

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

030105

「扭」轉乾坤，「擺」挫不折-探討扭擺的各種
性質

學校名稱：桃園市立大成國民中學

作者： 國二 劉于萱 國二 蘇俐瑜	指導老師： 王思琪 顏思恬
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：扭擺

摘要

裝置被一條金屬線所繫住，以此線為軸，上端固定，垂直吊掛。當物體受外力被扭轉一角度 θ 時，金屬線因恢復力而產生來回扭擺的現象，且扭擺週期 T 受各種因素影響。經實驗後我們發現：1.金屬線的剛性係數越大， T 越小。2.扭轉角度 θ 越大， T 會些微增加，但不明顯。3. T 與長度開根號成正比。4. T 與質量開根號成正比。5. T 與線徑粗細成反比。6.擺放方式- $T_{\perp} > T_{\parallel}$ 。7.所得公式 $T = k \times \frac{\sqrt{I \times \sqrt{m}}}{d}$ ，且 $k \propto \frac{1}{\sqrt{G}}$ 。

我們另外發現有「扭性疲乏」一事，實驗後發現金屬線的剛性係數越小，則扭性疲乏越明顯，且當金屬線重覆受到不同方向之扭轉時，疲乏的現象會比同方向來得明顯。我們希望未來還能找出「扭性疲乏臨界點」。

壹、研究動機

老師在上單擺課程時，我們發現整個裝置除了左右擺動外，同時也會以金屬線為軸心做旋轉。這件事引起了我們的好奇心，如果改變擺動方式，週期會發生什麼樣的變化？回家搜尋後我們找到一個叫扭擺的實驗，於是決定也來探討各種因素對扭擺週期的影響。

貳、研究目的

- 一、設計扭擺裝置
- 二、探討不同材質的金屬線對扭擺週期之影響
- 三、探討三種金屬線的金屬環轉動不同角度對扭擺週期之影響
- 四、探討不同長度的金屬線及金屬環不同擺放方式對扭擺週期之影響
- 五、探討不同重物質量對扭擺週期之影響
- 六、探討不同粗細的金屬線對扭擺週期之影響
- 七、扭性疲乏的探討
- 八、探討金屬線同方向旋轉與交替方向旋轉對週期之影響
- 九、探討釣魚線在不同金屬環片數下的扭擺週期

參、研究設備及器材

研究設備及器材：鐵架、固定夾，如圖(1)

鋼線、銅線、鋁線、釣魚線、游標尺，如圖(2)

金屬環、剝線鉗、套管、碼表，如圖(3)

螺絲、螺絲帽、華司、鉤磁鐵、T形角鐵，如圖(4)



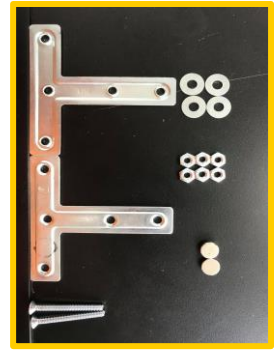
圖(1)



圖(2)



圖(3)



圖(4)

肆、研究過程或方法

一、研究原理：

(一) 實驗初衷：我們根據國中單擺實驗，想要先探討擺角、擺長及擺錘質量對週期的影響。其中由於測量一次的誤差過大，因此我們皆先測量來回 20 次的時間，再除以 20 以減少實驗誤差。



圖(5) 扭擺裝置。

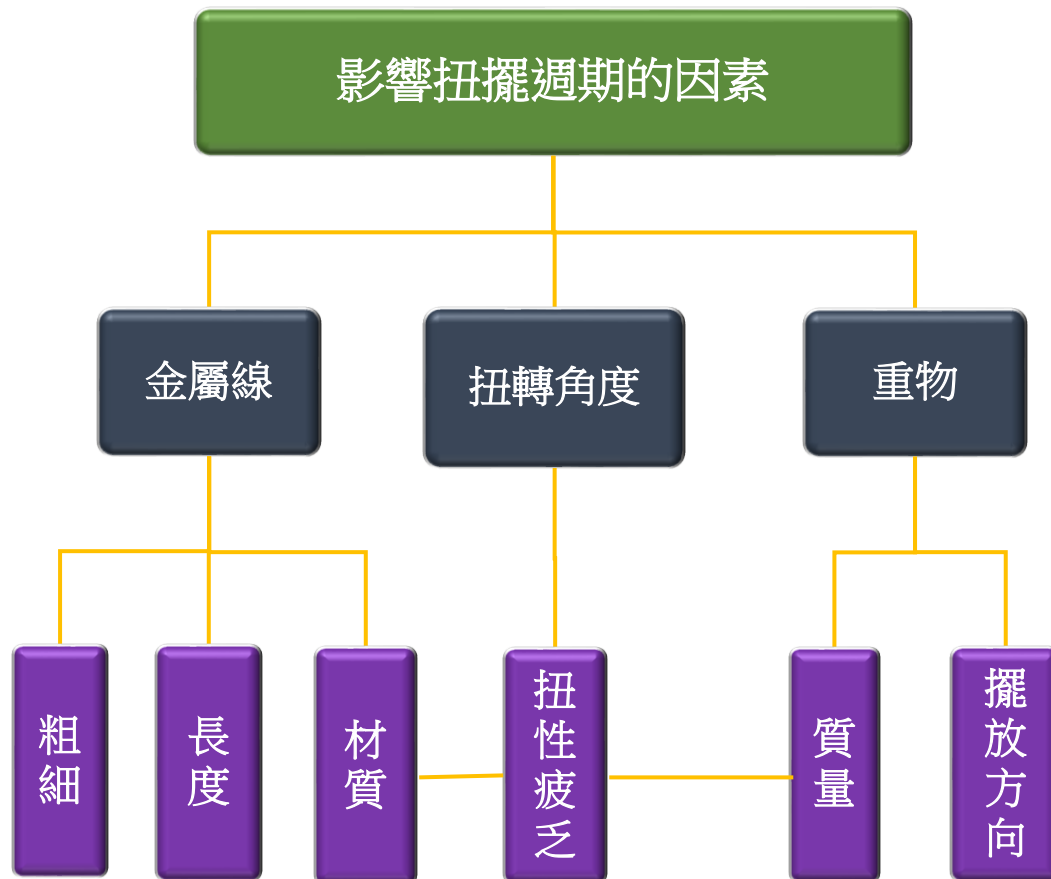
左圖為垂直裝置，右圖為平行裝置

(二) 裝置設計的參考：

我們參考了網路上的扭擺裝置，如右圖(5)，金屬線下懸著一基座，另有一個圓環，可水平置於此基座上，或鉛直懸於基座下。但此裝置很昂貴，且難以改變操縱變因，因此我們自行設計了扭擺裝置。

(三) 除了裝置外，我們發現扭擺的實驗數據可應用到剛性係數的測量，但需分別測量如上圖(5)的垂直裝置跟平行裝置的週期，因此我們設計裝置時，還須考慮到金屬環要可以垂直也可以平行。

二、研究架構



圖(6) 研究架構圖

三、實驗步驟

(一) 實驗一：設計扭擺裝置

1. 目的：我們看了實驗裝置後，由於器材過於昂貴且希望探討更多操縱變因，決定自行設計一款類似的裝置。
2. 設計考慮重點：
 - (1) 金屬線固定：原本我們有考慮用焊接，但覺得焊接使用的是錫，怕進行扭轉時會扭到焊接的位置，反而是測量到錫的扭擺而不是我們想要測的金屬扭擺。後來我們使用管套來做固定，一方面以我們懸掛的重物來說，管套已足以固定，二方面又不會影響到原材質的扭擺效果。
 - (2) T型角鐵：主要是用來連接金屬線跟金屬環的固定器，另一方面也可以增加質量以拉直金屬線。

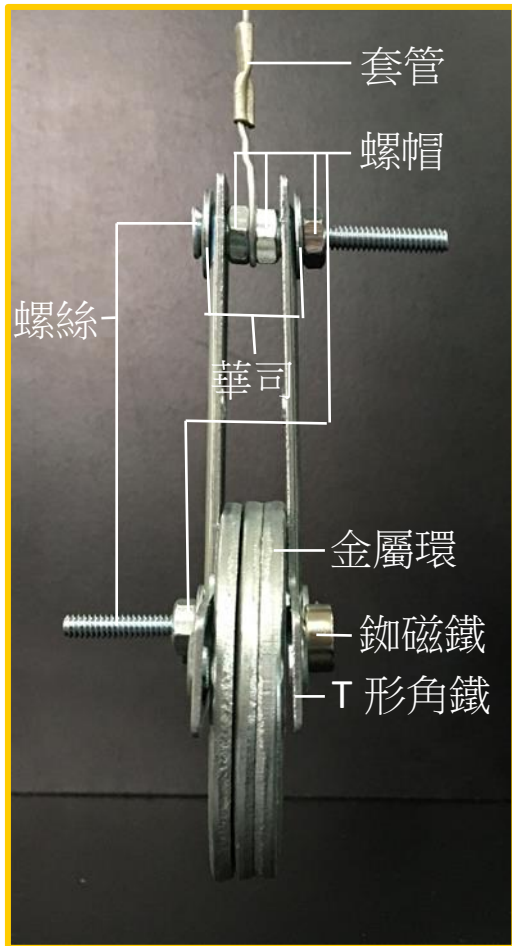
- (3) 金屬環：用來模擬參考文獻中的環狀基座，並且可以藉由增加金屬環片數來改變扭擺質量以進行實驗操作探討。此外，金屬環掛兩片以上時容易晃動造成擺動不穩定，所以我們用少量的強力膠將所需要的金屬環黏在一起。金屬環上標有紅線表示直徑，在金屬環與 T 型角鐵呈垂直狀態時能更準確的對齊 0 度，避免誤差。
- (4) 磁鐵：由於當金屬環和 T 型角鐵垂直，扭轉時會晃動，所以我們使用磁鐵來固定。但為了方便帶入標準式時條件一致，所以金屬環平行放置時，也會貼磁鐵。
- (5) 螺絲：兩側以對稱方向固定，讓重錘質心盡可能落在金屬線下方。
- (6) 360 度量角器：方便從上往下觀察重物扭擺角度。



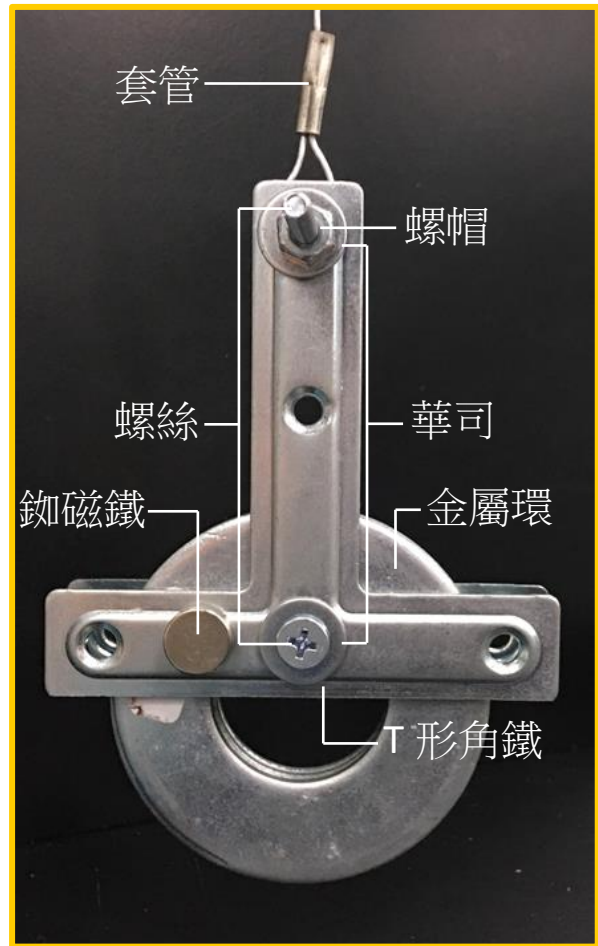
圖(7) 裝置整體構造圖



圖(8) 標有紅線(直徑)的金屬片



圖(9) 懸掛重物近拍側面圖
T型角鐵和金屬環平行



圖(10) 懸掛重物近拍正面圖
T型角鐵和金屬環平行



圖(11) 懸掛重物近拍側面圖
T型角鐵和金屬環垂直



圖(12) 懸掛重物近拍側面圖
T型角鐵和金屬環垂直

(二) 實驗二：探討不同材質的金屬線對扭擺週期之影響

1. 目的：想了解不同材質的金屬線是否對剛性係數具有影響
2. 操縱變因：金屬線種類-鋼線、銅線、鋁線
3. 控制變因：線長- 36cm、轉動角度及方向-逆時鐘 45 度、金屬環片數-兩片-平行擺放
4. 應變變因：扭擺轉動二十次之時間
5. 步驟：
 - (1) 吊掛重物於不同材質的金屬線上，並盡可能讓金屬線保持直線。
 - (2) 旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (3) 每個相同條件重複做五次，以確認測量的穩定性。
 - (4) 將實驗結果求得平均值後，再除以 20 求週期 T，並算出實驗標準差。

(三) 實驗三：探討三種金屬線的金屬環轉動不同角度對扭擺週期之影響

1. 目的：想了解重物轉動不同角度是否對剛性係數具有影響
2. 操縱變因：金屬線種類、轉動角度及方向-逆時鐘 15、30、45、60、75、90 度角
3. 控制變因：線長- 36cm、金屬環片數-兩片-平行擺放
4. 應變變因：扭擺轉動二十次之週期
5. 步驟：
 - (1) 吊掛重物於不同的金屬線上，並盡可能讓金屬線保持直線。
 - (2) 旋轉不同角度後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (3) 每個相同條件重複做五次。
 - (4) 將實驗結果求得平均值後，再除以 20 求週期 T。

(四) 實驗四：探討不同長度的金屬線及金屬環不同擺放方式對扭擺週期之影響

1. 目的：想了解不同長度的金屬線是否對剛性係數具有影響，但我們只取鋼線來進行本實驗。
2. 操縱變因：不同長度的鋼線- 15、25、36、45cm、金屬環擺放方式
3. 控制變因：、轉動角度及方向-逆時鐘 45 度、金屬環片數-一片、兩片、三片、四片-皆平行擺放
4. 應變變因：分別測量金屬環平行 T 型角鐵與垂直 T 型角鐵之扭擺轉動二十次的週期
5. 步驟：
 - (1) 將金屬環與 T 型角鐵平行固定於不同長度的鋼線上。

