中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030401

翻硬幣與點燈的混搭

學校名稱：新北市立桃子腳國民中小學

作者：	指導老師：
國一　古禮安	蔡孟璇 龔凡凱

關鍵詞：動態系統、停止、平均次數

摘要

本作品結合兩道題目，給出有趣且新的結果。

第一題：硬幣兩面分別為「H」和「T」，有 n 個硬幣排成一列，若恰有 k 枚 H 朝上，便翻動左起數來第 k 個硬幣──H 朝上的硬幣數量，決定左起第幾個硬幣要翻動。試證明持續操作下去，能在有限次內操作至停止，並求出操作次數的平均值。

另一題為講座中提出的：有 n 個燈排成一圈，按一盞燈，不是由亮變暗就是由暗變亮，而且它左右兩盞燈會隨之變換當前的明暗狀態，試求使其由全滅變成全亮的方法和最少操作次數。

它們都屬於離散動態系統，本研究除了解決競賽題外，創意在於結合上述兩題的條件，形成一道新題目，給出可以操作至停止的必要條件、以及操作次數平均值的猜想。

壹、前言

一、問題

（一）競賽題.

第一題取自國際數學奧林匹亞 2019 年第 5 題：

問題 1(國際數學奧林匹亞 2019 年第 5 題). 巴斯銀行發行的硬幣上，一面寫了 H，另一面寫了 T，哈利有 n 枚這樣的硬幣，並將它們由左至右排成一列。哈利重複進行以下操作：如果恰有 $k>0$ 枚 H 面朝上的硬幣，他就把從左邊數來第 k 枚硬幣翻過來；否則，所有的硬幣皆為 T 面朝上，於是他就停止了。舉例而言，當 $n=3$ 時，由初始狀態 THT 開始的操作過程為 THT→HHT→HTT→TTT,總共有 3 次操作。

（a）證明：對於任一種初始狀態，哈利進行有限次操作就得停止。

（b）對每一種初始狀態 C，令 L(C)表示哈利由開始到停止前所進行的操作次數，例如 L(THT)=3, L(TTT)=0。試求所有2^n種可能的初始狀態 C 所得到的 L(C)之平均值。

（二）點燈問題.

這一題取自 2016 年臺灣國際科展宣導暨青少年科學人才培育講座：

問題 2（點燈問題）**.** 今有 7 盞燈圍成一個圓圈，每按一盞燈，若其在亮的狀態會改變為熄滅的狀態；反之，若其在熄滅的狀態則會改變為亮的狀態，而且該燈左與右側的燈亦會同時更改其亮或滅的情況一次。假設開始時所有燈皆熄滅，請回答下述各問題：

1. 是否可以在按燈有限次後，即可將所有燈改變為亮的狀態？

2. 最少需要按燈多少次才能將所有燈改變為亮的狀態？接著證明此按燈次數為最快速完成任務的方法。

3. 承上題，上述最少按燈次數是一共按了哪幾盞燈？

4. 如果改變燈的數目，例如變成十盞燈，至少需要按多少次才能將所有燈改變為亮的狀態？接著，若將燈數改為奇數盞燈或偶數盞燈，按燈的次數有什麼規律？

5. 請問此遊戲有可能延伸成為一個三度空間的遊戲嗎？請說明。承上，按燈的次數 有什麼規律？

（三）結合問題 1 和問題 2.

問題 3(結合問題 1 和問題 2 的條件). n 枚硬幣排成一列，若 H 面朝上的有 k 枚，則翻動左起第 $k-1$ 枚、第 k 枚、第 $k+1$ 枚硬幣，若 $k+1$ 超過 n 則翻動左起第 1 枚，舉例來說：THTT→HTTH→THHH→TTTT，共有 3 次操作。

（a）哪些初始狀態，進行有限次操作就會停止？

（b）對每一種初始狀態 C，令 T(C)表示哈利由開始到停止前所進行的操作次數，例如 T（THTT）＝3，T（TTTT）=0。試求所有種可能的初始狀態 C 所得到的 T（C）之平均值。

補充說明4(離散動態系統)**.** 問題1、2都屬於「離散動態系統」([6])，以本作品操作對象而言，動態系統是指硬幣或燈的狀態隨著時間有所改變，而硬幣和燈屬於離散量，故屬於離散動態系統的範疇，試結合兩者的條件得到另一個動態系統（問題3）。

二、動機

(一)參加第 59 屆全國科展時，待在飯店訓練完後，我想玩手機遊戲，老師不想答應，拿了 2019 年國際數學奧林匹亞第 5 題的(a)小題要我試證，解出才可以玩。在挑戰心驅下，我大約花了一小時解決。全國科展結束後，我除了繼續思索外，還結合「點燈問題」，我查得到的資料中尚沒有人結合這兩題，完成了一件科展作品，參加了 108 學年度市展。市展後，我再繼續探討原競賽題問的操作次數平均值，並調整了 108 學年的作品結合點燈問題之新問題中，操作可在有限次內停止的證明。

(二)問題 1 和問題 2 的內容有些相近，問題 1 要根據 H 的數量去操作指定硬幣；問題 2 可自由選取燈，然而要同時改變其左右的燈之狀態，不過兩個都在探討是否能操作成某一狀態，前者為停止，後者為全亮，因此我結合這兩題的條件擬出一道新題目。

三、目的

(一)給出競賽題的證明。

(二)研究新題目能操作至停止的狀態。

(三)研究新題目不能操作至停止的狀態。

(四)試探討新題目的操作次數平均值。

四、研究工具

計算紙、方格紙、筆。

貳、問題 1 的解答

一、必可操作至停止

(一)觀察. 觀察操作 10 個硬幣的過程，某初始狀態如下：

$$\text{HTTHHTTTHT}, \tag{1}$$

以下依序列出每一次操作的狀態，並著色標記每一次翻動的硬幣。

次數										
	H	T	T	H	H	T	T	T	H	T
1	H	T	T	T	H	T	T	T	H	T
2	H	T	H	T	H	T	T	T	H	T

3	H	T	H	H	H	T	T	T	H	T
4	H	T	H	H	T	T	T	T	H	T
5	H	T	H	T	T	T	T	T	H	T
6	H	T	T	T	T	T	T	T	H	T
7	H	H	T	T	T	T	T	T	H	T
8	H	H	H	T	T	T	T	T	H	T
9	H	H	H	H	T	T	T	T	H	T
10	H	H	H	H	H	T	T	T	H	T
11	H	H	H	H	H	H	T	T	H	T
12	H	H	H	H	H	H	H	T	H	T
13	H	H	H	H	H	H	H	H	H	T
14	H	H	H	H	H	H	H	H	T	T
15	H	H	H	H	H	H	H	T	T	T
16	H	H	H	H	H	H	T	T	T	T
17	H	H	H	H	H	T	T	T	T	T
18	H	H	H	H	T	T	T	T	T	T
19	H	H	H	T	T	T	T	T	T	T
20	H	H	T	T	T	T	T	T	T	T
21	H	T	T	T	T	T	T	T	T	T
22	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

圖 1. HTTHHTTTHT 從初始狀態操作至全部為 T 朝上的過程，著色部份表示翻動的硬幣，共操作 22 次。

（二）操作的性質.

