中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030402

糖果傳遞問題之研究與推廣

學校名稱：高雄市立明華國民中學

作者：	指導老師：
國一 黃宇綸	楊佳餘
國一 黃宇瑄	黃任偉

關鍵詞：傳遞、線性關係、迭代

摘要

n 個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號 $1,2,\cdots\cdots,n$。一開始每人手中有一個糖果，由 1 號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果，手上沒有糖果的人必須退出。我們將此傳遞規則定義為 $T_{1,2}$，同理 $T_{1,2\cdots,p}$。這個傳遞遊戲，最終會有兩種情形，第一種是**由一人獨得所有糖果(成功狀態)**，第二種是**數人間傳遞糖果且形成循環(循環狀態)**。研究後得知，在傳遞規則 $T_{1,2\cdots,p}(p\ge 2)$ 下，若 $p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ （$p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，任意的 n 值($n\ge p+1$)均可唯一表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ （$t,m\in N$，$p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$，$(m,p)=1$，$q=1,2,\cdots,p$），令 $S=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}+R\cdot p^t$，則當 $m=1$ 時，最終為成功狀態，且獨得糖果者的初始編號為 S；當 $m\ge 2$ 時，最終為循環狀態，且由 m 人循環傳遞糖果，而此 m 人的初始編號是 $S,S+p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i},\cdots\cdots,S+(m-1)\cdot p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$。上述公式中的 R 值，可透過我們研究出來的「**R 值迭代法**」求得。

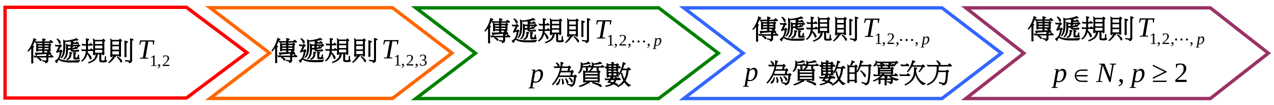
壹、研究動機

在科學研習月刊[1]有一個關於糖果傳遞的數學問題：「17 個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號 $1,2,\cdots\cdots,17$。一開始每人手中有一個糖果，由 1 號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果。但是手上沒有糖果的人必須馬上退出。是否有人可以得到所有的糖果？如是，他一開始站在幾號位置？」我們對這個問題感到好奇，便展開一連串的研究。

貳、研究目的

(一)探討不同人數、不同傳遞規則下，「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件。

(二)探討不同人數、不同傳遞規則下，最終不被淘汰的人之初始編號。



叁、研究器材

筆、電腦、Excel、eclipse(Java)

肆、研究方法與過程

傳遞規則

n 個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號 $1,2,\cdots\cdots,n$。一開始每人手中有一個糖果，由 1 號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果，手上沒有糖果的人必須退出，直至不再有人退出。將此傳遞規則定義為 $T_{1,2}$。同理 $T_{1,2,\cdots,p}$。

文獻探討

糖果傳遞問題往往會讓人聯想到著名的約瑟夫問題，然而它們的遊戲規則是截然不同的，約瑟夫問題是 n 個人圍成一圈依序報數，每數到特定數即自殺，而糖果傳遞問題除了傳遞糖果給下一位外，更加入不同的傳遞數量，直至手中糖果數歸 0 才會淘汰，過程更為複雜。此外，雖然我們有查閱到第 40 屆全國科展作品[2]中有提到類似的傳遞問題，但文中只針對成功狀態做初步推論，沒有證明，且其結論只是充分條件但非必要條件，探討相當不完整。

輔助工具

一開始我們以人工方式在 Execl 中將傳遞過程記錄，然而當 n 值增加時，數據越來越龐大，狀態越來越複雜，缺乏效率。此時，我們學寫了三年的程式設計能力正可以派上用場。我們以 Java 撰寫了程式，它可以輸入 $T_{1,2,\cdots,p}$ 中不同的 p 值與 n 值，可呈現傳遞過程中每一輪末狀態列與其初始編號，進而得到最終傳遞結果。有了這個程式，可幫助我們觀察傳遞規則、推導公式並證明。(程式碼於研究日誌)

名詞與符號定義

(一) 狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$ ： n 個人圍成一圈，逆時針編號 $1,2,\cdots\cdots,n$ ，每人手中分別有 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 顆糖果。

(二) $\underline{\underline{\overset{\ell}{a_i}}}$ ：第 i 人準備傳遞 ℓ 顆糖果給下一人。

(三) $P\to Q$ ：狀態列 P 經過數次傳遞後變成狀態列 Q 。

(四) 第 i 輪(R_i)：糖果由 1 號依傳遞規則傳至 n 號的過程稱為「第 1 輪」；將第 $(i-1)$ 輪淘汰後剩餘者再依序從頭傳至尾的過程稱為「第 i 輪」。

(五) S_r^n ： n 人傳遞的第 r 階狀態列。在 $T_{1,2,\cdots,p}$ 下，

當 $r=0$ 時， S_0^n 為 n 人傳遞的初始狀態列，即 $S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{n個})$ 。

當 $r\geq1$ 時，若 $n\equiv1(\text{mod }p)$ ， $S_r^n=(p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r,\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})$ ；

若 $n\equiv q(\text{mod }p)$, $q=2,3,\cdots,p$ ，則 $S_r^n=(p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r,\underline{\underline{\overset{q}{q}}})$ 。

(六) E_n ：若 n 人傳遞中，最後僅剩 1 人獨得所有糖果，則稱為「**成功狀態**」，記作 E_n 。

(七) C_n ：若 n 人傳遞中，最後無法僅剩 1 人獨得所有糖果，而是數人間傳遞糖果且形成循環，則稱為「**循環狀態**」，記作 C_n 。

(八) $S_r^n(k)$ ： n 人傳遞中的第 r 階狀態列，未淘汰者重新編號後，第 k 個人的初始編號。

(九) $E_n=[e]$ ： n 人傳遞中，為成功狀態時，獨得所有糖果的人之初始編號為 e 。

(十) $C_n=[c_1,c_2,\cdots\cdots,c_i]$ ： n 人傳遞中，為循環狀態時，循環的 i 人之初始編號為 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_i$ 。

以下舉兩個傳遞的例子：

【例 1】$n=7$ 、傳遞規則 $T_{1,2}$

編號	1	2	3	4	5	6	7	傳遞動作	輪次
S_0^7	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	2	1	1	1	1	1	2	
	0	0	3	1	1	1	1	1	
	0	0	2	2	1	1	1	2	R_1
	0	0	2	0	3	1	1	1	
	0	0	2	0	2	2	1	2	
S_1^7	0	0	2	0	2	0	3	1	
	0	0	3	0	2	0	2	2	
	0	0	1	0	4	0	2	1	R_2
	0	0	1	0	3	0	3	2	
	0	0	3	0	3	0	1	1	
	0	0	2	0	4	0	1	2	R_3
C_7	0	0	2	0	2	0	3	1	

說明

(一)傳遞過程為 $\underset{(1,1,1,1,1,1,1)}{S_0^7} \to \underset{(2,2,\overset{1}{\underline{3}})}{S_1^7} \to C_7$ 。

故最終為循環狀態。

(二) $C_7=[3,5,7]$ 。

即最終糖果在初始編號為 3、5、7 的三人間循環傳遞。

(三) $S_1^7(1)=3$ 、 $S_1^7(2)=5$ 、 $S_1^7(3)=7$ 。

即 S_1^7 中所剩 3 人的初始編號依序為 3、5、7。

【例 2】$n=10$ 、傳遞規則 $T_{1,2}$

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	傳遞動作	輪次
S_0^{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	
	0	0	3	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	0	2	2	1	1	1	1	1	1	2	
	0	0	2	0	3	1	1	1	1	1	1	
	0	0	2	0	2	2	1	1	1	1	2	R_1
	0	0	2	0	2	0	3	1	1	1	1	
	0	0	2	0	2	0	2	2	1	1	2	
	0	0	2	0	2	0	2	0	3	1	1	
S_1^{10}	0	0	2	0	2	0	2	0	2	2	2	
	0	0	4	0	2	0	2	0	2	0	1	
	0	0	3	0	3	0	2	0	2	0	2	R_2
	0	0	3	0	1	0	4	0	2	0	1	
	0	0	3	0	1	0	3	0	3	0	2	
	0	0	5	0	1	0	3	0	1	0	1	
	0	0	4	0	2	0	3	0	1	0	2	R_3
	0	0	4	0	0	0	5	0	1	0	1	
S_2^{10}	0	0	4	0	0	0	4	0	2	0	2	
	0	0	6	0	0	0	4	0	0	0	1	R_4
	0	0	5	0	0	0	5	0	0	0	2	
	0	0	7	0	0	0	3	0	0	0	1	R_5
	0	0	6	0	0	0	4	0	0	0	2	
	0	0	8	0	0	0	2	0	0	0	1	R_6
	0	0	7	0	0	0	3	0	0	0	2	
	0	0	9	0	0	0	1	0	0	0	1	R_7
S_3^{10}	0	0	8	0	0	0	2	0	0	0	2	
E_{10}	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	1	

說明

(一) 傳遞過程為

$\underset{(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)}{S_0^{10}} \to \underset{(2,2,2,2,\overset{2}{\underline{2}})}{S_1^{10}} \to \underset{(4,4,\overset{2}{\underline{2}})}{S_2^{10}}$

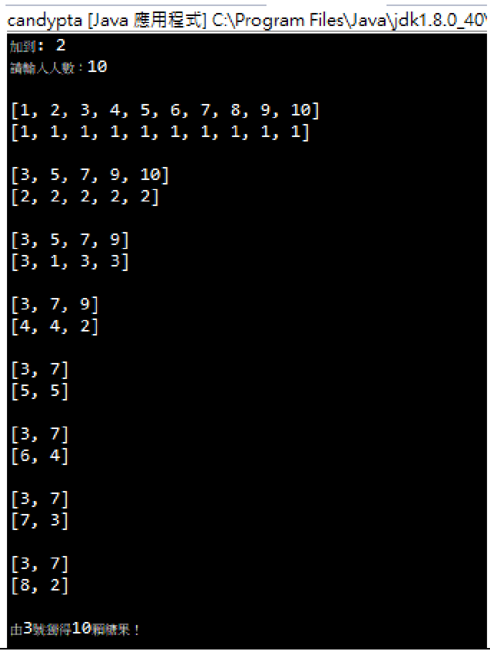
$\to \underset{(8,\overset{2}{\underline{2}})}{S_3^{10}} \to \underset{(10)}{E_{10}}$ 。

故最終為成功狀態。

(二) $E_{10}=[3]$ 。

即最終由初始編號為 3 的人獨得所有糖果。

(三)程式執行畫面：



研究一：傳遞規則 $T_{1,2}$

首先，為了縮減傳遞流程記錄，我們把 $T_{1,2}$ 中，「一輪傳遞」的規則統整如下：

$T_{1,2}$ 的「一輪傳遞」規則

初始狀態

偶數($n=2s$)：甲$_0$

	$\underbrace{(1}$	1	1	1	……	1	1	$1)$ ($2s$個)
傳	-1	-2	-1	-2	……	-2	-1	
收		$+1$	$+2$	$+1$	……	$+1$	$+2$	$+1$
總	-1	-1	$+1$	-1		-1	$+1$	$+1$
預								$\boxed{-2}$

奇數($n=2s+1$)：甲$_1$

	$\underbrace{(1}$	1	1	1	……	1	1	$1)$ ($2s+1$個)
傳	-1	-2	-1	-2	……	-1	-2	
收		$+1$	$+2$	$+1$	……	$+2$	$+1$	$+2$
總	-1	-1	$+1$	-1	……	$+1$	-1	$+2$
預								$\boxed{-1}$

尾 2 傳 2

偶數($n=2s$)：乙$_0$

	$(a_1$	a_2	a_3	a_4	……	a_{2s-2}	a_{2s-1}	$\overset{2}{\underline{\underline{a_{2s}}}})$
傳	-1	-2	-1	-2	……	-2		-2
收	$+2$	$+1$	$+2$	$+1$	……	$+1$	$+2$	
總	$+1$	-1	$+1$	-1	……	-1	$+2$	
預							$\boxed{-1}$	

奇數($n=2s+1$)：乙$_1$

	$(a_1$	a_2	a_3	a_4	……	a_{2s-1}	a_{2s}	$\overset{2}{\underline{\underline{a_{2s+1}}}})$
傳	-1	-2	-1	-2	……	-1		-2
收	$+2$	$+1$	$+2$	$+1$	……	$+2$	$+1$	
總	$+1$	-1	$+1$	-1	……	$+1$	$+1$	
預							$\boxed{-2}$	

尾非 1 傳 1

偶數($n=2s$)：丙$_0$

	$(a_1$	a_2	a_3	a_4	……	a_{2s-2}	a_{2s-1}	$\overset{1}{\underline{\underline{a_{2s}}}})$
傳	-2	-1	-2	-1	……	-1	-2	-1
收	$+1$	$+2$	$+1$	$+2$	……	$+2$	$+1$	$+2$
總	-1	$+1$	-1	$+1$	……	$+1$	-1	$+1$
預								$\boxed{-1}$

奇數($n=2s+1$)：丙$_1$

	$(a_1$	a_2	a_3	a_4	……	a_{2s-1}	a_{2s}	$\overset{1}{\underline{\underline{a_{2s+1}}}})$
傳	-2	-1	-2	-1	……	-2	-1	-1
收	$+1$	$+2$	$+1$	$+2$	……	$+1$	$+2$	$+1$
總	-1	$+1$	-1	$+1$	……	-1	$+1$	0
預								$\boxed{-2}$

尾非 2 傳 2

偶數($n=2s$)：丁$_0$

	$(a_1$	a_2	a_3	a_4	……	a_{2s-2}	a_{2s-1}	$\overset{2}{\underline{\underline{a_{2s}}}})$
傳	-1	-2	-1	-2	……	-2	-1	-2
收	$+2$	$+1$	$+2$	$+1$	……	$+1$	$+2$	$+1$
總	$+1$	-1	$+1$	-1	……	-1	$+1$	-1
預								$\boxed{-2}$

奇數($n=2s+1$)：丁$_1$

	$(a_1$	a_2	a_3	a_4	……	a_{2s-1}	a_{2s}	$\overset{2}{\underline{\underline{a_{2s+1}}}})$
傳	-1	-2	-1	-2	……	-1	-2	-2
收	$+2$	$+1$	$+2$	$+1$	……	$+2$	$+1$	$+2$
總	$+1$	-1	$+1$	-1	……	$+1$	-1	0
預								$\boxed{-1}$

接著，我們打算將所有 n 值分成奇數和偶數來討論。研究結果如下：

(一) n 為奇數

引理 1.1.1：傳遞規則 $T_{1,2}$，當 n 為奇數，$r\geq 1$，$s\in N$，則

(1)若存在狀態列 $(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1個},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})$，則必存在

$$(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1個},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})\to(\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\cdots\cdots,2^{r+1}}_{s個},\overset{1}{\underline{\underline{2^{r+1}+1}}})\text{。}$$

(2)若存在狀態列 $(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s個},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})$，則必存在 $(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s個},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})\to C_n$。

【證明】

$$(1)\ (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}}) \xrightarrow[\text{丙}_0]{1\text{輪後}} (\underbrace{2^r-1,2^r+1,\cdots\cdots,2^r-1}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{2\text{輪後}} (\underbrace{2^r-2,2^r+2,\cdots\cdots,2^r-2}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+3}}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{3\text{輪後}} (\underbrace{2^r-3,2^r+3,\cdots\cdots,2^r-3}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+4}}}) \to \ \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{2^r\text{輪後}} (\underbrace{\overset{0}{2^r-2^r},2^r+2^r,\cdots\cdots,\overset{0}{2^r-2^r}}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2^r+1}}}) = (\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\cdots\cdots,2^{r+1}}_{s\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^{r+1}+1}}})$$

$$(2)\ (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}}) \xrightarrow[\text{丙}_1]{1\text{輪後}} (\underbrace{2^r-1,2^r+1,\cdots\cdots,2^r-1,2^r+1}_{2s\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2^r+1}}})$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_1]{2\text{輪後}} (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}}) \quad ■$$

引理 1.1.2：傳遞規則 $T_{1,2}$，當 n 為奇數($n\ge 3$)，且表示成 $n=2^t\cdot m+1$($t\in N$, m 為奇數)，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_{t-1}^n \to E_n$，

其中 $S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+1)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{(2^{t-r}-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})$，$1\le r\le t-1$。

(2)若 $m\ge 3$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_t^n \to C_n$，

其中 $S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+1)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{(2^{t-r}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})$，$1\le r\le t$。