- (2) 盡可能讓金屬線保持直線。
- (3) 旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
- (4) 每個相同條件重複做五次。
- (5) 再將金屬環與 T 型角鐵垂直固定於不同長度的鋼線上，重複步驟 2~4。
- (6) 將實驗結果求得平均值後，再除以 20 求得週期。

(五) 實驗五：探討不同重物質量對扭擺週期之影響

1. 目的：想了解吊掛不同質量的重物是否對剛性係數具有影響
2. 操縱變因：不同重物-金屬環片數一片、兩片、三片、四片-皆平行擺放
3. 控制變因：36cm 鋼線、銅線、鋁線，轉動角度及角度-逆時鐘 45 度
4. 應變變因：扭擺轉動二十次之週期
5. 步驟：
 - (1) 我們先測量 T 型角鐵和金屬環的重量。
 - (2) 吊掛不同重量的重物於不同的金屬線上，並盡可能讓金屬線保持直線。
 - (3) 旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (4) 將實驗結果除以 20 求得週期。

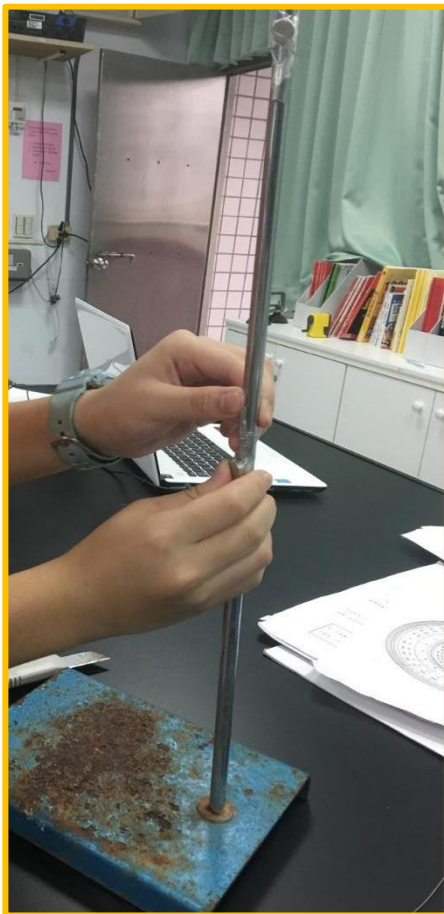
(六) 實驗六：探討不同粗細的金屬線對扭擺週期之影響

1. 目的：想了解不同粗細的金屬線是否對剛性係數具有影響，但我們只取銅線來進行本實驗。
2. 操縱變因：直徑 0.1、0.06、0.065、0.03cm 的銅線
3. 控制變因：轉動角度及方向-逆時鐘 45 度、金屬環片數-一片、兩片、三片、四片-皆平行擺放
4. 應變變因：扭擺轉動二十次之週期
5. 步驟：
 - (1) 吊掛重物於不同粗細的銅線上，並盡可能讓銅線保持直線。
 - (2) 旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (3) 將實驗結果除以 20 求得週期。

(七) 實驗七：扭性疲乏的探討

1. 目的：想了解一金屬線在以逆時鐘方向扭轉並固定數天後再進行逆時鐘扭轉之實驗對週期之影響
2. 操縱變因：金屬線種類

3. 控制變因：扭轉固定圈數-逆時鐘 2 圈、固定天數-4 天、5 天、6 天、7 天、9 天
轉動角度及方向-逆時鐘 45 度，金屬環片數-兩片-平行擺放
4. 應變變因：扭擺轉動二十次之週期
5. 步驟：
 - (1) 將不同材質的金屬線逆時鐘扭轉兩圈後，用磁鐵及膠帶固定在鐵架上 4 天
 - (2) 拆下金屬線後，分別將金屬環與 T 角鐵平行固定於金屬線上。
 - (3) 盡可能讓金屬線保持直線。
 - (4) 旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (5) 每個相同條件重複做三次。
 - (6) 測完週期後，將金屬線以步驟 1 方式固定。
 - (7) 隔天重複步驟 2~6。
 - (8) 將實驗結果求得平均值後，再除以 20 求得週期。



圖(13) 進行步驟 1



圖(14) 固定完成的樣子

(八) 實驗八：探討金屬線同方向旋轉與交替方向旋轉對週期之影響

1. 目的：我們在之前的實驗過程中發現當鋁線和銅線吊掛過重時，裝置無法回到初始位置，因此決定改以交替方向旋轉的方式，是否對週期有影響。
2. 操縱變因：同方向或交替方向旋轉
3. 控制變因：36cm 鋁線、轉動角度-45 度、金屬環片數-一片、兩片、三片-皆平行擺放。
4. 應變變因：扭擺轉動二十次之週期
5. 步驟：
 - (1) 吊掛重物於鋁線上，並盡可能讓鋁線保持直線。
 - (2) 以逆時鐘方向旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (3) 以逆時鐘方向旋轉 45 度角後放開，再以順時方向旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (4) 將實驗結果除以 20 求得週期。

(九) 實驗九：探討釣魚線在不同金屬環片數下的扭擺週期

1. 目的：實驗過程中，老師曾跟我們說，金屬線好像不夠直，是否會影響數據的穩定性？因此我們利用很容易拉直的釣魚線來測量週期，並與金屬線的實驗結果作比較。
2. 操縱變因：金屬環片數-一片、兩片、三片、四片-皆平行擺放。
3. 控制變因：36cm 釣魚線、轉動角度及方向-逆時鐘 45 度
4. 應變變因：扭擺轉動二十次之週期
5. 步驟：
 - (1) 吊掛重物於釣魚線上，並盡可能讓釣魚線保持直線。
 - (2) 以逆時鐘方向旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (3) 以逆時鐘方向旋轉 45 度角後放開，再以順時種方向旋轉 45 度角後放開，計時轉動二十次之週期。
 - (4) 將實驗結果除以 20 求得週期。

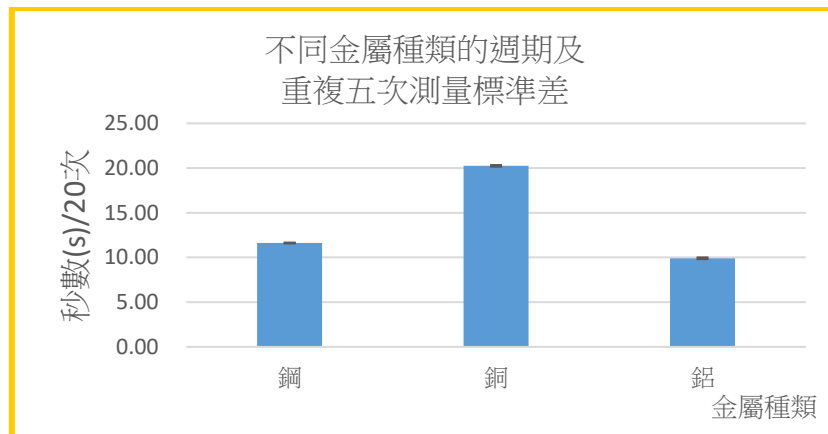
伍、實驗結果與分析

1、實驗二：探討不同材質的金屬線對扭擺週期之影響

- (1) 實驗結果：測量三種金屬線來回擺動 20 次的時間，每種條件測量五次數據如下表(一)，並算出標準差。再將三種金屬線扭擺週期及標準差作圖如圖(15)。

表(一) 實驗一 不同金屬線扭擺 20 次的時間

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均	T	標準差 (STDEV)
鋼	11.66	11.53	11.62	11.65	11.62	11.62	0.58	0.003
銅	20.31	20.09	20.31	20.29	20.22	20.24	1.01	0.005
鋁	9.93	9.91	9.75	10.00	9.97	9.91	0.50	0.005



圖(15) 不同金屬線扭擺 20 次的時間及標準差

(2) 結果分析：

- 三種金屬的扭擺週期大小為：銅>鋼>鋁。
- 三種金屬的五次實驗標準差皆小於 0.01。

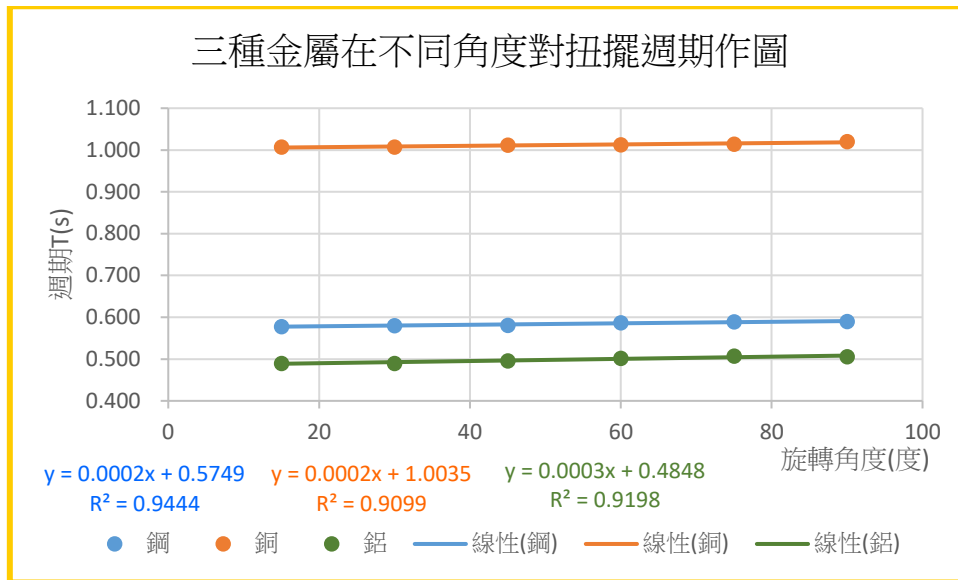
2、實驗三：探討三種金屬線的金屬環轉動不同角度對扭擺週期之影響

- (1) 實驗結果：測量三種金屬線在逆時鐘旋轉不同角度的週期。數據如下表(二)。

再分別將三種金屬線的旋轉角度對週期作圖，並求出線性函數及 R^2 值，如圖(16)。

表(二) 三種金屬線旋轉不同角度的週期

金屬種類 \ 轉動角度(度)	15	30	45	60	75	90
鋼	0.578±0.002	0.580±0.000	0.581±0.001	0.587±0.001	0.589±0.003	0.590±0.001
銅	1.007±0.001	1.007±0.003	1.012±0.002	1.013±0.001	1.014±0.001	1.020±0.001
鋁	0.490±0.001	0.490±0.002	0.496±0.002	0.502±0.002	0.507±0.001	0.506±0.002



圖(16) 三種金屬在不同角度對扭擺的作圖、線性函數及 R^2 值

(2) 結果分析：

1. 不論哪種旋轉角度，週期大小仍為：銅>鋼>鋁。
2. 從表(二)當中發現，所有種類的金屬線，隨著角度越大，週期皆些微上升。
3. 從圖(16)的線性函數中發現，不論哪種金屬，斜率都很小，約為 $0.0002 \sim 0.0003$ ，且 R^2 值皆為 0.9 以上。

3、實驗四：探討不同長度的金屬線及金屬環不同擺放方式對扭擺週期之影響

(1) 實驗結果：

1. 平行週期($T_{//}$)：金屬環平行 T 型角鐵時，分別懸掛一到四片金屬環所測得的實驗結果，如表(三)。
2. 垂直週期(T_{\perp})：金屬環平行 T 型角鐵時，分別懸掛一到四片金屬環所測得的實驗結果，如表(四)。
3. 分別將 $T_{//}$ 和 T_{\perp} 的實驗結果再平方，得到表(五)和表(六)。
4. 將表(三)~表(六)進行作圖，並求出線性函數及 R^2 值，分別如圖(17)~圖(20)。

表(三) 不同長度的鋼線的 $T_{//}$

金屬環片數 \ 長度(cm)	15	25	36	45
一片	0.390±0.001	0.401±0.001	0.461±0.002	0.528±0.001
兩片	0.392±0.001	0.492±0.001	0.581±0.001	0.632±0.001
三片	0.491±0.001	0.573±0.001	0.683±0.001	0.732±0.001
四片	0.532±0.001	0.637±0.001	0.768±0.001	0.840±0.001

表(四) 不同長度的鋼線的 T_{\perp}

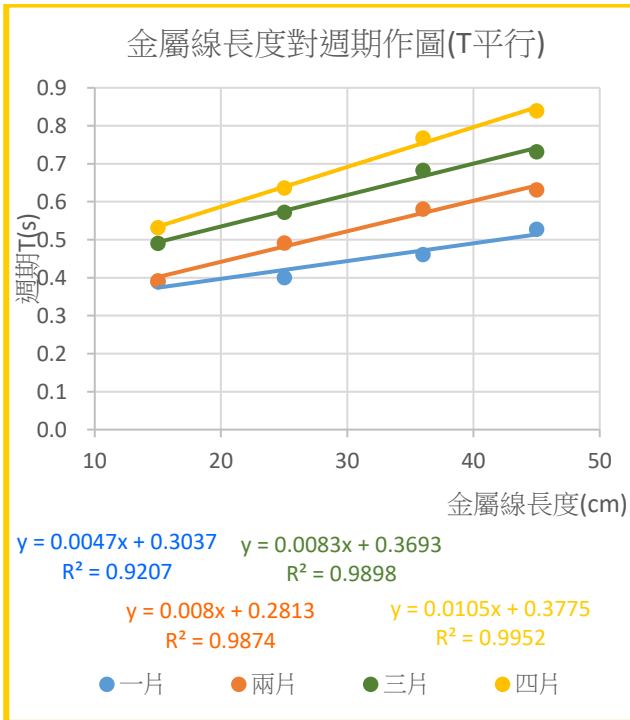
長度(cm) \ 金屬環片數	15	25	36	45
一片	0.392±0.001	0.485±0.000	0.582±0.001	0.644±0.001
兩片	0.504±0.001	0.614±0.001	0.724±0.001	0.815±0.002
三片	0.598±0.001	0.726±0.001	0.875±0.001	0.965±0.001
四片	0.662±0.001	0.812±0.001	1.001±0.001	1.077±0.001

