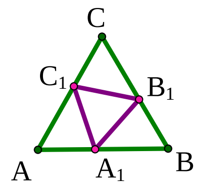
圖(二)

如圖(二)、(三)，正ΔABC，$\overline{AA_1}=\mathrm{r}\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=\mathrm{r}\overline{BC}$，$\overline{CC_1}=\mathrm{r}\overline{CA}$，

(1)因為$\Delta AA_1C_1\cong\Delta BB_1A_1\cong\Delta CC_1B_1$（SAS 全等）

所以$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1A_1}$，因此$\Delta A_1B_1C_1$為正三角形，

故$\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$。



圖(三)

(2)當 r> 1 時，ΔAA_1C_1面積 $=\mathrm{r}\Delta ABC_1$面積 $=\mathrm{r}(r-1)\Delta ABC$面積

正$\Delta A_1B_1C_1$面積 $=\Delta ABC$面積 $+\,3\Delta AA_1C_1$面積

$=(3r^2-3r+1)\Delta ABC$面積

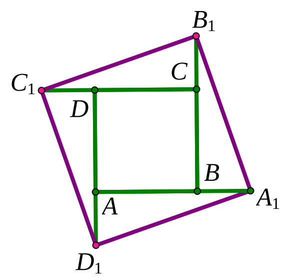
當 0< $r<1$時，ΔAA_1C_1面積 $=\mathrm{r}\Delta ABC_1$面積 $=\mathrm{r}(1-r)\Delta ABC$面積

正$\Delta A_1B_1C_1$面積 $=\Delta ABC$面積 $-\,3\Delta AA_1C_1$面積

$=(3r^2-3r+1)\Delta ABC$面積。與 r>1 時有相同結果。

所以$\dfrac{\text{正}\Delta A_1B_1C_1\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=3r^2-3r+1=3\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

2、正方形



圖(四)

如圖(四)、(五)，正方形 ABCD，$\overline{AA_1}=\mathrm{r}\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=\mathrm{r}\overline{BC}$，

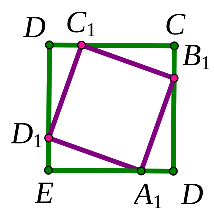
$\overline{CC_1}=\mathrm{r}\overline{CD}$，$\overline{DD_1}=\mathrm{r}\overline{DA}$　，r> 0

(1)因為$\Delta AA_1D_1\cong\Delta BB_1A_1\cong\Delta CC_1B_1\cong\Delta DD_1C_1$（SAS 全等）

所以$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}$

且$\angle A_1B_1C_1=\angle B_1C_1D_1=\angle C_1D_1A_1=\angle D_1A_1B_1=90°$

因此四邊形$A_1B_1C_1D_1$為正方形。



圖(五)

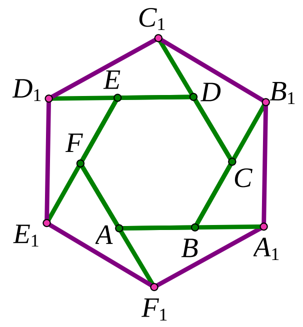
(2)正方形面積$A_1B_1C_1D_1$面積=$\left(4\cdot\frac{r(r-1)}{2}+1\right)$正方形 ABCD 面積

所以$\dfrac{\text{正方形}A_1B_1C_1D_1\text{面積}}{\text{正方形}ABCD\text{面積}}=2r^2-2r+1=2\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

3、正六邊形

如圖(六)、(七)，正六邊形 ABCDEF，$\overline{AA_1}=r\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=r\overline{BC}$，

$\overline{CC_1}=r\overline{CD}$，$\overline{DD_1}=r\overline{DE}$，$\overline{EE_1}=r\overline{EF}$，$\overline{FF_1}=r\overline{FA}$，



圖(六)

(1)可推得六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$為正六邊形。

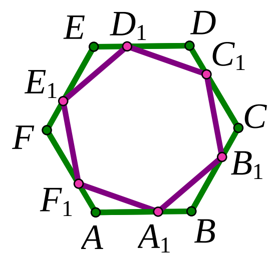
(2)設正六邊形的邊長為 a，

當 r> 1 時，

ΔAA_1F_1面積=$\frac{1}{2}\overline{AA_1}\cdot\overline{AF_1}\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}ra\cdot(r-1)a\cdot\sin 60°$

正六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$面積=正六邊形 ABCDEF 面積+6ΔAA_1F_1面積

$$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+6\cdot\frac{1}{2}ra\cdot(r-1)a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$



圖(七)

當 0< $r<1$時，

ΔAA_1F_1面積= $\frac{1}{2}\overline{AA_1}\cdot\overline{AF_1}\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}ra\cdot(1-r)a\cdot\sin 120°$

正六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$面積=正六邊形 ABCDEF 面積-6ΔAA_1F_1面積

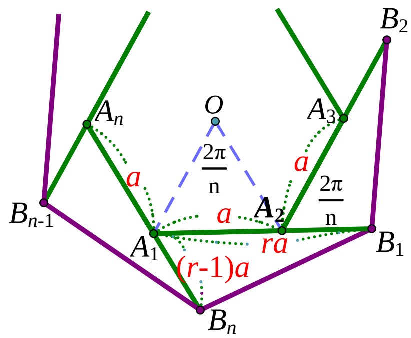
$$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-6\cdot\frac{1}{2}ra\cdot(1-r)a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 。與 r>1 時有相同結果。

故$\dfrac{\text{正六邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{面積}}{\text{正六邊形}ABCDEF\text{面積}}=\dfrac{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+6\cdot\frac{1}{2}ra\cdot(r-1)a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=r^2-r+1=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

4.正 n 邊形

如圖(八)、(九)，正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$，以各頂點為縮放中心將各邊以 r 倍縮放後，

連接各端點形成一新 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$。



圖(八)

(1)可推得 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$為正 n 邊形。

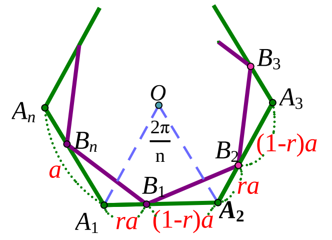
(2)設正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$邊長為 a，

正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$面積=n$\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}=n\cdot\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}$

當 r＞1 時，$\Delta A_2B_2B_1$面積$=\frac{1}{2}ra\cdot(r-1)a\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$

正 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$面積=正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$面積+$n\cdot\Delta A_2B_2B_1$面積

$$= n \cdot \frac{a^2}{4} \cot\frac{\pi}{n} + n \cdot \frac{1}{2} ra \cdot (r-1)a \cdot sin\frac{2\pi}{n}$$



圖(九)

當 0＜r＜1 時，$\Delta A_2B_2B_1$面積$=\frac{1}{2}ra \cdot (1-r)a \cdot sin\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)$

正 n 邊形$B_1B_2 \dots B_n$面積=正 n 邊形$A_1A_2 \dots A_n$面積$-n\Delta A_2B_2B_1$面積

$$= n \cdot \frac{a^2}{4} \cot\frac{\pi}{n} - n \cdot \frac{1}{2} ra \cdot (1-r)a \cdot sin\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= n \cdot \frac{a^2}{4} \cot\frac{\pi}{n} + n \cdot \frac{1}{2} ra \cdot (r-1)a \cdot sin\frac{2\pi}{n}$$ ， 與 r>1 時有相同結果。

所以$\frac{\text{正 n 邊形} B_1B_2 \dots B_n \text{面積}}{\text{正n邊形} A_1A_2 \dots A_n \text{面積}} = 1 + \frac{n \cdot \frac{1}{2} ra \cdot (r-1)a \cdot sin\frac{2\pi}{n}}{n \cdot \frac{a^2}{4} \cot\frac{\pi}{n}} = 4\sin^2\frac{\pi}{n}\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)$

(3)正 n 邊形$B_1B_2 \dots B_n$面積與正 n 邊形$A_1A_2 \dots A_n$面積比值與邊長無關。縮放倍率與面積比值為二次函數的關係，當縮放倍率 r= $\frac{1}{2}$ 時，面積比值有最小值$\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)$。

(4)已知點 O 為正 n 邊形$A_1A_2 \dots A_n$的外心。說明點 O 為正 n 邊形$B_1B_2 \dots B_n$的外心。

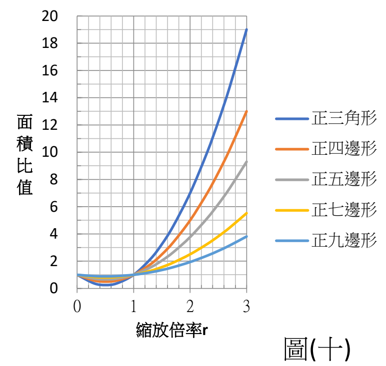
因為$\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \cdots = \overline{OB_n} = \sqrt{[(r-1)a]^2 + (\frac{a}{2}\csc\frac{\pi}{n})^2 - 2(r-1)a \cdot (\frac{a}{2}\csc\frac{\pi}{n}) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)}$

，B_1、B_2、 ... 、B_n 共圓，圓心為點 O，所以點 O 為正 n 邊形$B_1B_2 \dots B_n$外心。

又正 n 邊形的重心、外心與內心是同一點。所以經過縮放後的正 n 邊形$B_1B_2 \dots B_n$與原正 n 邊形$A_1A_2 \dots A_n$ 重心、外心、內心的位置相同。

5.透過 Excel 及 Gsp 繪圖軟體驗證

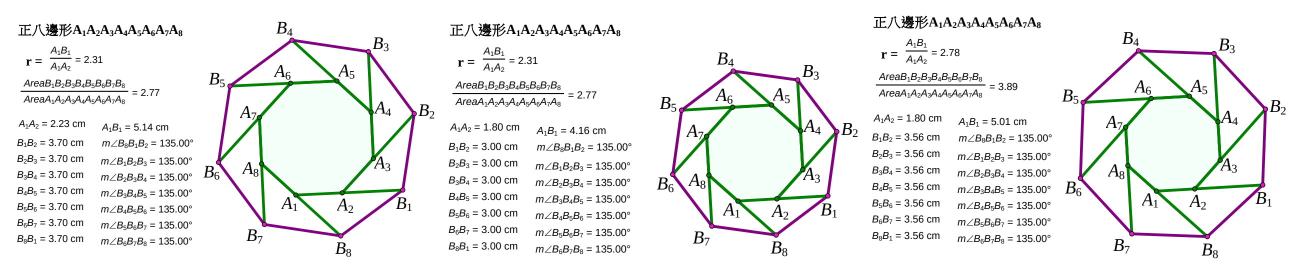
(1)透過 Excel 繪出正邊形縮放倍率 r 和新圖形與原圖形面積比值的關係圖。



圖(十)

(2) 透過 Gsp 繪圖

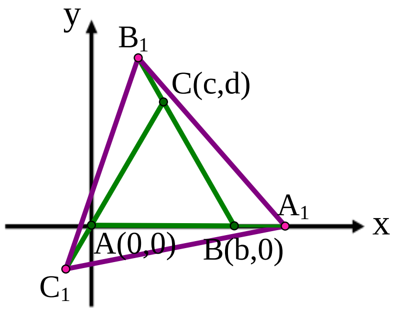
正八邊形$A_1A_2 \dots A_8$，以各頂點為縮放中心將各邊縮放 r 倍，連接各端點形成一新八邊形$B_1B_2 \dots B_8$。可看出新八邊形為正八邊形。面積比值與邊長無關，與縮放倍率有關。



圖(十一)

(二)、三角形、平行四邊形、菱形、鳶形以各頂點為縮放中心，將各邊做 r 倍縮放

1、三角形



圖(十二)

如圖(十二)，ΔABC，A (0，0)、B (b，0)、C (c，d)，

$\overline{AA_1} = \mathrm{r}\overline{AB}$，$\overline{BB_1} = \mathrm{r}\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = \mathrm{r}\overline{CA}$，$\mathrm{r} > 1$，

則 $\mathrm{A_1}(\mathrm{rb}，0)$，$\mathrm{B_1}(\mathrm{b} + \mathrm{r}(\mathrm{c} - \mathrm{b})，\mathrm{dr})$，$\mathrm{C_1}(\mathrm{c} - \mathrm{rc}，\mathrm{d} - \mathrm{rd})$

(1)因為$\overline{\mathrm{AB}} = b$，$\overline{BC} = \sqrt{(\mathrm{b}-\mathrm{c})^2 + \mathrm{d}^2}$，$\overline{CA} = \sqrt{c^2 + d^2}$

與$\overline{A_1B_1} = \sqrt{(b - 2rb + rc)^2 + (rd)^2}$，$\overline{A_1C_1} = \sqrt{(rb - c + rc)^2 + (d - rd)^2}$，

$\overline{B_1C_1} = \sqrt{(b - c - rb + 2rc)^2 + (2rd - d)^2}$，

三邊對應不成比例，故 $\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC不相似。

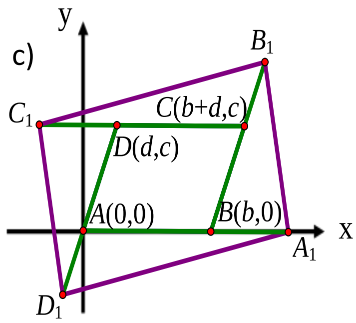
(2) $\Delta A_1B_1C_1$的重心座標與ΔABC的重心座標皆為$\left(\frac{b+c}{3}，\frac{d}{3}\right)$，重心位置相同。

(3)因為ΔAA_1C_1面積 $= \Delta BB_1A_1$面積 $= \Delta CC_1B_1$面積 $= \mathrm{r}(\mathrm{r}-1)\Delta ABC$面積，

所以$\frac{\Delta A_1B_1C_1\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}} = \frac{1+3r(r-1)}{1} = 3\mathrm{r}^2 - 3\mathrm{r} + 1$，面積比值與正三角形面積比值相同。

(4)當 $0< r < 1$時，與$\mathrm{r} > 1$有相同結果。

2、平行四邊形



圖(十三)

如圖(十三)，平行四邊形 ABCD，A(0，0)、B(b，0)、C(b+d，c)、D(d，c)

$\overline{AA_1} = \mathrm{r}\overline{AB}$，$\overline{BB_1} = \mathrm{r}\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = \mathrm{r}\overline{CD}$，$\overline{DD_1} = \mathrm{r}\overline{DA}$，$\mathrm{r} > 1$，

則$A_1(rb，0)$、$B_1(b + rd，rc)$、$C_1(b + d - rb，c)$

、$D_1(d - rd，c - rc)$

(1)因為$\overline{B_1C_1} = \overline{A_1D_1} = \sqrt{(rb + rd - d)^2 + (rc - c)^2}$，

$\overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1} = \sqrt{(rb - rd - b)^2 + (rc)^2}$，

因此四邊形$A_1B_1C_1D_1$為平行四邊形。但$\overline{AB}:\overline{D_1A_1} \neq \overline{BC}:\overline{A_1B_1}$，

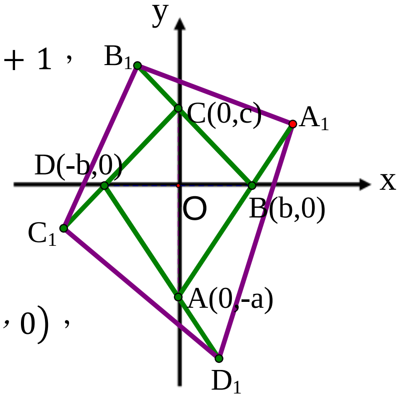
所以平行四邊形$A_1B_1C_1D_1$與平行四邊形 ABCD 不相似。但兩對角線交點在同一點。

(2)平行四邊形 ABCD 與平行四邊形$A_1B_1C_1D_1$的重心座標皆為$\left(\frac{b+d}{4}，\frac{c}{4}\right)$，重心位置相同。

(3)因為ΔAA_1D_1面積$= \Delta BB_1A_1$面積$= \Delta CC_1B_1$面積$= \Delta DD_1C_1$面積$= \frac{r(r-1)}{2}$平行四邊形 ABCD

面積，所以$\frac{\text{平行四邊形}A_1B_1C_1D_1\text{面積}}{\text{平行四邊形}ABCD\text{面積}} = \frac{1+2r(r-1)}{1} = 2\mathrm{r}^2 - 2\mathrm{r} + 1$，

(4)當 0< $r < 1$時，與$\mathrm{r} > 1$有相同結果。



圖(十四)

3、鳶形

如圖(十四)，鳶形 ABCD，$\mathrm{A}(0，-a)$、$\mathrm{B}(b，0)$、$C(c，0)$、$D(-b，0)$，

$\overline{AA_1} = \mathrm{r}\overline{AB}$，$\overline{BB_1} = \mathrm{r}\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = \mathrm{r}\overline{CD}$，$\overline{DD_1} = \mathrm{r}\overline{DA}$，$\mathrm{r} > 1$

則$A_1(rb，-a+ra)$、$B_1(b-rb，rc)$、$C_1(-rb、c-rc)$、 $D_1(-b+br，-ar)$

(1)因為$\overline{A_1B_1} = \sqrt{(2rb-b)^2 + (ra-rc+a)^2}$，$\overline{B_1C_1} = \sqrt{b^2 + (2rc-c)^2}$，

$\overline{A_1B_1} \neq \overline{B_1C_1}$，四邊$A_1B_1C_1D_1$不是鳶形，與鳶形 ABCD 不相似。

(2) ΔBCD重心座標$\left(0，\frac{c}{3}\right)$，$\Delta B_1C_1D_1$重心座標$\left(\frac{-rb}{3}，\frac{c-ar}{3}\right)$，利用中線被重心分割成(n-1):1

，得鳶形 ABCD 重心座標為$\left(0，\frac{1}{4}(\frac{c}{3} \times 3 - a \times 1)\right) = \left(0，\frac{c-a}{4}\right)$

四邊$A_1B_1C_1D_1$重心座標$\left(\frac{1}{4}(\frac{-rb}{3} \times 3 + \mathrm{rb} \times 1)，\frac{1}{4}(\frac{c-ar}{3} \times 3 + (ra-a) \times 1)\right) = \left(0，\frac{c-a}{4}\right)$