【證明】

(1) $n=2^t+1$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+1)\text{個}}) \xrightarrow[\text{甲}_1]{1\text{輪後}} (0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,0,\overset{1}{\underline{\underline{3}}}) = (\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{(2^{t-1}-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{3}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}} (\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{(2^{t-2}-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{5}}}) \to \ \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}} (\underbrace{2^{t-2},2^{t-2},2^{t-2}}_{(2^2-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^{t-2}+1}}}) \xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}} (2^{t-1},\overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+1}}}) \to (2^t+1)=E_n$$

(2) $n=2^t\cdot m+1$ ($m\ge 3$ 且 m 為奇數)

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+1)\text{個}}) \xrightarrow[\text{甲}_1]{1\text{輪後}} (0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,0,\overset{1}{\underline{\underline{3}}}) = (\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{(2^{t-1}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{3}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}} (\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{(2^{t-2}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{5}}}) \to \ \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}} (\underbrace{2^t,\cdots\cdots,2^t}_{(m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^t+1}}}) \xrightarrow{\text{引理1.1.1(2)}} C_n \quad ■$$

引理 1.1.3：傳遞規則$T_{1,2}$，當 n 為奇數($n\geq 3$)，且表示成 $n=2^t\cdot m+1$($t\in N$, m 為奇數)，則

$$S_r^n(k)=1+k\cdot 2^r\ ,k=1,2,\cdots,2^{t-r}\cdot m\text{，其中 }S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{(2^{t-r}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})\text{，}1\leq r\leq t\text{。}$$

【證明】

(1)當 $r=1$時

$$\text{因為}\quad S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+1)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_1]{1\text{輪後}}(\underbrace{0,0,\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2},0,\overset{\overset{5}{\downarrow}}{2},0,\cdots\cdots,\ \overset{\overset{2^t\cdot m-1}{\downarrow}}{2}\ ,0,\ \overset{\overset{2^t\cdot m+1}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{3}}}}}_{(2^t\cdot m+1)\text{個}})=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{(2^{t-1}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{3}}})=S_1^n$$

故 $S_1^n(1)=3,\ S_1^n(2)=5,\cdots\cdots,\ S_1^n(2^{t-1}\cdot m)=2^t\cdot m+1=1+(2^{t-1}\cdot m)\cdot 2^1$ 原式成立

(2)假設 當 $r=r'$時 原式成立

即 $S_{r'}^n(k)=1+k\cdot 2^{r'}\ ,k=1,2,\cdots,2^{t-r'}\cdot m$

則 當 $r=r'+1$時

$$S_{r'}^n=(\underbrace{\overset{\overset{1+2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}\ ,\ \overset{\overset{1+2\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}\ ,\cdots\cdots,\ \overset{\overset{1+(2^{t-r'}m-1)\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}\ ,\ \overset{\overset{1+2^{t-r'}m\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^{r'}+1}}}}}_{2^{t-r'}m\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}0]{1\text{輪後}}(\underbrace{2^{r'}-1,2^{r'}+1,\cdots\cdots,2^{r'}-1,\overset{1}{\underline{\underline{2^{r'}+2}}}}_{2^{t-r'}m\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}0]{2\text{輪後}}(\underbrace{2^{r'}-2,2^{r'}+2,\cdots\cdots,2^{r'}-2,\overset{1}{\underline{\underline{2^{r'}+3}}}}_{2^{t-r'}m\text{個}})\to\ \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丙}0]{2^{r'}\text{輪後}}(0,\ \overset{\overset{1+2\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}}\ ,0,\ \overset{\overset{1+4\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}},\cdots\cdots,0,\ \overset{\overset{1+2^{t-r'}m\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^{r'+1}+1}}}})$$

$$=(\underbrace{2^{r'+1},2^{r'+1},\cdots\cdots,2^{r'+1},\overset{1}{\underline{\underline{2^{r'+1}+1}}}}_{2^{t-r'-1}m\text{個}})=S_{r'+1}^n$$

故 $S_{r'+1}^n(1)=1+2^{r'+1},\ S_{r'+1}^n(2)=1+2^{r'+2}=1+2\cdot 2^{r'+1},\cdots\cdots,$

$S_{r'+1}^n(2^{t-r'-1}\cdot m)=1+2^{t-r'}m\cdot 2^{r'}=1+2^{t-r'-1}m\cdot 2^{r'+1}$ 原式成立

由(1)(2)及**數學歸納法** 得證 ■

定理 1.1.4：傳遞規則$T_{1,2}$，當 n 為奇數($n\geq 3$)，且表示成 $n=2^t\cdot m+1$($t\in N$, m 為奇數)，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[n]$。

(2)若 $m\geq 3$，最終為循環狀態，且 $C_n=[1+2^t,1+2\cdot 2^t,\cdots\cdots,1+m\cdot 2^t]$。

【證明】

(1)由引理 1.1.2(1)知

若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_{t-1}^n \to E_n$ 。

由引理 1.1.3 知

$$S_{t-1}^n = (\overset{1+2^{t-1}}{\overset{\downarrow}{2^{t-1}}}, \overset{1+2\cdot 2^{t-1}}{\overset{\downarrow}{\overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+1}}}}}) \xrightarrow[\text{丙}_0]{\text{1輪後}} (2^{t-1}-1, \overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+2}}}) \xrightarrow[\text{丙}_0]{\text{2輪後}} (2^{t-1}-2, \overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+3}}}) \to \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{2^{t-1}\text{輪後}} (0, \overset{1+2^{t}}{\overset{\downarrow}{2^t+1}}) = (2^t+1) = E_n \qquad \text{故} \quad E_n = \left[1+2^t\right] = \left[n\right]$$

(2)由引理 1.1.2(2)知

若 $m \ge 3$ ，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_t^n \to C_n$ 。

由引理 1.1.3 及引理 1.1.1(2)的證明過程知

$$S_t^n = (\underbrace{\overset{1+2^t}{\overset{\downarrow}{2^t}},\ \overset{1+2\cdot 2^t}{\overset{\downarrow}{2^t}}\ ,\cdots\cdots,2^t}_{(m-1)\text{個}}, \overset{1+m\cdot 2^t}{\overset{\downarrow}{\overset{1}{\underline{\underline{2^t+1}}}}}) \to \cdots\cdots \to (\underbrace{2^t,2^t,\cdots\cdots,2^t}_{(m-1)\text{個}}, \overset{1}{\underline{\underline{2^t+1}}})$$

故 $C_n = \left[1+2^t, 1+2\cdot 2^t, \cdots\cdots, 1+m\cdot 2^t\right]$ ■

(二) n 為偶數

引理 1.2.1：傳遞規則 $T_{1,2}$ ，當 n 為偶數， $r \ge 1$ ， $s \in N$ ，則

(1)若存在狀態列 $(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}})$ ，則必存在

$$(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \to (\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\cdots\cdots,2^{r+1}}_{s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \text{ 。}$$

(2)若存在狀態列 $(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}})$ ，則必存在 $(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \to C_n$ 。

【證明】

(1) $$(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \xrightarrow[\text{乙}_1]{\text{1輪後}} (\underbrace{2^r+1, 2^r-1, \cdots\cdots, 2^r+1, \overset{2}{\underline{\underline{2^r+1}}}}_{2s\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{\text{2輪後}} (\underbrace{2^r+2, 2^r-2, \cdots\cdots, 2^r+2, \overset{2}{\underline{\underline{2^r}}}}_{2s\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{\text{3輪後}} (\underbrace{2^r+3, 2^r-3, \cdots\cdots, 2^r+3, \overset{2}{\underline{\underline{2^r-1}}}}_{2s\text{個}}) \to \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{2^r\text{輪後}} (\underbrace{2^r+2^r, \overset{0}{2^r-2^r}, \cdots\cdots, 2^r+2^r, \overset{2}{\underline{\underline{2^r-2^r+2}}}}_{2s\text{個}})$$

$$= (\underbrace{2^{r+1},\cdots\cdots,2^{r+1}}_{s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}})$$

$$(2)\quad (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})^{*} \xrightarrow{1\text{次後}} (\underbrace{\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}},2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{乙}_0]{{}^{*}1\text{輪後}} (\underbrace{2^r+1,2^r-1,\cdots\cdots,2^r+1,2^r-1,\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}}}_{2s+1\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_1]{2\text{輪後}} (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r,2^r,\overset{2}{\underline{\underline{2^r+2}}}}_{2s+1\text{個}})$$

$$\xrightarrow{\text{再}1\text{次後}} (\underbrace{\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}},2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1\text{個}}) \quad ■$$

引理 1.2.2：傳遞規則 $T_{1,2}$，當 n 為偶數($n\ge 4$)，且表示成 $n=2^t\cdot m+2$ ($t\in N$, m 為奇數)，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to E_n$，

其中 $S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+2)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2^{t-r}\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$，$1\le r\le t$。

(2)若 $m\ge 3$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$，

其中 $S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+2)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2^{t-r}\cdot m\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$，$1\le r\le t$。

【證明】

(1) $n=2^t+2$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+2)\text{個}}) \xrightarrow[\text{甲}_0]{1\text{輪後}} (0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) = (\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理}1.2.1(1)} (\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \to \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{引理}1.2.1(1)} (\underbrace{2^{t-1},2^{t-1}}_{2\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \xrightarrow{\text{引理}1.2.1(1)} (2^t,\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \to (2^t+2)=E_n$$

(2) $n=2^t\cdot m+2$ ($m\ge 3$ 且 m 為奇數)

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+2)\text{個}}) \xrightarrow[\text{甲}_0]{1\text{輪後}} (0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) = (\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot m\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理}1.2.1(1)} (\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}\cdot m\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \to \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{引理}1.2.1(1)} (\underbrace{2^t,\cdots\cdots,2^t}_{m\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \xrightarrow{\text{引理}1.2.1(2)} C_n \quad ■$$

引理 1.2.3：傳遞規則$T_{1,2}$，當n為偶數($n\ge 4$)，且表示成$n=2^t\cdot m+2$ ($t\in N$, m為奇數)，則

$$S_r^n(k)=\begin{cases}3+(k-1)\cdot 2^r & ,k=1,2,\cdots,2^{t-r}\cdot m\\ 3+(2k-3)\cdot 2^{r-1} & ,k=2^{t-r}\cdot m+1\end{cases},$$

其中 $S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2^{t-r}\cdot m\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$，$1\le r\le t$。

【證明】

(1)當$r=1$時

因為 $S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+2)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_0]{\text{1輪後}}(\underbrace{0,0,\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2},0,\overset{\overset{5}{\downarrow}}{2},0,\cdots\cdots,\overset{\overset{2^t\cdot m+1}{\downarrow}}{2},\overset{\overset{2^t\cdot m+2}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}}}_{(2^t\cdot m+2)\text{個}})=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot m\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})=S_1^n$

故 $S_1^n(1)=3,\ S_1^n(2)=5,\cdots\cdots,S_1^n(2^{t-1}\cdot m)=2^t\cdot m+1=3+(2^{t-1}\cdot m-1)\cdot 2^1$

$S_1^n(2^{t-1}\cdot m+1)=2^t\cdot m+2=3+\left[2(2^{t-1}\cdot m+1)-3\right]\cdot 2^0$ 原式成立

(2)假設 當$r=r'$時 原式成立

即 $$S_{r'}^n(k)=\begin{cases}3+(k-1)\cdot 2^{r'} & ,k=1,2,\cdots,2^{t-r'}\cdot m\\ 3+(2k-3)\cdot 2^{r'-1} & ,k=2^{t-r'}\cdot m+1\end{cases}$$

則 當$r=r'+1$時

$$S_{r'}^n=(\underbrace{\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^{r'}},\overset{\overset{3+2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}},\cdots\cdots,\overset{\overset{3+(2^{t-r'}\cdot m-1)2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}},\overset{\overset{3+(2^{t-r'+1}\cdot m-1)2^{r'-1}}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}}}_{(2^{t-r'}\cdot m+1)\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{乙}_1]{\text{1輪後}}(\underbrace{2^{r'}+1,2^{r'}-1,\cdots\cdots,2^{r'}+1,\overset{2}{\underline{\underline{2^{r'}+1}}}}_{2^{t-r'}\cdot m\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{\text{2輪後}}(\underbrace{2^{r'}+2,2^{r'}-2,\cdots\cdots,2^{r'}+2,\overset{2}{\underline{\underline{2^{r'}}}}}_{2^{t-r'}\cdot m\text{個}})\to\ \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{2^{r'}\text{輪後}}(\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^{r'+1}},0,\overset{\overset{3+2\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}},0,\cdots\cdots,0,\overset{\overset{3+(2^{t-r'}\cdot m-2)2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}},\overset{\overset{3+(2^{t-r'}\cdot m-1)2^{r'}}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}})$$

$$=(\underbrace{2^{r'+1},2^{r'+1},\cdots\cdots,2^{r'+1}}_{2^{t-r'-1}\cdot m\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})=S_{r'+1}^n$$

故 $S_{r'+1}^n(1)=3,\ S_{r'+1}^n(2)=3+2\cdot 2^{r'}=3+2^{r'+1},\cdots\cdots,$

$S_{r'+1}^n(2^{t-r'-1}\cdot m)=3+(2^{t-r'}\cdot m-2)\cdot 2^{r'}=3+(2^{t-r'-1}\cdot m-1)\cdot 2^{r'+1},$

$S_{r'+1}^n(2^{t-r'-1}\cdot m+1)=3+(2^{t-r'}\cdot m-1)\cdot 2^{r'}=3+\left[2(2^{t-r'-1}\cdot m+1)-3\right]\cdot 2^{r'}$ 原式成立

由(1)(2)及**數學歸納法** 得證 ■

定理 1.2.4：傳遞規則$T_{1,2}$，當 n 為偶數($n\ge 4$)，且表示成$n=2^t\cdot m+2\,(t\in N\,,m$ 為奇數)，則

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，且$E_n=[3]$。

(2)若$m\ge 3$，最終為循環狀態，且$C_n=\left[3,3+2^t,\cdots\cdots,3+(m-1)2^t\right]$。

【證明】

(1)由引理 1.2.2(1)知

若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to E_n$。

由引理 1.2.3 知 $S_t^n=(\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^t},\ \overset{\overset{3+2^{t-1}}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}})\xrightarrow{1次後}(\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^t+2},0)=(2^t+2)=E_n$ 故 $E_n=[3]$

(2)由引理 1.2.2(2)知

若$m\ge 3$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

由引理 1.2.3 及引理 1.2.1(2)的證明過程知

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^t},\overset{\overset{3+2^t}{\downarrow}}{2^t},\cdots\cdots,\overset{\overset{3+(m-1)2^t}{\downarrow}}{2^t}}_{m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\xrightarrow{1次後}(\underbrace{\overset{\overset{3}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^t+2}}}},\overset{\overset{3+2^t}{\downarrow}}{2^t},\cdots\cdots,\overset{\overset{3+(m-1)2^t}{\downarrow}}{2^t}}_{m個})\to\cdots\to(\underbrace{\overset{1}{\underline{\underline{2^t+2}}},2^t,\cdots\cdots,2^t}_{m個})$$

故 $C_n=\left[3,3+2^t,\cdots\cdots,3+(m-1)2^t\right]$ ■

綜合以上結果，我們將 n 為奇數情形的定理 1.1.4 與 n 為偶數情形的定理 1.2.4 合併成定理 1，敘述如下：

定理 1：n 人($n\ge 3$)依照規則$T_{1,2}$傳遞糖果，且 n 表示成$n=2^t\cdot m+q\,(t\in N\,,\,m$ 為奇數$,\ q=1,2)$，

令$S=2^t\cdot(2-q)+(2q-1)$，則

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，且$E_n=[S]$。

(2)若$m\ge 3$，最終為循環狀態，且$C_n=\left[S,S+2^t,\cdots\cdots,S+(m-1)2^t\right]$。

討論

1.任意正整數$n\,(n\ge 3)$，必可唯一表示成$n=2^t\cdot m+q$ ($t\in N\,,\,m$ 為奇數$,\ q=1,2$)的型式。

2.當$m\ge 3$時，最終會由 m 人循環傳遞糖果，而當$m=1$時，即剩 1 人獨得所有糖果。顯然，(1)的公式是(2)的縮化情形。

【舉例】

(1)當$n=65=2^6\cdot 1+1$，則$S=2^6\cdot(2-1)+(2\cdot 1-1)=65$，故$E_n=[65]$。

即 65 人依照規則$T_{1,2}$傳遞糖果，最終會由初始編號 65 的人獨得所有糖果。

(2)當$n=50=2^4\cdot 3+2$，則$S=2^4\cdot(2-2)+(2\cdot 2-1)=3$，故$C_n=\left[3,3+2^4,3+2\cdot 2^4\right]=[3,19,35]$。