表(五) 不同長度的鋼線的 $T_{//}$ 的平方

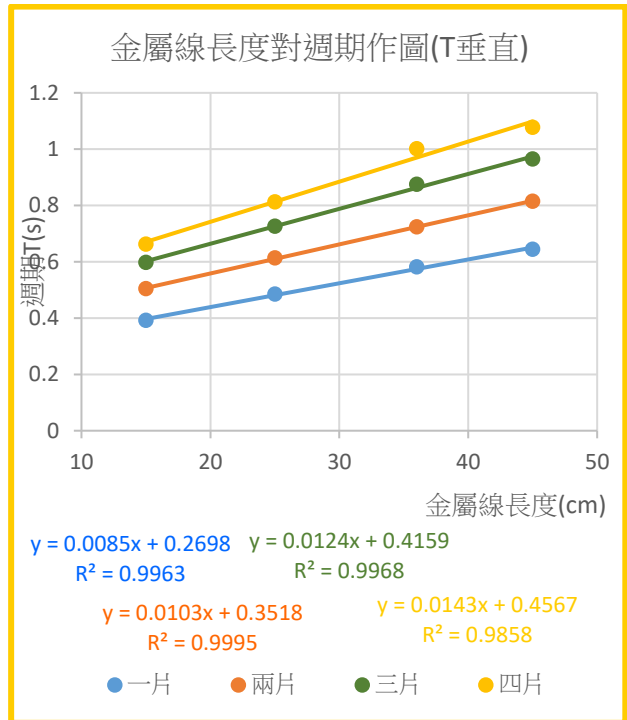
長度(cm) \ 金屬環片數	15	25	36	45
一片	0.152±0.000	0.161±0.001	0.212±0.001	0.278±0.001
兩片	0.154±0.001	0.242±0.001	0.338±0.001	0.400±0.002
三片	0.241±0.001	0.328±0.001	0.467±0.002	0.536±0.002
四片	0.283±0.001	0.406±0.001	0.590±0.001	0.705±0.002

表(六) 不同長度的鋼線的 T_{\perp} 的平方

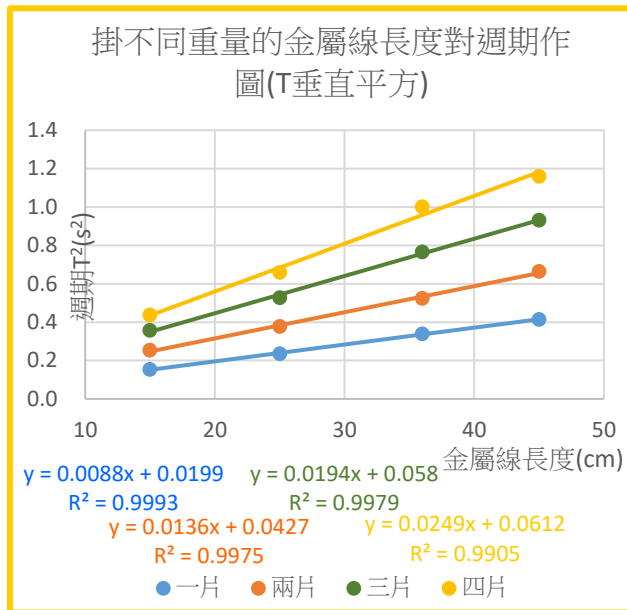
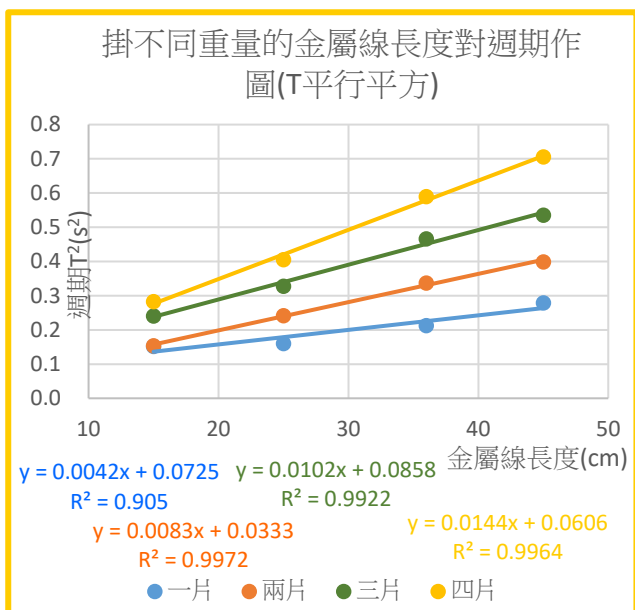
長度(cm) \ 金屬環片數	15	25	36	45
一片	0.154±0.001	0.235±0.000	0.338±0.001	0.414±0.001
兩片	0.254±0.001	0.377±0.001	0.549±0.001	0.665±0.003
三片	0.357±0.001	0.526±0.001	0.766±0.001	0.930±0.002
四片	0.438±0.001	0.659±0.002	1.002±0.002	1.160±0.003



圖(17) 金屬線長度對週期的作圖($T_{//}$)



圖(18) 金屬線長度對週期的作圖(T_{\perp})



圖(19) 金屬線長度對週期的作圖($T_{//}$ 的平方) 圖(20) 金屬線長度對週期的作圖(T_{\perp} 的平方)

(2) 結果分析：

1. 我們發現金屬線長度(L)對 T^2 之 R^2 比對 T 之 R^2 更為接近 1，表示 L 和 T^2 呈線性關係，與單擺的結果相似。因此接下來的討論皆以(L)對 T^2 的作圖進行探討。
2. 根據圖(19)和圖(20)顯示，不論重物掛多重，隨著長度增加， T^2 皆也隨之增加，但其截距不等於 0，也就是此線延伸不會通過原點，這與單擺情況不同。
3. 比較懸掛不同金屬環片數，我們發現，隨著掛的片數越多，也就是懸掛的重量越重時，其斜率越大，表示重物掛得越重，週期隨著長度增加幅度越明顯，且隨著掛的片數越多，截距也逐漸增加。
4. 三種金屬線的 T_{\perp} 週期皆大於 $T_{//}$ 週期，並隨著長度增加兩者之差距逐步拉大。
5. 在圖(19)及圖(20)中， R^2 皆為 0.99 以上，只有一片金屬環的 $T_{//}^2$ 的 R^2 值為 0.905。

4、實驗五：探討不同重物質量對扭擺週期之影響

(1) 實驗結果：

1. 我們分別測量 T 型角鐵與不同金屬環片數的總質量，如下表(七)。

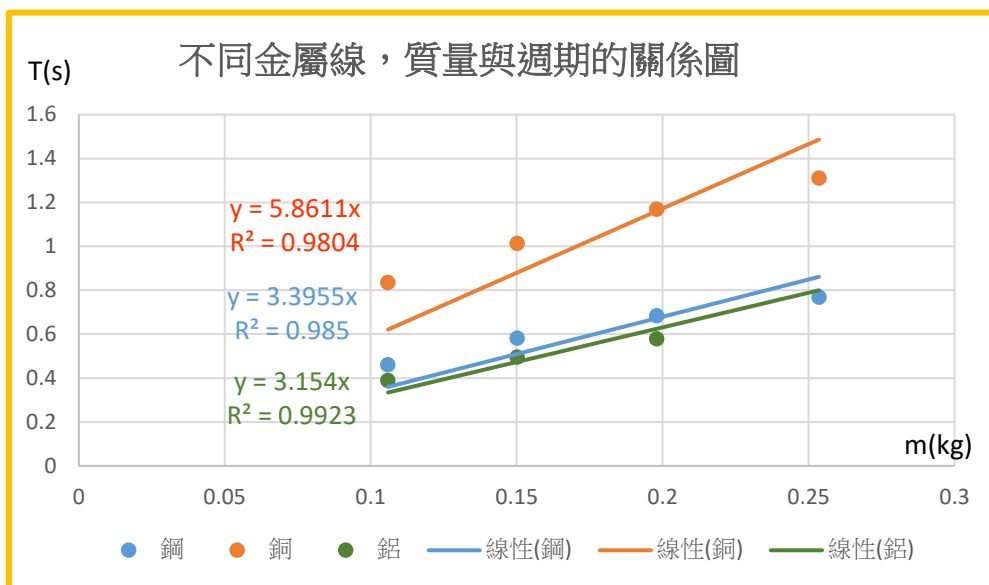
表(七) T 型角鐵與不同金屬環片數的總質量

項目編號	測質量的物品項目	質量(kg)
1	T 型角鐵+一片金屬環	0.10592
2	T 型角鐵+兩片金屬環	0.15016
3	T 型角鐵+三片金屬環	0.19796
4	T 型角鐵+四片金屬環	0.25354

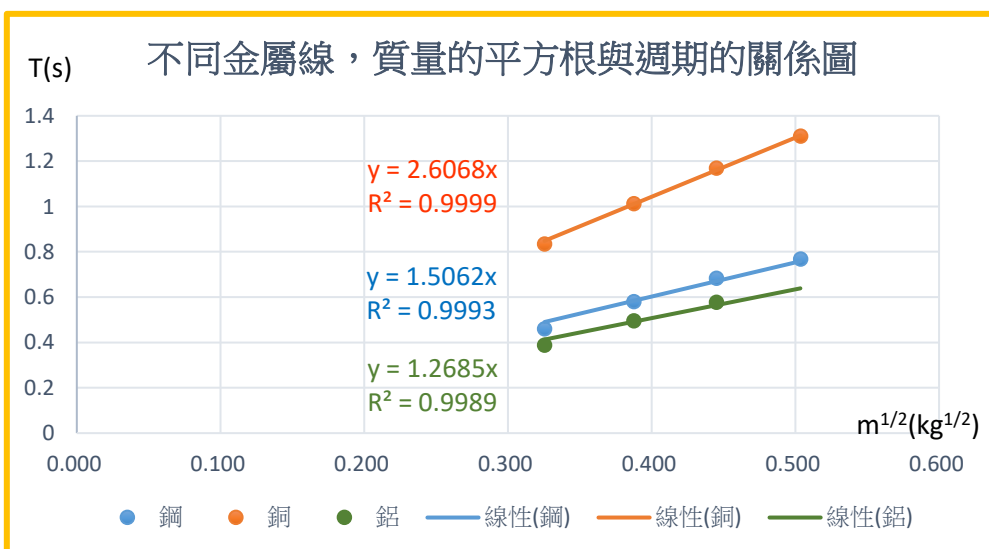
- 我們將三種金屬分別懸掛的不同重物質量後，所測得的週期結果如下表(八)。
- 將表(八)的質量對扭轉週期作圖，如圖(21)。
- 再將表(八)的質量平方根對扭轉週期作圖，如圖(22)。

表(八) 不同的金屬線分別懸掛不同質量下，所測得的週期

質量(kg)	0.10592	0.15016	0.19796	0.25354
質量的平方根	0.32545	0.38750	0.44493	0.50353
鋼	0.461±0.002	0.581±0.002	0.683±0.001	0.768±0.001
銅	0.835±0.001	1.013±0.004	1.169±0.001	1.311±0.000
鋁	0.389±0.030	0.496±0.057	0.578±0.020	鋁線斷裂



圖(21) 三種金屬線，懸掛重物質量對週期的作圖、線性函數及 R^2 值



圖(22) 三種金屬線，懸掛重物質量的平方根對週期作圖、線性函數及 R^2 值

(2) 結果分析：

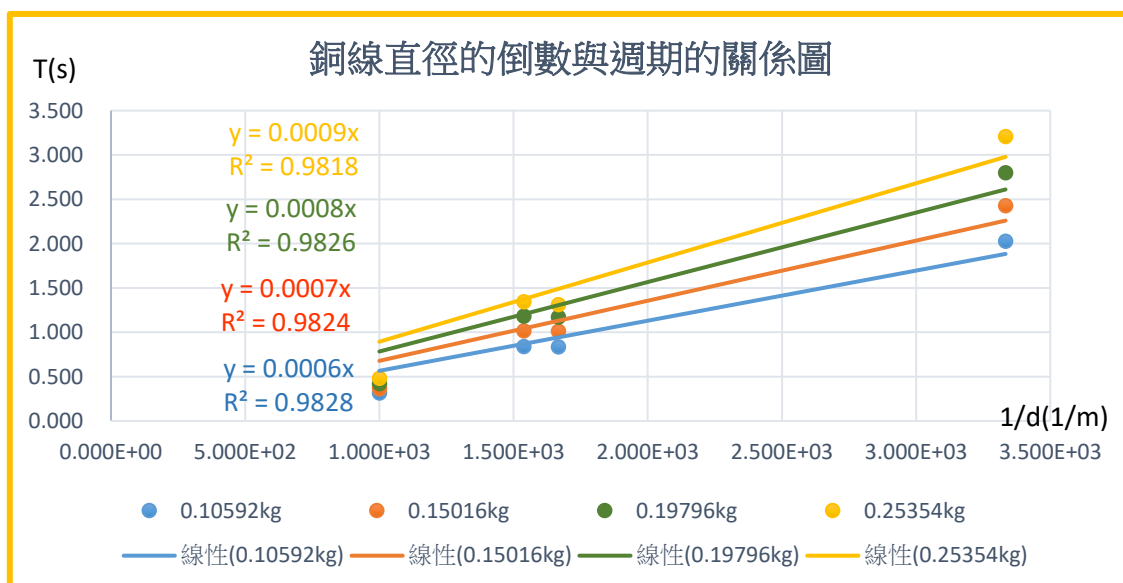
1. 隨著重量增加，週期皆增加，其中以銅最為明顯。
2. 比較圖(21)與圖(22)，我們發現圖(22)質量的平方根對週期作圖，其 R^2 值都較圖(21)高，且非常接近 1，因此我們認為週期與質量的平方根成正比。