鳶形 ABCD 與四邊$A_1B_1C_1D_1$重心位置相同，且重心坐標都是各頂點坐標相加除以 4。

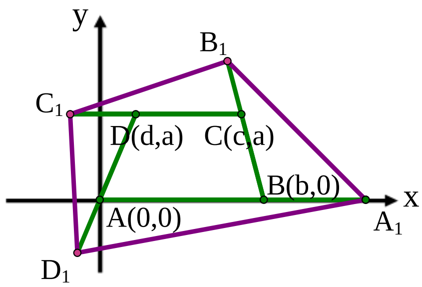
(3)$\Delta \mathrm{A}A_1D_1$面積 $= r\Delta ABD_1$面積 $= r(r-1)\Delta ABD$面積，

ΔCC_1B_1面積 $= r\Delta CDB_1$面積 $= r(r-1)\Delta BCD$面積，

$\Delta \mathrm{A}A_1D_1$面積 $+ \Delta CC_1B_1$面積 $= \Delta \mathrm{B}B_1A_1$面積 $+ \Delta DD_1C_1$面積 $= r(r-1)$鳶形$ABCD$面積，

$$\frac{\text{四邊形}A_1B_1C_1D_1\text{面積}}{\text{鳶形}ABCD\text{面積}} = 1 + 2\mathrm{r}(r-1) = 2\mathrm{r}^2 - 2\mathrm{r} + 1$$

(4)當 0< $r < 1$時，與$\mathrm{r} > 1$有相同結果。



圖(十五)

4、梯形

如圖(十五)，梯形 ABCD，$\mathrm{A}(0，0)$、$B(b，0)$、$C(c，a)$，

、$D(d，a)$，$\overline{AA_1} = r\overline{AB}$，$\overline{BB_1} = \mathrm{r}\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = \mathrm{r}\overline{CD}$，$\overline{DD_1} = \mathrm{r}\overline{DA}$，$\mathrm{r} > 1$，

則$A_1(br，0)$、$B_1(b+r(c-b)，ra)$、$C_1(c+(d-c)r，a)$， $D_1(d-rd，a-ra)$

(1)因為$\overline{B_1C_1}$與$\overline{A_1D_1}$不平行，所以四邊形$A_1B_1C_1D_1$不是梯形，與梯形 ABCD 不相似。

(2)梯形 ABCD 重心座標與四邊$A_1B_1C_1D_1$重心座標皆為$\left(\frac{b+c+d}{4}，\frac{a}{2}\right)$，重心位置相同。

(3)ΔAA_1D_1面積 + ΔCC_1B_1面積 = ΔBB_1A_1面積 + ΔDD_1C_1面積 = $r(r-1)$梯形 ABCD 面積

$$\frac{四邊形A_1B_1C_1D_1面積}{梯形ABCD面積} = 1 + 2r(r-1) = 2r^2 - 2r + 1，$$

(4) 當 0< $r < 1$時，與$r > 1$有相同結果。

由 1~4 知，三角形、四邊形縮放後的圖形:①與原圖形不會相似。但重心位置相同。

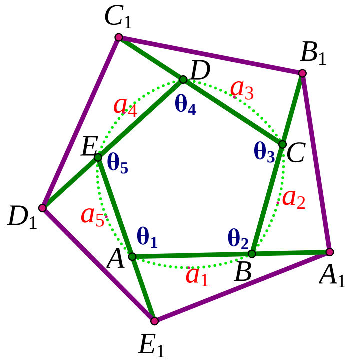
②四邊形面積比值皆相同。面積比值與邊長、內角度數無關，與縮放倍率有關。縮放倍率與面積比值為二次函數的關係，當縮放倍率$r = \frac{1}{2}$時，面積比值有最小值。

5、五邊形

如圖(十六)，五邊形 ABCDE，各邊長度與各內角角度如圖所示

$\overline{AA_1} = r\overline{AB}$，$\overline{BB_1} = r\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = r\overline{CD}$，$\overline{DD_1} = r\overline{DE}$，

$\overline{DD_1} = r\overline{EA}$，$r > 1$



圖(十六)

(1) 五邊形 ABCDE 與五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$不相似。

(2)五邊形 ABCDE 面積= ΔABE 面積 + ΔBCE 面積 + ΔCDE 面積

$$= \frac{1}{2}a_1[a_2\sin(\pi-\theta_2) + a_3\sin(\theta_2+\theta_3-\pi) - a_4\sin(2\pi-\theta_2-\theta_3-\theta_4)]$$

$$+\frac{1}{2}a_2[a_3\sin(\pi-\theta_3) + a_4\sin(\theta_3+\theta_4-\pi)] + \frac{1}{2}a_3a_4\sin\theta_4$$

$$= \frac{1}{2}a_1[a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3) + a_4\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)] + \frac{1}{2}a_2[a_3\sin\theta_3 - a_4\sin(\theta_3+\theta_4)]$$

$$+\frac{1}{2}a_3a_4\sin\theta_4 \quad = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot\left[\sum_{j=i+1}^{4}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin\left(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j\right)\right]\right\}$$

五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$面積 = 五邊形 ABCDE 面積 + $\frac{r(r-1)}{2}[\sum_{i=1}^{4}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1} + a_5a_1\sin\theta_1]$

$$\frac{五邊形A_1B_1C_1D_1E_1面積}{五邊形\ ABCDE\ 面積} = 1 + \frac{r(r-1)(\sum_{i=1}^{4}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1} + a_5a_1\sin\theta_1)}{\sum_{i=1}^{3}\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot[\sum_{j=i+1}^{4}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j)]\}}$$

面積比值不僅與縮放倍率有關，也與邊長、內角度數有關，且當$r = \frac{1}{2}$時，面積比值有最小值。

(3)設 $A(0，0)$、$B(a_1，0)$、$A_1(ra_1，0)$、$C(a_1 - a_2\cos\theta_2，a_2\sin\theta_2)$、

$B_1(a_1 - ra_2\cos\theta_2，ra_2\sin\theta_2)$、$D(a_1 - a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3)，a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3))$

$C_1\left(a_1 - a_2\cos\theta_2 + ra_3\cos(\theta_2+\theta_3)\text{，}a_2\sin\theta_2 - ra_3\sin(\theta_2+\theta_3)\right)$、

$E\left(a_1 - a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - a_4\cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\text{，}a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3) + a_4\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\right)$

$D_1\left(a_1 - a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - ra_4\cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\text{，}a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3) + ra_4\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\right)$

$E_1\big((1-r)(a_1 - a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - a_4\cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\text{，}(1-r)(a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3)$

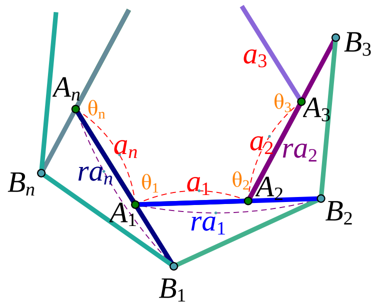
$+ a_4\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\big)$

可求得五邊形 ABCDE 及五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$重心座標皆為

$$\left(\frac{4a_1 - 3a_2\cos\theta_2 + 2a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - a_4\cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4)}{5}\text{，}\frac{3a_2\sin\theta_2 - 2a_3\sin(\theta_2+\theta_3) + a_4\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)}{5}\right)$$

(4) 當 0< $r<1$時，有相同結果。

6、凸 n 邊形



圖(十七)

如圖(十七)，n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$，邊長依序為a_1，a_2，…，a_n，

內角依序為 θ_1，θ_2，…，θ_n，以各頂點為縮放中心，

將各邊縮放 r 倍，r > 1，連接各端點形成一新 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$。

(1) 新 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$與 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$不相似。

(2) 設 G 為 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$的重心，G_1為 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$的重心。

$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{O}$，$\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_1B_2}+\overrightarrow{G_1B_3}+\cdots+\overrightarrow{G_1B_n}=\vec{O}\cdots$①

由①得 $\left(\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GB_1}\right)+\left(\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GB_2}\right)+\left(\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GB_3}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GB_n}\right)=\vec{O}$

$n\overrightarrow{G_1G}+\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1B_2}\right)+\left(\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{A_2B_3}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{GA_n}+\overrightarrow{A_nB_1}\right)=\vec{O}$

$n\overrightarrow{G_1G}+\left(\overrightarrow{GA_1}+r\overrightarrow{A_1A_2}\right)+\left(\overrightarrow{GA_2}+r\overrightarrow{A_2A_3}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{GA_n}+r\overrightarrow{A_nA_1}\right)=\vec{O}$

$n\overrightarrow{G_1G}+\left[(1-r)\overrightarrow{GA_1}+r\overrightarrow{GA_2}\right]+\left[(1-r)\overrightarrow{GA_2}+r\overrightarrow{GA_3}\right]+\cdots+\left[(1-r)\overrightarrow{GA_n}+r\overrightarrow{GA_1}\right]=\vec{O}$

$n\overrightarrow{G_1G}=\vec{O}$，$\overrightarrow{G_1G}=\vec{O}$，得 G 與$G_1$為同一點。所以經過縮放後的 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$與原 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$重心的位置相同。

設$A_1(0\text{，}0)$、$A_2(a_1\text{，}0)$、…，則 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$的重心座標為

$$\left(\frac{(n-1)a_1-[\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i(n-i)\cdot a_i\cdot\cos(\theta_2+\cdots+\theta_i)}{n}\text{，}\frac{\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i(n-i)\cdot a_i\cdot\sin(\theta_2+\cdots+\theta_i)}{n}\right)$$

(3) $$\frac{\text{n 邊形}B_1B_2\ldots B_n\text{面積}}{\text{n 邊形}A_1A_2\ldots A_n\text{面積}}=1+\frac{r(r-1)\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_na_1\sin\theta_1\right)}{\sum_{i=1}^{n-2}\left\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot\left[\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j)\right]\right\}}$$

設 $\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \sin\theta_{i+1} + a_n a_1 \sin\theta_1 = P$，

$\sum_{i=1}^{n-2}\{(-1)^{i+1} \cdot a_i \cdot [\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j \cdot a_j \cdot \sin(\theta_{i+1} + \cdots + \theta_j)]\} = Q$

$$\frac{\text{n 邊形} B_1B_2 \dots B_n \text{面積}}{\text{n 邊形} A_1A_2 \dots A_n \text{面積}} = 1 + \frac{P}{Q} r(r-1) = \frac{P}{Q}\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{P}{4Q}$$

面積比值與邊長、內角度數有關。縮放倍率與面積比值為二次函數的關係，當縮放倍率

r= $\frac{1}{2}$ 時，面積比值有最小值$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \sin\theta_{i+1} + a_n a_1 \sin\theta_1}{4\sum_{i=1}^{n-2}\{(-1)^{i+1} \cdot a_i \cdot [\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j \cdot a_j \cdot \sin(\theta_{i+1} + \cdots + \theta_j)]\}}$

(4) 當 0< $r < 1$時，與r > 1有相同結果。

7、透過 Excel 及 Gsp 繪圖軟體驗證

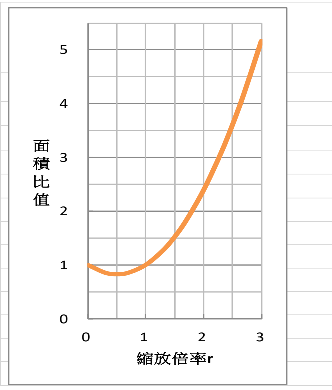
(1)以五邊形 ABCDE 為例，依序將各邊縮放 r 倍，連接各端點形成五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$。

①利用 Excel 找出當 r=1.8 時的面積比值 。②繪出縮放倍率 r 與面積比值的關係圖。

各邊	AB	BC	CD	DE	EA
邊長	4	3	3	4	3.4
內角	∠EAB	∠ABC	∠BCD	∠CDE	∠DEA
度數	103.44	114.15	106.9	118.46	97.05

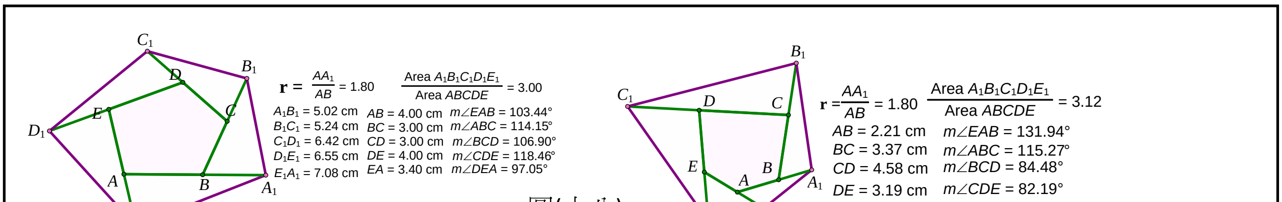
縮放倍率 r =	1.80
五邊形ABCDE面積=	20.46
五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$面積=	61.39
五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$面積 / 五邊形 ABCDE 面積 =	3.00

表(一)



③透過 Gsp 繪圖，如圖(十八)，可看出五邊形 ABCDE 與五邊形

$A_1B_1C_1D_1E_1$不相似。當縮放倍率 r 不變，改變邊長、角度，面積比值會跟著改變。



圖(十八)

(2)找出五邊形 ABCDE 與$A_1B_1C_1D_1E_1$的重心位置及其座標

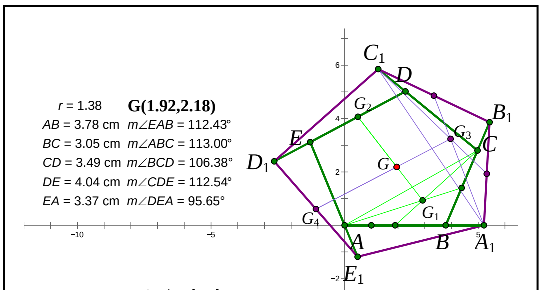
ΔABC 重心G_1，$\overline{DE}$中點G_2，在$\overline{G_1G_2}$上取一點G，

使得$\overline{GG_1}:\overline{GG_2} = 2:3$。點$G$為五邊形 ABCDE 的重心。

$\Delta A_1B_1C_1$重心G_3，$\overline{D_1E_1}$中點G_4，在$\overline{G_3G_4}$上取一點G'，

使得$\overline{G'G_1}:\overline{G'G_2} = 2:3$。點$G'$為五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$的

重心。點G與G'為同一點，且座標為(1.92,2.18)。



圖(十九)

(三)、邊長相等的正 n 角星形以各頂點為縮放中心，將各邊做 r 倍縮放

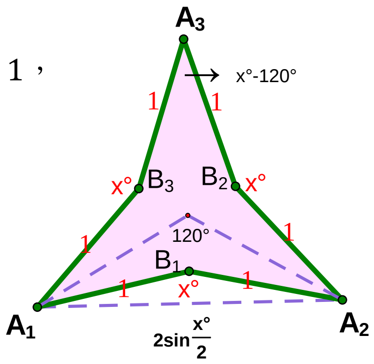
1、邊長相等的正三角星形

如圖（二十），$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1A_2}=\overline{A_2B_2}=\overline{B_2A_3}=\overline{A_3B_3}=\overline{B_3A_1}=1$，

$\angle A_1B_1A_2=\angle A_2B_2A_3=\angle A_3B_3A_1=x°$，$120<x\le 180$，

則 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_1}=2\sin\frac{x°}{2}$，

$\angle B_3A_1B_1=\angle B_1A_2B_2=\angle B_2A_3B_3=x°-120°$



圖(二十)

以各頂點為縮放中心，將各邊做 r 倍縮放，如圖(二十一)

使得$\overline{A_1P_1}=\mathrm{r}\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2P_2}=\mathrm{r}\overline{A_2B_2}$、$\overline{A_3P_3}=\mathrm{r}\overline{A_3B_3}$，

$\overline{B_1Q_2}=r\overline{B_1A_2}$、$\overline{B_2Q_3}=r\overline{B_2A_3}$、$\overline{B_3Q_1}=r\overline{B_3A_1}$

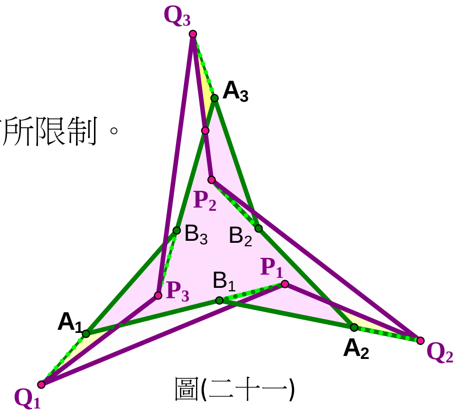
(1)此時$\overline{P_1Q_2}=\overline{P_2Q_3}=\overline{P_3Q_1}=\sqrt{(r-1)^2+r^2-2r(r-1)\cos(180°-x°)}$

$\overline{Q_1P_1}=\overline{Q_2P_2}=\overline{Q_3P_3}=\sqrt{(r-1)^2+r^2-2r(r-1)\cos\big(180°-(x°-120°)\big)}$

$\overline{P_1Q_2}\neq\overline{P_1Q_2}$，可知新圖形與原圖形不相似。

(2)要使新圖形仍為星形時，縮放倍率 r 不能無限制放大，要有所限制。

當$\overline{P_1Q_2}$落在$\overline{P_2Q_2}$上時即停止。



圖(二十一)

設$A_1(0,0)$， $A_2\left(2\sin\frac{x°}{2},0\right)$

$A_3\left(2\sin\frac{x°}{2}+2\sin\frac{x°}{2}\cos120°,\ 2\sin\frac{x°}{2}\sin120°\right)$

$B_1\left(\sin\frac{x°}{2},\ \cos\frac{x°}{2}\right)$, $B_2\left(2\sin\frac{x°}{2}+\sin\left(\frac{x°}{2}-120°\right),\ \cos\left(\frac{x°}{2}-120°\right)\right)$

$B_3\left(2\sin\frac{x°}{2}+2\sin\frac{x°}{2}\cos120°+\sin\left(\frac{x°}{2}-240°\right),\ 2\sin\frac{x°}{2}\sin120°+\cos\left(\frac{x°}{2}-240°\right)\right)$