即 50 人依照規則$T_{1,2}$傳遞糖果，最終會由初始編號 3,19,35 的人循環傳遞糖果。

研究二：傳遞規則 $T_{1,2,3}$

同研究一，為了縮減傳遞流程記錄，我們把 $T_{1,2,3}$ 中，「一輪傳遞」的規則統整如下：

$T_{1,2,3}$ 的「一輪傳遞」規則

	$n=3s$	$n=3s+1$	$n=3s+2$
初始狀態	甲$_0$	甲$_1$	甲$_2$
	$(\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\cdots 1\ \ 1\ \ 1}_{3s個})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3 ⋯ −1 −2 收 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 總 −1 −1 −1 +2 −1 −1 ⋯ +2 −1 +2 預 $\boxed{-3}$	$(\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\cdots 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1}_{(3s+1)個})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3 ⋯ −1 −2 −3 收 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 +3 總 −1 −1 −1 +2 −1 −1 ⋯ +2 −1 −1 +3 預 $\boxed{-1}$	$(\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\cdots 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1}_{(3s+2)個})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3 ⋯ −1 −2 −3 −1 收 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 +3 +1 總 −1 −1 −1 +2 −1 −1 ⋯ +2 −1 −1 +2 +1 預 $\boxed{-2}$
尾2傳2	乙$_0$	乙$_1$	乙$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 −3 −1 −2 −3 −1 −2⋯ −3 −2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1⋯ +2 +3 總 −1 +2 −1 −1 +2 −1⋯ −1 +3 預 $\boxed{-1}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 −3 −1 −2 −3 −1 −2⋯ −3 −1 −2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1⋯ +2 +3 +1 總 −1 +2 −1 −1 +2 −1⋯ −1 +2 +1 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 −3 −1 −2 −3 −1 −2⋯ −3 −1 −2 −2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1⋯ +2 +3 +1 +2 總 −1 +2 −1 −1 +2 −1⋯ −1 +2 −1 +2 預 $\boxed{-3}$
尾3傳3	丙$_0$	丙$_1$	丙$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3⋯ −1 −3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2⋯ +3 +1 總 +2 −1 −1 +2 −1 −1⋯ +2 +1 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3⋯ −1 −2 −3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2⋯ +3 +1 +2 總 +2 −1 −1 +2 −1 −1⋯ +2 −1 +2 預 $\boxed{-3}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3⋯ −1 −2 −3 −3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2⋯ +3 +1 +2 +3 總 +2 −1 −1 +2 −1 −1⋯ +2 −1 −1 +3 預 $\boxed{-1}$
尾非1傳1	丁$_0$	丁$_1$	丁$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 −2 −3 −1 −2 −3 −1⋯ −2 −3 −1 收 +1 +2 +3 +1 +2 +3⋯ +1 +2 +3 總 −1 −1 +2 −1 −1 +2⋯ −1 −1 +2 預 $\boxed{-1}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 −2 −3 −1 −2 −3 −1⋯ −2 −3 −1 −1 收 +1 +2 +3 +1 +2 +3⋯ +1 +2 +3 +1 總 −1 −1 +2 −1 −1 +2⋯ −1 −1 +2 0 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 −2 −3 −1 −2 −3 −1⋯ −2 −3 −1 −2 −1 收 +1 +2 +3 +1 +2 +3⋯ +1 +2 +3 +1 +2 總 −1 −1 +2 −1 −1 +2⋯ −1 −1 +2 −1 +1 預 $\boxed{-3}$
尾非2傳2	戊$_0$	戊$_1$	戊$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 −3 −1 −2 −3 −1 −2⋯ −3 −1 −2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1⋯ +2 +3 +1 總 −1 +2 −1 −1 +2 −1⋯ −1 +2 −1 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 −3 −1 −2 −3 −1 −2⋯ −3 −1 −2 −2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1⋯ +2 +3 +1 +2 總 −1 +2 −1 −1 +2 −1⋯ −1 +2 −1 0 預 $\boxed{-3}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 −3 −1 −2 −3 −1 −2⋯ −3 −1 −2 −3 −2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1⋯ +2 +3 +1 +2 +3 總 −1 +2 −1 −1 +2 −1⋯ −1 +2 −1 −1 +1 預 $\boxed{-1}$
尾非3傳3	己$_0$	己$_1$	己$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3⋯ −1 −2 −3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2⋯ +3 +1 +2 總 +2 −1 −1 +2 −1 −1⋯ +2 −1 −1 預 $\boxed{-3}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3⋯ −1 −2 −3 −3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2⋯ +3 +1 +2 +3 總 +2 −1 −1 +2 −1 −1⋯ +2 −1 −1 0 預 $\boxed{-1}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 −1 −2 −3 −1 −2 −3⋯ −1 −2 −3 −1 −3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2⋯ +3 +1 +2 +3 +1 總 +2 −1 −1 +2 −1 −1⋯ +2 −1 −1 +2 −2 預 $\boxed{-2}$

而我們將所有 n 值分成 $n\equiv 1(\text{mod}\,3)$ 、 $n\equiv 2(\text{mod}\,3)$ 和 $n\equiv 0(\text{mod}\,3)$ 三種情形來討論，並將引理和定理合併呈現與證明。研究結果如下：

因版面空間不足，以下部分證明置於研究日誌。

引理 2.1：傳遞規則$T_{1,2,3}$，將n表示成以下型式：$n=3^t\cdot m+q\,(t,m\in N\,,\ 3\nmid m\,,\ q=1,2,3)$，則

(1)當$q=1$，$r\ge 1$，$s\in N$，已知存在狀態列$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})$

①若$i=3s+2$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{(3s+2)個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})\rightarrow(\underbrace{3^{r+1},3^{r+1},\cdots\cdots,3^{r+1}}_{s個},\overset{1}{\underline{\underline{3^{r+1}+1}}})$。

②若$i\ne 3s+2$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})\rightarrow C_n$。

(2)當$q\ge 2$，$r\ge 1$，$s\in N$，已知存在狀態列$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$

①若$i=3s$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{3s個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\rightarrow(\underbrace{3^{r+1},3^{r+1},\cdots\cdots,3^{r+1}}_{s個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$。

②若$i\ne 3s$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\rightarrow C_n$。

【證明】略(研究日誌)

引理 2.2：傳遞規則$T_{1,2,3}$，將n表示成以下型式：$n=3^t\cdot m+q\,(t,m\in N\,,\ 3\nmid m\,,\ q=1,2,3)$，則

(1) $q=1$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\rightarrow S_1^n\rightarrow S_2^n\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow S_{t-1}^n\rightarrow E_n$。

②若$m\ge 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\rightarrow S_1^n\rightarrow S_2^n\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow S_t^n\rightarrow C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(3^t m+1)個})$、$S_r^n=(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{(3^{t-r}\cdot m-1)個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})$，$1\le r\le t$，

且　$S_r^n(k)=1+k\cdot 3^r,\ k=1,2,\cdots,3^{t-r}\cdot m$。

(2) $q\ge 2$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\rightarrow S_1^n\rightarrow S_2^n\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow S_t^n\rightarrow E_n$。

②若$m\ge 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\rightarrow S_1^n\rightarrow S_2^n\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow S_t^n\rightarrow C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(3^t m+q)個})$、$S_r^n=(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{3^{t-r}\cdot m個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$，$1\le r\le t$，

$$且\ S_r^n(k)=\begin{cases}\dfrac{3^r(3-q)+(3q-1)}{2}+(k-1)\cdot 3^r & ,k=1,2,\cdots,3^{t-r}\cdot m\\ \dfrac{3^r(3-q)+(3q-1)}{2}+(3k+q-7)\cdot 3^{r-1} & ,k=3^{t-r}\cdot m+1\end{cases}$$ 。

【證明】略(研究日誌)

定理 2：n 人 $(n\ge 4)$ 依照規則 $T_{1,2,3}$ 傳遞糖果，且 n 表示成 $n=3^t\cdot m+q$ $(t,m\in N\,,\,3\nmid m\,,$ $q=1,2,3)$，令 $S=\dfrac{3^t\cdot(3-q)+(3q-1)}{2}$，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\ge 2$，最終為循環狀態，且 $C_n=[S,S+3^t,\cdots\cdots,S+(m-1)3^t]$。

【證明】

a. $q=1$

(1)由引理 2.2 知，若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$。

$$S_{t-1}^n=(\overset{\substack{1+3^{t-1}\\ \downarrow}}{3^{t-1}}\,,\ \overset{\substack{1+2\cdot 3^{t-1}\\ \downarrow}}{3^{t-1}}\,,\overset{\substack{1+3\cdot 3^{t-1}\\ \downarrow\\ 1}}{\underline{\underline{3^{t-1}+1}}})\xrightarrow[\text{丁}0]{1\text{輪後}}(3^{t-1}-1,3^{t-1}-1,\overset{1}{\underline{\underline{3^{t-1}+3}}})\xrightarrow[\text{丁}0]{2\text{輪後}}(3^{t-1}-2,3^{t-1}-2,\overset{1}{\underline{\underline{3^{t-1}+5}}})$$

$$\to\cdots\cdots\xrightarrow[\text{丁}0]{3^{t-1}\text{輪後}}(0,0,\overset{\substack{1+3^t\\ \downarrow}}{3^t}+1)=(3^t+1)\qquad 故\quad E_n=[1+3^t]=[S]$$

(2)由引理 2.2 及其證明過程知，

若 $m\ge 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\substack{1+3^t\\ \downarrow}}{3^t}\,,\ \overset{\substack{1+2\cdot 3^t\\ \downarrow}}{3^t}\,,\cdots\cdots,3^t}_{(m-1)個},\overset{\substack{1+m\cdot 3^t\\ \downarrow\\ 1}}{\underline{\underline{3^t+1}}})\to\cdots\cdots\to(\underbrace{3^t,3^t,\cdots\cdots,3^t}_{(m-1)個},\overset{1}{\underline{\underline{3^t+1}}})$$

故 $C_n=[1+3^t,1+2\cdot 3^t,\cdots\cdots,1+m\cdot 3^t]=[S,S+p^t,\cdots\cdots,S+(m-1)p^t]$

b. $q\ge 2$

(1)由引理 2.2 知，若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to E_n$。

$$S_t^n=(\overset{\substack{S\\ \downarrow}}{3^t},\quad \overset{\substack{S+(q-1)\cdot 3^{t-1}\\ \downarrow\\ q}}{\underline{\underline{q}}}\quad)\to(\overset{\substack{S\\ \downarrow}}{3^t}+q)\qquad 故\quad E_n=[S]$$

(2)由引理 2.2 及其證明過程知，

若 $m\ge 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\substack{S\\ \downarrow}}{3^t},\ \overset{\substack{S+3^t\\ \downarrow}}{3^t}\ ,\cdots\cdots,\quad \overset{\substack{S+(m-1)\cdot 3^t\\ \downarrow}}{3^t}}_{m個}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\xrightarrow{1次後}(\underbrace{\overset{\substack{S\\ \downarrow}}{3^t}+q,\ \overset{\substack{S+3^t\\ \downarrow}}{3^t}\ ,\cdots,\quad \overset{\substack{S+(m-1)\cdot 3^t\\ \downarrow}}{3^t}}_{m個}\quad)\to\cdots\cdots\to(\underbrace{3^t+q,3^t,\cdots,3^t}_{m個})$$

故 $C_n=[S,S+3^t,\cdots\cdots,S+(m-1)3^t]$ ■

討論

1.任意正整數 $n\,(n\ge 4)$，必可唯一表示成 $n=3^t\cdot m+q$ $(t,m\in N\,,\,3\nmid m\,,\ q=1,2,3)$的型式。

2.當 $m\ge 2$ 時，最終會由 m 人循環傳遞糖果，而當 $m=1$ 時，即剩 1 人獨得所有糖果。顯然，(1)的公式是(2)的縮化情形。

【舉例】

(1)當 $n=83=3^4\cdot 1+2$ ，則 $S=\dfrac{3^4\cdot(3-2)+(3\cdot 2-1)}{2}=43$ ，故 $E_n=[43]$ 。

即 83 人依照規則 $T_{1,2,3}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 43 的人獨得所有糖果。

(2)當 $n=111=3^3\cdot 4+3$ ，則 $S=\dfrac{3^3\cdot(3-3)+(3\cdot 3-1)}{2}=4$ ，故

$C_n=\left[4,4+3^3,4+2\cdot 3^3,4+3\cdot 3^3\right]=[4,31,58,85]$ 。

即 111 人依照規則 $T_{1,2,3}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 4,31,58,85 的人循環傳遞糖果。

研究三：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 且 p 為質數

研究一中，我們推導出規則 $T_{1,2}$ 下，只有 $n=2^t+1$ 、 2^t+2 時，會發生成功狀態。研究二中，我們推導出規則 $T_{1,2,3}$ 下，只有 $n=3^t+1$ 、 3^t+2 、 3^t+3 時，會發生成功狀態。事實上，規則 $T_{1,2}$ 、 $T_{1,2,3}$ 的結論，可類推至規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ (p 為質數)的情形。同研究一、二的證明流程，我們首先整理出 $T_{1,2,\cdots,p}$ 的「一輪傳遞」規則(研究日誌)。並得出以下引理：

引理 3.1：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ ， p 為質數，將 n 表示成以下型式： $n=p^t\cdot m+q$

($t,m\in N$ ， $p\nmid m$ ， $q=1,2,\cdots,p$)，則

(1)當 $q=1$ ， $r\geq 1$ ， $s\in N$ ，已知存在狀態列 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i\text{個}},\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})$

①若 $i=ps+(p-1)$ ，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{(ps+(p-1))\text{個}},\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})\to(\underbrace{p^{r+1},p^{r+1},\cdots\cdots,p^{r+1}}_{s\text{個}},\underline{\underline{\overset{1}{p^{r+1}+1}}})$ 。

②若 $i\neq ps+(p-1)$ ，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i\text{個}},\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})\to C_n$ 。

(2)當 $q\geq 2$ ， $r\geq 1$ ， $s\in N$ ，已知存在狀態列 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i\text{個}},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})$

①若 $i=ps$ ，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{ps\text{個}},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})\to(\underbrace{p^{r+1},p^{r+1},\cdots\cdots,p^{r+1}}_{s\text{個}},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})$ 。

②若 $i\neq ps$ ，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i\text{個}},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})\to C_n$ 。

【證明】略(研究日誌)

引理 3.2：傳遞規則$T_{1,2,\cdots,p}$，p為質數，將n表示成以下型式：$n=p^t\cdot m+q$

$(t,m\in N，p\nmid m，q=1,2,\cdots,p)$，則

(1) $q=1$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$。

②若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t m+1)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{(p^{t-r}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{p^r+1}}})$，$1\leq r\leq t$，

且$S_r^n(k)=\dfrac{p^r(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^r,\ k=1,2,\cdots,p^{t-r}\cdot m$。

(2) $q\geq 2$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to E_n$。

②若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t m+q)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{p^{t-r}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$，$1\leq r\leq t$，

$$且\ S_r^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^r(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^r & ,k=1,2,\cdots,p^{t-r}\cdot m\\ \dfrac{p^r(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r-1} & ,k=p^{t-r}\cdot m+1\end{cases}。$$

【證明】(僅呈現證明$q\geq 2$的部分，$q=1$的情形很類似。完整過程記錄於研究日誌。)

(2) $q\geq 2$

第一部分：證明傳遞過程

① $n=p^t+q(q\geq 2)$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t+q)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_2]{\text{1輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p\text{個}},\underbrace{p,0,\cdots,0}_{p\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p,0,\cdots,0,\overset{q}{\underline{\underline{q}}}}_{q\text{個}})=(\underbrace{p,p,\cdots\cdots,p}_{p^{t-1}\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(\underbrace{p^2,p^2,\cdots\cdots,p^2}_{p^{t-2}\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to\ \cdots\cdots\ \xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(p^t,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(p^t+q)=E_n$$

② $n=p^t\cdot m+q(q\geq 2)$ $(m\geq 2$且$p\nmid m)$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t\cdot m+q)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_2]{\text{1輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p\text{個}},\underbrace{p,0,\cdots,0}_{p\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p,0,\cdots,0,\overset{q}{\underline{\underline{q}}}}_{q\text{個}})=(\underbrace{p,p,\cdots\cdots,p}_{p^{t-1}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(\underbrace{p^2,p^2,\cdots\cdots,p^2}_{p^{t-2}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to\ \cdots\cdots\ \xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(\underbrace{p^t,\cdots,p^t}_{m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}C_n$$