5、實驗六：探討不同粗細的金屬線對扭擺週期之影響

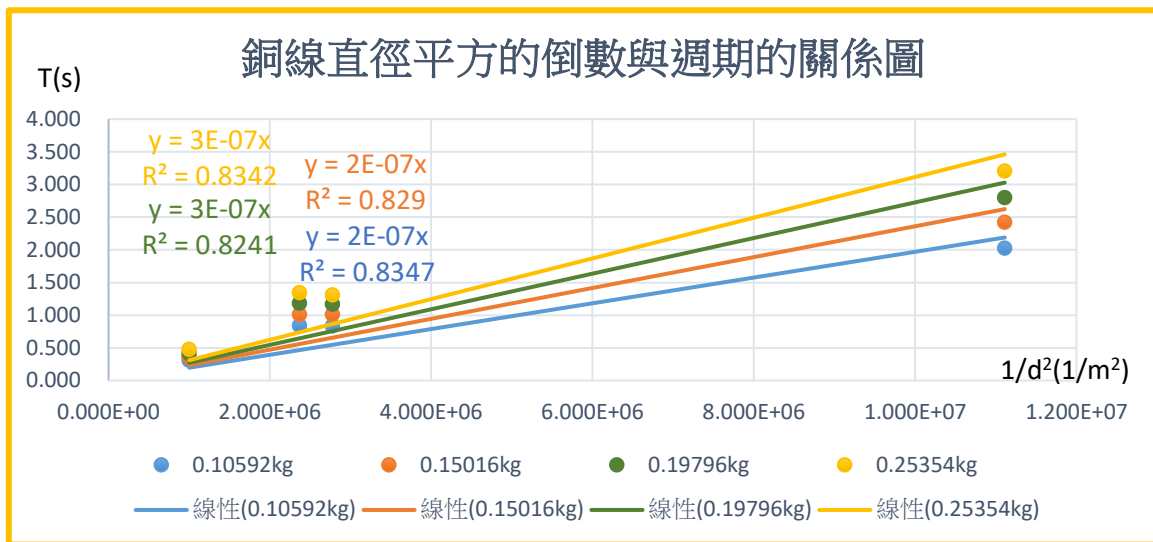
- (1) 實驗結果：記錄四種粗細的銅線在逆時鐘旋轉不同角度的週期，並算出銅線直徑的倒數及銅線直徑平方根的倒數，其數據如下表(九)。
- (2) 將銅線直徑的倒數對週期作圖，並求出線性函數及 R^2 值，如圖(23)。
- (3) 將銅線直徑平方的倒數對週期作圖，並求出線性函數及 R^2 值，如圖(24)。
- (4) 再將銅線直徑平方根的倒數對週期作圖，並求出線性函數及 R^2 值，如圖(25)。

表(九) 不同粗細的銅線對週期的影響

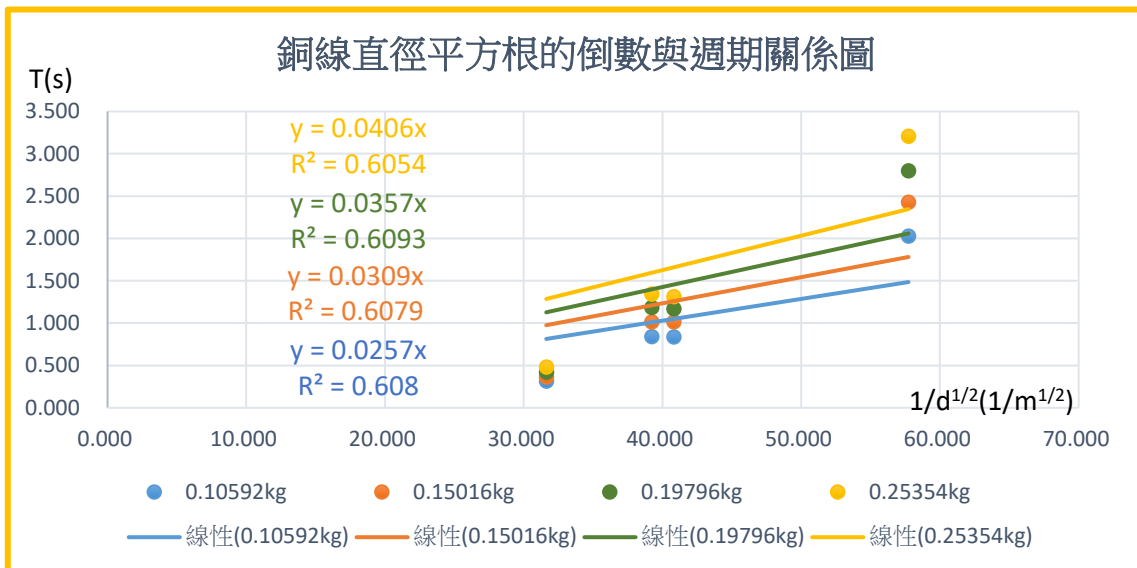
銅線直徑(m)	0.0003	0.0006	0.00065	0.001
銅線直徑的倒數	3.333E+03	1.667E+03	1.538E+03	1.000E+03
銅線直徑平方的倒數	1.111E+07	2.778E+06	2.367E+06	1.000E+06
銅線直徑平方根的倒數	57.735	40.825	39.223	31.623
重物質量(kg)				
0.10592	2.027±0.001	0.835±0.001	0.839±0.001	0.313±0.001
0.15016	2.426±0.001	1.013±0.001	1.014±0.001	0.362±0.001
0.19796	2.799±0.002	1.169±0.001	1.182±0.000	0.418±0.001
0.25354	3.205±0.000	1.311±0.000	1.344±0.001	0.479±0.001



圖(23) 銅線直徑的倒數對週期作圖、線性函數及 R^2 值



圖(24) 銅線直徑平方的倒數對週期作圖、線性函數及 R² 值



圖(25) 銅線直徑平方根的倒數對週期作圖、線性函數及 R² 值

(5) 結果分析：

1. 從表(九)可發現，粗細為 0.06cm 及 0.065cm 所測得的週期差異不大。
2. 從表(九)可發現，隨著銅線直徑增加，週期越來越小，因此我們取倒數作圖。
3. 比較圖(23)~圖(25)的 R² 值，我們發現圖(23)的 R² 值最接近 1，且 3 種金屬線的 R² 值皆為 0.98 以上，因此我們認為銅線直徑的倒數與週期成正比。

6、實驗七：扭性疲乏的探討

(1) 實驗結果：

1. 我們在測量鋼線時，發現鋼角度即使在 90 度，旋轉後都不會有偏差
2. 而我們在測量銅線時，某些時候會出現約 5 度以內的微小角度，但不具有連貫性與明顯趨勢性，所以銅線之偏差角度 θ 只放表不放圖，如表(十)。
3. 觀測到此現象後我們決定設計此實驗，所得結果如表(十一)，其中沒有第八天

的數據，因為當天為假日沒做到實驗。

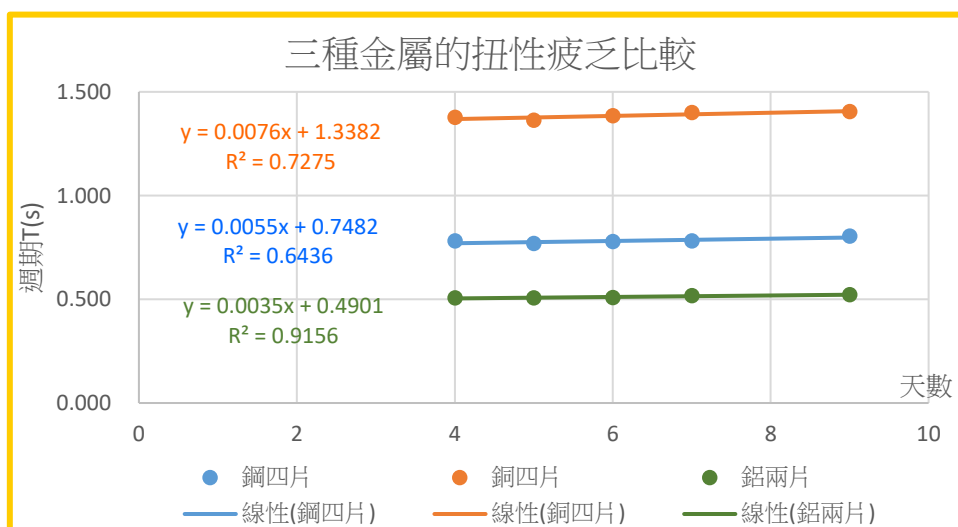
4. 在前面的實驗有提過鋁線在吊掛四片金屬環時曾斷裂，而這個實驗要先扭轉後固定數天，再吊掛金屬環，我們怕鋁線會無法負荷，所以只有做到兩片，鋼與銅則是做到我們的最大重量-四片。

表(十) 銅線和鋁線之偏差角度 θ

	金屬環片數	角度	第一次	第二次	第三次	平均
銅	三片	75	2	0	0	0.66
	三片	90	5	5	0	3.33
	四片	45	5	5	5	5
鋁	兩片	60	20	10	10	13.33
	兩片	75	25	15	15	18.33
	兩片	90	40	50	40	43.33
	三片	30	5	5	5	5
	三片	45	10	5	8	7.66
	三片	60	10	15	15	13.33
	三片	75	25	28	28	27
	三片	90	40	40	40	40

表(十一) 三種金屬的扭性疲乏

天數 線種+金屬環片數	4天	5天	6天	7天	9天
鋼四片	0.781±0.001	0.768±0.000	0.778±0.001	0.781±0.001	0.804±0.001
銅四片	1.377±0.001	1.363±0.001	1.385±0.001	1.400±0.001	1.405±0.000
鋁兩片	0.506±0.000	0.507±0.000	0.509±0.001	0.517±0.001	0.522±0.001



圖(26) 三種金屬的扭性疲乏

(2) 結果分析：

1. 依據圖(26)來看，鋼線的趨勢沒有明顯變化。
2. 從表(十)來看，可發現銅和鋁的偏差角度會隨著轉動角度增加而些微上升。
3. 從表(十)來看，懸掛 3 片金屬環，銅線旋轉角度超過 75 度，角度才開始出現偏差；將金屬環加到 4 片，在旋轉 45 度時就會出現偏差。而鋁線在懸掛 2 片時，旋轉到 60 度就出現偏差；在懸掛 3 片時，只需要旋轉 30 度即有偏差。
4. 從表(十一)來看，三種金屬線週期的趨勢都有增加，但幅度不大。

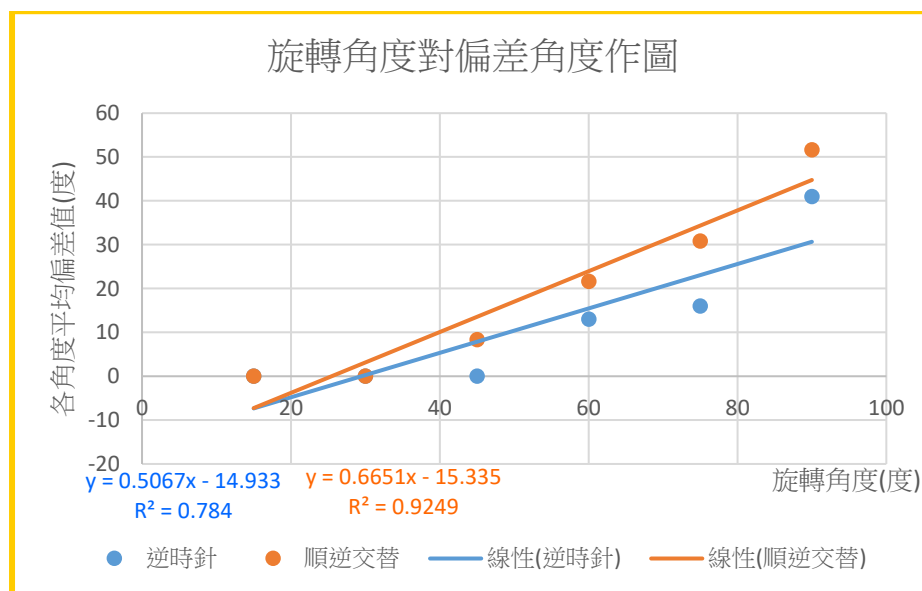
7、實驗八：探討金屬線同方向旋轉與交替方向旋轉對剛性係數之影響

(1) 實驗結果：

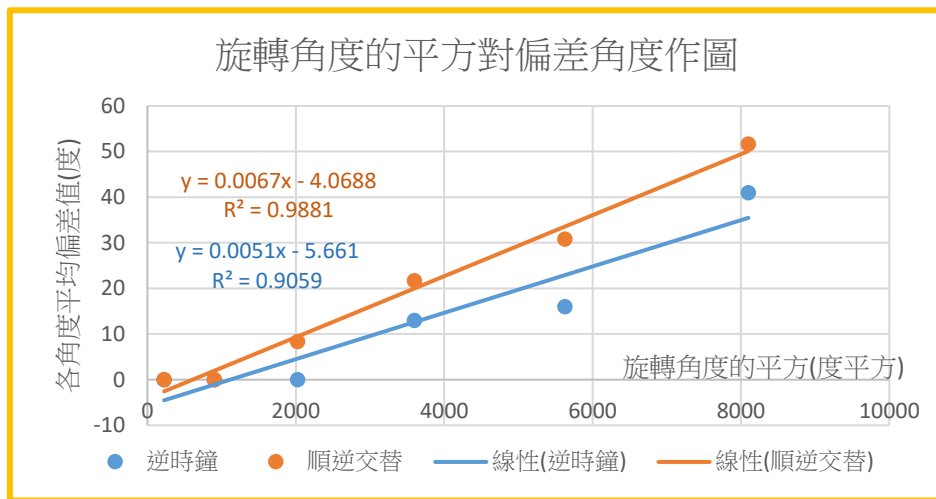
1. 我們將同方向與交替方向旋轉，在不同角度下的週期結果，紀錄在表(十二)。
2. 將表(十二)的旋轉角度對偏差角度作圖，如圖(27)。
3. 再將旋轉角度的平方對偏差角度作圖，如圖(28)。