…□TTTH…	…THHH□…
…□HTTH…	…THHT□…
…□HHTH…	…THTT□…
…□HHHH…	…TTTT□…
…□HHHT…	…HTTT□…
…□HHTT…	…HHTT□…
…□HTTT…	…HHHT□…
…□TTTT…	…HHHH□…
甲	乙

圖 2. 框起來紅字表示翻動的起點。向右連續翻動到最近的 H 便轉左（甲）；向左連續翻動到最近的 T 便轉向右（乙）。

觀察圖 2 的甲，設翻動起點為 T，向右連續翻動到離起點最近的 H 便轉向，向左回到起點然後必操作至起點的左邊硬幣。觀察圖 2 的乙，設翻動起點為 H，向左連續翻動到離起點最近的 T 便轉向，向右回到起點，然後必操作至起點的右邊硬幣。

換句話說，翻動方向為向右時，一路化 T 為 H，直到翻到 H 才轉左；翻動方向為向左時，一路化 H 為 T，直到翻到 T 才轉右。

（三）證明

問題 1（a）的證明. 將硬幣由左至右編號 1～n，參考圖 2-甲，如果硬幣從第 k 枚起向右翻，並設右邊離第 k 枚最近的 H 為第 $k+j$ 枚，則會依下列次序操作

$$k、k+1、k+2、\dots、k+j、k+j-1、k+j-2、\dots、k+1， \tag{2}$$

共有

$$2\times j \text{ 次。} \tag{3}$$

注意到只計數回到第 $k+1$ 枚，因為第 k 枚當作下一輪操作的起點，並且右側離第 k 枚最近的 H 變成了 T。

參考圖 2-乙，如果硬幣從第 k 枚向左翻，並設左邊離第 k 枚最近的 T 為第 $k-i$ 枚，類似地，回到左邊第 $k-1$ 枚時，操作了

$$2\times i \text{ 次。} \tag{4}$$

並且左側離第 k 枚最近的 T 變成了 H。

也就是向右連續翻動後，右側會少 1 個 H（可視作多 1 個 T）；向左連續翻動後，左側會少 1 個 T（可視作多 1 個 H），如此連續操作後，會形成

$$\text{HHH}\cdots\text{H}\color{red}{\text{H}}\text{TT}\cdots\text{T}， \tag{5}$$

（5）的紅色 H 表示第 k 枚硬幣，接下來只要**操作 k 次**就能使這一列硬幣變成全 T，由於一開始給的狀態 H 和 T 的數量都是有限，（3）、（4）和 k 都是有限，因而可在有限次內操作至停止。 ■

補充說明5(官方解答的第4種)**.** 我在2019年7月23日給出問題1（a）小題第一個版本的證明，當時解題用「打來打去」的用詞形容硬幣翻動的模式；本作品修改為第二個版本，改用具體的操作次數呈現操作過程。

二、操作次數平均值

（一）推測規律

我試算$1 \le n \le 5$的操作總次數及平均值，列表如下：

表 1. $1 \le n \le 5$的操作總次數及其平均值

n	狀態數量	操作總次數	操作次數平均值
1	1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	6	$\frac{3}{2}$
3	4	24	3
4	16	80	5
5	32	240	$\frac{15}{2}$

將平均值通分為分母均為 4，可發現

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1\times 2}{4}\ ,$$

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{2\times 3}{4}\ ,$$

$$3=\frac{12}{4}=\frac{3\times 4}{4}\ ,$$

$$5=\frac{20}{4}=\frac{4\times 5}{4}\ ,$$

$$\frac{15}{2}=\frac{30}{4}=\frac{5\times 6}{4}\ ,$$

推測操作次數平均值的一般式為

$$\frac{1}{4}n \times (n+1)\text{。} \tag{6}$$

(二)單一狀態的操作次數

如果恰有 k 個 H，則第一步要翻動左起第 k 個硬幣如下：

	k^{th}	
u 個 T		v 個 H

設左起第 1 到第 k—1 枚硬幣中有 u 枚硬幣為 T，第 k+1 枚到第 n 枚有 v 枚硬幣是 H。h_j表示起點右邊第 j 個 H 距起點第 k 枚的編號差，如（2）之操作，翻回到第 k+1 枚時，期間操作了

$$2h_j\text{次，} \tag{7}$$

t_i表示起點左邊第 i 個 T 距起點第 k 枚的編號差，翻回到第 k+1 枚時，期間操作了

$$2t_i\text{次，} \tag{8}$$

合計（7)、(8)，加上（5）操作到全部為 T 的次數＝k，得到某一狀態操作至全 T 所需次數為

$$2 \times \left(\sum_{1\le j\le v} h_j + \sum_{1\le i\le u} t_i\right) + k\text{。} \tag{9}$$

例 6（操作次數計算方式）. 以圖 1 的狀態為例，其狀態如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	T	T	H	H	T	T	T	H	T

共有 4 個 H，起點右側的 2 個 H 距起點的編號差分別為 1 和 5，起點左側的 2 個 T 距起點的編號差分別為 1 和 2，操作次數為：

$$2 \times (1+5) + 2 \times (1+2) + 4 = 22\text{。}$$

（三）n 與 $n+1$ 枚硬幣操作總次數的差

1. 分析．$n+1$ 枚硬幣，$k+1$ 個 H 的狀態，恰可分成兩類：

n 枚硬幣，當中有 $k+1$ 個 H，最右邊加上 1 個 T，$0\leqq k\leqq n-1$。　（10）

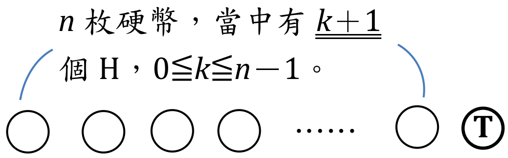


圖 3. （10）的示意圖。

n 枚硬幣，當中有 k 個 H，最右邊加上 1 個 H，$0\leqq k\leqq n$。　（11）

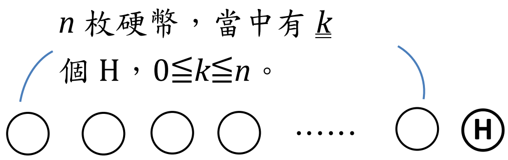


圖 4. （11）的示意圖。

如果第 $n+1$ 枚是 T，不會影響前 n 枚硬幣的操作，因為前 n 枚 H 的數量最多為 n，任何操作也不會數到第 $n+1$ 枚，所以（10）的操作總次數相當於