第二部分：證明 $S_r^n(k)$ 的公式—利用數學歸納法

(i)當 $r=1$ 時

$$（\text{欲證}\ S_1^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^1(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^1=pk+1 & ,k=1,2,\cdots,p^{t-1}\cdot m\\ \dfrac{p^1(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{1-1}=p(k-1)+q & ,k=p^{t-1}\cdot m+1\end{cases}）$$

$$\text{因為}\ S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t\cdot m+q)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_2]{1\text{輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p\text{個}},\underbrace{\overset{p+1}{p},0,\cdots,0}_{p\text{個}},\overset{2p+1}{p},\cdots\cdots,\underbrace{\overset{p^t\cdot m+1}{p},0,\cdots,0,\overset{p^t\cdot m+q}{\overset{q}{\underset{=}{q}}}}_{q\text{個}})$$

$$=(\underbrace{p,p,\cdots\cdots,p}_{p^{t-1}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underset{=}{q}})=S_1^n$$

故 $S_1^n(1)=p+1,\ S_1^n(2)=2p+1,\ \cdots\cdots\ ,S_1^n(p^{t-1}\cdot m)=p^t\cdot m+1$

$S_1^n(p^{t-1}\cdot m+1)=p^t\cdot m+q$ 原式成立

(ii)假設 當 $r=r'$ 時 原式成立 即

$$S_{r'}^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^{r'}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^{r'}=T+(k-1)\cdot p^{r'} & ,k=1,2,\cdots,p^{t-r'}\cdot m\\ \dfrac{p^{r'}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r'-1}=T+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r'-1} & ,k=p^{t-r'}\cdot m+1\end{cases}$$

則 當 $r=r'+1$ 時

$$(\text{欲證}:\ S_{r'+1}^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^{r'+1}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^{r'+1}=T+(pk-q)\cdot p^{r'} & ,\ k=1,2,\cdots,p^{t-r'-1}\cdot m\\ T+(p-q)\cdot p^{r'} & \\ \dfrac{p^{r'+1}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r'}=T+(pk-p-1)p^{r'} & ,\ k=p^{t-r'-1}\cdot m+1\end{cases})$$

$$S_{r'}^n=(\underbrace{\overset{T}{p^{r'}},\overset{T+p^{r'}}{p^{r'}},\cdots\cdots,\overset{T+(p^{t-r'}\cdot m-1)p^{r'}}{p^{r'}}}_{p^{t-r'}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underset{=}{q}})$$

$$\xrightarrow[\text{乙}_1]{1\text{輪後}}(\underbrace{p^{r'}-1,\cdots,p^{r'}-1}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(p-1),p^{r'}-1,\cdots}_{q\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p^{r'}-1,\cdots,p^{r'}-1}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(p-1),p^{r'}-1,\cdots,\overset{q}{\underline{\underline{p^{r'}+(q-1)}}}}_{q\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_4]{2\text{輪後}}(\underbrace{p^{r'}-2,\cdots,p^{r'}-2}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(2p-2),p^{r'}-2,\cdots}_{q\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p^{r'}-2,\cdots,p^{r'}-2}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(2p-2),p^{r'}-2,\cdots,\overset{q}{\underline{\underline{p^{r'}+(q-2)}}}}_{q\text{個}})$$

$\vdots$

$$\xrightarrow[\text{丙}_4]{p^{r'}\text{輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p-q\text{個}},\underbrace{\overset{T+(p-q)\cdot p^{r'}}{p^{r'+1}},0,\cdots,0}_{q\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{p-q\text{個}},\underbrace{p^{r'+1},0,\cdots,0,\overset{T+(p^{t-r'}\cdot m-1)p^{r'}}{\overset{q}{\underset{=}{q}}}}_{q\text{個}})$$

$$=(\underbrace{p^{r'+1},p^{r'+1},\cdots\cdots,p^{r'+1}}_{p^{t-r'-1}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underset{=}{q}})=S_{r'+1}^n$$

故 $S_{r'+1}^n(1)=T+(p-q)\cdot p^{r'},\ S_{r'+1}^n(2)=T+(2p-q)\cdot p^{r'},\ \cdots\cdots,$

$S_{r'+1}^n(p^{t-r'-1}\cdot m)=T+(p^{t-r'}\cdot m-q)p^{r'},\ S_{r'+1}^n(p^{t-r'-1}\cdot m+1)=T+(p^{t-r'}\cdot m-1)p^{r'}$ 原式成立

由(i)(ii)及**數學歸納法** 得證 ■

定理 3：n 人($n\ge p+1$)依照規則$T_{1,2,\cdots,p}$傳遞糖果，p 為質數，且 n 表示成

$$n=p^t\cdot m+q\quad(t,m\in N,\ \ p\nmid m,\ \ q=1,2,\cdots,p)\text{，令 }S=\frac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}\text{，則}$$

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\ge 2$，最終為循環狀態，且 $C_n=[S,S+p^t,\cdots,S+(m-1)p^t]$。

【證明】

a. $q=1$

(1)由引理 3.2 知，若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$。

$$S_{t-1}^n=(\underbrace{\overset{1+p^{t-1}}{\overset{\downarrow}{p^{t-1}}},\ \overset{1+2\cdot p^{t-1}}{\overset{\downarrow}{p^{t-1}}},\cdots,\ \overset{1+(p-1)\cdot p^{t-1}}{\overset{\downarrow}{p^{t-1}}}}_{(p-1)\text{個}},\ \underline{\underline{\overset{1+p\cdot p^{t-1}}{\overset{\downarrow}{\overset{1}{p^{t-1}+1}}}}})\xrightarrow{1\text{輪後}}(p^{t-1}-1,p^{t-1}-1,\cdots,p^{t-1}-1,\ \underline{\underline{\overset{1}{p^{t-1}+p}}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{p^{t-1}\text{輪後}}(0,0,\cdots,0,\ \overset{1+p\cdot p^{t-1}}{\overset{\downarrow}{p\cdot p^{t-1}+1}})=(p^t+1)\qquad\text{故}\quad E_n=[1+p^t]=[S]$$

(2)由引理 3.2 知，若 $m\ge 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{S}{\overset{\downarrow}{p^t}},\ \overset{S+p^t}{\overset{\downarrow}{p^t}},\cdots,p^t}_{(m-1)\text{個}},\ \underline{\underline{\overset{S+(m-1)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{\overset{1}{p^t+1}}}}})\to\cdots\cdots\to(\underbrace{p^t,p^t,\cdots,p^t}_{(m-1)\text{個}},\ \underline{\underline{\overset{1}{p^t+1}}})$$

故 $C_n=[S,S+p^t,\cdots\cdots,S+(m-1)p^t]$

b. $q\ge 2$

(1)由引理 3.2 知，若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to E_n$。

$$S_t^n=(\overset{S}{\overset{\downarrow}{p^t}},\qquad \underline{\underline{\overset{S+(q-1)\cdot p^{t-1}}{\overset{\downarrow}{\overset{q}{q}}}}}\qquad)\to(\overset{S}{\overset{\downarrow}{p^t+q}})\qquad\text{故}\quad E_n=[S]$$

(2)由引理 3.2 知，若 $m\ge 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{S}{\overset{\downarrow}{p^t}},\ \overset{S+p^t}{\overset{\downarrow}{p^t}},\cdots\cdots,\ \overset{S+(m-1)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{p^t}}}_{m\text{個}},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})\xrightarrow{1\text{次後}}(\underbrace{\overset{S}{\overset{\downarrow}{p^t+q}},\ \overset{S+p^t}{\overset{\downarrow}{p^t}},\cdots,\ \overset{S+(m-1)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{p^t}}}_{m\text{個}})\to\cdots\cdots\to(\underbrace{p^t+q,p^t,\cdots,p^t}_{m\text{個}})$$

故 $C_n=[S,S+p^t,\cdots\cdots,S+(m-1)p^t]$ ■

【舉例】

(1)當 $n=345=7^3\cdot 1+2$，則 $S=\dfrac{7^3\cdot(7-2)+(7\cdot 2-1)}{6}=288$，故 $E_n=[288]$。

即 345 人依照規則$T_{1,2,\cdots,7}$傳遞糖果，最終會由初始編號 288 的人獨得所有糖果。

(2)當 $n=612=11^2\cdot 5+7$，則 $S=\dfrac{11^2\cdot(11-7)+(11\cdot 7-1)}{10}=56$，故

$C_n=[56,56+11^2,56+2\cdot 11^2,56+3\cdot 11^2,56+4\cdot 11^2]=[56,177,298,419,540]$。

即612 人依照規則$T_{1,2,\cdots,11}$傳遞糖果，最終會由初始編號56,177,298,419,540的人循環傳遞糖果。

研究四：傳遞規則$T_{1,2,\cdots,p}$且 p 為質數的冪次方

研究三中，我們證得了結論：規則$T_{1,2,\cdots,p}$(p 為質數)下，只有$n=p^t+q\ (q=1,2,\cdots,p)$時，會發生成功狀態，其餘皆為循環狀態。我們一直以為，規則$T_{1,2,3,4}$下，應該也可以推論只有$n=4^t+1$、4^t+2、4^t+3、4^t+4時，才會發生成功狀態吧！然而經過我們多組數據測試，我們發現這些n值只是發生成功狀態的充分條件，卻不是必要條件。比如：$n=9=4^1\cdot 2+1$，竟然最終也是成功狀態，到底是為什麼呢？顯然，當 p 不為質數時，公式就必須要修正。為了瞭解在規則$T_{1,2,\cdots,p}$下，p 不為質數時與 p 為質數時為何結論會有不同，我們決定先特別針對$p={p_0}^{\alpha}$ (p_0 為質數)的情形深入探討。首先，我們先舉 $p=4$ 的幾個例子來觀察：

n 值	表示法	傳遞過程	n 值	表示法	傳遞過程
17	$4^2\times1+1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{17}}\to\underset{(4,4,4,5)}{S_1^{17}}\to\underset{(17)}{E_{17}}$	49	$4^2\times3+1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{49}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,5)}{S_1^{49}}\to\underset{(16,16,17)}{S_2^{49}}\to\underset{(16,16,17)}{C_{49}}$
18	$4^2\times1+2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{18}}\to\underset{(4,4,4,4,2)}{S_1^{18}}\to\underset{(16,2)}{S_2^{18}}\to\underset{(18)}{E_{18}}$	50	$4^2\times3+2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{50}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,2)}{S_1^{50}}\to\underset{(16,16,16,2)}{S_2^{50}}\to\underset{(18,16,16)}{C_{50}}$
19	$4^2\times1+3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{19}}\to\underset{(4,4,4,4,3)}{S_1^{19}}\to\underset{(16,3)}{S_2^{19}}\to\underset{(19)}{E_{19}}$	51	$4^2\times3+3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{51}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,3)}{S_1^{51}}\to\underset{(16,16,16,3)}{S_2^{51}}\to\underset{(19,16,16)}{C_{51}}$
20	$4^2\times1+4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{20}}\to\underset{(4,4,4,4,4)}{S_1^{20}}\to\underset{(16,4)}{S_2^{20}}\to\underset{(20)}{E_{20}}$	52	$4^2\times3+4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{52}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,4)}{S_1^{52}}\to\underset{(16,16,16,4)}{S_2^{52}}\to\underset{(20,16,16)}{C_{52}}$
33	$4^2\times2+1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{33}}\to\underset{(4,4,4,4,4,4,4,5)}{S_1^{33}}\to\underset{(16,17)}{S_2^{33}}\to\underset{(33)}{E_{33}}$	97	$4^2\times6+1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{97}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,5)}{S_1^{97}}\to\underset{(16,16,16,16,16,17)}{S_2^{97}}\to\underset{(32,32,33)}{C_{97}}$
34	$4^2\times2+2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{34}}\to\underset{(4,4,4,4,4,4,4,4,2)}{S_1^{34}}\to\underset{(16,16,2)}{S_2^{34}}\to\underset{(34)}{E_{34}}$	98	$4^2\times6+2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{98}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,2)}{S_1^{98}}\to\underset{(16,16,16,16,16,16,2)}{S_2^{98}}\to\underset{(34,32,32)}{C_{98}}$
35	$4^2\times2+3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{35}}\to\underset{(4,4,4,4,4,4,4,4,3)}{S_1^{35}}\to\underset{(16,16,3)}{S_2^{35}}\to\underset{(35)}{E_{35}}$	99	$4^2\times6+3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{99}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,3)}{S_1^{99}}\to\underset{(16,16,16,16,16,16,3)}{S_2^{99}}\to\underset{(35,32,32)}{C_{99}}$
36	$4^2\times2+4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{36}}\to\underset{(4,4,4,4,4,4,4,4,4)}{S_1^{36}}\to\underset{(16,16,4)}{S_2^{36}}\to\underset{(36)}{E_{36}}$	100	$4^2\times6+4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{100}}\to\underset{(4,4,\cdots,4,4)}{S_1^{100}}\to\underset{(16,16,16,16,16,16,4)}{S_2^{100}}\to\underset{(36,32,32)}{C_{100}}$

比較 p 為質數與 $p=2^2$ 的情形之異同

n表示成$n=p^t\cdot m+q$ ($t,m\in N$, $p\nmid m$, $q=1,2,\cdots,p$)

比較表	p 為質數 ($p\nmid m$)	$p=2^2$ ($4\nmid m$)
傳遞過程 同	(1) $q=1$ ① $m=1$，$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_{t-1}^n$。 (2) $q\geq 2$ ①) $m=1$，$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$。	 ② $m\geq 2$，$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$。 ② $m\geq 2$，$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$。
$S_r^n(k)$公式 同	(1) $q=1$，$S_r^n(k)=S+(k-1)\cdot p^r, k=1,2,\cdots,p^{t-r}\cdot m$。 (2) $q\geq 2$ $S_r^n(k)=\begin{cases}S+(k-1)p^r & ,k=1,2,\cdots,p^{t-r}\cdot m\\ S+\left[pk-(2p+1-q)\right]p^{r-1},k=p^{t-r}\cdot m+1\end{cases}$。 $S=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$	
傳遞結果 異	(1) $m=1$，為成功狀態。 (2) $m\geq 2$時，為 m 人的循環狀態。	(1) $m=1,2$，為成功狀態。 (2) $m\geq 3$，m 為奇數，為 m 人的循環狀態。 (3) $m\geq 3$，m 為偶數，為$\dfrac{m}{2}$人的循環狀態。

上表中傳遞結果為何會不同呢？這讓我們相當好奇，於是我們更細微的觀察 $p=4$ 情形的最後一階狀態列S_{t-1}^n或S_t^n之後的變化，研究結果如下：(僅說明$q\geq 2$的情形，$q=1$的情形很類似。)

【問題一】當 $n=4^t\times m+q$ ，為什麼 $m=1,2$ 皆為成功狀態？若 $E_n=[e]$，則 e 值為何？

(1)當 $m=1$，傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$ ， $S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(4^t+q)=E_n$ ，故 $E_n=[S]$ 。

(2)當 $m=2$ ，傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$ ， $S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{4^t+q}}},4^t)=(a_0,a_1)$ 。

觀察 a_0 、 a_1 接下來所傳遞出的糖果數：

$q=2,4$

a_0	a_1
－3	
	－4
－1	
	－2
⋮	⋮

$q=3$

a_0	a_1
－4	
	－1
－2	
	－3
⋮	⋮

如左表，直觀來說，

①$q=2,4$時， a_0 給出的糖果總是比 a_1 少，因此最終糖果會集中在 a_0 手中。此時 $4-q\equiv 0 \pmod 2$ 。

②$q=3$時， a_0 給出的糖果總是比 a_1 多，因此最終糖果會集中在 a_1 手中。事實上，<u>$q=1$ 也屬於此型</u>。此時 $4-q\equiv 1 \pmod 2$ 。

因此 $S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{4^t+q}}},4^t)\to(4^t\times 2+q)=E_n$，$E_n=\left[S+R\cdot 4^t\right]$，其中 $4-q\equiv R \pmod 2$ 。

【問題二】當 $n=4^t\times m+q$ ，為什麼當 $m\geq 3$ ， $4\nmid m$ 且 m 為偶數時，結果為 $\dfrac{m}{2}$ 人的循環狀態呢？若 $C_n=[c_1,c_2,\cdots\cdots,c_i]$ ，則 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_i$ 的值分別為何？

以 $n=4^t\times 6+q$ 為例： n 的傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$ ，其中