表(十二) 鋁線平行兩片之偏差角度 θ

旋轉角度	15	30	45	60	75	90
逆時鐘	0	0	0	13	16	41
順逆交替	0	0	8.33	21.67	30.83	51.67



圖(27) 鋁線平行兩片 旋轉角度對偏差角度作圖



圖(28) 鋁線平行兩片 旋轉角度的平方對偏差角度作圖

(2) 結果分析：

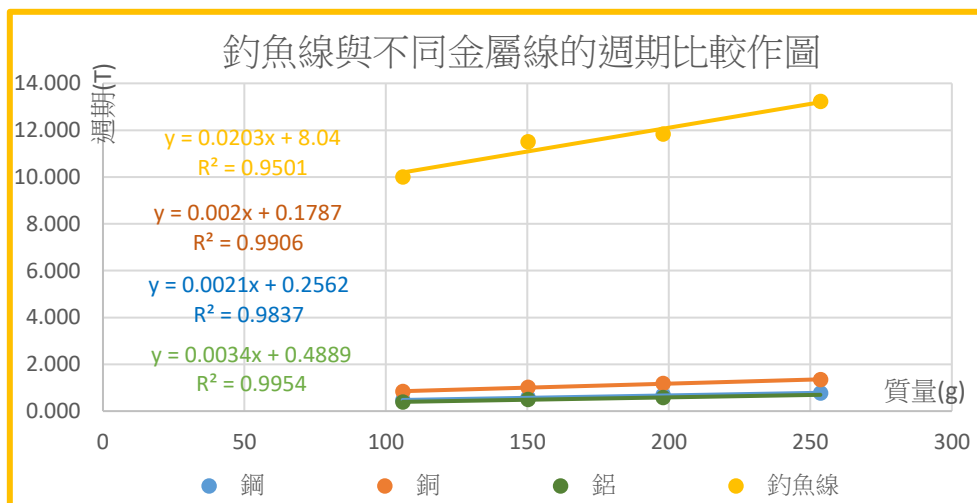
1. 不論順逆或逆時鐘，旋轉 30 度以內都沒有產生偏差角度。但旋轉角度超過 30 度後，順逆交替的偏差角度都較逆時鐘的大。
2. 從圖(27)發現逆時鐘旋轉的 R² 值較小，而點的連線看起來非線性，而圖(28)，的 R² 值都較圖(27)大，且都皆為 0.9 以上。

8、 實驗九：探討釣魚線在不同金屬環片數下的扭擺週期

(1) 實驗結果：

表(十三)釣魚線的週期變化

質量(g)	105.92	150.16	197.96	253.54
T	9.997±0.026	11.500±0.034	11.827±0.028	13.220±0.014



圖(29)釣魚線和不同材質金屬線的週期變化

(2) 結果分析：

1. 釣魚線的週期遠大於金屬線。
2. 釣魚線的斜率遠大於金屬線，隨著質量增加，向上的趨勢也較金屬線明顯。
3. 釣魚線的 R^2 值只有 0.95，比其他金屬來的小一些。

陸、討論

1、實驗二：探討不同材質的金屬線對扭擺週期之影響

(1) 三種金屬的扭擺週期大小為：銅>鋼>鋁。

根據實驗結果，週期的大小為銅>鋼>鋁，其中週期越大表示轉得越慢，表示恢復性比較差，就我們認為，剛性係數應該要比較小。但我們上網查鋼鐵、銅及鋁的剛性係數，如表(十四)，發現週期最大的銅，剛性係數不是最小的，反而是鋁最小，且我們實際使用三種金屬線，也覺得鋁線最軟，但鋁線的週期卻是最小的，這讓我們非常困惑。後來我們觀察到，金屬線的粗細不同，因此我們用游標尺測量金屬線的粗細，數據也放入表(十四)。

表(十四) 三種金屬的剛性係數及粗細大小

	T 週期(s)	剛性係數(dyne/cm ²)	金屬線粗細(cm)
鋼	0.581	$7.9 \times 10^{11} \sim 8.9 \times 10^{11}$	0.07
銅	1.012	$3.9 \times 10^{11} \sim 4.6 \times 10^{11}$	0.065
鋁	0.496	2.67×10^{11}	0.1

根據上表，我們發現，在粗細接近的情況下，鋼的剛性係數比銅大，表示比較硬，恢復性應該比較好，所以 T 應該較小，而實驗結果鋼的週期比銅小，所以符合。但是鋁摸起來明明比較軟，週期卻更小，我們推測可能因為金屬線比較粗，所以週期也下降許多。為了證明粗細真的會影響週期，所以我們決定再設計實驗六，探討金屬線粗細對扭擺週期的影響。

但由於我們發現粗細會影響週期是在實驗六才證實的，所以實驗三及實驗五的三種金屬線粗細依然如上表，因此下面實驗三及實驗五的探討，我們主要針對趨勢性討論，就不討論三種金屬線之間的大小關係。

這點與單擺不同，單擺的週期並不會因材質而改變。這時我們想到能不能用同為簡諧運動的彈簧來解釋，上網查了彈簧的週期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

其中恢復力常數 K 的公式：

$$K = \frac{Gd^4}{8NaD^3}$$

G 為鋼性模數， d 為彈簧金屬線的線徑，因此材質與線徑都會影響彈簧的週期。

- (2) 三種金屬的五次實驗標準差皆小於 0.01。

表示實驗過程穩定度高，誤差小。因此之後我們的實驗測量，在相同條件下重複三次求平均即可，以節省時間。

2、實驗三：探討三種金屬線的金屬環轉動不同角度對扭擺週期之影響

- (1) 不論哪種旋轉角度，週期大小仍為：銅>鋼>鋁。

這個結果表示扭轉角度對週期的影響仍有限，依然是材質影響較大。

- (2) 從圖(16)當中發現，所有種類的金屬線，隨著角度越大，週期皆些微上升，但斜率都很小，約為 0.0002~0.0003， R^2 值則皆為 0.9 以上。

斜率很小，表示扭擺角度對週期影響不大，這個跟單擺很像，單擺在小擺幅時週期沒有明顯變化。

不過這個實驗，我們在測角度時，遇到一個困難點則是：即使一開始我們的擺幅是控制在 90 度，但放手後測量來回 20 次的時間時，扭擺的擺幅便越來越小，所以也有可能是這個因素導致角度對週期的影響度下降。

- (3) 此外，我們這次實驗只做到 90 度，但我們就在想，如果角度一直加上去，也就是把金屬線一直扭下去，好像就變成彈簧了！

我們先來討論彈性物體在彈性限度內有一個重要的性質，那就是無論彎曲、扭轉、壓縮或伸長，力與形變的比值恆為常數。換句話說，也就是在彈性限度內，外力 F 和伸長量 Δx 會成正比，這就是虎克定律 (Hooke's law)：

$$F = k \cdot \Delta x$$

而只要是同一條彈簧， k 就固定， k 又稱為彈性係數，而彈性係數會隨著材質不同而不一樣。

當彈簧被拉長時，組成彈簧的金屬線是沒有變長的，於是我們就在思考：當彈簧被拉長時，那彈簧伸長量是什麼？是不是其實就是金屬線在扭轉？如果是的話，那伸長量的意義，是否就相當於扭轉的角度？而外力的大小就相當於扭轉的力矩？所以影響 k 值的大小是否會跟金屬的剛性係數有正相關呢？

因此我們想要模擬虎克定律，找到扭擺的扭轉係數，如下：

$$K = \frac{\text{扭轉力矩}}{\text{扭轉角度}}$$

若跟力矩有關，則金屬線繞圈圈做成彈簧的圈圈半徑，就會影響力矩的大小，表示也應該會影響彈力係數。在實驗二中提到的彈簧公式中， D 是彈簧的內外圈徑的平均值，其中 K 又與 D^3 成反比，因此圈徑的確會影響彈簧的週期。

但我們這次實驗並沒有測量扭轉力矩及扭轉角度的關係，這部分的討論內容，未來有機會可以再來做實驗探討。

3、實驗四：探討不同長度的金屬線對扭擺週期之影響

- (1) 根據圖(19)和圖(20)顯示，不論重物掛多重，隨著長度增加， T^2 皆也隨之增加，但其截距不等於0，也就是此線延伸不會通過原點，這與單擺情況不同。

單擺的週期為： $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (T 為週期、 l 為擺長、 g 為重力加速度)，也就是 $T^2 \propto l$ ，

根據我們的結果，雖然 T^2 和 l 大致符合線性函數，但線性函數皆未過原點，且 T_{\perp} 和 $T_{//}$ 的結果不同，且 T^2 和 l 作圖的斜率也不同，表示週期不會單純受擺長影響。我們也將結果與彈簧做比較，根據實驗二中的彈簧公式， Na (有效圈數，也就是線長)和 K (恢復力常數)成反比，而且 K 越小， T 越大，結果和扭擺相似。

- (2) 比較懸掛不同金屬環片數，我們發現，隨著掛的片數越多，也就是懸掛的重量越重時，其斜率越大，表示重物掛得越重，週期隨著長度增加幅度越明顯，且隨著掛的片數越多，截距也逐漸增加。

重物掛得越重，週期隨著長度增加的幅度越明顯，表示週期也會受質量影響。因此我們設計了實驗五，探討不同重物質量對扭擺週期之影響。

- (3) 三種金屬線的 T_{\perp} 週期皆大於 $T_{//}$ 週期，並隨著長度增加，兩者之差距逐步拉大。

這是我們覺得最神奇的部分，相同的質量，週期卻有明顯的差距。我們認為平行擺放時，金屬環在轉動的質量比起垂直，大多集中在中心，越往外側質量分布越少，如右圖(17)，所以擺動時恢復性比較好；而垂直擺放時，金屬環是平放的，越往外圍，質量越大，如圖(18)，恢復性較差。

- (4) 在圖(19)及圖(20)中， R^2 皆為0.99以上，只有一片金屬環的 $T_{//}^2$ 的 R^2 值為0.905。

我們認為，當平行擺放，金屬環在扭擺時，因前後有空氣阻力，再加上重量太輕，

所以轉動時較容易晃動，所以 R^2 值較小；而當垂直擺放時，金屬環是水平轉動，較穩定，所測得的數據也較穩定。

4、實驗五：探討不同重物質量對扭擺週期之影響

- (1) 隨著重量增加，週期皆增加，其中以銅最為明顯。因此我們加線性函數，發現 R^2 值皆為 0.98 以上，表示質量與週期有正相關。

在單擺實驗中，質量的大小是不會影響週期的。但在扭擺的實驗中，隨著質量越大週期也越大，並有線性關係。我們認為，質量越重，當往某一方向轉到最底時，其慣性越大，需要更多的扭轉恢復力把它轉回來，這個道理跟彈簧有點像，我們上網查了彈簧的週期與質量的關係如下：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

其中 T 是週期， k 是恢復力常數， m 是質量。所以 m 越大， T 也越大。

- (2) 根據上述彈簧公式，公式中週期和質量的平方根成正比。因此我們也決定將質量的平方根對扭擺週期作圖如圖(22)。比較圖(21)與圖(22)，我們發現圖(22)質量的平方根對週期作圖，其 R^2 值都較圖(21)高，且非常接近 1，因此我們認為週期與質量的平方根成正比。
- (3) 鋁掛上四片金屬環後便斷掉了。
- 鋁線斷掉讓我們有點傻眼，但也讓我們想到一個性質：是否金屬線都有拉扯力的極限值？但這部分可能跟材質比較有關。而扭久了之後，金屬線是否會有疲乏的現象？因此我們設計實驗七，扭性疲乏的探討。

5、實驗六：探討不同粗細的金屬線對扭擺週期之影響

- (1) 從表(九)可發現，粗細為 0.06cm 及 0.065cm 所測得的週期差異不大。

其實 0.065cm 粗的銅線，用游標尺測量起來其實也很靠近 0.06cm，只是靠近 0.065cm 多一些，所以這兩條線所測得的週期很接近。

- (2) 從表(九)可發現，隨著銅線直徑增加，週期越來越小，因此我們取倒數作圖(23)。
- 比較單擺實驗，線的材質與粗細皆不影響週期，但根據我們實驗二的討論中所提到的彈簧週期及恢復力常數 K 的公式分別如下：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad K = \frac{Gd^4}{8NaD^3}$$

其中 d 即為彈簧金屬線的線徑。將 K 帶入週期公式，我們發現彈簧週期會與線徑平方成反比。因此我們也將線徑平方的倒數對週期作圖如圖(24)，發現 R^2 值不升反降，所以我們再取線徑平方根的倒數對週期作圖如圖(25)。

- (3) 比較圖(23)~圖(25)的 R^2 值，我們發現圖(23)的 R^2 值最接近 1，且 3 種金屬線皆為 0.98 以上，因此我們認為銅線直徑的倒數與週期成正比。

6、實驗七：扭性疲乏的探討

- (1) 依據圖(26)來看，鋼線的趨勢沒有明顯變化。

鋼的剛性係數較高，恢復力也比較好，所以沒有明顯趨勢。

- (2) 從表(十)來看，可發現銅和鋁的偏差角度會隨著轉動角度增加而些微上升。

銅、鋁的剛性係數和剛相比相對較小，恢復力比較差，所以較容易受到外力影響而產生變形，無法回到原本 0 度的位置。

- (3) 從表(十)來看，懸掛 3 片金屬環，銅線旋轉角度超過 75 度，角度才開始出現偏差；將金屬環加到 4 片，在旋轉 45 度時就會出現偏差。而鋁線在懸掛 2 片時，旋轉到 60 度就出現偏差；在懸掛 3 片時，只需要旋轉 30 度即有偏差。