$P_1\left(r\sin\frac{x°}{2},\ r\cos\frac{x°}{2}\right)$, $P_2\left(2\sin\frac{x°}{2}+r\sin\left(\frac{x°}{2}-120°\right),\ r\cos\left(\frac{x°}{2}-120°\right)\right)$

$P_3\left(2\sin\frac{x°}{2}+2\sin\frac{x°}{2}\cos120°+r\sin\left(\frac{x°}{2}-240°\right),\ 2\sin\frac{x°}{2}\sin120°+r\cos\left(\frac{x°}{2}-240°\right)\right)$

$Q_2\left(\sin\frac{x°}{2}+r\sin\frac{x°}{2},\ \cos\frac{x°}{2}-r\cos\frac{x°}{2}\right)$，當 $\overline{P_1Q_2}$斜率$=\overline{P_2Q_2}$斜率

$$\frac{\cos\frac{x°}{2}-r\cos\frac{x°}{2}-r\cos\frac{x°}{2}}{\sin\frac{x°}{2}+r\sin\frac{x°}{2}-r\sin\frac{x°}{2}}=\frac{\cos\frac{x°}{2}-r\cos\frac{x°}{2}-r\cos\left(\frac{x°}{2}-120°\right)}{\sin\frac{x°}{2}+r\sin\frac{x°}{2}-2\sin\frac{x°}{2}-r\sin\left(\frac{x°}{2}-120°\right)}$$

$$r^2\left[2\cos\frac{x^\circ}{2}\sin\left(\frac{x^\circ}{2}-120^\circ\right)-2\cos\frac{x^\circ}{2}\sin\frac{x^\circ}{2}\right]$$

$$+r\left[4\sin\frac{x^\circ}{2}\cos\frac{x^\circ}{2}+\sin\frac{x^\circ}{2}\cos\left(\frac{x^\circ}{2}-120^\circ\right)-\sin\left(\frac{x^\circ}{2}-120^\circ\right)\cos\frac{x^\circ}{2}\right]-2\sin\frac{x^\circ}{2}\cos\frac{x^\circ}{2}=0$$

$$r^2\left(\sqrt{3}\cos x+3\sin x+\sqrt{3}\right)-r\left(4\sin x+\sqrt{3}\right)+2\sin x=0$$

$$r=\frac{4\sin x+\sqrt{3}\pm\sqrt{-8sin^2x-8\sqrt{3}\sin x\cos x+3}}{6\sin x+2\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}}=\frac{I\pm J}{K}$$

①當 $r>\frac{I+J}{K}$ 時，圖形變形，如圖(二十二)。

②當 $r=\frac{I+J}{K}$ 時，圖形變成正三角形$\Delta P_1P_2P_3$，如圖(二十三)。

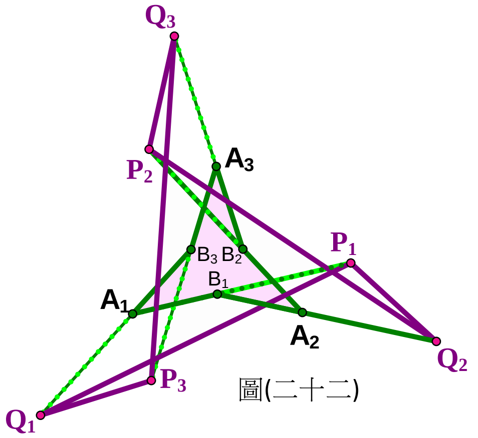
③當 $1<r<\frac{I+J}{K}$ 時，圖形為不等邊的三角星形，如圖(二十一)。

④當 $\frac{I-J}{K}<r<1$ 時，圖形為不等邊的三角星形，如圖(二十四)。

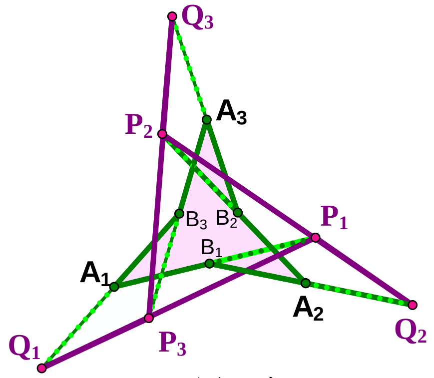
⑤當 $r=\frac{I-J}{K}$ 時，圖形為正三角形$P_1P_2P_3$，也是不等邊星形，如圖(二十五)。

⑥當 $0<r<\frac{I-J}{K}$ 時，圖形為不等邊的三角星形，如圖(二十六)。

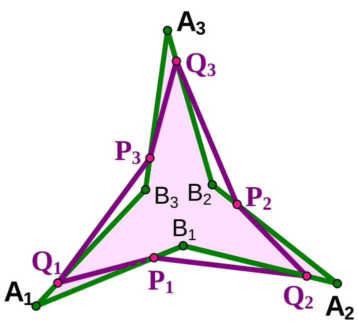
所以，在此我們只探討當 $r<\frac{I+J}{K}$ 時，新圖形三角星形面積是原等邊三角星形面積的幾倍。



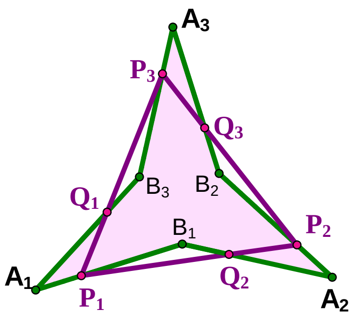
圖(二十二)



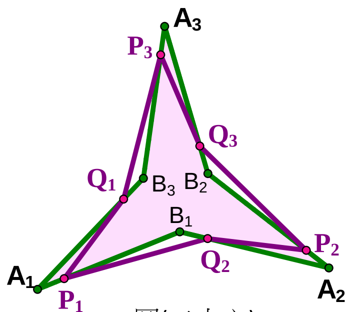
圖(二十三)



圖(二十四)



圖(二十五)



圖(二十六)

(3)說明$\Delta P_1P_2P_3$為正三角形

$$\overline{P_1P_2}^2=\left[2\sin\frac{x^\circ}{2}+r\sin\left(\frac{x^\circ}{2}-120^\circ\right)-r\sin\frac{x^\circ}{2}\right]^2+\left[r\cos\left(\frac{x^\circ}{2}-120^\circ\right)-r\cos\frac{x^\circ}{2}\right]^2$$

$$= 4\sin^2\frac{x^\circ}{2} + r^2\sin^2\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right) + r^2\sin^2\frac{x^\circ}{2} + r^2\cos^2\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right) + r^2\cos^2\frac{x^\circ}{2}$$

$$+4r\sin\frac{x^\circ}{2}\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right) - 2r^2\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)\sin\frac{x^\circ}{2} - 4rsin^2\frac{x^\circ}{2}$$

$$-2r^2\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)\cos\frac{x^\circ}{2}$$

$$= 4sin^2\frac{x^\circ}{2} + 2r^2 + 4r\sin\frac{x^\circ}{2}\left[\sin\frac{x^\circ}{2}\cdot\cos 120° - \cos\frac{x^\circ}{2}\cdot\sin 120°\right]$$

$$-2r^2\cos\left[\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right) - \frac{x^\circ}{2}\right] - 4rsin^2\frac{x^\circ}{2}$$

$$= 3r^2 - 6rsin^2\frac{x^\circ}{2} - \sqrt{3}\mathrm{r}\sin x^\circ + 4sin^2\frac{x^\circ}{2}$$

$$\overline{P_2P_3}^2 = \left[2\,sin\frac{x^\circ}{2}cos\,120° + r\,sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right) - r\,sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)\right]^2$$

$$+\left[2\sin\frac{x^\circ}{2}\sin 120° + r\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right) - r\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)\right]^2$$

$$= 4sin^2\frac{x^\circ}{2}cos^2 120° + r^2sin^2\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right) + r^2sin^2\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)$$

$$+4sin^2\frac{x^\circ}{2}\sin 120° + r^2cos^2\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right) + r^2cos^2\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)$$

$$+4r\sin\frac{x^\circ}{2}\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right)\cos 120° + 4r\sin\frac{x^\circ}{2}\sin 120°\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right)$$

$$-2r^2\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right)\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right) - 2r^2\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right)\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)$$

$$-4r\sin\frac{x^\circ}{2}\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)\cos 120° - 4r\sin\frac{x^\circ}{2}\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right)\sin 120°$$

$$= 4sin^2\frac{x^\circ}{2} + 2r^2 + 4r\sin\frac{x^\circ}{2}\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 120°\right) - 2r^2\cos 120° - 4r\sin\frac{x^\circ}{2}\sin\frac{x^\circ}{2}$$

$$= 3r^2 - 6rsin^2\frac{x^\circ}{2} - \sqrt{3}\mathrm{r}\sin x^\circ + 4sin^2\frac{x^\circ}{2}$$

$$\overline{P_3P_1}^2 = \left[2\sin\frac{x^\circ}{2} + 2\sin\frac{x^\circ}{2}\cos 120° + r\sin\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right) - r\sin\frac{x^\circ}{2}\right]^2$$

$$+\left[2\sin\frac{x^\circ}{2}\sin 120° + r\cos\left(\frac{x^\circ}{2} - 240°\right) - r\cos\frac{x^\circ}{2}\right]^2$$

$$= \left[sin\frac{x^\circ}{2} + r\,sin\left(\frac{x^\circ}{2} + 120°\right) - r\,sin\frac{x^\circ}{2}\right]^2 + \left[\sqrt{3}\sin\frac{x^\circ}{2} + r\cos\left(\frac{x^\circ}{2} + 120°\right) - r\cos\frac{x^\circ}{2}\right]$$

$$= sin^2\frac{x^\circ}{2} + r^2sin^2\left(\frac{x^\circ}{2} + 120°\right) + r^2\sin\frac{x^\circ}{2} + 3sin^2\frac{x^\circ}{2} + r^2cos^2\left(\frac{x^\circ}{2} + 120°\right)$$

$$+r^2cos^2\frac{x^\circ}{2}+2r\,sin\frac{x^\circ}{2}\sin\left(\frac{x^\circ}{2}+120^\circ\right)+2\sqrt{3}r\,sin\frac{x^\circ}{2}\cos\left(\frac{x^\circ}{2}+120^\circ\right)-2rsin^2\frac{x^\circ}{2}$$

$$-2r^2\,sin\frac{x^\circ}{2}\sin\left(\frac{x^\circ}{2}+120^\circ\right)-2r^2\cos\frac{x^\circ}{2}\cos\left(\frac{x^\circ}{2}+120^\circ\right)-2\sqrt{3}r\,sin\frac{x^\circ}{2}\cos\frac{x^\circ}{2}$$

$$=4sin^2\frac{x^\circ}{2}+2r^2-4rsin^2\frac{x}{2}-2r^2\cos 120^\circ-2rsin^2\frac{x^\circ}{2}-\sqrt{3}r\sin x^\circ$$

$$=3r^2-6rsin^2\frac{x^\circ}{2}-\sqrt{3}r\sin x^\circ+4sin^2\frac{x^\circ}{2}$$

故$\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_3P_1}$，$\Delta P_1P_2P_3$為正三角形。

(4)三角星形面積$=\frac{3}{2}\cdot 2\sin\frac{x^\circ}{2}\cdot\sin\frac{x^\circ}{2}\left(\cot 60^\circ-\cot\frac{x^\circ}{2}\right)=3sin^2\frac{x^\circ}{2}\left(\cot 60^\circ-\cot\frac{x^\circ}{2}\right)$

因為$\Delta A_1P_1Q_1\cong\Delta A_2P_2Q_2\cong\Delta A_3P_3Q_3$，$\triangle B_1P_1Q_2\cong\triangle B_2P_2Q_3\cong\triangle B_3P_3Q_1$（SAS 全等），

新三角星形面積=三角星形面積+3$\left(\triangle A_1P_1Q_1\text{面積}-\triangle B_1P_1Q_2\text{面積}\right)$

$$=\text{三角星形面積}+3\cdot\frac{r}{2}(r-1)[\sin(x^\circ-120^\circ)-\sin x^\circ]$$

$$=\text{三角星形面積}-3r(r-1)\cos(x^\circ-60^\circ)\sin 60^\circ$$

$$\frac{\text{新三角星形面積}}{\text{三角星形面積}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos(x^\circ-60^\circ)}{sin^2\frac{x^\circ}{2}\left(\cot 60^\circ-\cot\frac{x^\circ}{2}\right)}(r^2-r)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos(x^\circ-60^\circ)}{sin^2\frac{x^\circ}{2}\left(\cot 60^\circ-\cot\frac{x^\circ}{2}\right)}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+1+\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{cos(x^\circ-60^\circ)}{sin^2\frac{x^\circ}{2}\left(cot\,60^\circ-cot\frac{x^\circ}{2}\right)}$$

①當$120<x<150$時，$\cos(x^\circ-60^\circ)>0$且$\cot 60^\circ>\cot\frac{x^\circ}{2}$，

面積比值在 $r=\frac{1}{2}$ 時，有最大值 $1+\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{\cos(x^\circ-60^\circ)}{sin^2\frac{x^\circ}{2}\left(\cot 60^\circ-\cot\frac{x^\circ}{2}\right)}$

②當$x=150$ 時，$\cos 90^\circ=0$，面積比值皆為 1，面積比值不受縮放倍率的影響

③當$150<x\le 180$時，$\cos(x^\circ-60^\circ)<0$且$\cot 60^\circ>\cot\frac{x^\circ}{2}$，

面積比值在 $r=\frac{1}{2}$ 時，有最小值 $1+\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{cos(x^\circ-60^\circ)}{sin^2\frac{x^\circ}{2}\left(cot\,60^\circ-cot\frac{x^\circ}{2}\right)}$

(5)透過 Excel 來互相驗證

以邊長相等的三角星形為例。

①利用 Excel 找出縮放倍率 r 值的範圍。

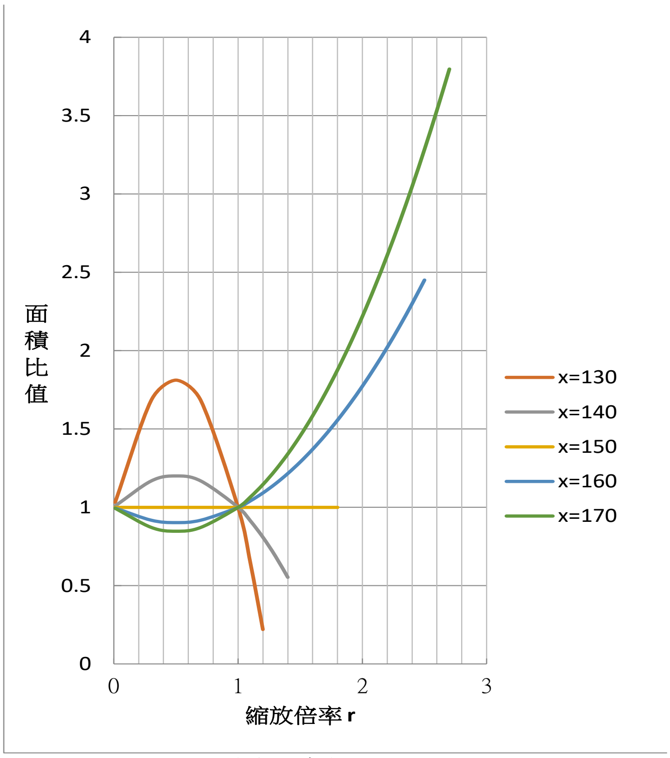
因為$r<\frac{4\sin x+\sqrt{3}+\sqrt{-8sin^2x-8\sqrt{3}\sin x\cos x+3}}{6\sin x+2\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}}$，所以

	x=130	x=140	x=150	x=160	x=170
r <	1.210352	1.469016	1.841113	2.500221	4.286121

②繪出縮放倍率 r 與面積比值的關係圖。

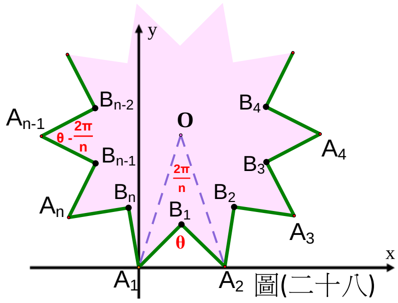
r<	x=130	x=140	x=150	x=160	x=170
0.01	1.0321	1.0079	1.000	0.9962	0.994
0.3	1.682	1.1676	1.000	0.9188	0.8721
0.5	1.8119	1.1995	1.000	0.9033	0.8477
0.7	1.682	1.1676	1.000	0.9188	0.8721
1	1	1	1.000	1	1
1.1	0.6428	0.9122	1.000	1.0425	1.067
1.2	0.2206	0.8084	1.000	1.0928	1.1462
1.3		0.6887	1.000	1.1508	1.2376
1.4		0.553	1.000	1.2165	1.3412
1.5			1.000	1.29	1.457
1.6			1.000	1.3712	1.5849
1.7			1.000	1.4601	1.725
1.8			1.000	1.5568	1.8774
1.9				1.6612	2.0419
2				1.7733	2.2186
2.1				1.8932	2.4074
2.2				2.0208	2.6085
2.3				2.1561	2.8218
2.4				2.2992	3.0472
2.5				2.45	3.2848
2.6					3.5346
2.7					3.7966

表(二)



圖(二十七)

2、邊常相等的正 n 角星形



如圖（二十八），$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1A_2}=\cdots=\overline{B_nA_1}=a$，

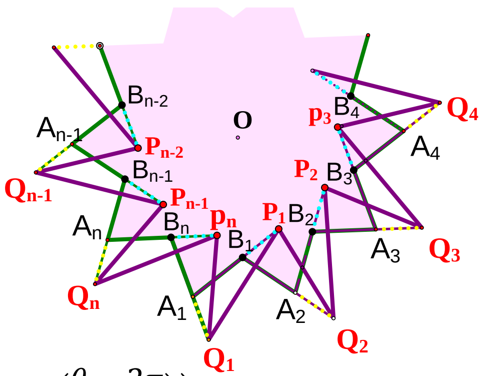
$\angle A_1B_1A_2=\angle A_2B_2A_3=\cdots=\angle A_nB_nA_1=\theta$，$\frac{2\pi}{n}<\theta\leq\pi$