n 枚硬幣，k 個 H，$0\leqq k\leqq n$。　（12）

推得 $n+1$ 枚硬幣，$k+1$ 個 H 的狀態，和 n 枚硬幣，k 個 H 的狀態，兩者操作次數的差為（11），接著計數（11）的操作次數。

2. （11）的操作次數

（1）第 k 枚為 T

n 枚硬幣，恰有 k 個 H，設第 k 枚右邊有 v_1 個 H，左邊有 u_1 個 T。

	k^{th}	
u_1 個 T	T	v_1 個 H

在最末加上一個 H，形成 $n+1$ 枚硬幣，$k+1$ 個 H 如下：

	k^{th}	$k+1^{th}$		
u_1 個 T	T		v_1 個 H	H

$$u_1 = k - 1 - (k - v_1) = v_1 - 1$$

上面兩種狀態操作至停止的次數相差：

$$2 \times (v_1 - 1) + 2 \times 1 - 2v_1 + 2 \times (n - k) + (k + 1 - k) = 2 \times (n - k) + 1。$$

（2）第 k 枚為 H

n 枚硬幣，恰有 k 個 H，設第 k 枚右邊有v_2個 H，左邊有u_2個 T。

	k^{th}	
u_2個 T	H	v_2個 H

在最末加上一個 H，形成 n＋1 枚硬幣，k＋1 個 H 如下：

	k^{th}	k+1th		
u_2個 T	H		v_2個 H	$\boxed{H}$

$$u_2 = k - 1 - (k - v_2 - 1) = v_2$$

上面兩種狀態操作至停止的次數相差：

$$2 \times v_2 - 2 \times v_2 + 2 \times (n - k) + (k + 1 - k) = 2 \times (n - k) + 1。$$

也就是 n＋1 枚硬幣，k＋1 個 H，最末一枚硬幣為 H 的單一狀態，比 n 枚硬幣，k 個 H 的單一狀操作次數還多

$$\sum_{0 \le k \le n} C_k^n \times (2 \times (n - k) + 1) \tag{13}$$

因而（11）的操作次數為（12）的操作次數加上(13)。

推得 n＋1 枚硬幣，k＋1 個 H 的2^{n+1}種可能的狀態操作總次數為

$$\sum_{0 \le k \le n} C_k^n \times (2 \times (n - k) + 1) + 2 \times \textbf{式(12)的操作次數} \tag{14}$$

（三）操作次數平均值

命題 7. 題目 1（b）要求的操作次數平均值為：

$$\frac{1}{4}n \times (n+1)。$$

引理 8.

$$\sum_{0 \le k \le n} (n-k) \times C_k^n = n \times 2^{n-1}。 \tag{15}$$

命題 7 的證明. 將用數學歸納法證明。

1. 依表 1，知道命題對$1 \le n \le 5$時成立。
2. 設命題對$n = m$時成立，接著計算$n = m+1$的操作總次數，依（14）即有：

$$\left(\sum_{0 \le k \le m} C_k^m \times (2 \times (m-k)+1)\right) + 2 \times 2^m \times \frac{1}{4} \times m \times (m+1)$$

$$= 2 \times m \times 2^{m-1} + 2^m + 2^{m-1} \times m \times (m+1) \qquad (\text{引理 } 8)$$

$$= 2^{m-1} \times (m+1) \times (m+2)$$

$$= 2^{m+1} \times \frac{1}{4} \times (m+1) \times (m+2)。$$

得到當$n = m+1$時，平均次數即為$\frac{1}{4} \times (m+1) \times (m+2)$。 ■

補充說明 9（和官方解答的比較）. 本題的解法和官方解答 5 的手法類似，但不全部相同，官方解答是將 H 所在的位置編號，給出和編號有關的操作次數公式，我則是計數翻動起點右方的 H 距起點的編號差以及左方 T 距翻動起點的編號差之和；官方解法利用公式直接求總操作次數，我則利用（9）和數學歸納法證明。

參、點燈問題的已知結論

根據引用文獻[5]，已知：

命題10. n非3的倍數時，任何狀態都可在有限次內操作到全亮。

命題11. n為3的倍數時，對某一狀態圍成圓圈的燈，任指定一盞為1號，順時鐘依序編號1、2、3、⋯、n，$1 \le i \le n$，令

A_0表示編號$i \equiv 0 \ (mod\ 3)$中燈的狀態為亮（L）的數量，

A_1表示編號$i \equiv 1 \ (mod\ 3)$中燈的狀態為亮（L）的數量，

A_2表示編號$i \equiv 2 \ (mod\ 3)$中燈的狀態為亮（L）的數量，

可在有限次內操作到全亮的狀態的充要條件為

$$A_0 \equiv A_1 \equiv A_2 \ (mod\ 2)。 \tag{16}$$

肆、問題3

一、操作的性質.

(一)觀察

例 12（可以操作至停止）. 5 枚硬幣排列為 THTTH，依問題 3 設定操作。黃底為配合 H 數量而翻動的硬幣，淺藍色為左右連帶跟著翻動的硬幣。

T	H	T	T	H
H	T	H	T	H
H	H	T	H	H
H	H	H	T	T
H	T	T	H	T
T	H	H	H	T
T	T	T	T	T

圖 5. THTTH 依問題 3 設定操作，可以操作至停止

例 13（不能操作至停止）. 6 枚硬幣排列為 HTTTTH，依問題 3 設定操作。

▶	H	T	T	T	T	H
	T	H	H	T	T	H
	T	T	T	H	T	H
	H	H	H	H	T	H
	H	H	H	T	H	T
	H	H	T	H	T	T
	H	T	H	T	T	T
	T	H	T	T	T	T
▶	H	T	T	T	T	H

圖 6. HTTTTH 依問題 3 設定操作形成循環，無法操作至停止，▶表示這 2 列的狀態一樣。

(二)數據.　依問題 3 設定操作操作 n＝3、4、5、6 個硬幣的所有可能排列，統整可停止和不可停止的狀態，列表如下，計算過程請參考實驗日誌。

1. $n=3$. 共 8 種排列，除 TTT 與 HHH 外，其餘不可停止。

表 2.　3 枚硬幣依問題 3 設定操作，可停止與不可停止的狀態

	可停止的狀態	不可停止的狀態
硬幣的狀態	TTT HHH	其他

2. $n=4$. 共 16 種排列，全部可停止。

表 3.　4 枚硬幣依問題 3 設定操作，可停止與不可停止的狀態

	可停止的狀態	不可停止的狀態
硬幣的狀態	全部	無

3. $n=5$. 共 32 種排列，全部可停止

表 4.　5 枚硬幣依問題 3 設定操作，可解停止不可停止的狀態

	可停止的狀態	不可停止的狀態
硬幣的狀態	全部	無

4. $n=6$. 共 64 種排列，部份可停止

表 5. 6 枚硬幣依問題 3 設定操作，可停止與不可停止的狀態

	可停止的狀態	不可停止的狀態
硬幣的狀態	TTTTTT TTHTTH THTTHT HTTHTT TTTHHH HTTTHH THTHTH	其他

	HHTTTH TTHHHT HTHTHT THHHTT HHHTTT HTHHTH HHTHHT THHTHH HHHHHH	

(三)和點燈問題的結論相比.