這代表質量也會影響偏差的角度，我們僅加了 1 片金屬環，開始偏差的角度就少了 30 度，影響的程度比扭轉角度還要更大。

- (4) 三種金屬線的趨勢都有增加，但幅度不大。

因為我們時間不夠，只做了 9 天，所以看不出明顯的趨勢變化。若想更深入探討，應把固定天數拉長至 20 天、1 個月甚至 1 年。

7、實驗八：探討金屬線同方向旋轉與交替方向旋轉對剛性係數之影響

- (1) 不論順逆或逆時鐘，旋轉 30 度以內都沒有產生偏差角度。但旋轉角度超過 30 度後，順逆交替的偏差角度都較逆時鐘的大。

表示鋁線需要能旋轉 30 度以上的力才會產生偏差，且順逆交替造成多次變形，這使數據與逆時鐘旋轉相比更加不穩定。

- (2) 從圖(27)發現逆時鐘旋轉的 R^2 值較小，而點的連線看起來非線性，而圖(28)，的 R^2 值都較圖(27)大，且都皆為 0.9 以上，

這表示旋轉角度的平方與偏差角度較有線性關係。

8、實驗九：探討釣魚線在不同金屬環片數下的扭擺週期

(1) 釣魚線的週期遠大於金屬線。

釣魚線與金屬線相比材質明顯較柔軟，剛性係數一定比金屬線小，造成扭擺週期大幅增加，與實驗二的結果相符。

(2) 釣魚線的斜率遠大於金屬線，隨著質量增加，向上的趨勢也較金屬線明顯。

如同(一)所說的，這表示剛性係數越小，越容易受到擺錘的質量影響

(3) 釣魚線的 R^2 值只有 0.95，比其他金屬來的小一些，我們認為金屬線較軟，導致扭擺時容易產生震動，因此相較之下數據沒有金屬線那麼穩定。

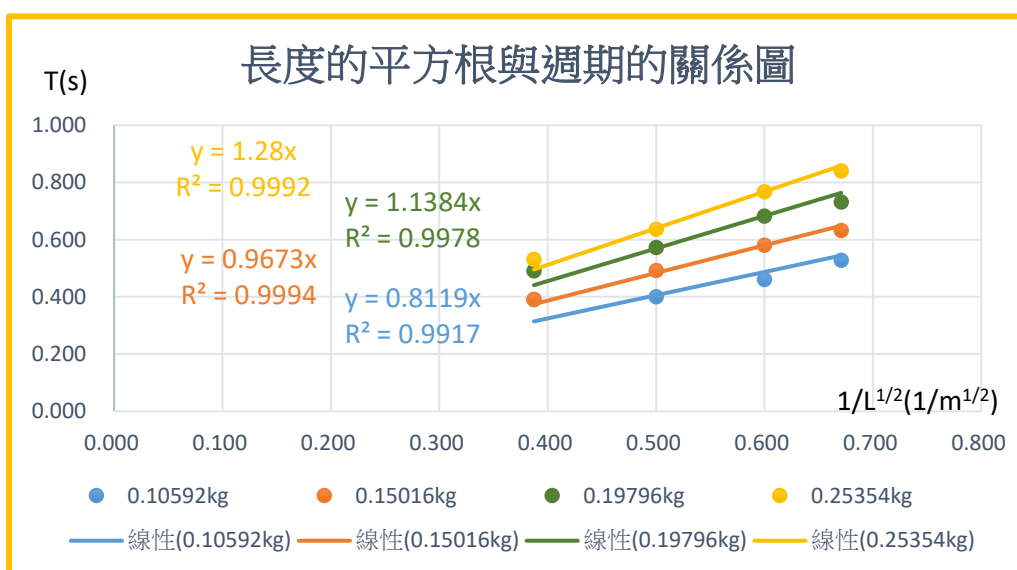
9、最後，根據以上實驗，我們想找出週期與各項因素之間的數學關係式。

(1) 由於我們各項實驗中，金屬環皆用平行擺放的方式，因此以下的討論皆以此條件找出關係式。

(2) 由於我們要找出週期 T 與各項變因的關係，因此我們改將實驗四的金屬線長度開根號，再與週期作圖，如下表(十五)及圖(30)。

表(十五)不同長度鋼線，懸掛不同物重下的扭轉週期

金屬線長度(m)	0.15	0.25	0.36	0.45
金屬線長度開根號	0.387	0.500	0.600	0.671
重物質量(kg)				
0.10592kg	0.390±0.001	0.401±0.001	0.461±0.002	0.528±0.001
0.15016kg	0.392±0.001	0.492±0.001	0.581±0.001	0.632±0.001
0.19796kg	0.491±0.001	0.573±0.001	0.683±0.001	0.732±0.001
0.25354kg	0.532±0.001	0.637±0.001	0.768±0.001	0.840±0.001



圖(30) 長度的平方根對週期作圖、線性函數及 R^2 值

由於 R^2 值非常接近 1，表示長度的平方根與週期成正比。

- (3) 根據實驗五，我們得到週期與質量的平方根成正比。
- (4) 根據實驗六，我們得到銅線直徑的倒數與週期成正比。
- (5) 綜合上述(2)~(4)，我們可得知，扭擺的週期與金屬材料（扭轉恢復常數 k ）長度 (l) 、質量 (m) 、線徑 (d) 的關係如下：

$$T = k \times \frac{\sqrt{l \times \sqrt{m}}}{d}, \text{ 則 } k = T \times \frac{d}{\sqrt{l \times \sqrt{m}}}, \text{ 即}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\text{鋼}} = T_{\text{鋼}} \times \frac{d}{\sqrt{l \times \sqrt{m}}} \quad \text{公式一} \\ k_{\text{銅}} = T_{\text{銅}} \times \frac{d}{\sqrt{l \times \sqrt{m}}} \quad \text{公式二} \end{array} \right.$$

- (6) 我們再將實驗四與五的數據，如表(十五)，代入公式一，找出 $k_{\text{鋼}}$ 的值如下。
- 再將實驗六的數據，如表(九)，帶入公式二，找出 $k_{\text{銅}}$ 的值如下。

$$k_{\text{鋼}} = 0.00180 \pm 0.00002 \text{ (S}/\sqrt{m \cdot kg})$$

$$k_{\text{銅}} = 0.00286 \pm 0.00007 \text{ (S}/\sqrt{m \cdot kg})$$

- (7) 為了驗證我們所得的扭轉恢復常數是否合理，我們將實驗(二)的數據帶入上述公式及常數，所得如下：

$$T_{\text{鋼}} = 0.00180 \times \frac{\sqrt{0.36 \times \sqrt{0.15016}}}{0.0007} = 0.5979$$

$$T_{\text{銅}} = 0.00286 \times \frac{\sqrt{0.36 \times \sqrt{0.15016}}}{0.00065} = 1.0230$$

此結果與實驗(二)的結果 $T_{\text{鋼}} = 0.5808$ ， $T_{\text{銅}} = 1.0122$ 比較，其誤差分別為 2.94% 及 1.07%，在誤差合理範圍。

- (8) 此外，我們想要找出扭轉恢復常數 k 與網路上所查到的材料的剛性係數之關係：

表(十六) 鋼和銅的剛性係數

金屬線材質	剛性係數最小值(G_{\min})	剛性係數最大值(G_{\max})
鋼	$7.9 \times 10^{11} \text{ (dyne/cm}^2\text{)}$	$8.9 \times 10^{11} \text{ (dyne/cm}^2\text{)}$
銅	$3.9 \times 10^{11} \text{ (dyne/cm}^2\text{)}$	$4.6 \times 10^{11} \text{ (dyne/cm}^2\text{)}$

$$\frac{k_{\text{鋼}}}{k_{\text{銅}}} = \frac{0.00180}{0.00286} \doteq 0.63, \quad \frac{1/\sqrt{G_{\text{鋼max}}}}{1/\sqrt{G_{\text{鋼min}}}} = \frac{1/\sqrt{8.9}}{1/\sqrt{3.9}} \doteq 0.66, \quad \frac{1/\sqrt{G_{\text{鋼min}}}}{1/\sqrt{G_{\text{鋼max}}}} = \frac{1/\sqrt{7.9}}{1/\sqrt{4.6}} \doteq 0.76$$

誤差介於 4.5%~17.1% 之間，所以我們認為 $k \propto \frac{1}{\sqrt{G}}$ 。

柒、結論

1、我們針對各種可能影響週期(T)的變因，將扭擺與單擺的結果進行對照，如下表(十七)：

表(十七) 單擺與扭擺的對照表

對照項目	單擺 (理論值)	是否相似	扭擺 (根據我們的實驗結果)	是否相似	彈簧 (理論值)	扭擺結果 說明
線的材質	無關	X	$T \propto \frac{1}{\sqrt{G}}$	V	$T \propto \frac{1}{\sqrt{G}}$	而釣魚線(非金屬)的剛性係數更小，所以 T 更大
線長	$T^2 \propto L$	V	$T \propto \sqrt{l}$	V	$T \propto \sqrt{N_a}$	
線的粗細	無關	X	$T \propto \frac{1}{d}$	X	$T \propto d^4$	線越粗，質量對 T 的影響就越小
重物質量	無關	X	$T \propto \sqrt{m}$	V	$T \propto \sqrt{m}$	重物質量越重， T 越容易受粗細影響
重物擺放方式	無關	X	$T_{\perp} > T_{//}$	X	無關	質量越集中在旋轉軸， T 越小
扭轉角度	擺角小於 10 度，不影響 T ；但擺角越大， T 會些微增加	V	擺角越大， T 會些微增加	X	無關	擺角影響度較小，主要還是線的材質影響最大

2、在扭性疲乏部分：

- (1) 金屬線的剛性係數越小，扭性疲乏越明顯，反之亦然。
- (2) 順逆交替旋轉造成多次變形，扭性疲乏程度會越明顯。

3、所得公式：

$$T = k \times \frac{\sqrt{l} \times \sqrt{m}}{d}, \text{ 且 } k \propto \frac{1}{\sqrt{G}}$$

T：扭擺週期(s)

k：扭擺恢復係數

l：金屬線長度(m)

m：重物質量(kg)

G：金屬線的剛性係數

捌、參考文獻資料

- 1、洪連輝(2020)·教育部審定國民中學自然科學三上課本·台南市：南一。
- 2、國家教育研究院(2002年12月)·剛性模數 modulus of rigidity·取自 <https://terms.naer.edu.tw/detail/1328825/>。
- 3、扭擺與剛性係數·取自 http://ezphysics.nchu.edu.tw/physiweb/up/html/TROSION_90.htm
- 4、壓縮彈簧·京志企業有限公司·取自 <http://www.icsp.com.tw/next05.htm>

【評語】 030105

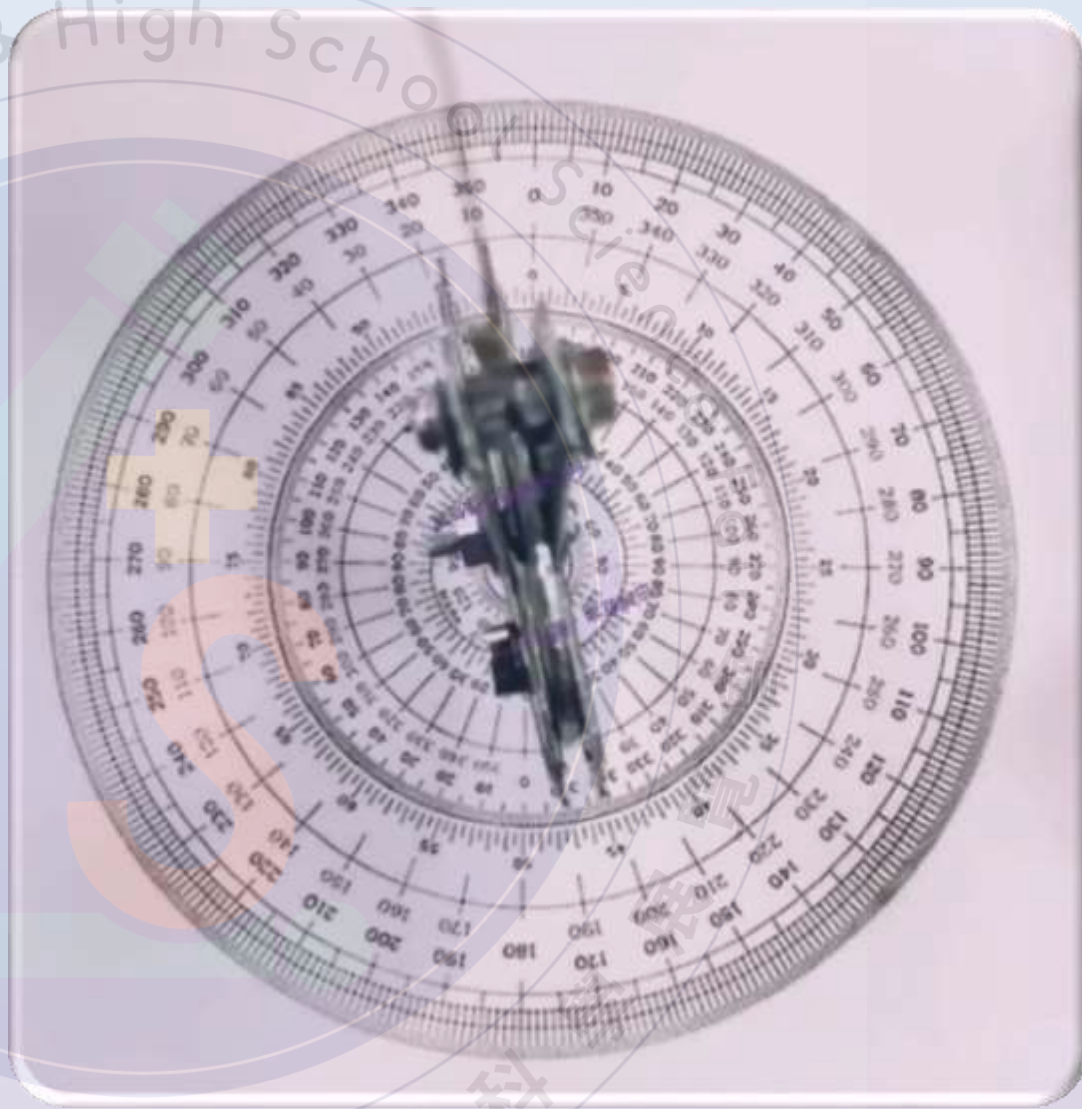
扭擺是一種常見的週期運動，本計畫中詳盡的研究了線徑、長度、質量等多種變數。並結合理論分析，完整地呈現了扭擺的特性，是一個相當完整的報告。

作品簡報

「扭」轉乾坤

「擺」挫不折

—探討扭擺的各種性質



摘要

裝置被金屬線所繫住，以此線為軸，固定上端，垂直吊掛。當物體被外力扭轉某一角度 θ 時，金屬線因恢復力產生來回扭擺的現象，且扭擺週期 T 受各種因素影響。經實驗後我們發現：

1. 金屬線的剛性係數越大， T 越小。
2. 扭轉角度 θ 越大， T 會些微增加。
3. T 與長度開根號成正比。
4. T 與質量開根號成正比。
5. T 與線徑粗細成反比。
6. 擺放方式-- $T_{\perp} > T_{//}$ 。
7. 所得公式 $T = k \times (\sqrt{l} \times \sqrt{m})/d$ ，且 $k \propto 1/\sqrt{G}$ 。