$\angle B_1A_2B_2=\cdots=\angle B_nA_1B_1=\theta-\frac{2\pi}{n}$，

以各頂點為縮放中心，將各邊縮放 r 倍，

使得$\overline{A_1P_1}=\mathrm{r}\overline{A_1B_1}$，$\overline{B_1Q_2}=\mathrm{r}\overline{B_1A_2}$，⋯，

$\overline{A_nP_n}=\mathrm{r}\overline{A_nB_n}$、$\overline{B_nQ_1}=\mathrm{r}\overline{B_nA_1}$，如圖（二十九）



圖(二十九)

(1)設$A_1(0,0)$，$A_2\left(2a\sin\frac{\theta}{2},0\right)$，

$A_3\left(2a\sin\frac{\theta}{2}+2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2\pi}{n},\ 2a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$，

$B_1\left(a\sin\frac{\theta}{2},a\cos\frac{\theta}{2}\right)$，$B_2\left(2a\sin\frac{\theta}{2}+a\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right),a\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)\right)$

$B_3\left(2a\sin\frac{\theta}{2}+2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2\pi}{n}+a\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{4\pi}{n}\right),2a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{2\pi}{n}+a\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{4\pi}{n}\right)\right)$

$P_1\left(ra\sin\frac{\theta}{2},ra\cos\frac{\theta}{2}\right),P_2\left(2a\sin\frac{\theta}{2}+ra\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right),ra\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)\right)$

$P_3\left(2a\sin\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2\pi}{n}+ra\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{4\pi}{n}\right),2a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{2\pi}{n}+ra\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{4\pi}{n}\right)\right)$

$Q_2\left(a\sin\frac{\theta}{2}+ra\sin\frac{\theta}{2},a\cos\frac{\theta}{2}-ra\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$\overline{P_\iota Q_{\iota+1}}=\overline{P_n Q_1}=\sqrt{[(r-1)a]^2+(ra)^2-2ra(r-1)a\cdot\cos(\pi-\theta)}$

$\overline{Q_\iota P_\iota}=\sqrt{[(r-1)a]^2+(ra)^2-2ra(r-1)a\cdot cos\left(\pi-\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right)}$ ，

$\mathrm{i}=1,2,3,\dots,\mathrm{n}$，可知新圖形與原圖形不相似。

(2)要使新圖形仍為星形時，找出 r 的限制。

$\overline{P_1Q_2}$斜率= $\overline{P_2Q_2}$斜率

$$\frac{a\cos\frac{\theta}{2}-2ra\cos\frac{\theta}{2}}{a\sin\frac{\theta}{2}+ra\sin\frac{\theta}{2}-ra\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{a\cos\frac{\theta}{2}-ra\cos\frac{\theta}{2}-ra\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)}{a\sin\frac{\theta}{2}+ra\sin\frac{\theta}{2}-2a\sin\frac{\theta}{2}-ra\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$r^2\left[2\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

$$+r\left[4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$$r^2\left[\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)-\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\theta\right]+\mathrm{r}\left(2\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}\right)-\sin\theta=0$$

$$\mathrm{r}=\frac{2\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}\pm\sqrt{4\sin\theta\, sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)+sin^2\frac{2\pi}{n}}}{2\left[\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}-sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}=\frac{F\pm G}{H}$$

①當$r>\frac{F+G}{H}$ 時，新圖形變形　　②當$r=\frac{F+G}{H}$時，圖形變成正 n 邊形$P_1P_2\cdots P_n$。

③當$\frac{F-G}{H}<r<\frac{F+G}{H}$時，圖形為不等邊的 n 角星形。

④當$r=\frac{F-G}{H}$時，圖形為正 n 邊形$P_1P_2\cdots P_n$，也是不等邊 n 角星形。

⑤當$0<r<\frac{F-G}{H}$時，圖形為不等邊的 n 角星形。

所以，在此我們只探討當$r<\frac{F+G}{H}$時，新圖形 n 角星形面積是邊長相等正 n 角星形面積的幾倍。

(3)說明 n 邊形$P_1P_2\cdots P_n$為正 n 邊形

$$\overline{P_1P_2}^2=a^2\left[2\sin\frac{\theta}{2}+r\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)-r\sin\frac{\theta}{2}\right]^2+\left[r\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)-r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2$$

$$=a^2\left[4sin^2\frac{\theta}{2}+2r^2+4r\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)-2r^2\cos\frac{2\pi}{n}-4r\,sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\overline{P_2P_3}^2=a^2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2\pi}{n}+r\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{4\pi}{n}\right)-r\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2$$

$$+\left[2\sin\frac{\theta}{2}sin\frac{2\pi}{n}+r\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{4\pi}{n}\right)-r\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2$$

$$=a^2\left[4sin^2\frac{x}{2}+2r^2+4r\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)-2r^2\cos\frac{2\pi}{n}-4r\,sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

同理可推得$\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_2P_3}^2=\cdots=\overline{P_nP_1}^2$。

因為$\Delta OP_1B_1\cong\Delta OP_2B_2\cong\Delta OP_3B_3\cong\cdots\cong\Delta OP_nB_n$（SAS 全等），

因此$\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=\overline{OP_3}=\cdots=\overline{OP_n}$，O 點為 n 邊形$P_1P_2\dots P_n$的外心，

又$\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_3P_4}=\cdots=\overline{P_nP_1}$，等弦對等弧，因此$\angle P_1P_2P_3=\angle P_2P_3P_4=\cdots=\angle P_nP_1P_2$

所以n 邊形$P_1P_2\cdots P_n$為正 n 邊形

(4)正 n 角星形面積$=\frac{n}{2}\cdot 2\,a\sin\frac{\theta}{2}\cdot a\,sin\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)=na^2sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\theta}{2}\right)$

新 n 角星形面積=正 n 角星形面積+n$\left(\triangle A_1P_1Q_1\text{面積}-\triangle B_1P_1Q_2\text{面積}\right)$

$$=\text{正 n 角星形面積}+\frac{n\cdot ra\cdot(r-1)a}{2}\left[\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)-\sin(\theta)\right]$$

$$=\text{正 n 角星形面積}-nr(r-1)a^2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\frac{\text{新 n 角形面積}}{\text{正 n 角星形面積}}=1-\mathrm{r}(r-1)\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}\quad\text{，令}\frac{-\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}=k$$

$$\frac{\text{新 n 角形面積}}{\text{正 n 角星形面積}}=1+\mathrm{k}\mathrm{r}(r-1)=\mathrm{k}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{k}{4}$$ ，面積比值與邊長無關。

①當 $\frac{2\pi}{n}<\theta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}$ 時，$k>0$，面積比值在$r=\frac{1}{2}$時，有最大值$1+\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$

②當 $\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}$時，$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)=0$，面積比值為 1，此時面積比值與縮放倍率無關

③當 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}<\theta\le\pi$時，$k<0$，面積比值在$r=\frac{1}{2}$ 時，有最小值$1+\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$

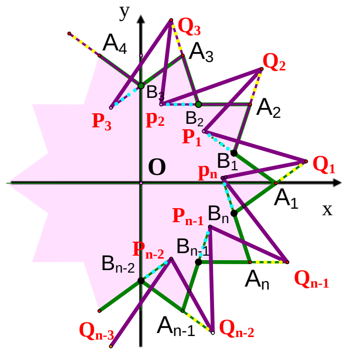
(5) 說明縮放後的新 n 角星形重心與正 n 角星形重心位置相同

①如圖(三十)，設 O(0，0)，點 O 為正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$的重心，正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$面積=A，

$\Delta A_1B_1A_2$面積=$\Delta A_2B_2A_3$面積=$\cdots=\Delta A_nB_nA_1$面積=B；

$\Delta A_1B_1A_2$、$\Delta A_2B_2A_3$、⋯、$\Delta A_nB_nA_1$的重心為C_1、C_2、⋯、C_n

點C_i到 O 點距離皆為 d；$\angle A_1OC_i$角度依序為 $\frac{\pi}{n}$、$\frac{3\pi}{n}$、⋯、



圖(三十)

$\frac{(2n-1)\pi}{n}$；正 n 角星形重心 x 座標= $\frac{A\times 0-B\times d\times(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{n})}{A-n\times B}$ = 0

y 座標= $\frac{A\times 0-B\times d\times(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-1)\pi}{n})}{A-n\times B}$ = 0，所以正 n 角星形重心在 O 點。

②點 O(0，0)為正 n 邊形$P_1P_2\cdots P_n$的重心，設正 n 邊形$P_1P_2\cdots P_n$面積= P，

$\Delta P_1Q_1P_n$面積=$\Delta P_2Q_2P_1$面積=$\cdots=\Delta P_nQ_nP_{n-1}$面積=Q；$\Delta P_1Q_1P_n$、$\Delta P_2Q_2P_1$、⋯、$\Delta P_nQ_nP_{n-1}$

的重心為R_1、R_2、⋯、R_n，點R_i到點 O 距離皆為 s；$\angle A_1OR_i$角度依序為φ、$(\varphi+\frac{2\pi}{n})$、

$(\varphi+\frac{4\pi}{n})$、⋯、$(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n})$。

當縮放倍率 r 在 $\frac{F-G}{H}\leq r<\frac{F+G}{H}$時，不等邊的新 n 角星形。

重心 x 座標= $\frac{P\times 0+Q\times s\times(\cos\varphi+\cos(\varphi+\frac{2\pi}{n})+\cos(\varphi+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\cos(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n}))}{P+n\times Q}$ = 0

y 座標= $\frac{P\times 0+Q\times s\times(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{2\pi}{n})+\sin(\varphi+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\sin(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n}))}{P+n\times Q}$ = 0，

當縮放倍率 r 在 $0<r<\frac{F-G}{H}$時，不等邊的新 n 角星形。

重心 x 座標= $\frac{P\times 0-Q\times s\times(\cos\varphi+\cos(\varphi+\frac{2\pi}{n})+\cos(\varphi+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\cos(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n}))}{P-n\times Q}$ = 0

y 座標= $\frac{P\times 0-Q\times s\times(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{2\pi}{n})+\sin(\varphi+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\sin(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n}))}{P-n\times Q}$ = 0，

所以新 n 角星形重心在 O 點。

(6)透過 Excel 及 Gsp 繪圖探討

邊長相等的正 n 角星形以各頂點為縮放中心，將各邊做 r 倍縮放。

①利用 Excel 找出 r 值的範圍。

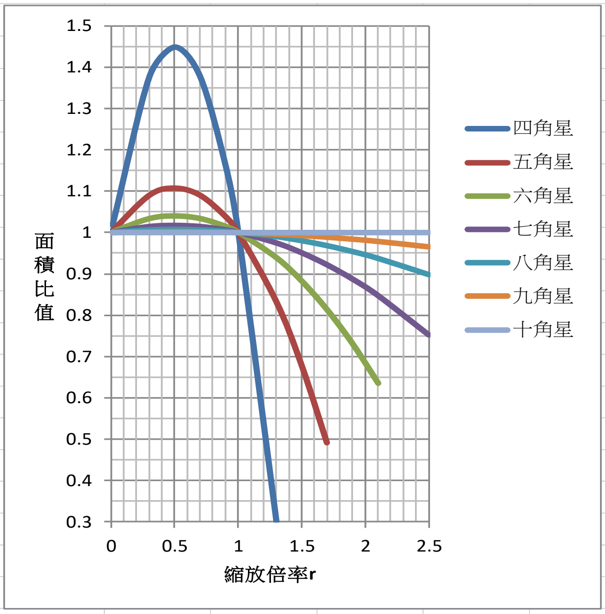
$$r < \frac{2\sin\theta + \sin\frac{2\pi}{n} + \sqrt{4\sin\theta\,sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) + sin^2\frac{2\pi}{n}}}{2\left[\sin\theta + \sin\frac{2\pi}{n} - sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right]}$$

n \ x°	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
3									1.21	1.469	1.841	2.5	4.286
4						1.18	1.374	1.605	1.894	2.286	2.881	3.972	7.003
5				1.148	1.344	1.56	1.813	2.118	2.505	3.038	3.851	5.35	9.522
6			1.204	1.42	1.656	1.92	2.237	2.618	3.108	3.782	4.814	6.715	11.99
7		1.193	1.428	1.681	1.961	2.28	2.658	3.119	3.712	4.531	5.786	8.092	14.46
8	1.124	1.377	1.647	1.939	2.266	2.64	3.081	3.623	4.323	5.29	6.772	9.488	16.95
9	1.274	1.559	1.864	2.198	2.571	3	3.507	4.132	4.94	6.059	7.772	10.91	19.47
10	1.422	1.74	2.082	2.456	2.877	3.36	3.936	4.645	5.564	6.836	8.786	12.35	22.03

表(三)

②以$x = 108°$為例。繪出縮放倍率 r 與面積比值的關係圖。

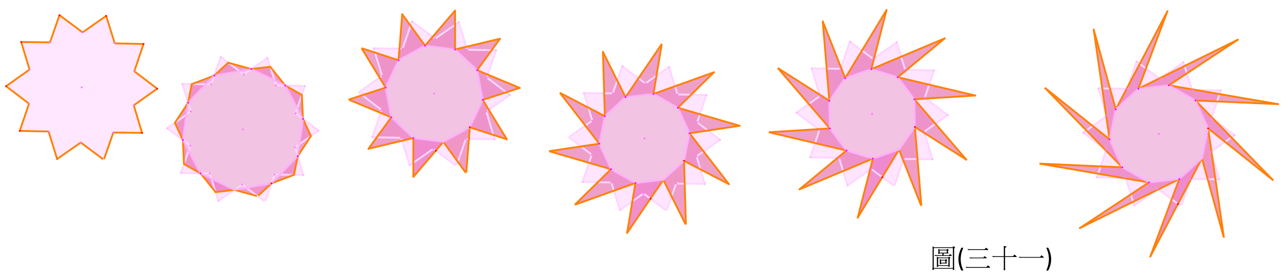
r	四角星	五角星	六角星	七角星	八角星	九角星	十角星
0.01	1.0178	1.0042	1.0016	1.0007	1.0003	1.0001	1
0.3	1.3767	1.0897	1.0332	1.0138	1.0057	1.0019	1
0.5	1.4484	1.1068	1.0395	1.0165	1.0068	1.0023	1
0.7	1.3767	1.0897	1.0332	1.0138	1.0057	1.0019	1
0.9	1.1614	1.0384	1.0142	1.0059	1.0024	1.0008	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1.3	0.3005	0.8335	0.9384	0.9743	0.9894	0.9965	1
1.5		0.6797	0.8815	0.9506	0.9796	0.9932	1
1.7		0.4918	0.812	0.9216	0.9677	0.9893	1
1.9			0.7299	0.8873	0.9535	0.9846	1
2.1			0.6351	0.8477	0.9372	0.9792	1
2.5				0.7528	0.8981	0.9662	1
2.7					0.8752	0.9586	1
2.9					0.8502	0.9503	1
3.3						0.9315	1
3.5							1
3.7							1
3.8							1



表(四)

③以正十角星形$x = 108°$為例。雖然圖形縮放倍率不同，但**面積都一樣大**。

原圖 **r=0.7** **r=1.4** **r=1.8** **r=2.2** **r=2.7**



圖(三十一)

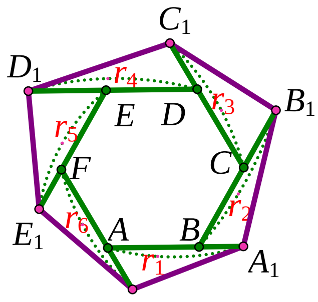
二、多邊形依序以各頂點為縮放中心，將各邊以不同倍率縮放的探討

在此以縮放倍率皆同時大於 1 或皆同時大於 0 小於等於 1 前提下探討。

(一)正多邊形以各頂點為縮放中心，將各邊做r_i倍縮放

1、正六邊形

如圖(三十二)、(三十三)，正六邊形 ABCDEF，邊長為 1，$\overline{AA_1}=\mathrm{r}_1\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=\mathrm{r}_2\overline{BC}$，$\overline{CC_1}=\mathrm{r}_3\overline{CD}$，$\overline{DD_1}=\mathrm{r}_4\overline{DE}$，$\overline{EE_1}=\mathrm{r}_5\overline{EF}$，$\overline{FF_1}=\mathrm{r}_6\overline{FA}$



圖(三十二)

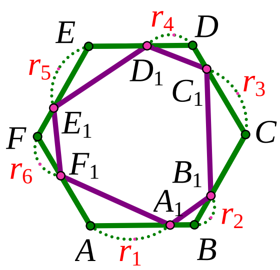
當$r_i>1$時，

六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$面積

= 正六邊形 ABCDEF +

$$\frac{\sin 60^\circ}{2}\cdot[r_1(r_6-1)+r_2(r_1-1)+r_3(r_2-1)+r_4(r_3-1)+r_5(r_4-1)+r_6(r_5-1)]$$

$$=\text{正六邊形 ABCDEF 面積}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left[r_1(r_6-1)+\sum_{i=1}^{5} r_{i+1}\,(r_i-1)\right]$$



圖(三十三)

當 0< r_i < 1時，

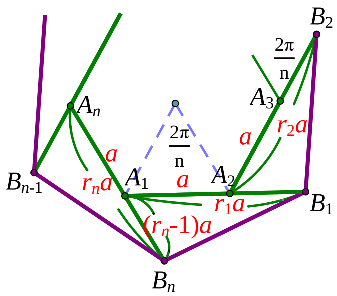
六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$面積

$$=\text{正六邊形 ABCDEF 面積}-\frac{\sqrt{3}}{4}\left[r_1(1-r_6)+\sum_{i=1}^{5} r_{i+1}\,(1-r_i)\right]，$$

$$=\text{正六邊形 ABCDEF 面積}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left[r_1(r_6-1)+\sum_{i=1}^{5} r_{i+1}\,(r_i-1)\right]$$ 與r_i >1 時有相同結果。

所以$$\frac{\text{六邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{面積}}{\text{正六邊形}ABCDEF\text{面積}}=1+\frac{1}{6}\left[r_1(r_6-1)+\sum_{i=1}^{5} r_{i+1}\,(r_i-1)\right]$$