$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+2\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+3\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+4\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+5\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{4^t+q}}},4^t,4^t,4^t,4^t,4^t)=(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ 。

觀察 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 接下來所傳遞出的糖果數：

$q=2,4$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
－3					
	－4				
		－1			
			－2		
				－3	
					－4
－1					
	－2				
		－3			
			－4		
				－1	
					－2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$q=3$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
－4					
	－1				
		－2			
			－3		
				－4	
					－1
－2					
	－3				
		－4			
			－1		
				－2	
					－3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

如左表，直觀來說，

①$q=2,4$時，最終糖果會集中在 a_0 、 a_2 、 a_4 手中。此時 $4-q\equiv 0 \pmod 2$ 。

②$q=3$時，最終糖果會集中在 a_1 、 a_3 、 a_5 手中。事實上，<u>$q=1$ 也屬於此型</u>。此時 $4-q\equiv 1 \pmod 2$ 。由①②知，

$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+2\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+3\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+4\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+5\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(\overset{\overset{S+R\cdot 4^t}{\downarrow}}{2\cdot 4^t},\ \overset{\overset{S+R\cdot 4^t+2\cdot 4^t}{\downarrow}}{2\cdot 4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+R\cdot 4^t+4\cdot 4^t}{\downarrow}}{2\cdot 4^t}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$

$\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{2\cdot 4^t+q}}},2\cdot 4^t,2\cdot 4^t)=(b_0,b_1,b_2)$ ， 其中 $4-q\equiv R \pmod 2$ 。

$q=2,3,4$

b_0	b_1	b_2
－3		
	－4	
		－1
－2		
	－3	
		－4
－1		
	－2	
		－3
－4		
	－1	
		－2
⋮	⋮	⋮

再觀察 b_0 、 b_1 、 b_2 接下來所傳遞出的糖果數：如左表，直觀來說，

$q=2,3,4$時， b_0,b_1,b_2 平均的給出手中的糖果，因此糖果並不會集中在某人手中，而是在此三人間循環傳遞。(<u>$q=1$ 亦同</u>)

因此 $S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+2\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+3\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+4\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+5\cdot 4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(\overset{\overset{S+R\cdot 4^t}{\downarrow}}{2\cdot 4^t},\ \overset{\overset{S+R\cdot 4^t+2\cdot 4^t}{\downarrow}}{2\cdot 4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+R\cdot 4^t+4\cdot 4^t}{\downarrow}}{2\cdot 4^t}\ ,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to C_n$ ，

$C_n=\left[S+R\cdot 4^t,S+R\cdot 4^t+2\cdot 4^t,S+R\cdot 4^t+4\cdot 4^t\right]$ ，其中 $4-q\equiv R \pmod 2$ 。

【問題三】上述公式中的 $\boldsymbol{R}$ 值為什麼決定於 $\boldsymbol{p-q\equiv R(\mathrm{mod}\,d)}$，其中 $\boldsymbol{(p,m)=d}$ 呢？

以規則 $T_{1,2,\cdots,9}$ 、 $n=9^t\times 15+2$ 為例： n 的傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$ ，其中

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{S}{\underset{\downarrow}{}}9^t,\ \overset{S+9^t}{\underset{\downarrow}{}}9^t,\cdots,\ \overset{S+14\cdot 9^t}{\underset{\downarrow}{}}9^t}_{15\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\to(\overset{3}{\underbrace{\underline{\underline{9^t+2}},9^t,\cdots,9^t}_{15\text{個}}})=(a_0,a_1,\cdots,a_{14})\ \text{且}\ a_i\ \text{的初始編號為}\ S+i\cdot 9^t\ 。$$

觀察 a_0 、 a_1 、……、 a_{14} 接下來所傳遞出的糖果數：(將 1 個傳遞週期濃縮成 3 行表示)

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	
傳出	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	1
總變化	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	+8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	輪
傳出	−9	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−1	−2	−3	−4	−5	2
總變化	−1	+8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	+8	−1	−1	−1	−1	輪
傳出	−6	−7	−8	−9	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−1	−2	3
總變化	−1	−1	−1	−1	+8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	+8	−1	輪

由上表可看出，除了 a_1 、 a_4 、 a_7 、 a_{10} 、 a_{13} 外，其他人手中的糖果數每輪減少一顆，一直遞減，直至同時降至 0 顆，因此最終糖果會集中在 a_1 、 a_4 、 a_7 、 a_{10} 、 a_{13} 此 5 人手中。

可觀察到以下性質：

(1)每 3 輪會形成一個傳遞週期。

(2) $(9,15)=3\Rightarrow$ 每 3 人保留 1 人，其餘人手中糖果會清空而被淘汰。

(3) $9-2\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow$ 第一個保留的人為 a_1 。

(4) a_1 、 a_4 、 a_7 、 a_{10} 、 a_{13} 的初始編號分別為 $S+1\cdot 9^t, S+4\cdot 9^t, S+7\cdot 9^t, S+10\cdot 9^t, S+13\cdot 9^t$ 。

事實上，**這樣的糖果集中原則，對於任意 p 值，以及任意人數進行傳遞時，皆適用**。

為了方便描述糖果集中原則，我們先<u>定義</u>一個函數： $[x]_p=\begin{cases}x\text{除以}p\text{的餘數}, & \text{當}\ p\nmid x\\ p\ , & \text{當}\ p\mid x\end{cases}$ 。

糖果集中原則：在規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 下，當剩 ℓ 人傳遞糖果，且當前狀態列 $(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{\ell-1}}_{\ell})$ 型如

$$(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})\ ，\ \frac{p}{d}\mid A\ 、\ 1\le q\le p\ \text{，則數輪傳遞後，糖果會集中在}$$

$$\underbrace{a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}}\ \text{手中，即狀態列變化為}\ (\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{a_R}}},a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}})\ ，$$

其中 $(p,\ell)=d$ 、 $p-q\equiv R(\mathrm{mod}\,d)$ 、 $0\le R<d$ 。特別的是，當 $(p,\ell)=1$ 時， $R=0$ ，此時糖果會在此 ℓ 人間循環傳遞。

【證明】(僅證明 $1\le q\le p-1$ 個的情形， $q=p$ 時同理。)

假設當前狀態列為$(\overset{q+1}{\underline{\underline{a_0}}}, a_1, \cdots, a_{\ell-1}) = (\underbrace{\overset{q+1}{\underline{\underline{A+q}}}, A, \cdots, A}_{\ell})$，

a_i 每一次糖果數變化可能為以下兩種情形：

(ｉ) 接收 $(T-1)$ 顆糖果，傳出 T 顆糖果，糖果總變化量為 -1 。

(ⅱ) 接收 p 顆糖果，傳出 1 顆糖果，糖果總變化量為 $+(p-1)$ 。

此外，若 a_i 在某次傳遞出 T 顆糖果，則下次會傳遞出 $[T+\ell]_p$ 顆糖果。因此，

$$a_i \text{ 的傳遞情形是 } \underbrace{T \to [T+\ell]_p \to [T+2\ell]_p \to \cdots\cdots \to \left[T+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p}_{\frac{p}{d}\text{次}} \to T \to \cdots\cdots$$

產生週期為 $\dfrac{p}{d}$ 的循環。【註 1】

觀察 $a_0, a_1, \cdots, a_{\ell-1}$ 傳遞出的糖果數，如下表：(將 $a_0, a_1, \cdots, a_{\ell-1}$ 以每 d 人一組，分成 $\dfrac{\ell}{d}$ 組。)

	a_0	$\cdots$	a_R	$\cdots$	$\cdots$	a_{R+d}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$	$\cdots a_{\ell-1}$	
傳	$-(q+1)$		$-[R+q+1]_p$			$-[R+q+1+d]_p$		$\cdots$		$-\left[R+q+1+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d\right]_p$		一個傳遞週期 $\frac{p}{d}$ 輪
總	-1	$\cdots$	☆	-1	-1	☆	-1	$\cdots$	-1	☆	-1	
傳			$-[R+q+1+\ell]_p$			$-[R+q+1+d+\ell]_p$		$\cdots$		$-\left[R+q+1+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d+\ell\right]_p$		
總	-1	$\cdots$	☆	-1	-1	☆	-1	$\cdots$	-1	☆	-1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
傳			$-\left[R+q+1+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p$			$-\left[R+q+1+d+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p$		$\cdots$		$-\left[R+q+1+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p$		
總	-1	$\cdots$	☆	-1	-1	☆	-1	$\cdots$	-1	☆	-1	
			第 1 組			第 2 組				第 $\frac{\ell}{d}$ 組		

存在以下性質：

(1) $a_R, a_{R+d}, \cdots\cdots, a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 第一次傳遞出的糖果數分別為

$$[R+q+1]_p,\ [R+q+1+d]_p,\ \cdots\cdots,\ \left[R+q+1+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d\right]_p$$

因為 $R+q+1+sd \equiv 1 (\operatorname{mod} d),\ s \in N \cup \{0\}$【註 2】，所以除了 $a_R, a_{R+d}, \cdots\cdots, a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 外，其他人均不可能為情形(ⅱ)，故手中糖果數每輪會少一顆，且糖果數會同時歸零而淘汰。

(2) 當 $a_R, a_{R+d}, \cdots\cdots, a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 外的人之手中糖果數降至零時，共進行了 A 輪傳遞，又 $\dfrac{p}{d} \mid A$，因此必是進行了數個完整週期的傳遞過程。其狀態列變化如下：

$$(\underbrace{\overset{q+1}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{第1組},\underbrace{A,\cdots,A}_{第2組},\cdots\cdots,\underbrace{A,\cdots,A}_{第\frac{\ell}{d}組})$$

$$\xrightarrow{\frac{p}{d}輪}(\underbrace{A-\frac{p}{d},\cdots,A-\frac{p}{d},\overset{\overset{a_R}{\downarrow}}{A+p-\frac{p}{d}},A-\frac{p}{d},\cdots,A-\frac{p}{d}}_{第1組},\cdots\cdots,\underbrace{A-\frac{p}{d},\cdots,A-\frac{p}{d},\overset{\overset{a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}{\downarrow}}{A+p-\frac{p}{d}},A-\frac{p}{d},\cdots,\overset{q}{\underline{\underline{A-\frac{p}{d}+q}}}}_{第\frac{\ell}{d}組})$$

$$\xrightarrow{\frac{p}{d}\times 2輪}(\underbrace{A-\frac{2p}{d},\cdots,A-\frac{2p}{d},\overset{\overset{a_R}{\downarrow}}{A+2p-\frac{2p}{d}},A-\frac{2p}{d},\cdots,A-\frac{2p}{d}}_{第1組},\cdots\cdots,\underbrace{A-\frac{2p}{d},\cdots,A-\frac{2p}{d},\overset{\overset{a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}{\downarrow}}{A+2p-\frac{2p}{d}},A-\frac{2p}{d},\cdots,\overset{q}{\underline{\underline{A-\frac{2p}{d}+q}}}}_{第\frac{\ell}{d}組})$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow{A輪}(\underbrace{0,\cdots,0,\overset{\overset{a_R}{\downarrow}}{dA},0,\cdots,0}_{第1組},\cdots,\underbrace{0,\cdots,0,\overset{\overset{a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}{\downarrow}}{dA},0,\cdots,\overset{q}{\underline{\underline{q}}}}_{第\frac{\ell}{d}組})\xrightarrow{1輪}(\underbrace{\overset{q+1}{\underline{\underline{dA+q}}},dA,\cdots,dA}_{\frac{\ell}{d}})=(\underbrace{\overset{q+1}{\underline{\underline{a_R}}},a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}})$$

【註 1】$\because (p,\ell)=d$　　令 $p=dp',\ell=d\ell'$　其中 $(p',\ell')=1$　則 $p'=\dfrac{p}{d}$

①若 $[T+p''\ell]_p=T$，$1\le p''\le p'-1$　則 $p\,|\,p''\ell\Rightarrow dp'\,|\,p''d\ell'\Rightarrow p'\,|\,p''\ell'\Rightarrow p'\,|\,p''\rightarrow\leftarrow$

因此 $[T+p''\ell]_p\ne T,\ 1\le p''\le p'-1$

② $[T+p'\ell]_p=[T+p'd\ell']_p=[T+p\ell']_p=T$　　由①②知　產生週期為 $\dfrac{p}{d}$ 的循環。

【註 2】$\because p-q\equiv R(\mathrm{mod}\,d)$　　$\therefore p-q-R=d\cdot B$　其中 $B\in Z$

故　$R+q+1+sd=p-d\cdot B+1+sd=dp'-d\cdot B+1+sd\equiv 1(\mathrm{mod}\,d)$　■

$\boxed{討論}$ 若 $\dfrac{p}{d}\nmid A$，糖果也會集中在 $a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 的手中，但變化後的狀態列不是型如 $(\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A)$。本作品所處理的 A 值，皆符合 $\dfrac{p}{d}\,|\,A$。

以上說明，我們可以將過程一般化，<u>調整一下符號表示</u>，便可證得定理 4。

定理 4：n 人($n\ge p+1$)依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_0^{\alpha}$ (p_0 為質數)，且 n 表示成

$$n=p^t\cdot\left(p_0^{\beta}m\right)+q=\left(p_0^{\alpha}\right)^t\cdot\left(p_0^{\beta}m\right)+q\ \ (t,m\in N,\ \ p_0\nmid m,\ \ \alpha>\beta,\ \ q=1,2,\cdots,p)，$$

令 $S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$、$p-q\equiv R\ (\mathrm{mod}\ p_0^{\beta})$、$0\le R<p_0^{\beta}$，$S=S_0+R\cdot p^t$，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\ge 2$，最終為循環狀態，且 $C_n=\left[S,S+p_0^{\alpha t+\beta},\cdots\cdots,S+(m-1)p_0^{\alpha t+\beta}\right]$。

【證明】

當 $\beta=0$、$m=1$、$q=1$，即 $n=\left(p_0{}^{\alpha}\right)^t\cdot 1+1$，同引理 3.2 之證明，我們可證得其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_{t-1}^n \to E_n$，且 $E_n=[S]$，定理 4 結論成立。

以下針對其他情形探討：同引理 3.2 之證明可證得，

a. 當 $q=1$ 時，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_t^n$，

$$\text{其中 } S_t^n=(\underbrace{p^t,p^t,\cdots\cdots,p^t}_{(p_0{}^{\beta}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{p^t+1}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{p^t+1}}}},\ \overset{\overset{S_0+p^t}{\downarrow}}{p^t},\cdots\cdots,p^t,\ \overset{\overset{S_0+(p_0{}^{\beta}m-1)p^t}{\downarrow}}{p^t}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}})=(\underbrace{\overset{2}{\underline{\underline{a_0}}},a_1,\cdots,a_{p_0{}^{\beta}\cdot m-1}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m})$$

b. 當 $q\geq 2$ 時，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_t^n$，

$$\text{其中 } S_t^n=(\underbrace{p^t,p^t,\cdots\cdots,p^t}_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{p^t+q}}}},\ \overset{\overset{S_0+p^t}{\downarrow}}{p^t},\cdots\cdots,\ \overset{\overset{S_0+(p_0{}^{\beta}m-1)p^t}{\downarrow}}{p^t}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}})=(\underbrace{\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{a_0}}},a_1,\cdots,a_{p_0{}^{\beta}\cdot m-1}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m})$$

由 a. b.可知，無論 q 值為何，皆存在狀態列 $(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{p_0{}^{\beta}\cdot m-1}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}})$ 型如 $(\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A)$，其中 a_i 的初始編號為 $S_0+i\cdot p^t$、$S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$ $(0\leq i\leq p_0{}^{\beta}\cdot m-1)$。

接著，觀察其之後的變化。

由**糖果集中原則**知：$(p,p_0{}^{\beta}m)=(p_0{}^{\alpha},p_0{}^{\beta}m)=p_0{}^{\beta}=d$ 且 $p-q\equiv R\ (\mathrm{mod}\ p_0{}^{\beta})$、$0\leq R<p_0{}^{\beta}$，數輪傳遞後，糖果會集中在 $a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+(m-1)d}$ 的手中。

(1)若 $m=1$，糖果最終會集中在 a_R 一個人手中，他的初始編號為 $S_0+R\cdot p^t=S$，即 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\geq 2$，糖果會集中在 $a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+(m-1)d}$ 的手中，其中 $(p,m)=1$。

由**糖果集中原則**知：糖果會在 $a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+(m-1)d}$ 這 m 人間循環傳遞，且他們的初始編號為 $S_0+R\cdot p^t,\ S_0+(R+d)\cdot p^t,\ \cdots\cdots,\ S_0+[R+(m-1)d]\cdot p^t$。