表 6. 問題 3 和問題 2 可停止的狀態對比，3≦n≦6。L 表示亮，D 表示暗。

	問題 3 的可停止狀態 (新問題)	問題 2 的可停止狀態 (點燈問題)
n＝3	TTT HHH	LLL DDD
n＝4	全部	全部
n＝5	全部	全部
n＝6	TTTTTT TTHTTH THTTHT HTTHTT TTTHHH HTTTHH THTHTH HHTTTH TTHHHT HTHTHT THHHTT HHHTTT HTHHTH	LLLLLL LLDLLD LDLLDL LDDLDD LLLDDD DLLLDD LDLDLD DDLLLD LLDDDL DLDLDL LDDDLL DDDLLL DLDDLD

	HHTHHT	DDLDDL
	THHTHH	LDDLDD
	HHHHHH	DDDDDD

從表 6 觀之，T 對應 L，H 對應 D。當 3≦n≦6 時，問題 3 和問題 2 可停止和不可停止的狀態一致。我們不禁聯想：「**是否這問題 2 和問題 3，可操作至停止與不可操作至停止的狀態都會一致？**」

二、操作到停止

(一)左右移動的距離愈來愈長

依問題 3 設定操作，一次翻動連續 3 個硬幣，左右翻動的長度也會愈來愈長

注意到若從一開始翻動，有以下性質：

向左翻動時，設 H 的數量減少 a 枚，一旦轉向，折返後的路徑上 H 的數量到下一次轉向前至少有 a＋1 枚，（17）

向右翻動時，設 H 的數量增加 b 枚，一旦轉向，折返後的路徑上 H 的數量到下一次轉向前至少減少 b＋1 枚。（18）

（二）問題 3 必出現的狀態. 依問題 3 設定操作，必出現一種特殊的狀態：

命題 14. 操作的連續三個硬幣必翻動到操作過程中出現最右側的 H。

證明. 由於問題 3 融合了問題 1 的操作，我們列表比較：

表 7. 問題 1 操作方式和問題 3 操作方式的比較

比較項目 / 題目	一次翻動的硬幣數量	這一次硬幣翻動後，下一次翻動硬幣的位置	連續翻動硬幣長度變化
問題 1(競賽題)	1	向右 1 或向左 1	愈來愈長
問題 3 (新問題)	3	向右 1 或向左 1 向右 3 或向左 3	

只要狀態中還有 H，操作就不會停止。注意到問題 3 每回是連續 3 個硬幣移動，問題 1 是 1

個硬幣，根據(17)、(18)，由於兩者的模式皆發生「連續翻動硬幣長度愈來愈長」，也因此「連續 3 個硬幣」必會翻到操作過程中最後一個 H。 ■

（三）最右側的 H

1. 可能的情況.

翻動的最右邊三個硬幣裡不會<u>恰有 1 個 H</u>，因為操作時無法動到最後一個 H，見（19）—（22），如下：

$$\mathrm{HH}\cdots\boxed{\mathrm{TTH}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{19}$$

$$\mathrm{HH}\cdots\boxed{\mathrm{THT}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{20}$$

$$\mathrm{HH}\cdots\mathrm{H}\boxed{\mathrm{HTT}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{21}$$

$$\mathrm{HH}\cdots\mathrm{HH}\boxed{\mathrm{TTT}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{22}$$

紅色是指計數到該位置，要翻動的三連續硬幣的中間處，意即框起來的部份無法操作到。因而當連續 3 個硬幣必操作成「碰」到原狀態最後一個 H，恰有 4 種情形

$$\mathrm{HH}\cdots\boxed{\mathrm{HHH}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{23}$$

$$\mathrm{HH}\cdots\boxed{\mathrm{HTH}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{24}$$

$$\mathrm{HH}\cdots\boxed{\mathrm{HHT}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{25}$$

$$\mathrm{HH}\cdots\boxed{\mathrm{THH}}\mathrm{TT}\cdots\mathrm{T} \tag{26}$$

紅色的硬幣表示將要翻動。

2. 操作過程最右側的 H. 以下分別探討（23）—（26）若持續操作，會形成哪些狀態。

（1）HHH. 表示左起的狀態中恰有 1 個 T，其餘都是 H，每 HHH 一組翻成 TTT，一直操作到該 T，則可能會翻成（24）—（26）。

（2）HTH. 注意到在 HTH 左邊都是 H，看下列一系列操作：

$$\mathrm{HH}\cdots\mathrm{H}\boxed{\mathrm{HTH}}\mathrm{TTT}\cdots\mathrm{T}$$

……	H	H	H	H	T	H	T	……
……	H	H	H	T	H	T	T	……
……	H	H	T	H	T	T	T	……

……	H	T	H	T	T	T	T	……
……	T	H	T	T	T	T	T	……

每操作一次，HTH 如同向左移一格，如此繼續操作下去，可得

$$\text{T H T T T T T} \cdots\cdots \qquad (27)$$

（3）HHT

H	H	……	H	H	H	H	H	T	T	……
H	H	……	H	H	H	T	T	H	T	……
H	H	……	H	H	T	H	H	H	T	……
H	H	……	H	H	T	T	T	T	T	……

每操作一次，HHT 如向左移 3 格，如此繼續操作下去，分別可得三種可能的狀態：

$$\text{HTTTT}\ldots\ldots \qquad (28)$$

$$\text{HHTTT}\ldots\ldots \qquad (29)$$

$$\text{HHHTT}\ldots\ldots \qquad (30)$$

補充說明 15. 注意到 T 對應到 L，H 對應到 D，點燈問題中（27）—（29）在 n 非 3 的倍數時可操作到停止，（30）在不分 n 是否為 3 的倍數均可操作至停止。

（4）THH

H	H	……	H	T	H	H	T	……
H	H	……	H	H	T			……

轉變成最右操作為 HHT 的狀態。

（四）證明. 依補充說明 15，現觀察（27）－（29）依問題 3 的規定，在 n 為非 3 的倍數時操作的過程；觀察（30）在不分 n 是否為 3 的倍數時操作的過程。

1. 觀察數據.