2.正 n 邊形



圖(三十四)

如圖(三十四)、(三十五)正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$，邊長為 a，

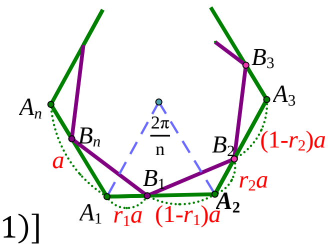
依序以各頂點為縮放中心將各邊以r_1、r_2、 ... 、r_n倍率縮放，

連接各端點形成一 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$。

當$r_i>1$ 時，n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$面積

$$=\text{正 n 邊形}A_1A_2\ldots A_n\text{面積}+\frac{a^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\left[r_1(r_n-1)+\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1}\,(r_i-1)\right]$$

當 0< r_i < 1時，亦有相同結果。



圖(三十五)

所以$$\frac{\text{n 邊形}B_1B_2\ldots B_n\text{面積}}{\text{正}n\text{邊形}A_1A_2\ldots A_n\text{面積}}=1+\frac{\frac{a^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\left[r_1(r_n-1)+\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1}\,(r_i-1)\right]}{n\cdot\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}}$$

$$=1+\frac{4}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\left[r_1(r_n-1)+\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1}\,(r_i-1)\right]$$

n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$面積與正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$面積比值與邊長無關，與內角度數縮放倍率r_i有關。

3.透過 Excel 及 Gsp 繪圖軟體探討

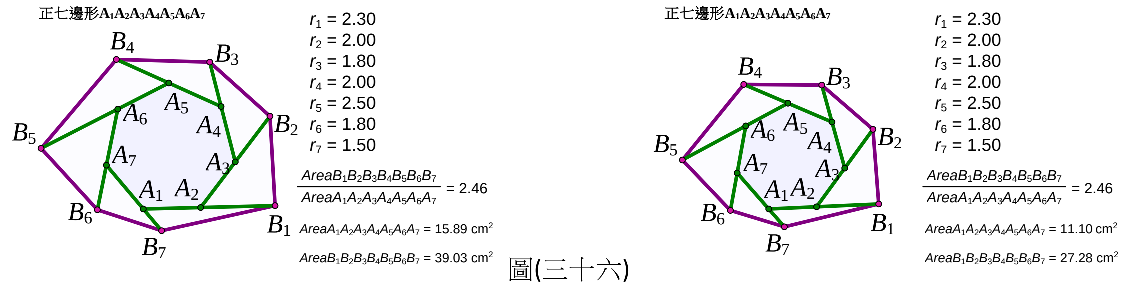
以正七邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$為例，將各邊以r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7倍縮放，連接各端點形成七邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$。

(1)利用 Excel 找出面積比值

縮放	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	正七邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$	=	2.46
倍率r	2.3	2	1.8	2	2.5	1.8	1.5	七邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$		

表(五)

(2)透過 Gsp 繪圖，如圖(三十六)，可看出縮放倍率r_i不變，改變邊長，面積比值不變。



圖(三十六)

(二)三角形、平行四邊形、鳶形、梯形、四邊形、n 邊形，以各頂點為縮放中心，將各邊做r_i倍縮放

1、三角形

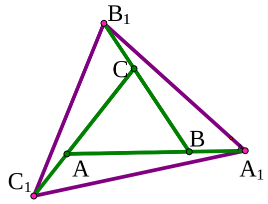
(1) 如圖(三十七)ΔABC，$\overline{AA_1} = r_1\overline{AB}$，$\overline{BB_1} = r_2\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = r_3\overline{CA}$，$r_i > 1$

ΔAA_1C_1面積$= r_1\Delta ABC_1$面積$= r_1(r_3-1)\Delta ABC$面積

ΔBB_1A_1面積$= r_2\Delta BCA_1$面積$= r_2(r_1-1)\Delta ABC$面積

ΔCC_1B_1面積$= r_3\Delta CAB_1$面積$= r_3(r_2-1)\Delta ABC$面積

$$\frac{\Delta A_1B_1C_1\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}} = 1 + r_1(r_3-1) + r_2(r_1-1) + r_3(r_2-1)$$

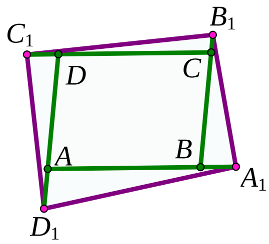

圖(三十七)

(2) 當$0 < r_i < 1$時，所得到的面積的比值與$r_i > 1$是相同的。(3)面積的比值只與縮放倍率r_i有關。

2、平行四邊形

(1) 如圖(三十八)，平行四邊形 ABCD，$\overline{AA_1} = r_1\overline{AB}$，

$\overline{BB_1} = r_2\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = r_3\overline{CD}$，$\overline{DD_1} = r_4\overline{DA}$，$r_i > 1$


圖(三十八)

ΔAA_1D_1面積$=\dfrac{r_1(r_4-1)}{2}$平行四邊形$ABCD$面積，$\Delta BB_1A_1=\dfrac{r_2(r_1-1)}{2}$平行四邊形$ABCD$面積

ΔCC_1B_1面積$=\dfrac{r_3(r_2-1)}{2}$平行四邊形$ABCD$面積，$\Delta \mathrm{D}D_1C_1=\dfrac{r_4(r_3-1)}{2}$平行四邊形$ABCD$面積

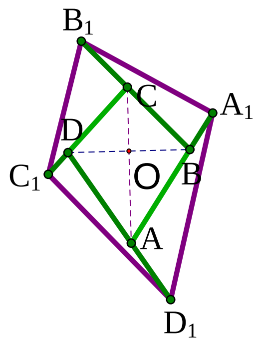
$$\frac{\text{四邊形}A_1B_1C_1D_1\text{面積}}{\text{平行四邊形}ABCD\text{面積}}=1+\frac{1}{2}[r_1(r_4-1)+r_2(r_1-1)+r_3(r_2-1)+r_4(r_3-1)]$$

(2)當 $0<r_i<1$ 時，所得到的面積的比值與$r_i>1$ 是相同的。(3)面積比值只與縮放倍率r_i有關。

3、鳶形

(1) 如圖(三十九)，鳶形 ABCD，兩對角線相交於 O 且，$\overline{\mathrm{A0}}=\mathrm{r}\,\overline{\mathrm{C0}}$，

$\overline{AA_1}=r_1\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=r_2\overline{BC}$， $\overline{CC_1}=r_3\overline{CD}$，$\overline{\mathrm{DD}_1}=r_4\overline{DA}$，$r_i>1$



圖(三十九)

$\Delta \mathrm{A}A_1D_1$面積$=r_1(r_4-1)\Delta DAB$面積$=\dfrac{rr_1(r_4-1)}{r+1}$鳶形$ABCD$面積

$\Delta \mathrm{B}B_1A_1$面積$=r_2(r_1-1)\Delta ABC$面積$=\dfrac{r_2(r_1-1)}{2}$鳶形$ABCD$面積

$\Delta \mathrm{C}C_1B_1$面積$=r_3(r_2-1)\Delta BCD$面積$=\dfrac{r_3(r_2-1)}{r+1}$鳶形$ABCD$面積

$\Delta \mathrm{D}D_1C_1$面積$=r_4(r_3-1)\Delta CDA$面積$=\dfrac{r_4(r_3-1)}{2}$鳶形$ABCD$面積

$$\frac{\text{四邊形}A_1B_1C_1D_1\text{面積}}{\text{鳶形}ABCD\text{面積}}=1+\frac{rr_1(r_4-1)}{r+1}+\frac{r_2(r_1-1)}{2}+\frac{r_3(r_2-1)}{r+1}+\frac{r_4(r_3-1)}{2}$$

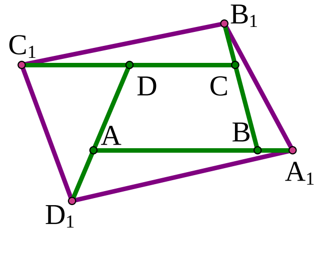
(2) 當 $0<r_i<1$ 時，所得到的面積的比值與$r_i>1$ 是相同的。

(3) 面積比值與與縮放倍率r_i及 $\overline{\mathrm{A0}}$、 $\overline{\mathrm{C0}}$有關。

4、梯形

(1)如圖(四十)，梯形 ABCD，$\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{r}\,\overline{\mathrm{CD}}$，$\overline{AA_1}=r_1\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=r_2\overline{BC}$ ，$\overline{CC_1}=r_3\overline{CD}$

，$\overline{\mathrm{DD}_1}=r_4\overline{DA}$，$r_i>1$



圖(四十)

$\Delta \mathrm{A}A_1D_1=r_1(r_4-1)\Delta DAB=\dfrac{rr_1(r_4-1)}{r+1}$梯形$ABCD$

$\Delta \mathrm{B}B_1A_1=r_2(r_1-1)\Delta ABC=\dfrac{rr_2(r_1-1)}{r+1}$梯形$ABCD$

$\Delta \mathrm{C}C_1B_1=r_3(r_2-1)\Delta BCD=\dfrac{r_3(r_2-1)}{r+1}$梯形$ABCD$

$\Delta \mathrm{D}D_1C_1=r_4(r_3-1)\Delta CDA=\dfrac{r_4(r_3-1)}{r+1}$梯形$ABCD$

$$\frac{四邊形A_1B_1C_1D_1面積}{梯形ABCD面積}=1+\left(\frac{rr_1(r_4-1)}{r+1}+\frac{rr_2(r_1-1)}{r+1}+\frac{r_3(r_2-1)}{r+1}+\frac{r_4(r_3-1)}{r+1}\right)$$

(2)當 $0<r_i<1$ 時，所得到的面積的比值與$r_i>1$ 是相同的。

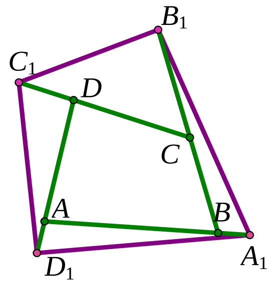
(3)面積比值與縮放倍率r_i和上下底的比有關。

5、四邊形

(1) 如圖(四十一)，四邊形 ABCD，$\overline{AB}=a_1$，$\overline{BC}=a_2$，$\overline{CD}=a_3$，$\overline{DA}=a_4$

$\overline{AA_1}=r_1\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=r_2\overline{BC}$，$\overline{CC_1}=r_3\overline{CD}$，$\overline{DD_1}=r_4\overline{DA}$，$r_i>1$

$\angle DAB=\theta_1$，$\angle ABC=\theta_2$，$\angle BCD=\theta_3$，$\angle CDA=\theta_4$



圖(四十一)

ΔAA_1D_1面積=$\frac{1}{2}r_1a_1\cdot(r_4-1)a_4\sin(\pi-\theta_1)$

ΔBB_1A_1面積=$\frac{1}{2}r_2a_2\cdot(r_1-1)a_1\sin(\pi-\theta_2)$

ΔCC_1B_1面積=$\frac{1}{2}r_3a_3\cdot(r_2-1)a_2\sin(\pi-\theta_3)$，$\Delta DD_1C_1$面積=$\frac{1}{2}r_4a_4\cdot(r_3-1)a_3\sin(\pi-\theta_4)$

$$\frac{四邊形A_1B_1C_1D_1面積}{四邊形ABCD面積}=1+\frac{\sum_{i=1}^{3}a_i(r_i-1)\cdot a_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_4(r_4-1)\cdot a_1r_1\sin\theta_1}{a_1a_4\sin\theta_1+a_2a_3\sin\theta_3}$$

(2)當 $0<r_i<1$ 時，所得到的面積的比值與$r_i>1$ 是相同的。

(3)面積比值與放倍率r_i及邊長、內角度數有關。

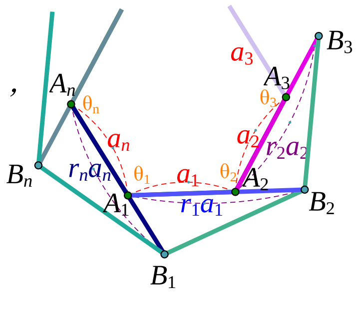
6、n 邊形(n> 4)

(1)如圖(四十二)，n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$，邊長依序為a_1、a_2、⋯、a_n，

內角依序為θ_1、θ_2、⋯、θ_n以各頂點為縮放中心，

將各邊依序以r_1、r_2、⋯、r_n倍縮放，$r_i>1$

連接各端點，形成一新 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$。



圖(四十二)

$$\frac{n\ 邊形B_1B_2\ldots B_n}{n\ 邊形A_1A_2\ldots A_n}=1+\frac{\sum_{i=1}^{n-1}a_i(r_i-1)\cdot a_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_n(r_n-1)\cdot a_1r_1\sin\theta_1}{\sum_{i=1}^{n-2}\{(-1)^{i+1}a_i\cdot[\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j)]\}}$$

(2) 當 $0<r_i<1$ 時，所得到的面積的比值與$r_i>1$ 是相同的。。

(3) 面積比值與縮放倍率r_i及邊長、內角度數有關。

7、透過 Excel 及 Gsp 繪圖軟體驗證

以五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$為例，將各邊以r_1、r_2、r_3、r_4、r_5倍縮放，連接各端點形成五邊形$B_1B_2B_3B_4B_5$。

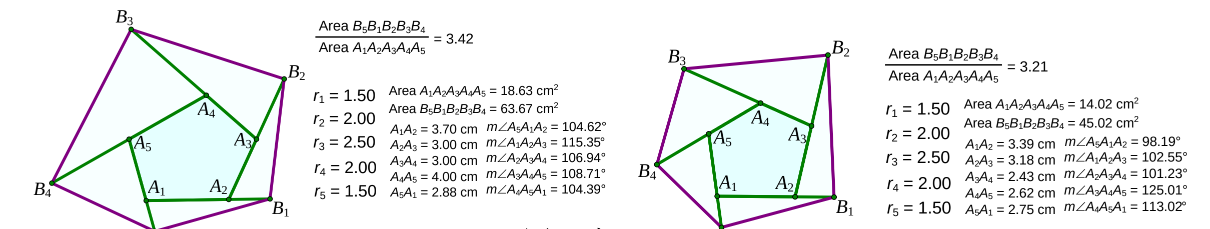
(1)利用 Excel 找出面積比值

各邊邊長	A_1A_2	A_2A_3	A_3A_4	A_4A_5	A_5A_1
	3.7	3	3	4	2.88
內角度數	∠A_1	∠A_2	∠A_3	∠A_4	∠A_5
	104.62	115.35	106.94	108.71	104.39
縮放倍率r	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
	1.5	2	2.5	2	1.5

五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$面積=	18.65
五邊形$B_1B_2B_3B_4B_5$面積=	63.71
$\dfrac{五邊形B_1B_2B_3B_4B_5面積}{五邊形A_1A_2A_3A_4A_5面積}=$	3.42

表(六)

(2)Gsp 繪圖，如圖(四十三)， 當縮放倍率r_1、r_2、r_3、r_4、r_5不變，改變邊長、角度，面積比值會跟著改變。



圖(四十三)

(三)、邊長相等的正 n 角星形以各頂點為縮放中心，將各邊做r_i倍縮放

1、邊常相等的正 n 角星形

$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1A_2}=\cdots=\overline{B_nA_1}=a$，$\angle A_1B_1A_2$=$\angle A_2B_2A_3=\cdots=\angle A_nB_nA_1=\theta$，$\frac{2\pi}{n}<\theta\leq\pi$

以各頂點為縮放中心，將各邊依序以r_1、r_2、⋯、r_{2n}倍縮放，$r_i>1$連接各端點，使得

$\overline{A_1P_1}=r_1\overline{A_1B_1}$，$\overline{B_1Q_2}=r_2\overline{B_1A_2}$，⋯，$\overline{A_nP_n}=r_{2n-1}\overline{A_nB_n}$、$\overline{B_nQ_1}=r_{2n}\overline{B_nA_1}$。如圖（四十四）

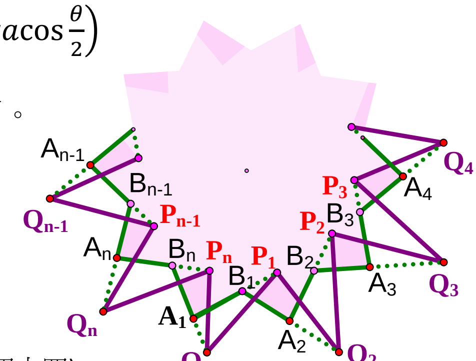
設$A_1(0,0)$，$A_2\left(2\,a\sin\frac{\theta}{2},0\right)$，$B_2\left(2a\sin\frac{\theta}{2}+a\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right),a\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)\right)$

$P_1\left(r_1a\sin\frac{\theta}{2},r_1a\cos\frac{\theta}{2}\right)$，$Q_2\left(a\sin\frac{\theta}{2}+ra\sin\frac{\theta}{2},a\cos\frac{\theta}{2}-ra\cos\frac{\theta}{2}\right)$

(1)要使新圖形仍為n 角星形時，縮放倍率r_i，也要有所限制。

當r_2>1 時，移動點 P_1，當$\overline{P_1Q_2}$落在$\overline{B_2Q_2}$上時即停止。

也就是$\overline{P_1Q_2}$斜率= $\overline{B_2Q_2}$斜率



圖(四十四)

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}-r_2\cos\frac{\theta}{2}-r_1\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+r_2\sin\frac{\theta}{2}-r_1\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-r_2\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}+r_2\sin\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}-\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$r_1\left[\sin\theta-\sin\frac{2\pi}{n}-r_2\sin\theta\right]=\sin\theta-\sin\frac{2\pi}{n}-r_2\sin\theta-r_2\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)$$

$r_1=\dfrac{\sin\theta-\sin\frac{2\pi}{n}-r_2\left[\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}{\sin\theta-\sin\frac{2\pi}{n}-r_2\sin\theta}$，當$r_2$很大時，$r_1$趨近於$\dfrac{\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\theta}$

因此，當 i 為偶數時，r_i沒有限制；當 i 為奇數時，$r_i\le 1+\dfrac{\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\theta}$，新圖形仍為 n 角星形