即 $C_n=\left[S,S+p_0{}^{\alpha t+\beta},\cdots\cdots,S+(m-1)p_0{}^{\alpha t+\beta}\right]$ ■

【舉例】

(1)當 $n=250=\left(3^2\right)^2\times\left(3^1\times 1\right)+7$，則 $3^2-7\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3^1)$，$S=\dfrac{9^2(9-7)+(9\cdot 7-1)}{3^2-1}+2\cdot 9^2=190$，

故 $E_n=[S]=[190]$。即 250 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,9}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 190 的人獨得所有糖果。

(2)當 $n=1284=\left(2^3\right)^2\times\left(2^2\times 5\right)+4$，則 $2^3-4\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^2)$，$S=\dfrac{8^2(8-4)+(8\cdot 4-1)}{2^3-1}+0\cdot 8^2=41$，

故 $C_n=\left[41,41+2^8,\cdots\cdots,41+4\cdot 2^8\right]=[41,297,553,809,1065]$。即 1284 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,8}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 41, 297, 553, 809, 1065 的人循環傳遞糖果。

研究五：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 且 $p\in N, p\geq 2$

最後，我們想挑戰 p 為任意正整數的一般化情形。我們蒐集了各種 p 值的傳遞結果，有了初步發現：若 p 的質因數分解為 $p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ，其中 $(m,p)=1$ ， $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$ ，其**傳遞結果與定理 4 類似**，同時，我們也發現，存在某個 R 值，符合定理 4 中 $\boldsymbol{S=S_0+R\cdot p^t}$ 的通式。比如，傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$ 下，當 $n=(2\times3\times5)^t\times2^4\times3^2\times1+3$ 時，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$，其中 $S=S_0+\underbrace{129}_{R}\cdot 30^t$。然而，這個 R 值該如何決定呢？經過研究發現，這和**糖果集中原則**息息相關，且 **R 值在不同的 n 值間存在著某種線性關係，我們可以利用這個線性關係迭代出所需的 R 值**。

以下舉例說明：

說明：當 $n=(30)^t\times2^2+11$ 時，$E_n=[S]$。其中 $S=S_0+\underbrace{R}_{=3}\cdot30^1$，$S_0=\dfrac{30^t(30-11)+(30\cdot11-1)}{30-1}$。

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$ 、 $n=(2\times3\times5)^t\times2^s+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	$s\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	······	29	30
$R_3(0,0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	······	0	0
$R_3(1,0)$	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	······	1	0
		1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	······	1+0·2	0+0·2
$R_3(2,0)$	2	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	······	3	0
		1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	······	1+1·2	0+0·2
	3	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	······	7	0
		1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	······	1+3·2	0+0·2
	4	15	0	15	0	15	0	15	0	15	0	15	0	······	15	0
		1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	······	1+7·2	0+0·2

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$ 、 $n=(2\times3\times5)^t\times2^s\times3+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	$s\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	······	29	30
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	······	1	0
	1	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	······	1	0
		5+0·6	4+0·6	3+0·6	2+0·6	1+0·6	0+0·6	5+0·6	4+0·6	3+0·6	2+0·6	1+0·6	0+0·6	······	1+0·6	0+0·6
	2	11	4	9	2	7	0	11	4	9	2	7	0	······	7	0
		5+1·6	4+0·6	3+1·6	2+0·6	1+1·6	0+0·6	5+1·6	4+0·6	3+1·6	2+0·6	1+1·6	0+0·6	······	1+1·6	0+0·6
$R_3(3,1)$	3	23	4	21	2	19	0	23	4	21	2	19	0	······	19	0
		5+3·6	4+0·6	3+3·6	2+0·6	1+3·6	0+0·6	5+3·6	4+0·6	3+3·6	2+0·6	1+3·6	0+0·6	······	1+3·6	0+0·6
	4	47	4	45	2	43	0	47	4	45	2	43	0	······	43	0
		5+7·6	4+0·6	3+7·6	2+0·6	1+7·6	0+0·6	5+7·6	4+0·6	3+7·6	2+0·6	1+7·6	0+0·6	······	1+7·6	0+0·6

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$ 、 $n=(2\times3\times5)^t\times2^s\times3^2+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	$s\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	······	29	30
	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	······	4	0
	1	17	10	3	14	7	0	17	10	3	14	7	0	······	7	0
		5+2·6	4+1·6	3+0·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	5+2·6	4+1·6	3+0·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	······	1+1·6	0+0·6
	2	35	28	21	14	7	0	35	28	21	14	7	0		7	0
		5+5·6	4+4·6	3+3·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	5+5·6	4+4·6	3+3·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	······	1+1·6	0+0·6
	3	71	28	57	14	43	0	71	28	57	14	43	0		43	0
		5+11·6	4+4·6	3+9·6	2+2·6	1+7·6	0+0·6	5+11·6	4+4·6	3+9·6	2+2·6	1+7·6	0+0·6	······	1+7·6	0+0·6
$R_3(4,2)$	4	143	28	129	14	115	0	143	28	129	14	115	0		115	0
		5+23·6	4+4·6	3+21·6	2+2·6	1+19·6	0+0·6	5+23·6	4+4·6	3+21·6	2+2·6	1+19·6	0+0·6	······	1+19·6	0+0·6

【說明】

若 $n=(2\times3\times5)^t\times2^{s_1}\times3^{s_2}+q$ 的 R 值記作 $R_q(s_1,s_2)$ ，由以上表格紫色圈圈，我們可以觀察到：

$R_3(4,2)=129=3+\underbrace{21}_{R_3(3,1)}\cdot6$ 　且　 $R_3(3,1)=21=3+\underbrace{3}_{R_3(2,0)}\cdot6$ 　且　 $R_3(2,0)=3=1+\underbrace{1}_{R_3(1,0)}\cdot2$

且　 $R_3(1,0)=1=1+\underbrace{0}_{R_3(0,0)}\cdot2$ 。

也就是**只要我們給定初始值 $R_3(0,0)=0$ ，依照一定的線性關係，就可依序迭代出 $R_3(4,2)$ 。**

【問題】**以上 R 值為什麼會存在線性關係呢？其線性關係如何表示？**

為了找出 $R_3(4,2),\ R_3(3,1),\ R_3(2,0),\ R_3(1,0),\ R_3(0,0)$ 間的關係，我們針對傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$ ，$n=(30)^t\times2^{s_1}\times3^{s_2}+3$，分別分析 $(s_1,s_2)=(4,2),\ (3,1),\ (2,0),\ (1,0),\ (0,0)$ 時，其狀態列的變化。

(1) $R_3(4,2)$ 對應 $n=(2\times3\times5)^t\times2^4\times3^2+3=30^t\times144+3$，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$ ，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{30^t}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}\ ,\cdots\cdots,\ \ \overset{S_0+143\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{144個}\ ,\underset{=}{\overset{3}{3}})\to(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{\overset{4}{\underline{\underline{30^t+3}}}}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}\ ,\cdots\cdots,\ \ \overset{S_0+143\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{144個}\ )=(a_0,a_1,\cdots,a_{143})$$

，其中 a_k 的初始編號為 $S_0+k\cdot30^t$ 、 $S_0=\dfrac{30^t(30-3)+(30\times3-1)}{30-1}$ $(0\le k\le143)$。觀察 $(a_0,a_1,\cdots,a_{143})$ 接下來的變化。

因為 $(30,144)=6$ 且 $30-3\equiv3(\text{mod }6)$ ，由**糖果集中原則**可知：數輪傳遞後，糖果會集中於 $a_3,a_9,a_{15},\cdots\cdots,a_{141}$ 共 24 人手中，依此類推。將狀態列變化圖示如下：**＜表 1＞**

$(30,144)=6$ $30-3\equiv3(\text{mod }6)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	……	a_{138}	a_{139}	a_{140}	a_{141}	a_{142}	a_{143}

$(30,24)=6$ $30-3\equiv3(\text{mod }6)$	a_3	a_9	a_{15}	a_{21}	a_{27}	a_{33}	a_{39}	a_{45}	a_{51}	a_{57}	a_{63}	a_{69}	a_{75}	a_{81}	a_{87}	a_{93}	a_{99}	a_{105}	a_{111}	a_{117}	a_{123}	a_{129}	a_{135}	a_{141}
$(30,4)=2$ $30-3\equiv1(\text{mod }2)$				a_{21}						a_{57}						a_{93}						a_{129}		
$(30,2)=2$ $30-3\equiv1(\text{mod }2)$										a_{57}												a_{129}		
最終結果																						a_{129}		

由＜表 1＞可知，糖果最終集中在 a_{129} 手中，其初始編號為 $S_0+129\cdot30^t$ ，故 $R_3(4,2)=129$ 。

(2) $R_3(3,1)$ 對應 $n=(2\times3\times5)^t\times2^3\times3^1+3=30^t\times24+3$，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$ ，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{30^t}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}\ ,\cdots\cdots,\ \ \overset{S_0+23\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{24個}\ ,\underset{=}{\overset{3}{3}})\to(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{\overset{4}{\underline{\underline{30^t+3}}}}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}\ ,\cdots\cdots,\ \ \overset{S_0+23\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{24個}\ )=(a_0,a_1,\cdots,a_{23})$$

。其中 a_k 的初始編號為 $S_0+k\cdot30^t$ 、 $S_0=\dfrac{30^t(30-3)+(30\times3-1)}{30-1}$ $(0\le k\le23)$。觀察 $(a_0,a_1,\cdots,a_{23})$ 接下來的變化。

依照**糖果集中原則**，將狀態列變化圖示如下：**<表 2>**

$(30,24)=6$ $30-3\equiv 3(\bmod 6)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$(30,4)=2$ $30-3\equiv 1(\bmod 2)$				a_3						a_9						a_{15}						a_{21}		
$(30,2)=2$ $30-3\equiv 1(\bmod 2)$										a_9												a_{21}		
最終結果																						a_{21}		

由<表 2>可知，糖果最終集中在a_{21}手中，其初始編號為$S_0+21\cdot 30^t$，故$R_3(3,1)=21$。

觀察<表 1>、<表 2>的關係

<表 1>的第二~五列的糖果集中模式和<表 2>的第一~四列一模一樣，只是每個編號呈現$y=3+6x$的線性關係，而這個關係是因為原本<表 1>中$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{143}$共 144 人，依照**糖果集中原則**，在數輪傳遞後，糖果會集中在$a_3,a_9,a_{15},\cdots\cdots,a_{141}$手中，而這 24 人若重新編號後，身分就類同<表 2>中的$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{23}$。因此$\boxed{R_3(4,2)=3+6\cdot R_3(3,1)}$。

(3) $R_3(2,0)$對應$n=(2\times 3\times 5)^t\times 2^2\times 3^0+3=30^t\times 4+3$，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+2\cdot 30^t}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+3\cdot 30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{4個},\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{4}}{\underline{\underline{30^t+3}}},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+2\cdot 30^t}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+3\cdot 30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{4個})=(a_0,a_1,a_2,a_3)\text{。}$$

依照**糖果集中原則**，將狀態列變化圖示如下：**<表 3>**

$(30,4)=2$ $30-3\equiv 1(\bmod 2)$	a_0	a_1	a_2	a_3
$(30,2)=2$ $30-3\equiv 1(\bmod 2)$		a_1		a_3
最終結果				a_3

由<表 3>可知，糖果最終集中在a_3手中，其初始編號為$S_0+3\cdot 30^t$，故$R_3(2,0)=3$。

<表 2>的第二~四列的糖果集中模式和<表 3>的第一~三列一模一樣，而每個編號呈現$y=3+6x$的線性關係，因此$\boxed{R_3(3,1)=3+6\cdot R_3(2,0)}$。

(4) $R_3(1,0)$對應$n=(2\times 3\times 5)^t\times 2^1\times 3^0+3=30^t\times 2+3$，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{2個},\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{4}}{\underline{\underline{30^t+3}}},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{2個})=(a_0,a_1)\text{。}$$

依照**糖果集中原則**，將狀態列變化圖示如下：**<表 4>**

$(30,2)=2$ $30-3\equiv 1(\bmod 2)$		a_0		a_1
最終結果				a_1

由<表 4>可知，糖果最終集中在a_1手中，其初始編號為$S_0+1\cdot 30^t$，故$R_3(1,0)=1$。

<表 3>的第二、三列的糖果集中模式和<表 4>的第一~二列一模一樣，而每個編號呈現$y=1+2x$的線性關係，因此$\boxed{R_3(2,0)=1+2\cdot R_3(1,0)}$。

(5) $R_3(0,0)$ 對應 $n=(2\times3\times5)^t\times2^0\times3^0+3=30^t\times1+3$，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$S_t^n=(\overset{\overset{s_0}{\downarrow}}{30^t},\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\overset{\overset{s_0}{\downarrow}}{30^t}+3)=(a_0)$，此時顯然 $R_3(0,0)=0$。因此 $\boxed{R_3(1,0)=1+2\cdot R_3(0,0)}$。

我們將以上研究結論整理如下：

R 值線性關係：

n 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ($t,m\in N$, $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p$)，將 n 的 R 值記作 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$，若 $(p,p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i})=d$、$p-q\equiv r\pmod d$、$0\le r<d$，則

$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)=r+R_q(Max\{s_1-\alpha_1,0\},Max\{s_2-\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-\alpha_i,0\})\times d$。

R 值迭代法：

依照 **R 值線性關係**，列出以下 R 值間的關係式，直至 $(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 降階至 $(0,0,\cdots,0)$。即

$$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)\to R_q(Max\{s_1-\alpha_1,0\},Max\{s_2-\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-\alpha_i,0\})\to$$
$$R_q(Max\{s_1-2\alpha_1,0\},Max\{s_2-2\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-2\alpha_i,0\})\to\cdots\cdots\to R_q(0,0,\cdots,0)$$

給定初始值 $R_q(0,0,\cdots,0)=0$，可迭代出 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 之值。

定理 5：n 人($n\ge p+1$)依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ($t,m\in N$, $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p$)。令 $S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$，

$S=S_0+R\cdot p^t$，其中 $R=R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 依照 **R 值迭代法**得出，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\ge2$，最終為循環狀態，且

$$C_n=\left[S,S+p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i},\cdots\cdots,S+(m-1)\cdot p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\right]。$$

【證明】

當 $n=(p)^t\times1+1$ 時，顯然成立。以下針對其他情形探討：

（i）**證明存在 R 值線性關係**

已知 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ 的 R 值為 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$，其中 $S=S_0+R\cdot p^t$ 代表<u>最終狀態第一個不被淘汰的人之初始編號</u>。同引理 3.2 與定理 4 之證明，我們可證得：

無論 q 值為何，必存在狀態列 $\underbrace{(a_0, a_1, \cdots, a_{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m-1})}_{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m\text{個}}$ 型如 $(\underline{\underline{A+q}}^{[q+1]_p}, A, \cdots, A)$ ，其中 a_k 的初始編號為 $S_0 + k \cdot p^t$ 、 $S_0 = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$ （$0 \le k \le p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m-1$）。

接著，觀察其之後的變化。由**糖果集中原則**知：

$(p, p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} m) = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_j^{\alpha_j}, p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}) = p_1^{\min\{\alpha_1, s_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, s_2\}} \cdots p_i^{\min\{\alpha_i, s_i\}} = d$

且 $p-q \equiv r \pmod{d}$ 、$0 \le r < d$ ，數輪傳遞後，糖果會集中在 $a_r, a_{r+d}, \cdots\cdots, a_{r+\left(\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1\right)d}$ 的手中，這些人重新編號後成為 $b_0, b_1, \cdots\cdots, b_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1}$ 。

顯然，舊編號與新編號會呈現線性關係 $\underset{\text{舊編號}}{y} = r + d \cdot \underset{\text{新編號}}{x}$ ，因此，b_k 的初始編號為

$S_0 + (r + d \cdot k) \cdot p^t$ （$0 \le k \le \dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1$）。

同理，當 $n' = (p)^t \times (\dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m) + q$ 時，我們也可證得，無論 q 值為何，必存在狀態列 $\underbrace{(c_0, c_1, \cdots, c_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1})}_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m\text{個}}$ 型如 $(\underline{\underline{A+q}}^{[q+1]_p}, A, \cdots, A)$ ，其中 a_k 的初始編號為 $S_0 + k \cdot p^t$ 、