(Ⅰ)THTT⋯T

n=7

T	H	T	T	T	T	T
H	T	T	T	T	T	H
T	H	H	T	T	T	H
T	T	T	H	T	T	H
H	H	H	H	T	T	H
H	H	H	T	H	H	H
H	H	H	T	T	T	T
H	T	T	H	T	T	T
T	H	H	H	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T

圖 7.

n=8

T	H	T	T	T	T	T	T
H	T	T	T	T	T	T	H
T	H	H	T	T	T	T	H
T	T	T	H	T	T	T	H
H	H	H	H	T	T	T	H
H	H	H	T	H	H	T	H
H	H	H	T	T	T	H	H
H	H	H	H	H	H	H	H

圖 8.

(Ⅱ)HTT⋯T

n=7

H	T	T	T	T	T	T
T	H	T	T	T	T	H
H	T	H	T	T	T	H
H	H	T	H	T	T	H
H	H	H	T	H	T	H
H	H	H	H	T	H	H
H	H	H	H	H	T	T
H	H	H	T	T	H	T
H	H	T	H	H	H	T
H	H	T	T	T	T	T
T	T	H	T	T	T	T
H	H	H	T	T	T	H
H	H	T	H	H	T	H
H	H	T	T	T	H	H
H	H	H	H	H	H	H

圖 9.

n=8

H	T	T	T	T	T	T	T
T	H	T	T	T	T	T	H
H	T	H	T	T	T	T	H
H	H	T	H	T	T	T	H
H	H	H	T	H	T	T	H
H	H	H	H	T	H	T	H
H	H	H	H	H	T	H	H
H	H	H	H	H	H	T	T
H	H	H	H	T	T	H	T
H	H	H	T	H	H	H	T
H	H	H	T	T	T	T	T
H	T	T	H	T	T	T	T
T	H	H	H	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T

圖 10.

(Ⅲ) HHT⋯T

n=7

H	H	T	T	T	T	T
T	T	H	T	T	T	T
H	H	H	T	T	T	H
H	H	T	H	H	T	H
H	H	T	T	T	H	H
H	H	H	H	H	H	H

圖 11.

n=8

H	H	T	T	T	T	T	T
T	T	H	T	T	T	T	T
H	H	H	T	T	T	T	H
H	H	T	H	H	T	T	H
H	H	T	T	T	H	T	H
H	H	H	H	H	H	T	H
H	H	H	H	H	T	H	T
H	H	H	H	T	H	T	T
H	H	H	T	H	T	T	T
H	H	T	H	T	T	T	T
H	T	H	T	T	T	T	T
T	H	T	T	T	T	T	T

圖 12.

(Ⅳ)HH⋯H

n=7

H	H	H	H	H	H	H
T	H	H	H	H	T	T
T	H	T	T	T	T	T

甲

n=8

H	H	H	H	H	H	H	H
T	H	H	H	H	H	T	T
T	H	H	T	T	T	T	T
H	T	T	T	T	T	T	T

乙

n=9

H	H	H	H	H	H	H	H	H
T	H	H	H	H	H	H	T	T
T	H	H	H	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

丙

圖 13. n=7、8、9 的全 H 操作至全 T 的過程

統整圖 7—圖 13，得到不同初始狀態的連結，依 n 除以 3 的餘數來分類：

命題 16. 當 n 除以 3 餘 1，從 HTT⋯T 開始操作，依下列程序到全部為 T。

HTTT⋯T ➔ HHTT...T ➔ HHHH⋯H ➔ THTT⋯T ➔ TTTT⋯T

命題 17. 當 n 除以 3 餘 2，從 HHT⋯T 開始操作，依下列程序到全部為 T。

HHTT...T ➔ THTT⋯T ➔ HHHH⋯H ➔ HTTT⋯T ➔ TTTT⋯T

命題 18. 當 n 除以 3 餘 0，從 HHH⋯H 開始操作，均可操作至全部為 T。

HHHH⋯H ➔ TTTT⋯T

2. 一般化的證明. 以下分別證明命題 16—18 成立。

命題 16 的證明. 以下用一系列的操作呈現。

n≡1 (mod 3)													**操作補充說明**
H	T	T	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	T	
T	H	T	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	T	
H	T	H	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	T	HTH 每次向右移一格。
H	H	T	H	T	T	T	⋯	T	T	T	T	T	
H	H	H	T	H	T	T	⋯	T	T	T	T	T	
							⋮						
H	H	H	H	H	H	H	⋯	H	H	T	H	H	
H	H	H	H	H	H	H	⋯	H	H	H	T	T	形成最末操作的 3 碼為 HHT
							⋮						
H	H	T	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	T	
T	T	H	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	T	
H	H	H	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	H	連續增加 HHH。
H	H	T	H	H	T	T	⋯	T	T	T	T	H	
H	H	T	T	T	H	T	⋯	T	T	T	T	H	
H	H	H	H	H	H	T	⋯	T	T	T	T	H	
							⋮						
H	H	H	H	H	H	H	⋯	H	H	H	H	H	
T	H	H	H	H	H	H	⋯	H	H	H	T	T	
T	H	H	H	H	H	H	⋯	T	T	T	T	T	連續減少 HHH。
T	H	T	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	T	
H	T	T	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	H	
T	H	H	T	T	T	T	⋯	T	T	T	T	H	
T	T	T	H	T	T	T	⋯	T	T	T	T	H	
H	H	H	H	T	T	T	⋯	T	T	T	T	H	

							⋮						連續增加 HHH。
H	H	H	H	H	H	H	…	H	H	T	T	H	
H	H	H	H	H	H	H	…	H	T	H	H	H	
H	H	H	H	H	H	H	…	H	T	T	T	T	形成最末操作的 3 碼為 HHT
							⋮						
H	H	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
H	T	T	H	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	H	H	H	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	T	T	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	

■

命題 17 的證明. 以下用一系列的操作呈現。

n≡2 (mod 3)													**操作補充說明**
H	H	T	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	T	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
H	H	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	H	
H	H	T	H	H	T	T	…	T	T	T	T	H	
H	H	T	T	T	H	T	…	T	T	T	T	H	
H	H	H	H	H	H	T		T	T	T	T	H	
							⋮						
H	H	H	H	H	H	H	…	H	H	H	T	H	形成操作的最末 3 碼為 HTH
							⋮						
H	T	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	H	T	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
H	T	T	T	T	T	T	…	T	T	T	T	H	
T	H	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	H	
T	T	T	H	T	T	T	…	T	T	T	T	H	
H	H	H	H	T	T	T	…	T	T	T	T	H	連續增加 HHH。
							⋮						
H	H	H	H	H	H	H	…	H	H	H	H	H	
T	H	H	H	H	H	H	…	H	H	H	T	T	連續減少 HHH。
T	H	H	H	H	H	H	…	T	T	T	T	T	
T	H	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
H	T	T	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	H	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
H	T	T	H	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	H	T	T	T	T	T	…	T	T	T	T	H	