(2)正 n 角星形面積$=\frac{n}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot a\,sin\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)=na^2sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\theta}{2}\right)$

新 n 角星形面積=正 n 角星形面積+$\left(\triangle A_1P_1Q_1\text{面積}+\triangle A_2P_2Q_2\text{面積}+\cdots+\triangle A_nP_nQ_n\text{面積}\right)$

$$-\left(\triangle B_1P_1Q_2\text{面積}+\triangle B_2P_2Q_3\text{面積}+\cdots+\triangle B_nP_nQ_1\text{面積}\right)$$

$=$ 正 n 角星形面積 $+\dfrac{a^2\cdot\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)}{2}\ [r_1(r_{2n}-1)+r_3(r_2-1)+\cdots+r_{2n-1}(r_{2n-2}-1)]$

$$-\frac{a^2\sin\theta}{2}\ [r_2(r_1-1)+r_4(r_3-1)+\cdots+r_{2n}(r_{2n}-1)]$$

$=$ 正 n 角星形面積 $+$

$$\frac{a^2}{2}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n-1}r_{2i+1}(r_{2i}-1)+r_1(r_{2n}-1)\right]\cdot\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n}r_{2i}(r_{2i-1}-1)\cdot\sin\theta\right\}$$

$$\frac{\text{新 n 角星形面積}}{\text{正 n 角星形面積}}=1+\frac{\left[\sum_{i=1}^{n-1}r_{2i+1}(r_{2i}-1)+r_1(r_{2n}-1)\right]\cdot\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n}r_{2i}(r_{2i-1}-1)\cdot\sin\theta}{2n\cdot sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$$

，面積比值與邊長無關與縮放倍率r_i及角度有關。

(3)透過 Excel 及 Gsp 繪圖來互相驗證

①找出當 i 為奇數時，縮放倍率r_i範圍。$r_i\le 1+\dfrac{\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\theta}$

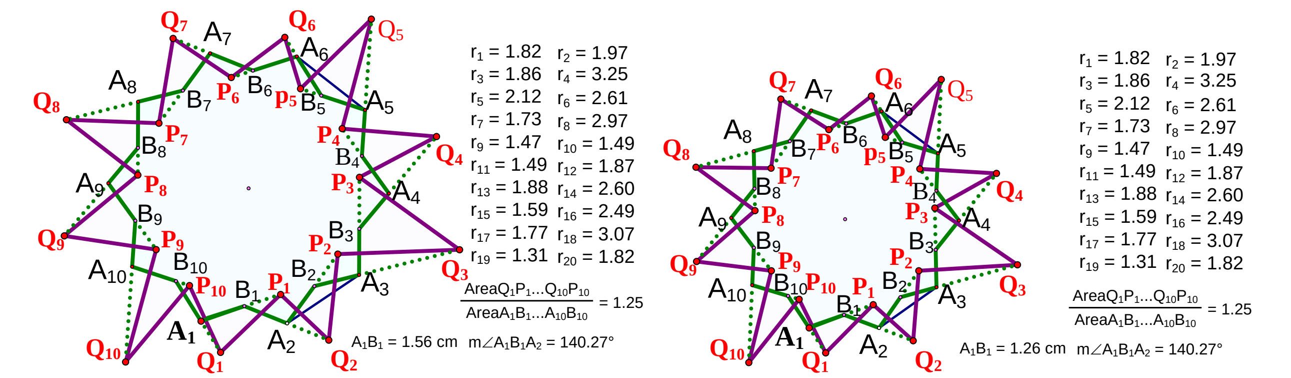
n \ x	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
3									1.227	1.532	2	2.879	5.411
4						1.18	1.364	1.577	1.839	2.192	2.732	3.747	6.671
5				1.141	1.309	1.48	1.655	1.858	2.107	2.442	2.956	3.922	6.703
6			1.185	1.347	1.5	1.65	1.815	2	2.227	2.532	3	3.879	6.411
7		1.172	1.339	1.486	1.623	1.76	1.908	2.075	2.28	2.555	2.978	3.772	6.057
8	1.114	1.299	1.45	1.582	1.707	1.83	1.964	2.115	2.3	2.55	2.932	3.65	5.717
9	1.227	1.395	1.532	1.653	1.766	1.88	2	2.137	2.305	2.532	2.879	3.532	5.411
10	1.316	1.47	1.595	1.705	1.809	1.91	2.023	2.148	2.302	2.51	2.827	3.424	5.143

表(七)

②以正十角星形為例。以各頂點為縮放中心，將各邊依序以r_1、r_2、⋯、r_{20}倍縮放。找出面積比值。

縮放倍率ri	r_1	r_3	r_5	r_7	r_9	r_{11}	r_{13}	r_{15}	r_{17}	r_{19}
	1.82	1.86	2.12	1.73	1.47	1.49	1.88	1.59	1.77	1.31
縮放倍率ri	r_2	r_4	r_6	r_8	r_{10}	r_{12}	r_{14}	r_{16}	r_{18}	r_{20}
	1.97	3.25	2.61	2.97	1.49	1.87	2.60	2.49	3.07	1.82
角度	θ	$\theta-2\pi/n$								
	140.27	104.27								
縮放 倍率 ri 限制，i為奇數	$r_i\leq$	$\frac{\text{新十角星形面積}}{\text{正十角星形面積}}=$			1.25		表(八)			
	2.516									

③如圖(四十五)，當縮放倍率r_1、r_2、...、r_{20}不變，改變邊長，面積比值不變。



圖(四十五)

伍、研究結果和討論

一、多邊形，以各頂點為縮放中心，將各邊以相同倍率縮放後，連接各端點，所形成的新多邊形與原多邊形形狀、面積的關係。

(一)、正多邊形，將各邊做 r 倍縮放，可得

1、新多邊形仍為正多邊形。新正多邊形的重心、外心、內心與原多邊形的位置相同。

2、新多邊形與原多邊形面積比值如下。面積比值與邊長無關，與內角度數及縮放倍率有關。 (1)正三角形：$3r^2-3r+1$ (2)正方形：$2r^2-2r+1$ (3)正六邊形：r^2-r+1

$$(4)\text{正 n 邊形：}1+4r(r-1)\sin^2\frac{\pi}{n}=4\sin^2\frac{\pi}{n}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)$$

3、縮放倍率與面積比值為二次函數的關係，當縮放倍率 r= $\frac{1}{2}$時，面積比值有最小值 $1-\sin^2\frac{\pi}{n}$。

(二)、三角形、平行四邊形、菱形、鳶形、n 邊形，將各邊做 r 倍縮放，可得

1、新多邊形與原多邊形不相似。但平行四邊形各邊做 r 倍縮放仍為平行四邊形。

2、新多邊形與原多邊形重心的位置相同。n 邊形重心座標為

$$\left(\frac{(n-1)a_1-[\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i(n-i)\cdot a_i\cdot cos\,(\theta_2+\cdots+\theta_i)}{n}\ ,\frac{\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i(n-i)\cdot a_i\cdot \sin\,(\theta_2+\cdots+\theta_i)}{n}\right)$$

3、新多邊形與原多邊形面積比值如下:

(1)三角形 : $3r^2-3r+1$ (2)平行四邊形、鳶形、梯形： $2r^2-2r+1$

(3)五邊形：$1+\dfrac{r(r-1)(\sum_{i=1}^{4}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_5a_1\sin\theta_1)}{\sum_{i=1}^{3}\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot[\sum_{j=i+1}^{4}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j)]\}}$

(4)n 邊形：$\dfrac{(\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_na_1\sin\theta_1)}{\sum_{i=1}^{n-2}\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot[\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j)]\}}\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$+1-\frac{\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_na_1\sin\theta_1}{4\sum_{i=1}^{n-2}\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot[\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j)]\}}$$

三角形、四邊形面積比值與邊長無關。n 邊形當 $n\ \geq 5$時，面積比值與邊長、內角度數及縮放倍率皆有關。

4、縮放倍率與面積比值為二次函數的關係，當縮放倍率 r= $\frac{1}{2}$ 時，面積比值有最小值。

(三)、邊長相等的 n 角星形以各頂點為縮放中心，將各邊做 r 倍縮放，可得

1、新圖形與原圖形不相似。

要使新圖形仍為星形，$r<\dfrac{2\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}+\sqrt{4\sin\theta\, sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)+sin^2\frac{2\pi}{n}}}{2\left[\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}-sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}$

因為，當$r>\dfrac{2\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}+\sqrt{4\sin\theta\, sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)+sin^2\frac{2\pi}{n}}}{2\left[\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}-sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}$ 時，新圖形變形 。

當$r=\dfrac{2\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}+\sqrt{4\sin\theta\, sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)+sin^2\frac{2\pi}{n}}}{2\left[\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}-sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}$ 時，圖形變成正 n 邊形$P_1P_2\cdots P_n$。

2、$\dfrac{\text{新 n 角形面積}}{\text{正 n 角星形面積}}=-\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}+1+\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$

面積比值與邊長無關，與內角度數及縮放倍率有關。

3、縮放倍率與面積比值為二次函數的關係。

①當 $\frac{2\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}$ 時，$k > 0$，面積比值在$r = \frac{1}{2}$時，有最大值$1 + \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n} - cot\frac{\theta}{2}\right)}$

②當 $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}$時，$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) = 0$，面積比值為 1，此時面積比值與縮放倍率無關

③當 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} < \theta \leq \pi$時，$k < 0$，面積比值在$r = \frac{1}{2}$ 時，有最小值$1 + \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n} - cot\frac{\theta}{2}\right)}$

4、縮放後的新 n 角星形重心與正 n 角星形重心位置相同。

二、多邊形依序以各頂點為縮放中心，將各邊以不同倍率縮放後，連接各端點，所形成的新多邊形與原多邊形形狀、面積的關係

在此以縮放倍率皆同時大於 1 或皆同時大於 0 小於等於 1 前提下探討

(一)、正 n 邊形，將各邊以r_1、r_2、…、r_n倍縮放，新多邊形與原多邊形

$$\frac{\text{n 邊形}B_1B_2\dots B_n\text{面積}}{\text{正}n\text{邊形}A_1A_2\dots A_n\text{面積}} = 1 + \frac{4}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\left[r_1(r_n - 1) + \sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1}(r_i - 1)\right]$$

面積比值與邊長無關，與內角度數及縮放倍率r_i有關。

(二)、三角形、平行四邊形、鳶形、梯形、任意四邊形、N 邊形，將各邊做r_i倍縮放，

新多邊形與原多邊形面積比值如下:

1、三角形：$1 + r_1(r_3 - 1) + r_2(r_1 - 1) + r_3(r_2 - 1)$

2、平行四邊形：$1 + \frac{1}{2}[r_1(r_4 - 1) + r_2(r_1 - 1) + r_3(r_2 - 1) + r_4(r_3 - 1)]$

3、鳶形：兩對角線相交於 O，$\overline{\mathrm{AO}} = \mathrm{r}\,\overline{\mathrm{CO}}$

$$1 + \frac{rr_1(r_4 - 1)}{r + 1} + \frac{r_2(r_1 - 1)}{2} + \frac{r_3(r_2 - 1)}{r + 1} + \frac{r_4(r_3 - 1)}{2}$$

4、梯形：$\overline{\mathrm{AB}} = \mathrm{r}\,\overline{\mathrm{CD}}$，

$$1 + \left(\frac{rr_1(r_4 - 1)}{r + 1} + \frac{rr_2(r_1 - 1)}{r + 1} + \frac{r_3(r_2 - 1)}{r + 1} + \frac{r_4(r_3 - 1)}{r + 1}\right)$$

5、任意四邊形：$1 + \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i\,(r_i - 1)\cdot a_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1} + a_4(r_4 - 1)\cdot a_1r_1\sin\theta_1}{a_1a_4\sin\theta_1 + a_2a_3\sin\theta_3}$

6、n 邊形$(\mathrm{n} \geq 5)$：$1 + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i\,(r_i - 1)\cdot a_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1} + a_n(r_n - 1)\cdot a_1r_1\sin\theta_1}{\sum_{i=1}^{n-2}\left\{(-1)^{i+1}a_i\cdot\left[\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin\left(\theta_{i+1} + \cdots + \theta_j\right)\right]\right\}}$

除了三角形及平行四邊形面積比值只與縮放倍率r_i有關。其他多邊形積比值與縮放倍率

r_i及邊長、內角度數有關。

(三)、邊長相等的正 n 角星形以各頂點為縮放中心，將各邊做r_i倍縮放，可得

1、要使新圖形仍為n 角星形時，縮放倍率r_i，要有所限制。

當 i 為偶數時，r_i沒有限制；當 i 為奇數時，$r_i \le 1+\frac{\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\theta}$，新圖形仍為 n 角星形。

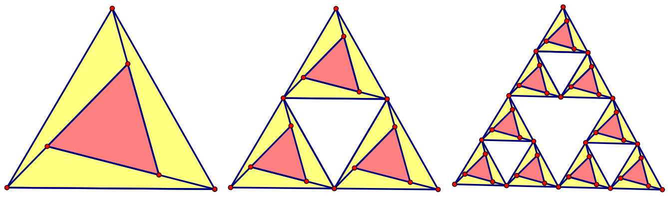
2、$\frac{\text{新 n 角星形面積}}{\text{正 n 角星形面積}} = 1+\frac{\left[\sum_{i=1}^{n-1} r_{2i+1}(r_{2i}-1)+r_1(r_{2n}-1)\right]\cdot\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n} r_{2i}(r_{2i-1}-1)\cdot\sin\theta}{2n\cdot sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$

，面積比值與邊長無關。與角度及縮放倍率有關。

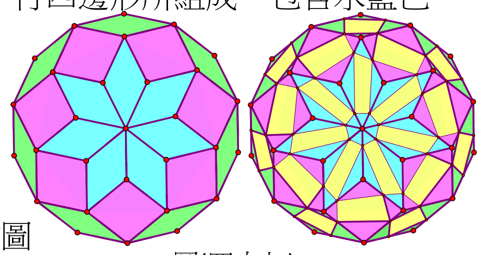
三、推導結果的應用

(一)、如圖(四十六)，圖中每個紅色的正三角形以各頂點為縮放中心，將各邊做 1.5 倍縮放，形成黃色的正三角形。依照規律，則第四個圖形中，紅色區域面積是有顏色區域面積的幾分之幾?

$$\left[\frac{1}{3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\times\frac{3}{2}+1}\right]\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{208}$$


圖(四十六) 第一個圖 第二個圖 第三個圖

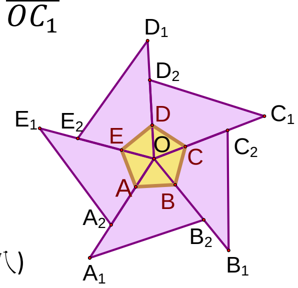
(二)、圖(四十七)左圖的正十四邊形是由三種大小不同的平行四邊形所組成，包含水藍色、粉紅色及草綠色各 7 個；以每個平行四邊形各頂點為縮放中心，將各邊依序做$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$ 倍縮放，依序連接各端點形成黃色的四邊形，如圖(四十七)右圖，則黃色區域面積占整個圖形面積的幾分之幾?


圖(四十七)

$$1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}-1\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=\frac{17}{36}$$

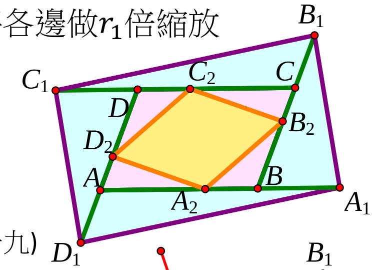
(三)、如圖(四十八)，正五邊形 ABCDE，邊長為 a，且$\overline{OA_1}=\overline{OB_1}=\overline{OC_1}=\overline{OD_1}=\overline{OE_1}=3a$，$\overline{OA_2}=\overline{OB_2}=\overline{OC_2}=\overline{OD_2}=\overline{OE_2}=2a$，則整個圖形面積是正五邊形 ABCDE 面積的幾倍?

$4\times3\times2\times\sin^2 36°\fallingdotseq 8.29$(倍)



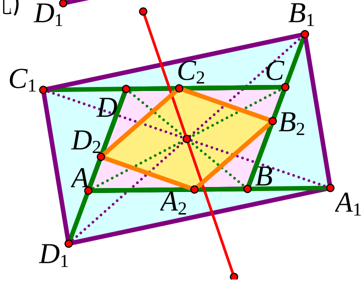
圖(四十八)

(四)、如圖(四十九)，平行四邊形 ABCD，以各頂點為縮放中心，將各邊做r_1倍縮放得四邊形$A_1B_1C_1D_1$；將各邊做r_2倍縮放得四邊形$A_2B_2C_2D_2$。請問如何劃出一直線同時將水藍色區域面積、粉紅色區域面積、及黃色區域面積各自分割成兩半?

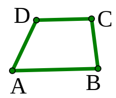


圖(四十九)

因為四邊形$A_1B_1C_1D_1$、四邊形$A_2B_2C_2D_2$也會是平行四邊形，且對角線的交點是同一點，因此只要過此交點畫一直線即可。

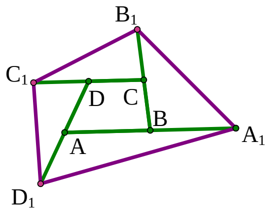


(五)、如圖(五十)，將一梯形 ABCD 以各頂點為縮放中心，將各邊做縮放，依序連接各端點形成新圖形$A_1B_1C_1D_1$，使得新圖形$A_1B_1C_1D_1$面積為梯形 ABCD 面積的 5 倍。



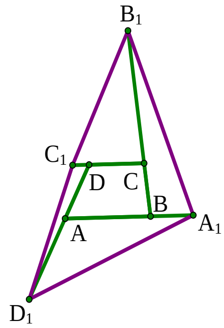
圖(五十)

(方法一)可使用等倍率$\mathrm{r} = 2$縮放。



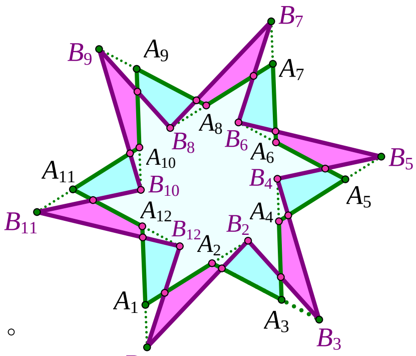
(方法二)亦可將各邊以不同倍率縮放。

例如: $\overline{AA_1} = \frac{3}{2}\overline{AB}$，$\overline{BB_1} = \frac{7}{2}\overline{BC}$，$\overline{CC_1} = \frac{13}{10}\overline{CD}$ $\overline{DD_1} = \frac{5}{2}\overline{DA}$



(六)、如圖(五十一)，邊常相等的正六角星形$A_1A_2 \cdots A_{12}$，$\angle A_1A_2A_3 = \cdots = \angle A_{11}A_{12}A_1 = 120°$，將各邊做 r 倍縮放，得六角星形$B_1B_2 \cdots B_{12}$，求水藍色區域面積與粉紅色區域面積的比值?