$S_0 = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$（$0 \le k \le \dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1$）。接著，我們化簡 $\dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m$ 可得：

$$\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m = \frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{p_1^{\min\{\alpha_1, s_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, s_2\}} \cdots p_i^{\min\{\alpha_i, s_i\}}} \cdot m = p_1^{Max\{s_1-\alpha_1, 0\}} p_2^{Max\{s_2-\alpha_2, 0\}} \cdots p_i^{Max\{s_i-\alpha_i, 0\}} \cdot m$$

因此，n' 的 R 值可記為 $R_q(Max\{s_1-\alpha_1, 0\}, Max\{s_2-\alpha_2, 0\}, \cdots, Max\{s_i-\alpha_i, 0\})$ 。

又 $(c_0, c_1, \cdots, c_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1})$ 和 $(b_0, b_1, \cdots\cdots, b_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1})$ 接下來的傳遞過程會一模一樣，

因此 n 的 R 值為 $r + R_q(Max\{s_1-\alpha_1, 0\}, Max\{s_2-\alpha_2, 0\}, \cdots, Max\{s_i-\alpha_i, 0\}) \times d$ 。

即 $R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i) = r + R_q(Max\{s_1-\alpha_1, 0\}, Max\{s_2-\alpha_2, 0\}, \cdots, Max\{s_i-\alpha_i, 0\}) \times d$ 。

（ⅱ)**證明迭代法可得出** $R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i)$

（ⅰ)的步驟可依此類推，必能將 $R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i)$ 降階至 $R_q(0, 0, \cdots, 0)$，也就是 $n = (p)^t \times (m) + q$ 的 R 值。同引理 3.2 之證明可得，無論 q 值為何，必存在狀態列 $\underbrace{(a_0, a_1, \cdots, a_{m-1})}_{m\text{個}}$ 型如 $(\underline{\underline{A+q}}^{[q+1]_p}, A, \cdots, A)$ ，其中 a_k 的初始編號為 $S_0 + k \cdot p^t$ 、 $S_0 = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$（$0 \le k \le m-1$），

此時 $(p, m) = 1$ 。由**糖果集中原則**知：糖果會在此 m 人間循環傳遞，即 $R_q(0, 0, \cdots, 0) = 0$ 。

(iii)證明定理 5

由(i)(ii)知，當 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ，狀態列 S_t^n 之後的變化為

$$\underbrace{(\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{a_0}},\ \overset{S_0+p^t}{\overset{\downarrow}{a_1}},\ \overset{S_0+2p^t}{\overset{\downarrow}{a_2}},\cdots,a_{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m-1})}_{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m\text{個}} \xrightarrow[p-q\equiv r_1(\bmod d_1)]{(p,\,p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)=d_1} (\underbrace{\overset{S_0+r_1\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{b_0}},\ \overset{S_0+(r_1+d_1)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{b_1}},\ \overset{S_0+(r_1+2d_1)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{b_2}},\cdots\cdots,b_{\frac{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}}{d_1}\cdot m-1}}_{\frac{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}}{d_1}\cdot m\text{個}})$$

$$\xrightarrow[p-q\equiv r_2(\bmod d_2)]{(p,\,\frac{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}}{d_1}\cdot m)=d_2} (\underbrace{\overset{S_0+(r_1+r_2d_1)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{c_0}},\ \overset{S_0+(r_1+r_2d_1+d_1d_2)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{c_1}},\ \overset{S_0+(r_1+r_2d_1+2d_1d_2)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{c_2}},\cdots\cdots,c_{\frac{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}}{d_1d_2}\cdot m-1}}_{\frac{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}}{d_1d_2}\cdot m\text{個}})$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow(\underbrace{\overset{S_0+R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{e_0}},\ \overset{S_0+(R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)+(d_1d_2\cdots d_k))\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{e_1}},\ \overset{S_0+(R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)+2(d_1d_2\cdots d_k))\cdot p^t}{\overset{\downarrow}{e_1}},\cdots,e_{m-1}}_{m\text{個}})$$

其中 $p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}=d_1d_2\cdots d_k$

可得以下結論：

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\geq 2$ ，最終為循環狀態，且

$C_n=\left[S,S+p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i},\cdots\cdots,S+(m-1)\cdot p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\right]$。 ■

【舉例】

(1) $n=2596=(2^2\times3)^2\times(2\times3^2)+4$ ，依照 R 值線性關係列出以下關係式：

$$\overset{n=(12)^2\cdot(2^1\cdot3^2)+4}{R_4(1,2)} \xrightarrow[\substack{12-4\equiv2(\bmod 6) \\ R_4(1,2)=2+R_4(0,1)\cdot6}]{\left.(12,18)=6\right\}\text{得}} \overset{n=(12)^2\cdot(2^0\cdot3^1)+4}{R_4(0,1)} \xrightarrow[\substack{12-4\equiv2(\bmod 3) \\ R_4(0,1)=2+R_4(0,0)\cdot3}]{\left.(12,3)=3\right\}\text{得}} \overset{n=(12)^2\cdot(2^0\cdot3^0)+4}{R_4(0,0)}$$

$$\overset{R\text{值迭代法}}{\Rightarrow \underbrace{R_4(0,0)}_{0}\to\underbrace{R_4(0,1)}_{2}\to\underbrace{R_4(1,2)}_{14}}$$

$S_0=\dfrac{12^2(12-4)+(12\cdot4-1)}{12-1}=109$ ， $S=109+\underset{R_4(1,2)}{\boxed{14}}\cdot12^2=2125$ ，故 $E_n=[S]=[2125]$ 。

即 2596 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,12}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 2125 的人獨得所有糖果。

(2) $n=3013=(2^2\times5)^1\times(2\times5^2\times3)+13$ ，依照 R 值線性關係列出以下關係式：

$$\overset{n=(20)^1\cdot(2^1\cdot5^2\cdot3)+13}{R_{13}(1,2)} \xrightarrow[\substack{20-13\equiv7(\bmod 10) \\ R_{13}(1,2)=7+10\cdot R_{13}(0,1)}]{\left.(20,50)=10\right\}\text{得}} \overset{n=(20)^1\cdot(2^0\cdot5^1\cdot3)+13}{R_{13}(0,1)} \xrightarrow[\substack{20-13\equiv2(\bmod 5) \\ R_{13}(0,1)=2+5\cdot R_{13}(0,0)}]{\left.(20,5)=5\right\}\text{得}} \overset{n=(20)^1\cdot(2^0\cdot5^0\cdot3)+13}{R_{13}(0,0)}$$

$$\overset{R\text{值迭代法}}{\Rightarrow \underbrace{R_{13}(0,0)}_{0}\to\underbrace{R_{13}(0,1)}_{2}\to\underbrace{R_{13}(1,2)}_{27}}$$

$S_0=\dfrac{20^1(20-13)+(20\cdot13-1)}{20-1}=21$ ， $S=21+\underset{R_{13}(1,2)}{\boxed{27}}\cdot20^1=561$ ，故

$C_n=\left[561,561+2^3\cdot5^3,561+2\cdot2^3\cdot5^3\right]=[561,1561,2561]$

即 3013 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,20}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 561, 1561, 2561 的人循環傳遞糖果。

伍、研究結果

n 人($n \ge p+1$)依照規則$T_{1,2,\cdots,p}$($p \ge 2$)傳遞糖果， $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1, p_2, \cdots, p_j$ 為 p 的相異質因數)，n 可唯一表示成 $n = (p)^t \times (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m) + q$ ($t, m \in N$， $p \nmid p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}$， $(m, p) = 1$， $q = 1, 2, \cdots, p$)。令 $S = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1} + R \cdot p^t$ ，則

(1)當 $m=1$時，最終為成功狀態，且獨得所有糖果者的初始編號為S 。

(2)當 $m \ge 2$時，最終為循環狀態，且由m 人循環傳遞糖果，而此m 人的初始編號是

S , $S + p^t p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}$, …… , $S + (m-1) \cdot p^t p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}$ 。

上述公式中的R 值，可透過我們研究出來的「 **R 值迭代法**」求得。

陸、結論與未來展望

一、本作品最大的貢獻是，**找出n 人($n \ge p+1$)依照規則$T_{1,2,\cdots,p}$($p \ge 2$)傳遞糖果，「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件，以及最終不被淘汰的人之初始編號的通式**。我們以程式驗證其正確性，並給予嚴謹的證明。

二、 R 值在不同n 值間具有線性關係，此線性關係與糖果集中原則密切相關，**依照R 值線性關係可以讓我們給定初始值後，進而迭代出所需的R 值。**特別的是，當 p 為質數時，R 值為 0。

三、未來我們可改變傳遞規則，比如$T_{1,1,2}$ 、 $T_{1,1,2,2}$ 等等，當然並不是任意傳遞規則$T_{a,b,c,\cdots}$ 皆可行，比如$T_{1,3}$ 、 $T_{2,1}$ 即無法進行傳遞。

柒、參考文獻資料

1.游森棚(2020)。**森棚教官的數學題**。科學研習月刊。第 59 卷第二期。

2.簡民惠。**天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討**。中華民國第 40 屆中小學科學展覽會　國中組。

3.許志農(主編)（2019)。**普通高級中學數學 2**。台北：龍騰文化。

4.馮志剛(2005)。**數學歸納法的証題方法與技巧**。上海：華東師範大學出版社。

【評語】030402

本作品是糖果傳遞問題的推廣，主要是研究在特定的傳遞規則下得到「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件，以及最終不被淘汰的人之初始編號的通式。這個特定的傳遞規則是原問題的自然推廣，也有得到完整的結果。過程中結合 Excel 等電腦工具觀察出結果再進行數學證明， 立意不錯， 研究精神佳。整體而言，作品寫作相當流暢，分析證明與邏輯推理相當完整，值得鼓勵的一件好作品。

作品簡報

糖果傳遞問題之研究與推廣

科　別：數　學　科

組　別：國　中　組

研究動機

在科學研習月刊[1]有一個關於糖果傳遞的數學問題：

17個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號1, 2, ……, 17。一開始每人手中有一個糖果，由1號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果。但是手上沒有糖果的人必須馬上退出。是否有人可以得到所有的糖果？如是，他一開始站在幾號位置？

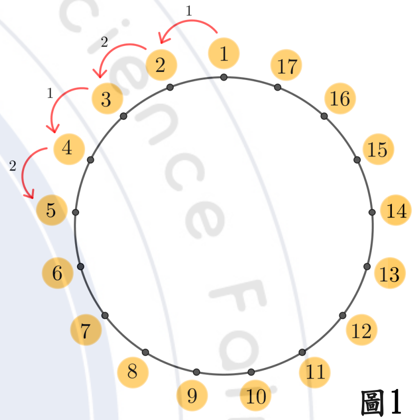


圖1

傳遞規則

n 個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號 $1,2,\cdots\cdots,n$。一開始每人手中有一個糖果，由1號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果，手上沒有糖果的人必須退出，直至不再有人退出。將此傳遞規則定義為 $T_{1,2}$。同理 $T_{1,2,\cdots,p}$。

研究目的

一、探討不同人數、不同傳遞規則下，「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件。

二、探討不同人數、不同傳遞規則下，最終不被淘汰的人之初始編號。

名詞與符號定義

表2： $n=7$ 傳遞規則 $T_{1,2}$

編號	1	2	3	4	5	6	7	傳遞動作	輪次
S_0^7	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	2	1	1	1	1	1	2	
	0	0	3	1	1	1	1	1	
	0	0	2	2	1	1	1	2	R_1
	0	0	2	0	3	1	1	1	
	0	0	2	0	2	2	1	2	
S_1^7	0	0	2	0	2	0	3	1	
	0	0	3	0	2	0	2	2	
	0	0	1	0	4	0	2	1	R_2
	0	0	1	0	3	0	3	2	
	0	0	3	0	3	0	1	1	
	0	0	2	0	4	0	1	2	R_3
C_7	0	0	2	0	2	0	3	1	

表3： $n=10$ 傳遞規則 $T_{1,2}$

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	傳遞動作	輪次
S_0^{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	
	0	0	3	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	0	2	2	1	1	1	1	1	1	2	
	0	0	2	0	3	1	1	1	1	1	1	R_1
	0	0	2	0	2	2	1	1	1	1	2	
	0	0	2	0	2	0	3	1	1	1	1	
	0	0	2	0	2	0	2	2	1	1	2	
	0	0	2	0	2	0	2	0	3	1	1	
S_1^{10}	0	0	2	0	2	0	2	0	2	2	2	
	0	0	4	0	2	0	2	0	2	0	1	
	0	0	3	0	3	0	2	0	2	0	2	R_2
	0	0	3	0	1	0	4	0	2	0	1	
	0	0	3	0	1	0	3	0	3	0	2	
	0	0	5	0	1	0	3	0	1	0	1	
	0	0	4	0	2	0	3	0	1	0	2	R_3
	0	0	4	0	0	0	5	0	1	0	1	
S_2^{10}	0	0	4	0	0	0	4	0	2	0	2	
	0	0	6	0	0	0	4	0	0	0	1	R_4
	0	0	5	0	0	0	5	0	0	0	2	
	0	0	7	0	0	0	3	0	0	0	1	R_5
	0	0	6	0	0	0	4	0	0	0	2	
	0	0	8	0	0	0	2	0	0	0	1	R_6
	0	0	7	0	0	0	3	0	0	0	2	
	0	0	9	0	0	0	1	0	0	0	1	R_7
S_3^{10}	0	0	8	0	0	0	2	0	0	0	2	
E_{10}	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	1	

說明

▲ 傳遞過程：$\underset{(1,1,1,1,1,1,1)}{S_0^7} \rightarrow \underset{(2,2,\overset{1}{3})}{S_1^7} \rightarrow C_7$ 。（循環狀態）

▲ $C_7=[3,5,7]$ 。

（最終糖果在初始編號為3、5、7三人間循環傳遞）

▲ $S_1^7(1)=3$ 、$S_1^7(2)=5$ 、$S_1^7(3)=7$ 。

（ S_1^7 中所剩3人的初始編號依序為3、5、7）

▲傳遞過程：

$\underset{(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)}{S_0^{10}} \rightarrow \underset{(2,2,2,2,\overset{2}{\underline{2}})}{S_1^{10}} \rightarrow \underset{(4,4,\overset{2}{\underline{2}})}{S_2^{10}}$

$\rightarrow \underset{(8,\overset{2}{\underline{2}})}{S_3^{10}} \rightarrow \underset{(10)}{E_{10}}$ 。

（成功狀態）

▲ $E_{10}=[3]$

（最終由初始編號為3的人獨得所有糖果）

研究結果

研究一：傳遞規則$T_{1,2}$

定理1：n人$(n \ge 3)$依照規則$T_{1,2}$傳遞糖果，且n表示成$n = 2^t \cdot m + q$ $(t \in N, m$為奇數$, q = 1,2)$，

令$S = 2^t \cdot (2-q) + (2q-1)$，則

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，且$E_n = [S]$。

(2)若$m \ge 3$，最終為循環狀態，且$C_n = \left[S, S+2^t, \cdots\cdots, S+(m-1)2^t\right]$。

研究二：傳遞規則$T_{1,2,3}$

定理2：n人$(n \ge 4)$依照規則$T_{1,2,3}$傳遞糖果，且n表示成$n = 3^t \cdot m + q$ $(t, m \in N, 3 \nmid m, q = 1,2,3)$，

令$S = \dfrac{3^t \cdot (3-q) + (3q-1)}{2}$，則

(1) 若$m=1$，最終為成功狀態，且$E_n = [S]$。

(2)若$m \ge 2$，最終為循環狀態，且$C_n = \left[S, S+3^t, \cdots\cdots, S+(m-1)3^t\right]$。

小結：規則$T_{1,2}$、$T_{1,2,3}$結論，可類推至規則$T_{1,2,\cdots,p}$ $(p$為質數$)$的情形。

研究三：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 且 p 為質數

定理3： n人$(n \ge p+1)$依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，p 為質數，且 n 表示成

$$n = p^t \cdot m + q \ (t, m \in N \ , \ p \nmid m \ , \ q = 1,2,\cdots,p)，令 S = \frac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}，則$$

(1) 若$m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n = [S]$。

(2)若$m \ge 2$，最終為循環狀態，且 $C_n = \left[S, S+p^t, \cdots\cdots, S+(m-1)p^t\right]$。

舉例 當 $n = 345 = 7^3 \cdot 1 + 2$，則 $S = \dfrac{7^3 \cdot (7-2) + (7 \cdot 2 - 1)}{6} = 288$，故 $E_n = [288]$。

即 345 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,7}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 288 的人獨得所有糖果。

定理 3 中，規則$T_{1,2,\cdots,p}$(p為質數)下，只有$n = p^t + q \ (q = 1,2,\cdots,p)$時，會發生成功狀態。