H	T	H	T	T	T	T		T	T	T	T	H	HTH 每次向右移一格。
H	H	T	H	T	T	T		T	T	T	T	H	
							⋮						
H	H	H	H	H	H	H	…	H	H	T	H	H	
H	H	H	H	H	H	H	…	H	H	H	T	T	形成操作的最末 3 碼為 HHT
							⋮						
H	H	H	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
H	T	T	H	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	H	H	H	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	T	T	T	T	T	T	…	T	T	T	T	T	

■

命題 18 的證明.

n≡2 （mod 3）													**操作補充說明**
H	H	H	H	H	H	H		H	H	H	H	H	連續將 HHH 翻成 TTT。
T	H	H	H	H	H	H	…	H	H	H	T	T	
T	H	H	H	H	H	H	…	T	T	T	T	T	
							⋮						
T	H	H	H	T	T	T	…	T	T	T	T	T	
T	T	T	T	T	T	T		T	T	T	T	T	

■

命題 19. 當 n 為非 3 的倍數，點燈問題可以操作到停止的狀態，依問題 3 規則操作也會停止。

命題 20 當 n 為 3 的倍數，點燈問題可以操作到停止的狀態，依問題 3 規則操作也會停止。

證明. 可操作至停止的狀態與無法停止的狀態是兩個不同的集合，如果兩者有操作過程可連結，就表示不會停止狀態可以變得能停止，產生矛盾！當 n 為 3 的倍數時，點燈問題中可操作至停止的狀態，依問題 3 的規則操作，都不會形成點燈問題中無法操作至停止的狀態之一，是故如果問題 3 的設定翻動，原本可能形成（27）—（30），然而不可能形成（27）—（29），因為這 3 個式子對應到點燈問題的狀態，在 n 為 3 的倍數時無法在有限次操作內停止，推得只能形成（30），當 n 為 3 的倍數，下列操作仍成立：

HHHTT…T→HTTHTT…T→THHHT…T→TTTTT⋯T

可知命題成立。 ■

根據命題 19、命題 20 可知

命題 21. 問題 3 所有能操作至停止的狀態和點燈問題的一致。

三、平均次數

命題 21 顯示問題 3 能操作至停止的狀態要配合點燈問題的條件，那麼問題 3 能操作到停止的次數平均值和問題 1 的規律是否有什麼關聯？

（一）$2 \leqq n \leqq 15$ 時的操作總次數和平均次數. $2 \leqq n \leqq 8$ 的操作次數採用手算得出，藉著程式運算，得出 $9 \leqq n \leqq 15$ 的操作次數，統整結果如表 8。

表 8. 問題 3 的 $2 \leqq n \leqq 15$ 時的操作總次數和平均次數

n	所有可以操作至停止的狀態數量	操作總次數	平均次數
2	4	6	$1\frac{1}{2}$
3	$2 = 2^{3-2}$	1*	$\frac{1}{2}$
4	16	80	5
5	32	336	$10\frac{1}{2}$
6	$16 = 2^{6-2}$	72*	$4\frac{1}{2}$
7	128	2080	$16\frac{1}{4}$
8	256	5824	$22\frac{3}{4}$
9	$128 = 2^{9-2}$	1440	$11\frac{1}{4}$
10	1024	31488	$30\frac{3}{4}$

11	2048	78336	$38\frac{1}{4}$
12	$1024 = 2^{12-2}$	21760	$21\frac{1}{4}$
13	8192	397312	$48\frac{1}{2}$
14	16384	933888	57
15	$8192 = 2^{15-2}$	282624	$34\frac{1}{2}$

操作 22. $n=2$ 時的操作流程如下：

$$\text{TT} \tag{31}$$

$$\text{HT}\to\text{TT} \tag{32}$$

$$\text{TH}\to\text{HH}\to\text{HT}\to\text{TT} \tag{33}$$

將兩個硬幣看作環狀排列。以（32)來說，要先翻動 H，H 右側的黃底 T，我將它看作兩種身份：一是 H 右側鄰居，二是 H 的左側鄰居，兩種身份各翻動 1 次，共翻 2 次，等同沒翻。對於（33）的兩個黃底 H 也是如此看待並操作，因而得到（31）—（33）的操作流程，4 種組態共操作 6 次。

補充說明 23. $n=3$、6、9、12、15 的數據，是計數那些可以操作至停止的狀態，因為 n 為 3 的倍數時，並非所有狀態都可在有限次操作內停止。

（二）n 為 3 的倍數時可以操作至停止的狀態數量. 從表 8 可觀察出規律，更好的是我可以證明其對一般化成立，見命題 24。

命題 24. n為 3 的倍數時，可在有限次操作內停止的狀態總數為

$$2^{n-2}\text{。} \tag{34}$$

證明. 設命題要求的狀態總數為A_n。

（i）對n枚硬幣可以操作到停止的任一種狀態，拿走左起第$n-1$和第n枚，就形成$n-2$枚

的狀態，於是有

$$A_n \le 2^{n-2}。$$

（ii）對任一種$n-2$枚的狀態，其A_0、A_1、A_2的奇偶性共有 8 種組合，無論哪一種，加上適當的第$n-1$和n枚狀態，就會形成一個n枚可以操作到停止的狀態，而且加入適當的兩枚有且只有一種方式，見表 9：

表 9. 加上適當的第$n-1$和n枚狀態，就會形成一個n枚可以操作到停止的狀態

$n-2$枚硬幣，A_0、A_1、A_2的奇偶性，0 表示偶數，1 表示奇數			第$n-1$枚	第n枚
A_1	A_2	A_0		
0	0	0	T	T
1	0	0	H	H
0	1	0	H	T
0	0	1	T	H
1	1	0	T	H
1	0	1	H	T
0	1	1	H	H
1	1	1	T	T

主要是因為

$$n-1 \equiv 2 \ (mod\ 3)，$$

$$n \equiv 0 \ (mod\ 3)，$$

故第$n-1$和n枚狀態是 H 或 T，分別可調整n枚狀態的A_2、A_0的奇偶性，推得

$$A_n \ge 2^{n-2}。$$

命題成立。 ■

補充說明 25. 命題 24 還可推得一個恆等式，請參見附錄。

（三）平均次數一般式的猜測

根據表 8，以下依n除以 3 的餘數分類觀察：

1. n除以 3 餘 1.

表 10. n＝4、7、10、13 的操作次數平均值

n	4	7	10	13
操作次數平均值	5	16.25	30.75	48.5
平均值×4	20	65	123	194
平均數×4 相鄰數的差	45	58	71	

猜測 26. 45，58，71 為首項＝45，公差＝13 的等差數列前 3 項，也就是 20，65，123，194 為二階等差數列的其中 4 項，依前述數據，猜測對一般化的n除以 3 餘 1，$n \geq 4$，其平均值為：

$$\frac{1}{72} \times (13n^2 + 127n - 356) \tag{35}$$

2. n除以 3 餘 2.