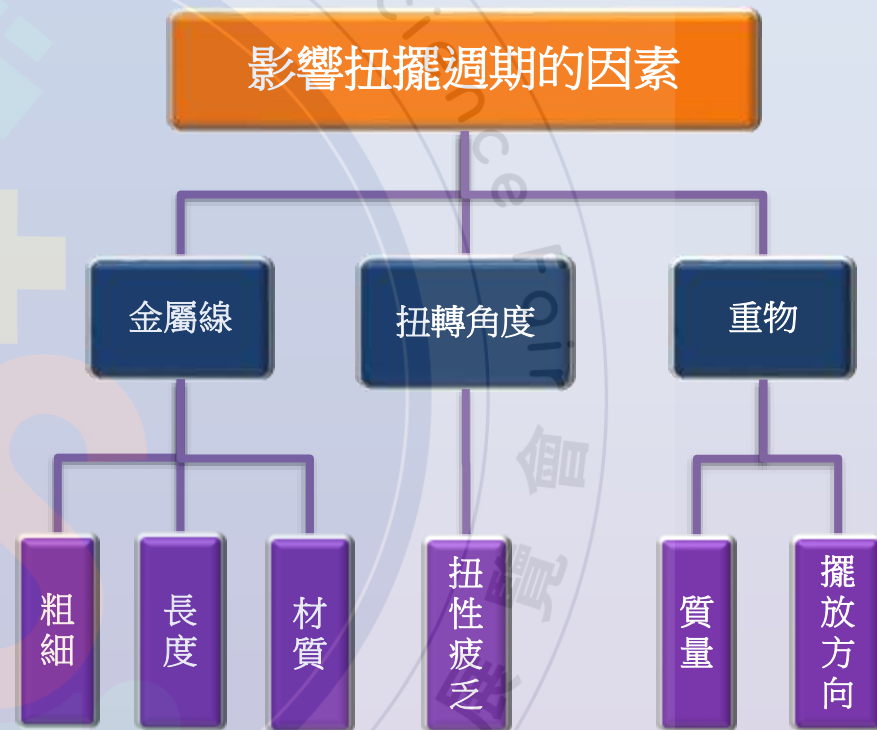
我們還發現有「扭性疲乏」一事，實驗後發現金屬線的剛性係數越小，則扭性疲乏越明顯，且當金屬線重覆受到不同方向之扭轉時，疲乏的現象會比同方向來得明顯。我們希望能找出「扭性疲乏臨界點」，但時間不夠，使我們未能得到一個確切的答案。

壹、動機

老師在上單擺課程時，我們發現整個裝置除了左右擺動外，同時也會以金屬線為軸心做旋轉。回家搜尋後我們找到一個叫扭擺的實驗，於是決定來探討各種因素對扭擺週期的影響。

貳、研究架構及目的

1. 設計扭擺裝置
2. 探討不同材質的金屬線對扭擺週期之影響
3. 探討三種金屬線的金屬環轉動不同角度對扭擺週期之影響
4. 探討不同長度的金屬線及金屬環不同擺放方式對扭擺週期之影響
5. 探討不同重物質量對扭擺週期之影響
6. 探討不同粗細的金屬線對扭擺週期之影響
7. 扭性疲乏的探討
8. 探討金屬線同方向旋轉與交替方向旋轉對週期之影響
9. 探討釣魚線在不同金屬環片數下的扭擺週期

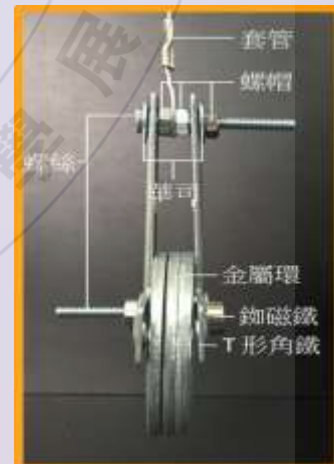


參、設計扭擺裝置

目的：由於器材過於昂貴且希望探討更多操縱變因，決定自行設計一款類似的裝置。

設計考慮重點：

1. 金屬線固定：管套
2. T型角鐵：固定且增加質量
3. 金屬環：增加質量，兩片以上使用強力膠固定
4. 磁鐵：固定金屬環
5. 螺絲：以對稱方向固定
6. 360度量角器：由上往下觀察角度



肆、實驗結果與討論

實驗二
書面p.11、21

不同種類金屬線

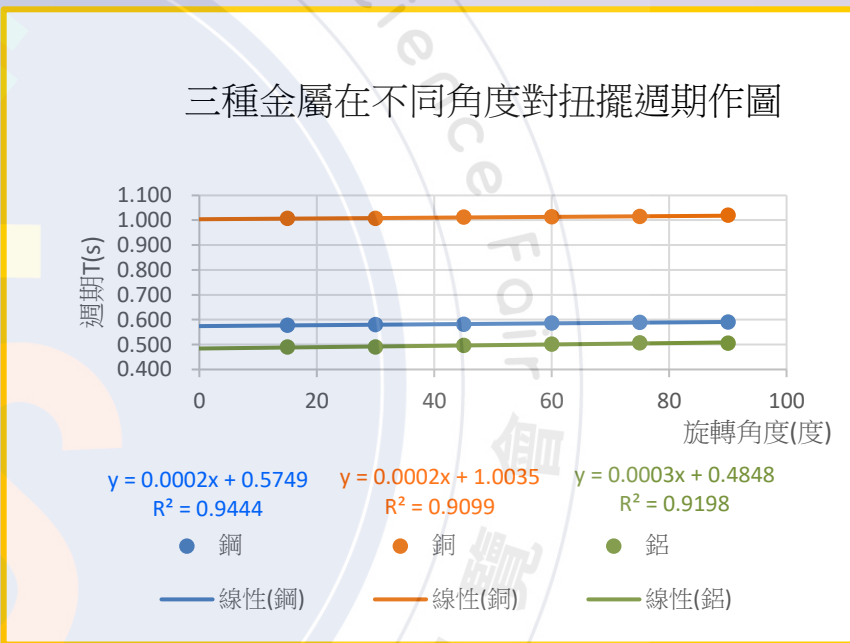
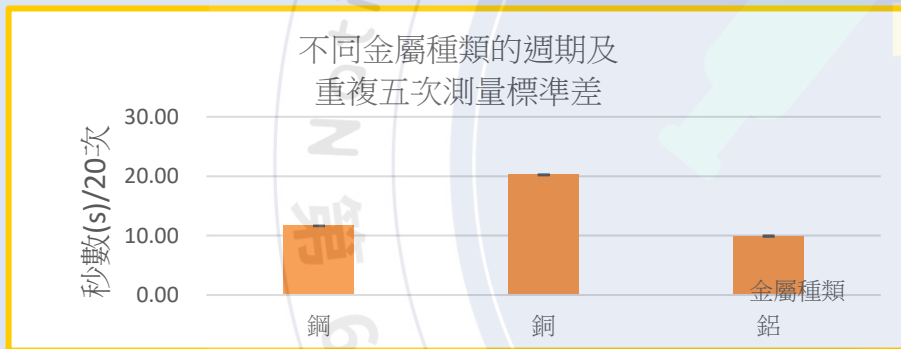
操縱變因：金屬線種類-鋼線、銅線、鋁線

	T週期(s)	剛性係數(dyne/cm ²)	粗細(cm)
鋼	0.581	7.9×10 ¹¹ ~ 8.9×10 ¹¹	0.07
銅	1.012	3.9×10 ¹¹ ~ 4.6×10 ¹¹	0.065
鋁	0.496	2.67×10 ¹¹	0.1

實驗三
書面p.11、22

不同扭轉角度

操縱變因：金屬線種類、轉動角度及方向
-逆時鐘 15、30、45、60、75、90 度角



討論

1. 根據實驗結果，週期的大小為**銅 > 鋼 > 鋁**，**剛性係數越大的線週期會越小**

2. 我們上網查了彈簧的週期：

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

其中恢復力常數k的公式：

$$K = Gd^4/8N_aD^3$$

G為鋼性模數，d為彈簧金屬線的線徑，因此**材質與線徑都會影響彈簧的週期**。

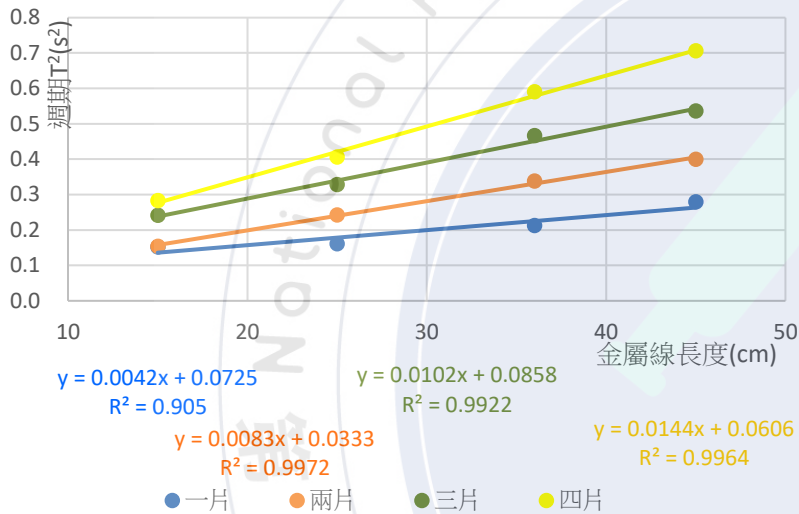
討論

1. 和單擺很像，角度對週期影響有限
2. 角度一直加上去就像彈簧被拉直
3. 若模擬虎克定律，則彈簧的圓圈半徑為力矩，此外公式中D為內外圈徑平均值，因此**圈徑的確會影響彈簧的週期**

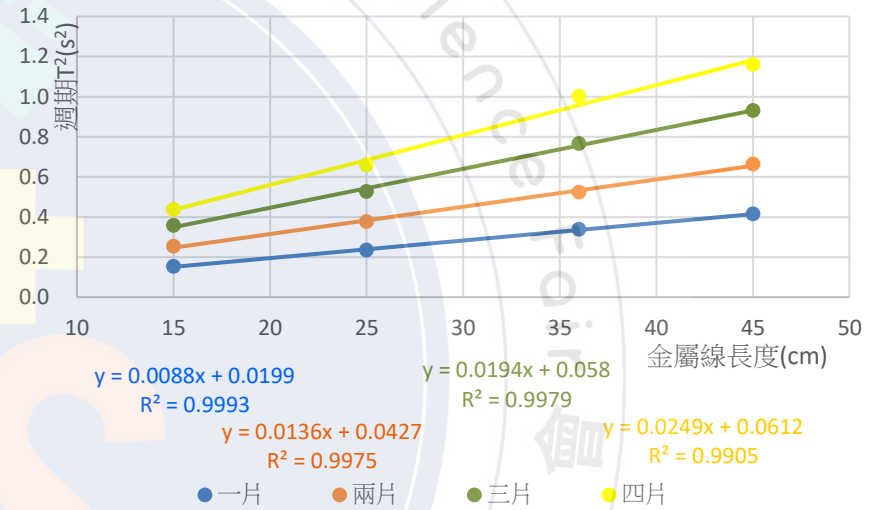
不同長度的金屬線及金屬環不同擺放方式

操縱變因：轉動角度及方向-逆時鐘 45 度、金屬環片數-一片、兩片、三片、四片-皆平行擺放

掛不同重量的金屬線長度對週期作圖(T平行平方)



掛不同重量的金屬線長度對週期作圖(T垂直平方)



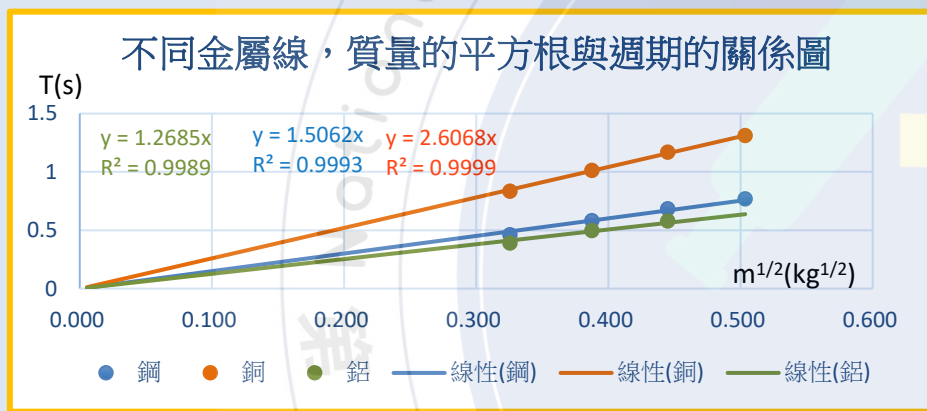
討論

1. 線性函數皆未過原點，與單擺不同，表示週期不會單純受擺長影響。
2. 將結果與彈簧比較，**Na(有效圈數)與 k 成反比**，與扭擺相似。
3. 重物掛得越重，週期隨著長度增加的幅度越明顯，表示週期也會受質量影響。因此我們設計了實驗五，探討不同重物質質量對扭擺週期之影響。
4. 我們認為平行擺放時，金屬環在轉動的**質量**比起垂直，大多**集中在中心**，越往外側質量分布越少，所以擺動時**恢復性比較好**；而垂直擺放時，金屬環是平放的，**越往外圍，質量越大，恢復性較差**，因此三種金屬線的 **T_{\perp} 週期皆大於 $T_{//}$ 週期**。

不同重物質量

操縱變因：不同重物-金屬環片數一片、兩片、三片、四片-皆平行擺放

項目編號	測質量的物品項目	質量(kg)
1	T型角鐵+一片金屬環	0.10592
2	T型角鐵+兩片金屬環	0.15016
3	T型角鐵+三片金屬環	0.19796
4	T型角鐵+四片金屬環	0.25354