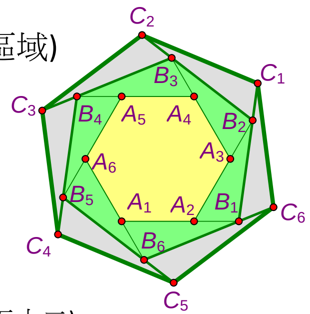
因為$\angle A_1A_2A_3$=$(90 + \frac{180}{6})°$，所以縮放倍率並不影響面積比值。因此面積比值= 1。



圖(五十一)

(七)、如圖(五十二)，在正六邊形$A_1A_2 \cdots A_6$建築物周圍，規劃 6 塊全等的三角形植栽區及 6 塊全等的三角形停車區。已知建築物(黃色區域)、植栽區(綠色區域)及停車區(灰色區域)面積皆相等，則(1)$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_2}}$=? (2)$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1B_2}}$=?

設$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_2}} = r_1$，$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1B_2}} = r_2$，



圖(五十二)

因為 正六邊形$A_1A_2\cdots A_6$面積:正六邊形$B_1B_2\cdots B_6$面積:正六邊形$C_1C_2\cdots C_6$面積 = 1 : 2 : 3

${r_1}^2-r_1+1=2$，$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，$\therefore\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。${r_2}^2-r_2+1=\frac{3}{2}$ ，$r_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ，$\therefore\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1B_2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

陸、結論

一、多邊形以各頂點為縮放中心，將各邊以相同倍率縮或放，所得新圖形與原圖形的關係：

(一)、正多邊形會相似，不是正多邊形不會相似。

(二)、新圖形與原圖形的重心位置相同。

(三)、縮與放所推得面積比值公式相同。正多邊形、三角形、四邊形、正 n 角星形面積比值與邊長無關。其他多邊形面積比值會與邊長及內角度數有關。任意三角形面積比值相同，任意四邊形面積比值也相同。

(四)、正 n 角星形縮放倍率 r 有限制，縮放後的新圖形，才會仍為 n 角星形。

(五)、縮放倍率與面積比值為二次函數的關係。正多邊形及凸多邊形二次函數開口向上。正 n 角星形會因角度不同，二次函數圖形由開口向下；到呈現一直線，此時縮放倍率並不影響新圖形與原圖形面積比值，面積比值為 1；到二次函數圖形開口向上。

二、多邊形以各頂點為縮放中心，將各邊以不同倍率同時縮或同時放，所得新圖形與原圖形的關係:

(一)、新圖形與原圖形不會相似。重心位置不同。

(二)、縮與放所推得面積比值公式相同。正多邊形、三角形、平行四邊形、正 n 角星形面積比值與邊長無關。

(三)、正 n 角星形縮放倍率r_i有限制，縮放後的新圖形，才會仍為星形。

三、透過此次的探討，發現從一個簡單圖形的縮放找面積，繪出多種圖形縮放後的樣貌，並推出縮放倍率與面積比值的關係。發現數學圖形千變萬化的奧妙，更是獲得從未有的成就感。

柒、參考資料

一・中華民國第 49 屆中小學科學展覽會國中數學組作品巢狀切割對內部子圖的探討。
二、中華民國第 52 屆中小學科學展覽會國中數學組作品超級比一比。
三、幾何明珠，黃家禮編著，九章出版社。
四、宜蘭高中 98 學年度學生數理自然科學專題:研任意多邊形的重心求法。

【評語】030403

這是由課本習題所衍生而來的一個有趣問題：以 n 邊形的各個頂點作為縮放的中心，依逆時針的方向，對每個邊進行縮放。以得出的新的邊的另一個端點作為頂點，連接這些頂點得出一個新的 n 邊形。探討在給定縮放比的情形下，新舊 n 邊形面積的比值問題。作者針對三角形和四邊形做了分析，給出了部分的結果。針對一般化的 n 邊形以及特殊的 n 角星形，也做了討論。討論的內容很多，有些想法有創意，值得嘉許。比較可惜的是，針對四邊形這種比較簡單的圖像，沒有給出完整的結論，而針對一般化的 n 邊形以及特殊的 n 角星形，似乎也沒辦法得出特別漂亮的結論。

作品簡報

中華民國第61屆中小學科學展覽會作品簡報

科　　別：數學科

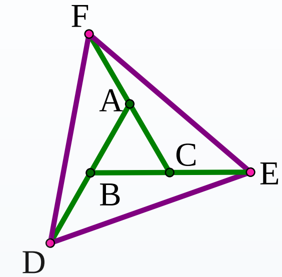
組　　別：國中組

作品名稱：縮放自如，果真有別－

邊長縮放對新圖的探討

壹、研究動機

「ΔABC面積為1，分別延長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$到D、E、F，使$\overline{AB}=\overline{BD}$，$\overline{BC}=\overline{CE}$，$\overline{CA}=\overline{AF}$，連接$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FD}$，求$\Delta$DEF的面積?」(答:7)。



想進一步探索其他多邊形以各頂點為縮放中心，將各邊以相同或不同倍率縮放後連接各端點，所得的新圖形與原圖形形狀、面積等關係。

貳、研究目的

探討一多邊形: (一)、正多邊形

(二)、凸多邊形:三角形、平行四邊形、鳶形、梯形、五邊形、n邊形

(三)、邊長相等的正n角星形

以各頂點為縮放中心，將各邊以 相同倍率 縮放後，

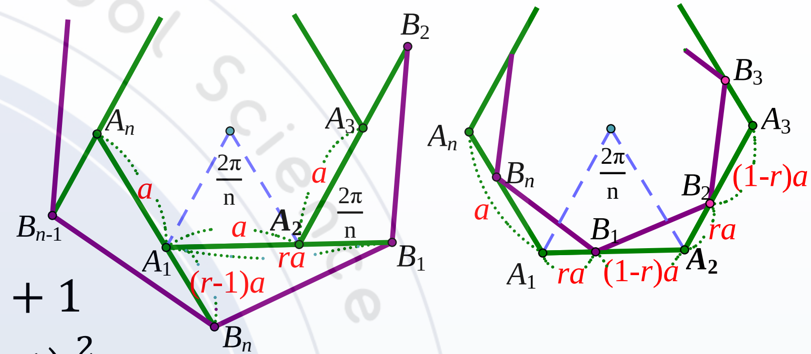
不同倍率

連接各端點所形成的新多邊形與原多邊形形狀、面積比值、重心位置等關係。

參、研究結果

一、縮放前、後的圖形形狀比較：只有正多邊形縮放的圖形後會與原圖形相似。

二、縮與放所推得面積比值公式相同。



(一)、相同倍率縮放：各邊做 r 倍縮放

1、正多邊形

(1)正三角形：$3r^2-3r+1$

(2)正方形：$2r^2-2r+1$ (3)正六邊形：r^2-r+1

(4)正n邊形：$1+4r(r-1)\sin^2\frac{\pi}{n}=4\sin^2\frac{\pi}{n}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)$

面積比值不受邊長影響

2、(1)三角形：$3r^2-3r+1$　　(2)平行四邊形、鳶形、梯形：$2r^2-2r+1$

(3)五邊形：$1+\dfrac{r(r-1)\left(\sum_{i=1}^{4}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_5a_1\sin\theta_1\right)}{\sum_{i=1}^{3}\left\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot\left[\sum_{j=i+1}^{4}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin\left(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j\right)\right]\right\}}$

(4)n邊形：$\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_na_1\sin\theta_1\right)}{\sum_{i=1}^{n-2}\left\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot\left[\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin\left(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j\right)\right]\right\}}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2$

$+1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_na_1\sin\theta_1}{4\sum_{i=1}^{n-2}\left\{(-1)^{i+1}\cdot a_i\cdot\left[\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin\left(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j\right)\right]\right\}}$

n邊形當 n $\geq$ 5時，面積比值會因邊長及內角度數不同而不同。

二、縮與放所推得面積比值公式相同。

(二)、不同倍率縮放：各邊做 r_i倍縮放(在此r_i皆同時大於1或皆同時大於0小於1)

1、正 n 邊形：$1+\frac{4}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\left[r_1(r_n-1)+\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1}(r_i-1)\right]$ ，面積比值不受邊長影響

2、(1)三角形：$1+r_1(r_3-1)+r_2(r_1-1)+r_3(r_2-1)$

(2)平行四邊形：$1+\frac{1}{2}[r_1(r_4-1)+r_2(r_1-1)+r_3(r_2-1)+r_4(r_3-1)]$

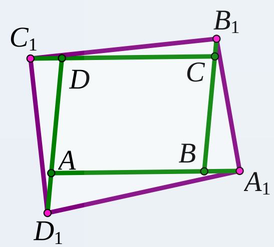
(3)鳶形，兩對角線交點O，$\overline{AO}=r\,\overline{CO}$：$1+\frac{rr_1(r_4-1)}{r+1}+\frac{r_2(r_1-1)}{2}+\frac{r_3(r_2-1)}{r+1}+\frac{r_4(r_3-1)}{2}$

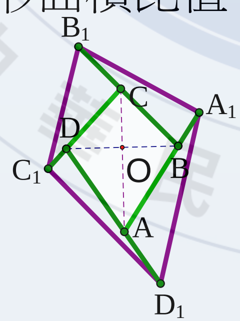
(4)梯形，$\overline{AB}=r\,\overline{CD}$：$1+\left(\frac{rr_1(r_4-1)}{r+1}+\frac{rr_2(r_1-1)}{r+1}+\frac{r_3(r_2-1)}{r+1}+\frac{r_4(r_3-1)}{r+1}\right)$

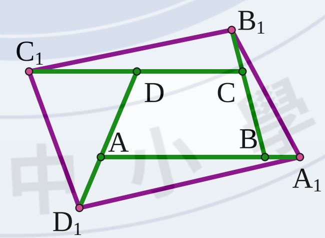
(5)任意四邊形：$1+\frac{\sum_{i=1}^{3} a_i(r_i-1)\cdot a_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_4(r_4-1)\cdot a_1r_1\sin\theta_1}{a_1a_4\sin\theta_1+a_2a_3\sin\theta_3}$

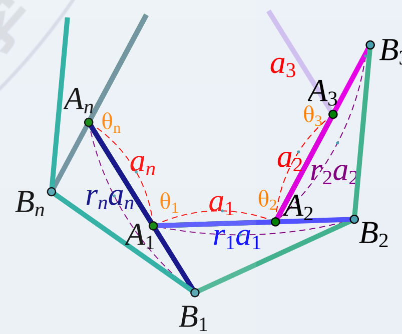
(6)n邊形(n ≥ 5)：$1+\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i(r_i-1)\cdot a_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1}+a_n(r_n-1)\cdot a_1r_1\sin\theta_1}{\sum_{i=1}^{n-2}\left\{(-1)^{i+1}a_i\cdot\left[\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j\cdot a_j\cdot\sin(\theta_{i+1}+\cdots+\theta_j)\right]\right\}}$

三角形、平行四邊形面積比值不受邊長及內角度數的影響。





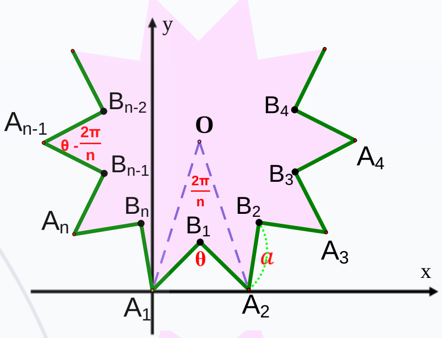


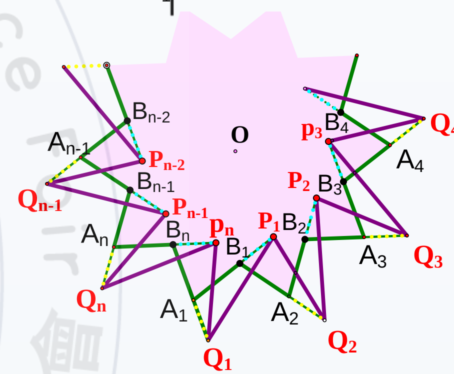


三、邊長相等的正n角星形縮放後的圖形要仍為n角星形，縮放倍率有限制。

(一)、相同倍率縮放：1、各邊做 r 倍縮放，找出r的範圍。

當$\overline{P_1Q_2}$落在$\overline{P_2Q_2}$上時，$r=\dfrac{2\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}\pm\sqrt{4\sin\theta\,\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^2\frac{2\pi}{n}}}{2\left[\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}=\dfrac{F\pm G}{H}$





(1)當$r>\dfrac{F+G}{H}$時，新圖形變形。

(2)當$r=\dfrac{F+G}{H}$時，圖形變成正n邊形$P_1P_2\cdots P_n$。

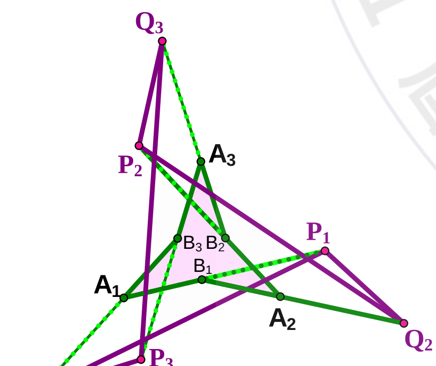
(3)當$\dfrac{F-G}{H}<r<\dfrac{F+G}{H}$時，圖形為不等邊的n角星形。

(4)當$r=\dfrac{F-G}{H}$時，圖形為正n邊形$P_1P_2\cdots P_n$，也是不等邊n角星形。

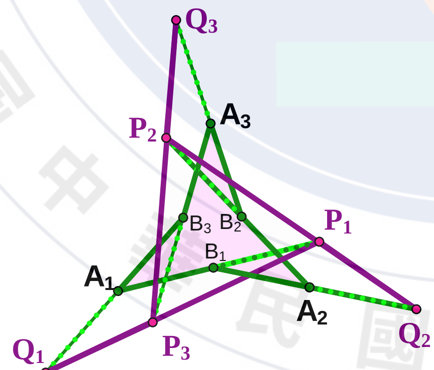
(5)當$0<r<\dfrac{F-G}{H}$時，圖形為不等邊的n角星形。

所以，$r<\dfrac{F+G}{H}$ 新圖形仍為n角星形，我們只探討在此範圍時的面積比值。

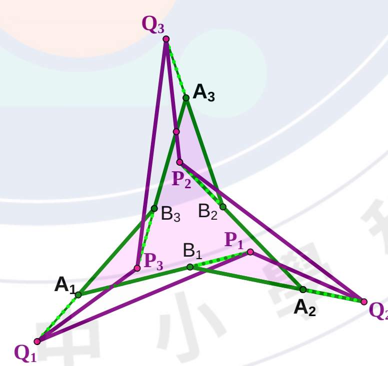
以邊長相等的正三角星形為例



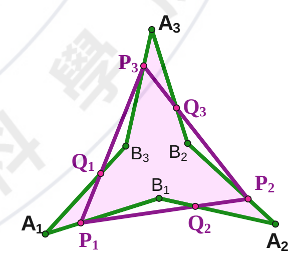
(1)當$r>\dfrac{F+G}{H}$



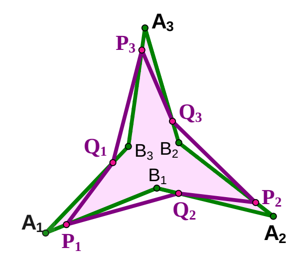
(2)當$r=\dfrac{F+G}{H}$



(3)當$\dfrac{F-G}{H}<r<\dfrac{F+G}{H}$



(4)當$r=\dfrac{F-G}{H}$



(5)當$0<r<\dfrac{F-G}{H}$

三、邊長相等的正n角星形縮放後的圖形要仍為n角星形，縮放倍率有限制。

(一)、相同倍率縮放：

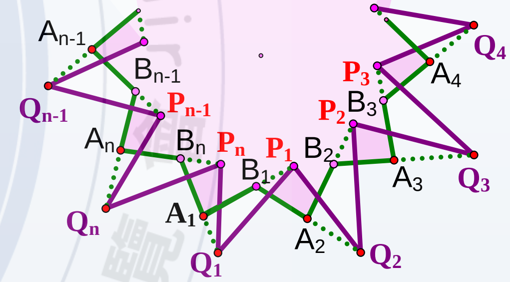
2、縮與放所推得面積比值公式相同:

$$= -\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\theta}{2}\right)} + 1 + \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\theta}{2}\right)}$$

，面積比值不受邊長影響。

(二)、不同倍率縮放：

1、各邊做 r_i 倍縮放，找出r_i的範圍。



當$\overline{P_1Q_2}$落在$\overline{B_2Q_2}$上時$r_1 = \dfrac{\sin\theta-\sin\frac{2\pi}{n}-r_2\left[\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}{\sin\theta-\sin\frac{2\pi}{n}-r_2\sin\theta}$，

當r_2很大時，r_1趨近於 $\dfrac{\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\theta}$

當i為偶數時，r_i沒有限制；當i為奇數時，$r_i \le 1+\dfrac{\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\theta}$，新圖形仍為n角星形。

2、縮與放所推得面積比值公式相同:

$$= 1 + \frac{\left[\sum_{i=1}^{n-1} r_{2i+1}(r_{2i}-1)+r_1(r_{2n}-1)\right]\cdot\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n} r_{2i}(r_{2i-1}-1)\cdot\sin\theta}{2n\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\theta}{2}\right)}$$