表 11. n＝2、5、8、11、14 的操作次數平均值

n	2	5	8	11	14
操作次數平均值	1.5	10.5	22.75	38.25	24
平均值×4	6	42	91	153	228
平均數×4 相鄰數的差	36	49	62	75	

猜測 27. 36，49，62，75 為首項＝49，公差＝13 的等差數列前 4 項，也就是 6，42，91，153，228 為二階等差數列的其中 5 項，依前述推測對一般化的n除以 3 餘 2，$n \geq 2$，其平均值為：

$$\frac{1}{72} \times (13n^2 + 125n - 194) \tag{36}$$

3. n除以 3 餘 0.

表 12. n=3、6、9、12、15 的操作次數平均值

n	3	6	9	12	15
操作次數平均值	0.5	4.5	11.25	21.25	34.5
平均值×4	2	18	45	85	138
平均數×4 相鄰數的差	16	27	40	53	

猜測 28. 除 16 外，27，40，53 為首項=27，公差=13 的等差數列前 3 項，也就是 18，45，85，138 為二階等差數列的其中 4 項，依前述推測對一般化的n除以 3 餘 0，$n \geq 2$，其平均值為：

$$\frac{1}{72} \times (13n^2 - 33n + 54) \tag{37}$$

（四）操作次數的性質. 為了試圖驗証（35）—（37）對一般化成立，我觀察數據，發現一些規律，見表 13 和表 14。

1. 依第 1 枚或最後 1 枚為 T 或 H 分類

表 13. 依第 1 枚分類，操作次數彼此相等

第 1 枚為 T		第 1 枚為 H	
TTTT	0	HTTT	9
THTT	3	HHTT	6
TTHT	5	HTHT	4
TTTH	7	HTTH	2
THHT	10	HHHT	3
THTH	8	HHTH	5
TTHH	6	HTHH	7
THHH	1	HHHH	4
和	40	**和**	40

表 14. 依第 4 枚分類，操作次數彼此相等

第 4 枚為 T		第 4 枚為 H	
TTTT	0	HTTT	7
HTTT	9	HHTT	2
THTT	3	HTHT	8
TTHT	5	HTTH	6
HHTT	6	HHHT	5
HTHT	4	HHTH	7
THHT	10	HTHH	1
HHHT	3	HHHH	4
和	40	**和**	40

以 n＝4 來說，總操作次數＝80，從表 13 和表 14 發現，無論是依第 1 枚為 T 或 H 來分類，或依最後 1 枚，操作次數恰好為總操作次數的一半，經檢查$3 \leq n \leq 8$均有類似現象，得到下列二個猜測：

猜測 29. 最後 1 枚為 T 的狀態，與最後 1 枚為 H 的狀態，兩者全部操作次數和相等。

猜測 30. 第 1 枚為 T 的狀態，與第 1 枚為 H 的狀態，兩者全部操作次數和相等。

補充說明 31. 可惜在科展交件前仍未驗證猜測 26—猜測 30 是否對一般化也成立，此為今後我努力的方向之一。

伍、討論

一、問題 1 是依據 H 的數量指定要翻動的硬幣，硬幣排成一列；問題 2 則可隨意挑一盞燈操作，只是要連動其左右兩旁的燈，燈圍成一圈。問題 3 結合「依 H 數量指定」與「連續三個」、由於會翻第 $n-1$ 枚、第 n 枚、第 1 枚，可看作圍一圈，如此一來，便可能帶有前兩題的性質。

二、問題 1（a）的證明和官方解答的第 4 種一樣，不過（b）的思路官方解答裡沒有完全相同的，官方解答的式子都是利用 H 數量，我還有數 T，再利用數學歸納法證明。

三、問題 3 和問題 1 的操作皆有左右操作長度愈來愈長的性質，問題 2 的操作自由度較大，因為每次不限要點哪盞燈；問題 3 的操作自由度較小，每次操作皆受當時 H 的數量限制。不過本作品仍證明問題 2 的每個可操作至停止的狀態，依問題 3 的設定也可操作至停止。

四、依目前新問題的操作次數平均值猜測來看，問題 1 和問題 3 的操作次數平均值一般式都是n的二次函數，如果猜想 26─28 成立，便能再探討為何兩個問題的操作次數平均值同為n的二次函數，進而研究兩個離散動力系統在什麼樣條件的結合下，保有哪些性質，因而本科展作品仍有很大的發展性。

陸、結論

一、給出競賽題可以在限次內操作至停止的證明，以及求出操作次數平均值。

二、點燈問題中可在有限次操作內停止的狀態，依問題 3 規定也會在有限次操作內停止。

三、依n除以 3 的餘數分類，給出操作次數平均值一般式的猜想。

四、給出猜測：最後 1 枚為 T，和最後 1 枚為 H 的兩種所有狀態操作次數和相等；第 1 枚為 T，和第 1 枚為 H 的兩種所有狀態操作次數和相等。

柒、引用文獻

[1] International Mathematical Olympiad。IMO2019 Problems。2019/07/22。取自 https://www.imo-official.org/problems.aspx。

[2]60th International Mathematical Olympiad。Problems (with solutions)。2019/10/30。取自 https://www.imo2019.uk/wp-content/uploads/2018/07/solutions-r856.pdf

[3]譚克平(2016)。**點燈問題，臺灣國際科展宣導暨青少年科學人才培育講座**。

2019/09/01。國立科學教育館。
[4]康軒文事業教科書編輯委員會(民 109)統計。國民中學數學課本第二冊。臺南市。國家教育研究院。
[5]陳室華,李欣綾,陳俞甄,陳駿霆(2017)。反複翻覆不繁複。**中小學科學展覽會，105 學年度**。新北市。
[6]游森棚（2019）。〈翻硬幣與青蛙跳〉。《科學月刊》，597 期，18-19。

捌、附錄

命題 32. A_1，A_2，A_3，n都是正整數，設$A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \pmod 2$，$n \equiv 0 \pmod 3$，則有

$$\sum_{0 \le A_1, A_2, A_3 \le \frac{n}{3}} C_{A_1}^{\frac{n}{3}} C_{A_2}^{\frac{n}{3}} C_{A_3}^{\frac{n}{3}} = 2^{n-2} \text{。} \tag{38}$$

證明.