問題：規則 $T_{1,2,3,4}$ 下，是否也可以推論只有 $n = 4^t + 1$, $4^t + 2$, $4^t + 3$, $4^t + 4$ 時，才會發生成功狀態？

發現：經過我們多組數據測試，我們發現這些 n 值只是發生成功狀態的充分條件，卻不是必要條件。比如：$n = 9 = 4^t \cdot 2 + 1$，最終也是成功狀態！

糖果集中原則

在規則$T_{1,2,\cdots,p}$下，當剩ℓ人傳遞糖果，且當前狀態列$(\underbrace{a_0, a_1, \cdots, a_{\ell-1}}_{\ell})$型如$(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}}, A, \cdots, A}_{\ell})$，$\frac{p}{d}\big|A$、$1\le q\le p$，則數輪傳遞後，糖果會集中在$\underbrace{a_R, a_{R+d}, \cdots\cdots, a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\ell/d}$手中，即狀態列變化為$(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{a_R}}}, a_{R+d}, \cdots\cdots, a_{R+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\ell/d})$，其中$(p,\ell)=d$、$p-q\equiv R(\operatorname{mod} d)$、$0\le R<d$。特別的是，當$(p,\ell)=1$，$R=0$，此時糖果會在此$\ell$人間循環傳遞。

舉例 在規則$T_{1,2,\cdots,9}$下，當$n=9^t\times 15+2$，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$[x]_p=\begin{cases} x\text{除以}p\text{的餘數}, & \text{當}p\nmid x \\ p, & \text{當}p\mid x \end{cases}$$

其中$S_t^n=(\underbrace{\overset{S}{\overset{\downarrow}{9^t}}, \overset{S+9^t}{\overset{\downarrow}{9^t}}, \cdots, \overset{S+14\cdot 9^t}{\overset{\downarrow}{9^t}}}_{15個}, \overset{2}{\underline{2}})\to(\underbrace{\overset{3}{\underline{\underline{9^t+2}}}, 9^t, \cdots, 9^t}_{15個})=(a_0, a_1, \cdots, a_{14})$。

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	
傳出	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	1輪
總變化	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	+8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	
傳出	−9	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−1	−2	−3	−4	−5	2輪
總變化	−1	+8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	+8	−1	−1	−1	−1	
傳出	−6	−7	−8	−9	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−1	−2	3輪
總變化	−1	−1	−1	−1	+8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	+8	−1	

表4：1個傳遞週期

- ▲ 每3輪會形成一個傳遞週期。
- ▲ $(9,15)=3\Rightarrow$ 每3人保留1人。
- ▲ $9-2\equiv 1(\operatorname{mod} 3)\Rightarrow$ 第一個保留的人為a_1。
- ▲ 糖果集中在a_1、a_4、a_7、a_{10}、a_{13}手中。
- ▲ a_1、a_4、a_7、a_{10}、a_{13}的初始編號為 $S+1\cdot 9^t$, $S+4\cdot 9^t$, $S+7\cdot 9^t$, $S+10\cdot 9^t$, $S+13\cdot 9^t$。

研究四：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 且 p 為質數的冪次方

定理4： n 人($n\geq p+1$)依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_0^{\alpha}$ (p_0 為質數)，且 n 表示成

$$n=p^t\cdot\left(p_0^{\beta}m\right)+q=\left(p_0^{\alpha}\right)^t\cdot\left(p_0^{\beta}m\right)+q\ \ (t,m\in N\ ,\ p_0\nmid m\ ,\ \alpha>\beta\ ,\ q=1,2,\cdots,p\ ),$$

令 $S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$、$p-q\equiv R\ (\text{mod}\ p_0^{\beta})$、$0\leq R<p_0^{\beta}$，$S=S_0+R\cdot p^t$，則

(1) 若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2) 若 $m\geq 2$，最終為循環狀態，且 $C_n=\left[S,S+p_0^{\alpha t+\beta},\cdots\cdots,S+(m-1)p_0^{\alpha t+\beta}\right]$。

舉例

(1) 當 $n=250=\left(3^2\right)^2\times\left(3^1\times 1\right)+7$，則 $3^2-7\equiv 2\ (\text{mod}\ 3^1)$，$S=\dfrac{9^2(9-7)+(9\cdot 7-1)}{3^2-1}+2\cdot 9^2=190$，

故 $E_n=[190]$。即250人依照規則 $T_{1,2,\cdots,9}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號190的人獨得所有糖果。

(2) 當 $n=1284=\left(2^3\right)^2\times\left(2^2\times 5\right)+4$，則 $2^3-4\equiv 0(\text{mod}\ 2^2)$，$S=\dfrac{8^2(8-4)+(8\cdot 4-1)}{2^3-1}+0\cdot 8^2=41$，

故 $C_n=\left[41,41+2^8,\cdots\cdots,41+4\cdot 2^8\right]=\left[41,297,553,809,1065\right]$。

即1284人依照規則 $T_{1,2,\cdots,8}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號41, 297, 553, 809, 1065的人循環傳遞糖果。

研究五：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 且 $p\in N, p\geq 2$

觀察數據

說明：當 $n=(30)^t\times 2^2+11$ 時，$E_n=[S]$。其中 $S=S_0+\underbrace{R}_{=3}\cdot 30^1$，$S_0=\dfrac{30^t(30-11)+(30\cdot 11-1)}{30-1}$。

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$、$n=(2\times3\times5)^t\times 2^s+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	s \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……	29	30
$R_3(0,0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	……	0	0
	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	……	1	0
$R_3(1,0)$		1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	……	1+0·2	0+0·2
	2	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	……	3	0
$R_3(2,0)$		1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	……	1+1·2	0+0·2
	3	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	……	7	0
		1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	……	1+3·2	0+0·2
	4	15	0	15	0	15	0	15	0	15	0	15	0	……	15	0
		1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	……	1+7·2	0+0·2

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$、$n=(2\times3\times5)^t\times 2^s\times 3+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	s \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……	29	30
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	……	1	0
	1	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	……	1	0
		5+0·6	4+0·6	3+0·6	2+0·6	1+0·6	0+0·6	5+0·6	4+0·6	3+0·6	2+0·6	1+0·6	0+0·6	……	1+0·6	0+0·6
	2	11	4	9	2	7	0	11	4	9	2	7	0	……	7	0
		5+1·6	4+0·6	3+1·6	2+0·6	1+1·6	0+0·6	5+1·6	4+0·6	3+1·6	2+0·6	1+1·6	0+0·6	……	1+1·6	0+0·6
	3	23	4	21	2	19	0	23	4	21	2	19	0	……	19	0
$R_3(3,1)$		5+3·6	4+0·6	3+3·6	2+0·6	1+3·6	0+0·6	5+3·6	4+0·6	3+3·6	2+0·6	1+3·6	0+0·6	……	1+3·6	0+0·6
	4	47	4	45	2	43	0	47	4	45	2	43	0	……	43	0
		5+7·6	4+0·6	3+7·6	2+0·6	1+7·6	0+0·6	5+7·6	4+0·6	3+7·6	2+0·6	1+7·6	0+0·6	……	1+7·6	0+0·6

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,30}$、$n=(2\times3\times5)^t\times 2^s\times 3^2+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	s \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……	29	30
	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	……	4	0
	1	17	10	3	14	7	0	17	10	3	14	7	0	……	7	0
		5+2·6	4+1·6	3+0·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	5+2·6	4+1·6	3+0·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	……	1+1·6	0+0·6
	2	35	28	21	14	7	0	35	28	21	14	7	0		7	0
		5+5·6	4+4·6	3+3·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	5+5·6	4+4·6	3+3·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	……	1+1·6	0+0·6
	3	71	28	57	14	43	0	71	28	57	14	43	0		43	0
		5+11·6	4+4·6	3+9·6	2+2·6	1+7·6	0+0·6	5+11·6	4+4·6	3+9·6	2+2·6	1+7·6	0+0·6	……	1+7·6	0+0·6
	4	143	28	129	14	115	0	143	28	129	14	115	0		115	0
$R_3(4,2)$		5+23·6	4+4·6	3+21·6	2+2·6	1+19·6	0+0·6	5+23·6	4+4·6	3+21·6	2+2·6	1+19·6	0+0·6	……	1+19·6	0+0·6

表5：$n=(2\times3\times5)^t\times 2^{s_1}\times 3^{s_2}+q$ 之 R 值表

重大發現

若 p 的質因數分解為 $p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$（$p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數），且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$，其中 $(m,p)=1$，$p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$，其傳遞結果與定理4類似，且存在某個 R 值符合定理4中 $S=S_0+R\cdot p^t$ 的通式。

R 值在不同 n 值間存在著某種線性關係，我們可以利用這個線性關係迭代出所需的 R 值。

若 $n=(2\times3\times5)^t\times 2^{s_1}\times 3^{s_2}+q$ 的 R 值記作 $R_q(s_1,s_2)$

$$R_3(4,2)=129=3+\underbrace{21}_{R_3(3,1)}\cdot 6 \qquad R_3(3,1)=21=3+\underbrace{3}_{R_3(2,0)}\cdot 6$$

$$R_3(2,0)=3=1+\underbrace{1}_{R_3(1,0)}\cdot 2 \qquad R_3(1,0)=1=1+\underbrace{0}_{R_3(0,0)}\cdot 2$$

只要我們給定初始值 $R_3(0,0)=0$，依照一定的線性關係，就可以依序迭代出 $R_3(4,2)$。

<u>問題</u>：以上 R 值為什麼會存在線性關係呢？其線性關係如何表示？

<u>分析</u>：規則 $T_{1,2,\cdots,30}$ 下，$n=(30)^t\times 2^{s_1}\times 3^{s_2}+3$，找出 $R_3(4,2)$ 與 $R_3(3,1)$ 的線性關係。

(30,144)=6 $30-3\equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	……	a_{138}	a_{139}	a_{140}	a_{141}	a_{142}	a_{143}

(30,24)=6 $30-3\equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$	a_3	a_9	a_{15}	a_{21}	a_{27}	a_{33}	a_{39}	a_{45}	a_{51}	a_{57}	a_{63}	a_{69}	a_{75}	a_{81}	a_{87}	a_{93}	a_{99}	a_{105}	a_{111}	a_{117}	a_{123}	a_{129}	a_{135}	a_{141}
(30,4)=2 $30-3\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$				a_{21}						a_{57}						a_{93}						a_{129}		
(30,2)=2 $30-3\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$										a_{57}												a_{129}		
最終結果																						a_{129}		

表6：$n=(2\times3\times5)^t\times2^4\times3^2+3=30^t\times144+3$ **狀態列變化圖示**

當 $n=30^t\times144+3$，傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{30^t}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}},\cdots\cdots,\ \overset{S_0+143\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{144個},\underline{\underline{\overset{3}{3}}})\to(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{\overset{4}{\underline{\underline{30^t+3}}}}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}},\cdots\cdots,\ \overset{S_0+143\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{144個})$$

$$=(a_0,a_1,\cdots,a_{143})$$

a_i的初始編號為$S_0+i\cdot30^t$、$S_0=\dfrac{30^t(30-3)+(30\times3-1)}{30-1}$。

(30,24)=6 $30-3\equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
(30,4)=2 $30-3\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$				a_3						a_9						a_{15}						a_{21}		
(30,2)=2 $30-3\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$										a_9												a_{21}		
最終結果																						a_{21}		

表7：$n=(2\times3\times5)^t\times2^3\times3^1+3=30^t\times24+3$ **狀態列變化圖示**

當 $n=30^t\times24+3$，傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{30^t}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}},\cdots\cdots,\ \overset{S_0+23\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{24個},\underline{\underline{\overset{3}{3}}})\to(\underbrace{\overset{S_0}{\overset{\downarrow}{\overset{4}{\underline{\underline{30^t+3}}}}},\ \overset{S_0+30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}},\cdots\cdots,\ \overset{S_0+23\cdot30^t}{\overset{\downarrow}{30^t}}}_{24個})$$

$$=(a_0,a_1,\cdots,a_{23})$$

<u>結果</u>：**表6**中第二~五列的糖果集中模式和**表7**中第一~四列一模一樣，且每個編號呈現 $y=3+6x$ 的線性關係。因此 $R_3(4,2)=3+6\cdot R_3(3,1)$。

R值線性關係：

n人依照規則$T_{1,2,\cdots,p}$傳遞糖果，$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1,p_2,\cdots,p_j$為p的相異質因數)，且

n表示成$n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ($t,m\in N$, $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p$)，

將 n 的 R 值記作 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$，若 $(p\ ,\ p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i})=d$ 、$p-q\equiv r \pmod d$，則

$$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)=r+R_q(Max\{s_1-\alpha_1,0\}\ ,\ Max\{s_2-\alpha_2,0\}\ ,\cdots,\ Max\{s_i-\alpha_i,0\})\times d$$

R值迭代法：

依照R值線性關係，列出以下 R 值的關係式，直至$(s_1,s_2,\cdots,s_i)$降至$(0,0,\cdots,0)$。即

$$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)\rightarrow R_q(Max\{s_1-\alpha_1,0\},Max\{s_2-\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-\alpha_i,0\})\rightarrow$$

$$R_q(Max\{s_1-2\alpha_1,0\},Max\{s_2-2\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-2\alpha_i,0\})\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow R_q(0,0,\cdots,0)$$

給定初始值 $R_q(0,0,\cdots,0)=0$，可迭代出$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$之值。

定理5： n人 $(n\ge p+1)$ 依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ $(p\ge 2)$傳遞糖果，$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ $(p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數$)$，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ $(t,m\in N$, $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s2}\cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p)$。令 $S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$，

$S=S_0+R\cdot p^t$，其中 $R=R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 依照 R 值迭代法得出，則

(1)若 $m=1$ 時，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\ge 2$ 時，最終為循環狀態，且

$$C_n=\left[S,\ S+p^tp_1^{s_1}p_2^{s2}\cdots p_i^{s_i},\cdots\cdots,\ S+(m-1)\cdot p^tp_1^{s_1}p_2^{s2}\cdots p_i^{s_i}\right]。$$

舉例 $n=2596=(2^2\times3)^2\times(2\times3^2)+4$，依照 R值線性關係列出以下關係式:

$$\underset{R_4(1,2)}{n=(12)^2\cdot(2^1\cdot3^2)+4}\ \xrightarrow[\substack{(12,18)=6\\ 12-4\equiv2(\mathrm{mod}\,6)\text{ 得}\\ R_4(1,2)=2+6\cdot R_4(0,1)}]{}\ \underset{R_4(0,1)}{n=(12)^2\cdot(2^0\cdot3^1)+4}\ \xrightarrow[\substack{(12,3)=3\\ 12-4\equiv2(\mathrm{mod}\,3)\text{ 得}\\ R_4(0,1)=2+3\cdot R_4(0,0)}]{}\ \underset{R_4(0,0)}{n=(12)^2\cdot(2^0\cdot3^0)+4}\ \Rightarrow\ \overset{R\text{值迭代法}}{\underbrace{R_4(0,0)}_{0}\to\underbrace{R_4(0,1)}_{2}\to\underbrace{R_4(1,2)}_{14}}$$

$$S_0=\frac{12^2(12-4)+(12\cdot4-1)}{12-1}=109，S=109+\underset{R_4(1,2)}{\boxed{14}}\cdot12^2=2125，故\ E_n=[S]=[2125]。$$

即2596 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,12}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 2125 的人獨得所有糖果。

結論與未來展望

一、本作品最大的貢獻是，找出n人($n \geq p+1$)依照規則$T_{1,2,\cdots,p}$($p \geq 2$)傳遞糖果，「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件，以及最終不被淘汰的人之初始編號的通式。我們以程式驗證其正確性，並給予嚴謹的證明。

二、通式中的R值在不同的n值間具有線性關係，此線性關係與糖果集中原則密切相關，依照R值線性關係可以讓我們給定初始值後，進而迭代出所需的R值。特別的是，當p為質數時，R值為0。

三、未來我們可改變傳遞規則，比如$T_{1,1,2}$、$T_{1,1,2,2}$等等，當然並不是任意傳遞規則$T_{a,b,c,\cdots}$皆可行，比如$T_{1,3}$、$T_{2,1}$即無法進行傳遞。

參考文獻資料

1.游森棚(2020)。森棚教官的數學題。科學研習月刊。第59卷第二期。

2.簡民惠。天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討。中華民國第40屆中小學科學展覽會　國中組。

3.許志農(主編)(2019)。普通高級中學數學2。台北：龍騰文化。

4.馮志剛(2005)。數學歸納法的証題方法與技巧。上海：華東師範大學出版社。