，面積比值不受邊長影響。

四、相同倍率縮放：邊長相等的正n角星形，當$\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}$時，縮放倍率不影響面積比值。

(一)面積比值公式

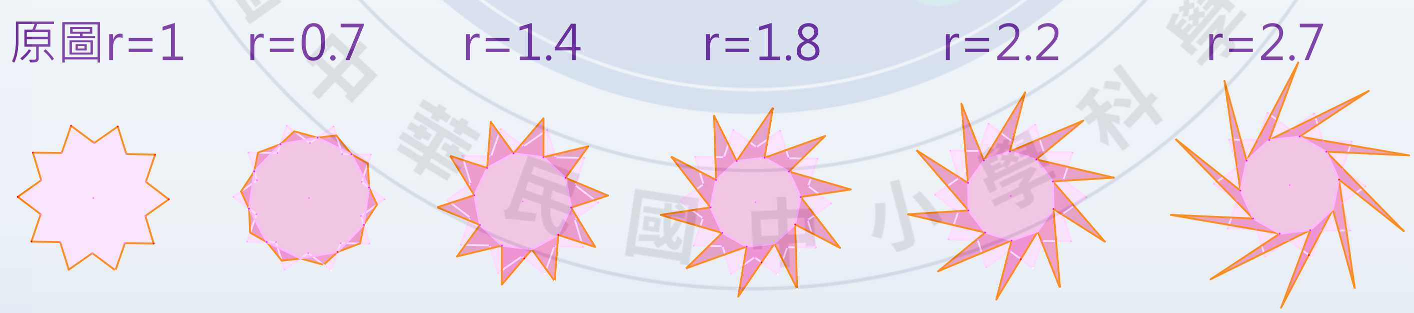
$$=-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}+1+\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$$

①當$\frac{2\pi}{n}<\theta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}$時，面積比值在$r=\frac{1}{2}$時，有最大值$1+\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$

②當$\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}$時，$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)=0$，面積比值為1，此時縮放倍率不影響面積比值。

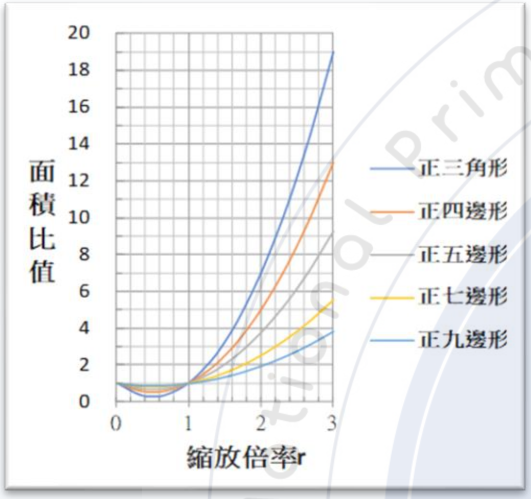
③當$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}<\theta\le\pi$時，面積比值在$r=\frac{1}{2}$時，有最小值$1+\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)}{4sin^2\frac{\theta}{2}\left(cot\frac{\pi}{n}-cot\frac{\theta}{2}\right)}$

(二)、以邊長相等的正十角星形為例，當$\theta=\frac{3\pi}{5}$時，雖然縮放倍率 r不同，但面積都相等。



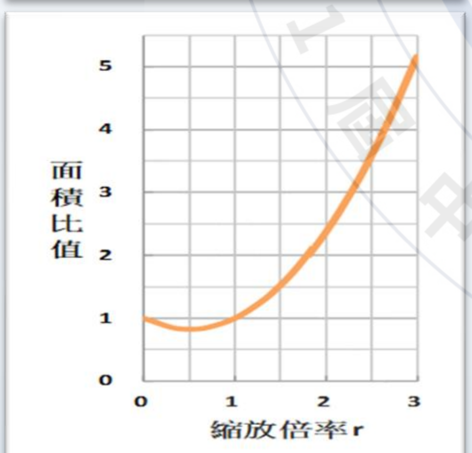
五、相同倍率縮放：縮放倍率與面積比值為二次函數的關係。

(一)、正多邊形:二次函數開口向上。



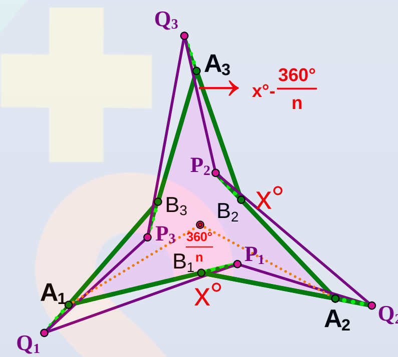
(二)、凸多邊形:二次函數開口向上。

各邊	AB	BC	CD	DE	EA
邊長	4	3	3	4	3.4
內角	∠EAB	∠ABC	∠BCD	∠CDE	∠DEA
度數	103.44	114.15	106.9	118.46	97.05

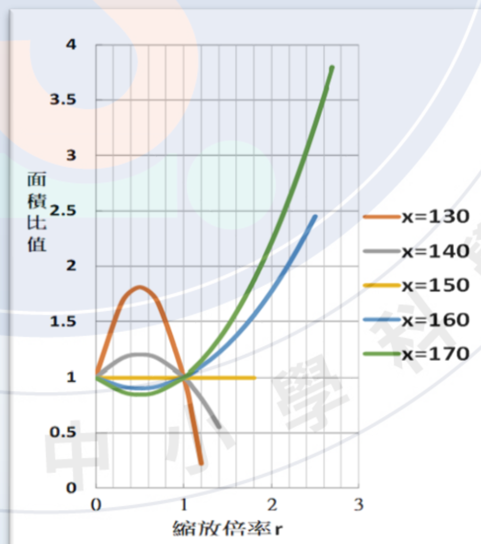


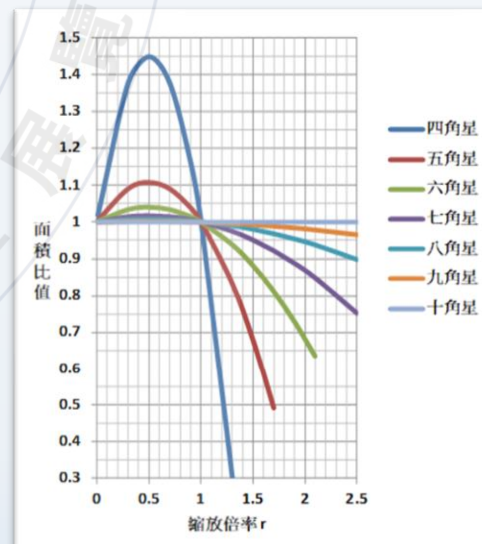
(三)、邊長相等的正n角星形:會因角度$\angle A_1B_1A_2 = x°$由小到大變化，二次函數圖形由開口向下；到圖形呈現一直線，此時縮放倍率不影響面積比值，面積比值為1；到二次函數圖形開口向上。

1. 以正三角星形為例。

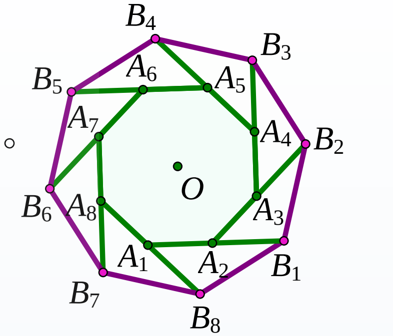


2. 以$x = 108°$為例。繪出正n角星形縮放倍率r與面積比值的關係圖。





六、相同倍率縮放 :縮放後新多邊形與原多邊形的重心位置相同。



(一)、正多邊形

縮放後新多邊形仍為正多邊形，重心、外心、內心位置與原圖形相同。

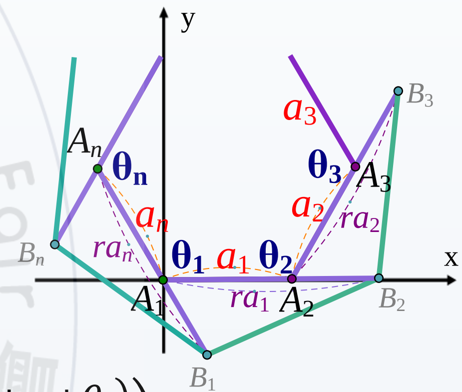
(二)、凸n邊形

1.原n邊形各頂點坐標 $A_1(x_1，y_1)$、$A_2(x_2，y_2)$、⋯、$A_n(x_n，y_n)$

新n邊形各頂點坐標 $B_1(x_1+r(x_2-x_1)，y_1+r(y_2-y_1))$、⋯、

$B_n(x_n+r(x_1-x_n)，y_n+r(y_1-y_n))$

重心坐標皆為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}，\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$

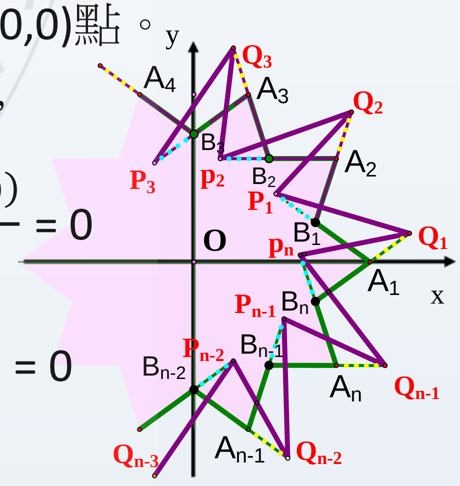


2. n邊形邊長依序為 $a_1，a_2，\ldots，a_n$，內角依序為 $\theta_1，\theta_2，\ldots，\theta_n$

縮放後新n邊形 $B_1B_2\ldots B_n$ 與原n邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 的重心坐標皆為

$$\left(\frac{(n-1)a_1-[\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i(n-i)\cdot a_i\cdot\cos(\theta_2+\cdots+\theta_i)]}{n}，\frac{\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i(n-i)\cdot a_i\cdot\sin(\theta_2+\cdots+\theta_i)}{n}\right)$$

(三)、正n角星形: 縮放後的新n角星形與原n角星形重心位置相同，在O(0,0)點。



正n邊形 $P_1\cdots P_n$ 面積= P；$\Delta P_iQ_iP_{i-1}$ 重心 R_i，面積= Q；$\overline{OR_i}=s$；$\angle A_1OR_1=\varphi$，

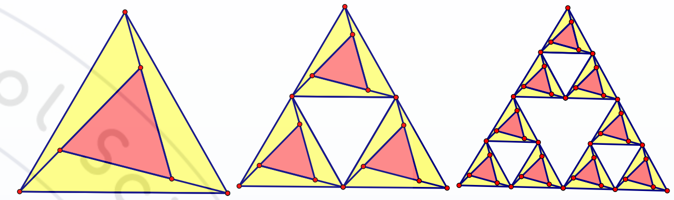
$$重心x坐標=\frac{P\times 0\pm Q\times s\times(\cos\varphi+\cos(\varphi+\frac{2\pi}{n})+\cos(\varphi+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\cos(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n}))}{P\pm n\times Q}=0$$

$$y坐標=\frac{P\times 0\pm Q\times s\times(\sin\varphi+\sin(\varphi+\frac{2\pi}{n})+\sin(\varphi+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\sin(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n}))}{P\pm n\times Q}=0$$

肆、推導結果的應用

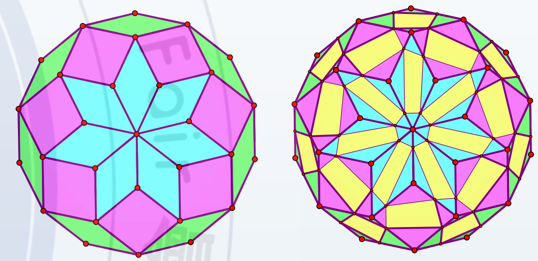
一、如右圖，每個紅色的正三角形以各頂點為縮放中心，將各邊做1.5倍縮放，形成黃色的正三角形。依照規律，則第四個圖形中，紅色區域面積是有顏色區域面積的幾分之幾?

$$\left[\frac{1}{3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\times\frac{3}{2}+1}\right]\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{208}$$



第一個圖　第二個圖　第三個圖

二、圖(一)正十四邊形是由三種大小不同的平行四邊形所組成，包含水藍色、粉紅色及草綠色各7個。以每個平行四邊形各頂點為縮放中心，將各邊依序做$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$倍縮放，連接各端點形成黃色的四邊形，如圖(二)，則黃色區域面積占整個圖形面積的幾分之幾?



圖(一)　圖(二)

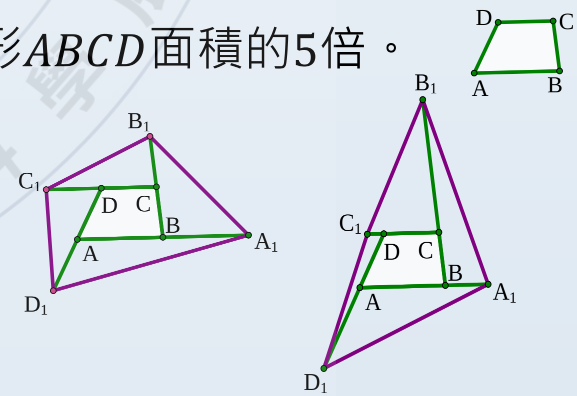
$$1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}-1\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=\frac{17}{36}$$

三、梯形$ABCD$，將各邊縮放，使得新圖形$A_1B_1C_1D_1$面積為梯形$ABCD$面積的5倍。

(方法一)使用相同倍率$r=2$縮放。

(方法二)以不同倍率縮放。

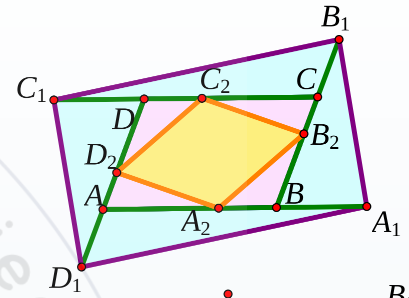
例如: $\overline{AA_1}=\frac{3}{2}\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=\frac{7}{2}\overline{BC}$，$\overline{CC_1}=\frac{13}{10}\overline{CD}$，$\overline{DD_1}=\frac{5}{2}\overline{DA}$

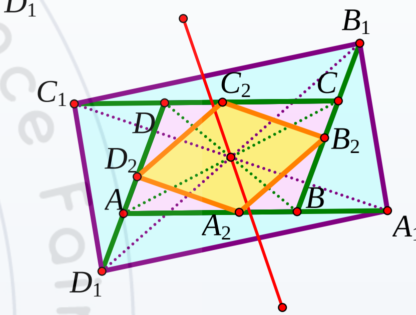


肆、推導結果的應用

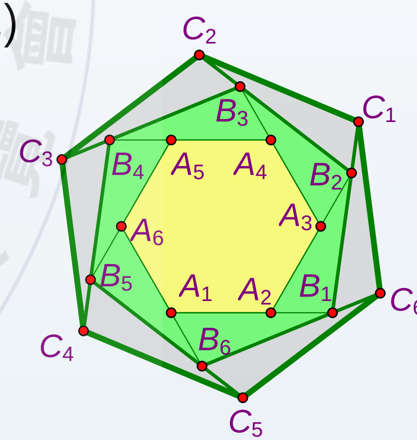
四、平行四邊形$ABCD$，以各頂點為縮放中心，將各邊做r_1倍縮放得四邊形$A_1B_1C_1D_1$；將各邊做r_2倍縮放得四邊形$A_2B_2C_2D_2$。如何畫出一直線同時將水藍色區域面積、粉紅色區域面積及黃色區域面積各自分割成兩半?

因為四邊形$A_1B_1C_1D_1$與四邊形$A_2B_2C_2D_2$也會是平行四邊形，且三個平行四邊形對角線的交點是同一點，因此只要過此交點畫一直線即可。





五、在正六邊形$A_1A_2\cdots A_6$建築物周圍，規劃6塊全等的三角形植栽區及6塊全等的三角形停車區。已知建築物(黃色區域)、植栽區(綠色區域)及停車區(灰色區域)面積皆相等，則(1) $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_2}}$=? (2) $\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1B_2}}$=?



設$\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_2}}= r_1$，$\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1B_2}} = r_2$，因為

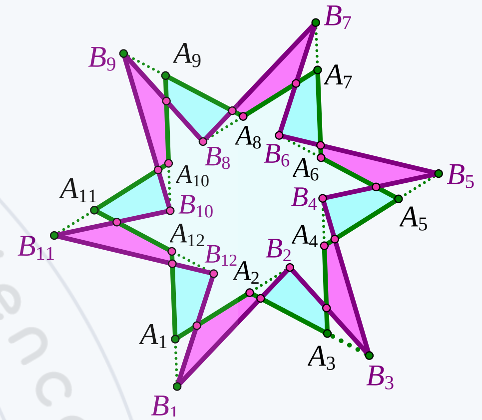
正六邊形$A_1A_2\cdots A_6$面積:正六邊形$B_1B_2\cdots B_6$面積:正六邊形$C_1C_2\cdots C_6$面積 $= 1:2:3$

$r_1{}^2 - r_1 + 1 = 2$，$r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $\therefore \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$r_2{}^2 - r_2 + 1 = \dfrac{3}{2}$，$r_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$， $\therefore \dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1B_2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

肆、推導結果的應用

六、邊長相等的正六角星形$A_1A_2\cdots A_{12}$，$\angle A_1A_2A_3=120°$，將各邊做r倍縮放，得六角星形$B_1B_2\cdots B_{12}$，求水藍色區域面積與粉紅色區域面積的比值?



因為$\angle A_1A_2A_3=(90+\frac{180}{6})°$，所以縮放倍率並不影響面積比值。

因此面積比值= 1。

伍、參考資料

一、中華民國第49屆中小學科學展覽會國中數學組作品巢狀切割對內部子圖的探討。

二、中華民國第52屆中小學科學展覽會國中數學組作品超級比一比。

三、幾何明珠，黃家禮編著，九章出版社。

四、宜蘭高中98 學年度學生數理自然科學專題研究:任意多邊形的重心求法。