$C_{A_i}^{\frac{n}{3}}$表示在$\frac{n}{3}$個除以 3 餘i的編號中任取A_i個當作H的方法數，根據命題 24 得知等式成立。

■

【評語】030401

這是結合一個競賽和點燈所得出的一個有趣的問題。能夠把兩個問題做適當的連結，得出一個好的提問，又能針對這個新的議題，找出可解的條件，十分難得，值得鼓勵。本作品主要是討論是否可在有限次操作內出現停止的狀態，並求出操作次數平均值。第一個問題有近似點燈問題的結論，第二個問題有歸納出幾個未證明的猜想，過程透過分析與推導得到操作次數平均值，文中充分說明結論，作者在發表時也表現相當優秀，未來更期待後續能完成待推論的性質延伸！

作品簡報

翻硬幣與點燈的混搭

國中組

數學科

競賽題內容

- n枚硬幣排成一列，朝上的面不是H就是T。
- 操作規則： H的數量k決定翻動左起第k枚。
- 提問：

（a）證明在有限次內必會**停止**操作。

（b）找出n枚硬幣操作次數**平均值**。

在有限次內停止操作

操作的規律

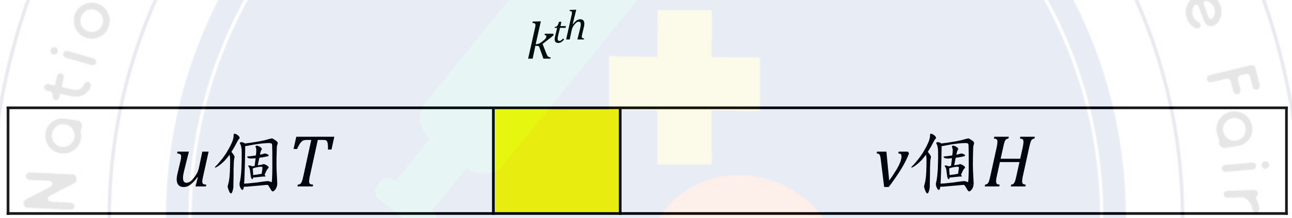
H	T	T	**H**	H	T	T	T	H	T
H	T	**T**	T	H	T	T	T	H	T
H	T	H	**T**	H	T	T	T	H	T
H	T	H	H	**H**	T	T	T	H	T
H	T	H	**H**	T	T	T	T	H	T
H	T	**H**	T	T	T	T	T	H	T
H	**T**	T	T	T	T	T	T	H	T
H	H	**T**	T	T	T	T	T	H	T
H	H	H	**T**	T	T	T	T	H	T
H	H	H	H	**T**	T	T	T	H	T
H	H	H	H	H	**T**	T	T	H	T
H	H	H	H	H	H	**T**	T	H	T
H	H	H	H	H	H	H	**T**	H	T
H	H	H	H	H	H	H	H	**H**	T
H	H	H	H	H	H	H	**H**	T	T
H	H	H	H	H	H	**H**	T	T	T
H	H	H	H	H	**H**	T	T	T	T
H	H	H	H	**H**	T	T	T	T	T
H	H	H	**H**	T	T	T	T	T	T
H	H	**H**	T	T	T	T	T	T	T
H	**H**	T	T	T	T	T	T	T	T
H	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

圖1. 每一次翻動變向，單一方向硬幣變化長度愈來愈長

在有限次內停止操作

單一狀態操作到停止的次數

- 分別編號第k枚硬幣左側T和右側H



- 操作次數：H和T的硬幣編號與k的**差距總和**×2再加上k：

$$2\times\left(\sum_{1\le j\le v} h_j+\sum_{1\le i\le u} t_i\right)+k\text{。}$$

操作次數平均值

數學歸納法

- $n+1$枚硬幣操作總次數和n枚的差距

$$\left(\sum_{0\le k\le n} C_k^n \times (2\times(n-k)+1)\right) + \boldsymbol{n}\text{枚硬幣操作總次數}$$

命題1. n枚硬幣操作次數平均值為：

$$\frac{1}{4}n\times(n+1)\text{。}$$

新問題

結合點燈問題

點燈問題

n盞燈圍成一個圓圈，每按一盞燈，該燈與其相鄰左右的燈的狀態均會改變：亮→滅或滅→亮。

本作品**發想**之問題

n枚硬幣排成一列，若H面朝上的有k枚，則翻動左起第$k-1$枚、第k枚、第$k+1$枚硬幣，若$k+1$超過n則翻動左起第1枚。

在有限次內停止操作

必操作至最右側的H

- 新問題和競賽題的**共通點**

表1. 列出新問題和競賽題操作性質比較

比較項目 / 題目	一次翻動的數量	這一次硬幣翻動後，下一次翻動硬幣的位置	連續翻動硬幣長度變化
競賽題	1	向右1或向左1	**愈來愈長**
新問題	3	向右1或向左1 向右3或向左3	

在有限次內停止操作

必歸結到下列操作流程

命題2. n除以3餘1

HTTT...T → HHTT...T → HHHH...H → THTT...T → TTTT...T

命題3. n除以3餘2

HHTT...T → THTT...T → HHHH...H → HTTT...T → TTTT...T

命題4. n除以3餘0

HHHH...H → TTTT...T

在有限次內停止操作

可以操作至停止的條件

命題5. 當n為**非3的倍數**，任何狀態依新問題規則操作均會停止。

命題6. 當n為3的倍數，A_i表示編號$n \equiv i(mod\ 3)$中燈的狀態為亮的數量，可在有限次內操作到全亮的狀態的**充要條件**為

$$A_0 \equiv A_1 \equiv A_2 \pmod 2$$ 。

關於操作的其它結果

n為3的倍數時可操作至停止狀態數量

命題7. n為3的倍數時，可在有限次操作內停止的狀態總數為2^{n-2}。

證明中

操作次數的性質

利用程式試算 $9 \leq n \leq 15$的狀態

猜測8. 最後1枚為T的狀態，與最後1枚為H的狀態，兩者全部操作次數和相等。

猜測9. 第1枚為T的狀態，與第1枚為H的狀態，兩者全部操作次數和相等。

證明中

操作次數平均值

猜測10. n除以3餘1，操作數平均值為

$$\frac{1}{72}\times(13n^2+127n-356)$$

猜測11. n除以3餘2，操作數平均值為

$$\frac{1}{72}\times(13n^2+125n-194)$$

猜測12. n除以3餘0，操作數平均值為

$$\frac{1}{72}\times(13n^2-33n+54)$$

未來展望

證明操作次數性質和平均值規律成立。

結論與文獻

主要結論

- 解決競賽題。
- 發想出新問題，並證明在某些條件下可以操作至停止。

引用文獻

[1] International Mathematical Olympiad。IMO2019 Problems。2019/07/22。取自https://www.imo-official.org/problems.aspx。
[2]譚克平(2016)。點燈問題，臺灣國際科展宣導暨青少年科學人才培育講座。
[3]陳室華,李欣綾,陳俞甄,陳駿霆(2017)。反複翻覆不繁複。中小學科學展覽會，105學年度。新北市。