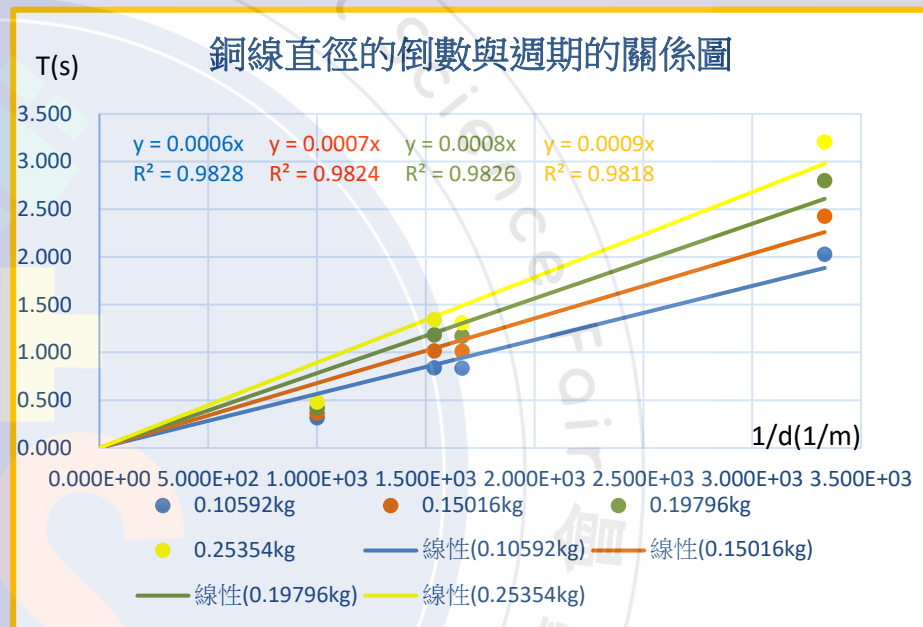


討論

1. 加線性函數後，發現 R^2 值皆為 0.98 以上，表示質量與週期有正相關，與單擺不同，與彈簧較為相似。
2. 彈簧公式中週期和質量的平方根成正比，於是我們將質量平方根與週期作圖，其 R^2 值都較高，因此我們認為**週期與質量的平方根成正比**。
3. 鋁線掛四片金屬環後斷掉，使我們思考金屬線是否有拉扯力的極限？因此我們設計實驗十，扭性疲乏的探討。

不同粗細的金屬線

操縱變因：直徑0.1、0.06、0.065、0.03cm的銅線



討論

1. 隨著銅線直徑增加，週期越來越小，因此我們**取倒數作圖**，這點與單擺不同。
2. 根據實驗二的討論中所提到的彈簧週期及恢復力常數 k 的公式我們發現**彈簧週期會與線徑平方成反比**。我們在書面報告中做了三張圖，分別是線徑的倒數、線徑平方的倒數和線徑平方根的倒數，而其中**線徑倒數的 R^2 最高**，因此我們認為**與週期成正比**。

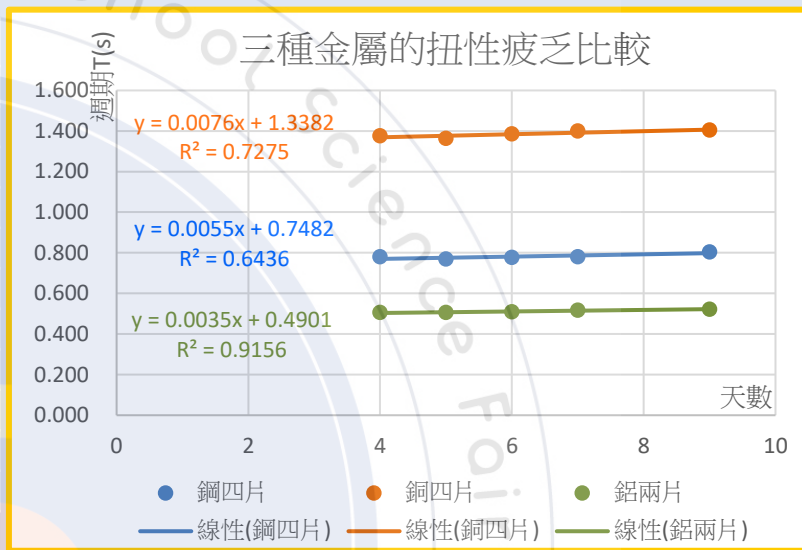
扭性疲乏

實驗七

書面p.17、25

操縱變因：金屬線種類

	金屬環片數	角度	第一次	第二次	第三次	平均
銅	三片	75	2	0	0	0.66
	三片	90	5	5	0	3.33
	四片	45	5	5	5	5
鋁	兩片	60	20	10	10	13.33
	兩片	75	25	15	15	18.33
	兩片	90	40	50	40	43.33
	三片	30	5	5	5	5
	三片	45	10	5	8	7.66
	三片	60	10	15	15	13.33
	三片	75	25	28	28	27
	三片	90	40	40	40	40



討論

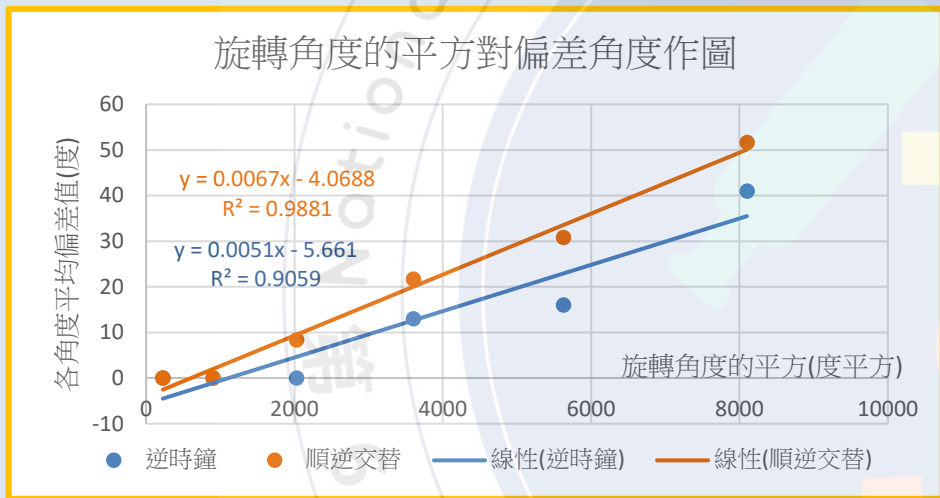
1. 銅、鋁的剛性係數和鋼相比相對較小，恢復力比較差，所以較容易受到外力影響而產生變形，無法回到原本0度的位置。
2. 三種金屬線的趨勢都有增加，但幅度不大。因為我們時間不夠，只做了9天，所以看不出明顯的趨勢變化。若想更深入探討，應把固定天數拉長至20天、1個月甚至1年。



金屬線同方向旋轉 與交替方向旋轉

操縱變因：同方向或交替方向旋轉

旋轉角度	15	30	45	60	75	90
逆時鐘	0	0	0	13	16	41
順逆交替	0	0	8.33	21.67	30.83	51.67

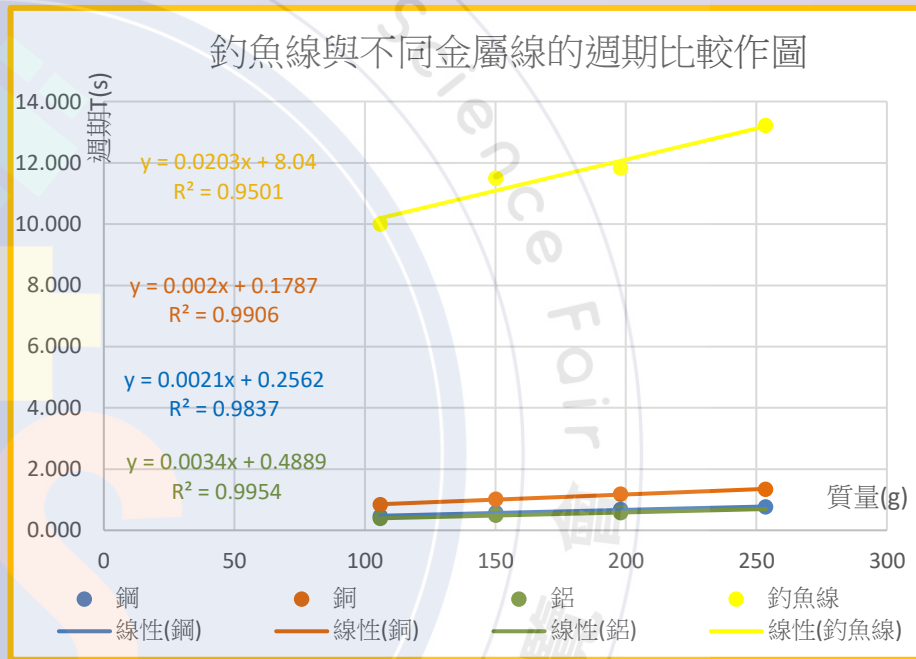


討論

1. 鋁線需要能旋轉 30 度以上的力才會產生偏差。
2. 旋轉角度一次方的圖 R^2 值較小，而點的連線看起來非線性，而旋轉角度的平方與偏差角度較有線性關係。

釣魚線掛不同質量

操縱變因：金屬環片數-一片、兩片、三片、四片-皆平行擺放



討論

1. 因為釣魚線較為柔軟，週期遠大於金屬線，與實驗二結果相符。
2. 釣魚線的斜率遠大於金屬線，表示剛性係數越小，越容易受到擺錘的質量影響。

週期與各項因素之間的數學關係式推導

1. 根據實驗四，我們得到長度的平方根與週期成正比。
2. 根據實驗五，我們得到質量的平方根與週期成正比。
3. 根據實驗六，我們得到銅線直徑的倒數與週期成正比。
4. 綜合上述(1)~(3)，我們可得知，扭擺的週期與金屬材料（扭轉恢復常數 k ）長度(l)、質量(m)、線徑(d)的關係如下：

$$T = k \times \frac{\sqrt{l} \times \sqrt{m}}{d}, \text{ 則 } k = T \times \frac{d}{\sqrt{l} \times \sqrt{m}}, \text{ 即}$$

$$k_{\text{鋼}} = T_{\text{鋼}} \times \frac{d}{\sqrt{l} \times \sqrt{m}} \quad \text{公式一}$$

$$k_{\text{銅}} = T_{\text{銅}} \times \frac{d}{\sqrt{l} \times \sqrt{m}} \quad \text{公式二}$$

5. 我們再將實驗四與五的數據，代入公式一，找出 $k_{\text{鋼}}$ 的值如下。
再將實驗六的數據，帶入公式二，找出 $k_{\text{銅}}$ 的值如下。

$$k_{\text{鋼}} = 0.00180 \pm 0.00002 \left(\frac{s\sqrt{m}}{\sqrt{kg}} \right)$$

$$k_{\text{銅}} = 0.00286 \pm 0.00007 \left(\frac{s\sqrt{m}}{\sqrt{kg}} \right)$$

週期與各項因素之間的數學關係式驗證

1. 為了驗證我們所得的扭轉恢復常數是否合理，我們將實驗(二)的數據帶入上述公式及常數，所得如下：

$$T_{\text{鋼}} = 0.00180 \times \frac{\sqrt{0.36} \times \sqrt{0.15016}}{0.0007} = 0.5979$$

$$T_{\text{銅}} = 0.00286 \times \frac{\sqrt{0.36} \times \sqrt{0.15016}}{0.00065} = 1.0230$$

此結果與實驗(二)的結果 $T_{\text{鋼}} = 0.5808$ ， $T_{\text{銅}} = 1.0122$ 比較，其誤差分別為 **2.94%** 及 **1.07%**，在 **誤差合理範圍**。

2. 此外，我們想要找出扭轉恢復常數 k 與網路上所查到的材料的剛性係數之關係：

金屬線材質	剛性係數最小值(G_{\min})	剛性係數最大值(G_{\max})
鋼	$7.9 \times 10^{11} (\text{dyne/cm}^2)$	$8.9 \times 10^{11} (\text{dyne/cm}^2)$
銅	$3.9 \times 10^{11} (\text{dyne/cm}^2)$	$4.6 \times 10^{11} (\text{dyne/cm}^2)$

$$\frac{k_{\text{鋼}}}{k_{\text{銅}}} = \frac{0.00180}{0.00286} \doteq 0.63, \quad \frac{1/\sqrt{G_{\text{鋼max}}}}{1/\sqrt{G_{\text{銅min}}}} = \frac{1/\sqrt{8.9}}{1/\sqrt{3.9}} \doteq 0.66, \quad \frac{1/\sqrt{G_{\text{鋼min}}}}{1/\sqrt{G_{\text{銅max}}}} = \frac{1/\sqrt{7.9}}{1/\sqrt{4.6}} \doteq 0.76$$

誤差介於 **4.5%~17.1%** 之間，所以我們認為 $k \propto \frac{1}{\sqrt{G}}$ 。

伍、結論

一、將扭擺與單擺及彈簧的理論值進行對照

對照項目	單擺 (理論值)	是否相似	扭擺 (根據我們的實驗結果)	是否相似	彈簧 (理論值)
線的材質	無關	X	剛性係數越大， T 越小	✓	$T^2 \propto \frac{1}{G}$
線長	$T^2 \propto L$	✓	$T \propto \sqrt{l}$	✓	$T^2 \propto N_a$
線的粗細	無關	X	$T \propto \frac{1}{d}$	✓	$T \propto \frac{1}{d^2}$
重物質量	無關	X	$T \propto \sqrt{m}$	✓	$T \propto \sqrt{m}$
重物擺放方式	無關	X	$T_{\perp} > T_{//}$	X	無關
扭轉角度	擺角 < 10 度 不影響	✓	擺角 < 10 度 不影響	X	無關

二、扭性疲乏

1. 金屬線的剛性係數越小，扭性疲乏越明顯。
2. 順逆交替旋轉造成扭性疲乏程度會越明顯。

三、週期與各影響變因的關係式。

$$T = k \times \frac{\sqrt{l} \times \sqrt{m}}{d}, \text{ 且 } k \propto \frac{1}{\sqrt{G}}$$

T ：扭擺週期(s)

k ：扭擺恢復係數

l ：金屬線長度(m)

m ：重物質量(kg)

G ：金屬線的剛性係數

陸、參考文獻資料

1. 洪連輝(2020)·教育部審定國民中學自然科學三上課本·台南市：南一。
2. 國家教育研究院(2002年12月)·剛性模數modulus of rigidity·取自 <https://terms.naer.edu.tw/detail/1328825/>。
3. 扭擺與剛性係數·取自 http://ezphysics.nchu.edu.tw/physiweb/up/html/TROSION_90.htm
4. 壓縮彈簧·京志企業有限公司·取自 <http://www.jcsp.com.tw/next05.htm>