中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080414

以降柱法破解任意柱數與盤數的河內塔

學校名稱：臺南市麻豆區麻豆國民小學

作者：	指導老師：
小五 陳彥程	謝沛原
小六 林威愷	劉怡青
小五 陳麒丰	
小五 郭玟言	
小五 黃鈺真	

關鍵詞：河內塔、降柱法、差距表

摘要

我們在**河內塔**研究是改變**柱數 M** 與**盤數 N** 的關係，討論**最小步數 Q 合理範圍**。其中，對於任意 N 盤，改變 M 柱會使 **Q** 在**最小值**$2 \times N - 1$到**最大值**$2^{N} - 1$範圍內變化。

透過研究分析將**最佳操作技巧**分為讓位法、換位法、原始降柱法與複合降柱法共 4 類。**讓位法：**$2 \times N - 1$與**換位法：**$2^{N} - 1$，而**降柱法**則透過**分盤降柱**概念，將題目簡化拆解，並反覆運用前 2 者概念完成**調節柱暫存**的**降柱**移動，配對出**最少步數 Q**。

將 N 盤如何切分進行降柱有最佳選擇，且**題數間差距**與**相同差距使用次數**也有規律，因此，可建立差距表並**累加差距使用重複次數**破解任意 **M 柱 N 盤**河內塔的**最少步數 Q**。

壹、 研究動機

河內塔是經典的研究題目，因此，過去有許多團隊嘗試將題目變形進行研究，如*多色盤數*、*多柱圍繞題型*以及*改變柱數 M*…等。較常見的是改變柱數 M 進行延伸研究，根據我們初步探索，**改變柱數 M 後，任何盤數 N 最少步數 Q 的解會落在一定的範圍內**，也就是他有**上下界的合理值**，這是我們第一個想提出的研究成果，**變化題之最少步數 Q 的合理範圍**。

我們還發現在 4 柱以上的解法，雖然其他研究成果可透過他們的一系列指引計算出最少步數解，但並未提出一般式，以及他們研究的成果也只適用指定柱數的條件下，當柱數與題數的關係改變時，最少步數的計算方式又必須跟著改變，沒有通則性的解題策略。

目前，我們發現，解題方式可歸納為**讓位法**、**換位法**、**原始降柱法**與**複合降柱法** 4 類。其中**降柱法**是我們主要克服的難題，**如何有效地透過分盤的技巧達到最佳化的降柱，並減少最少步數的解，是一大挑戰。**

因此，我們的研究除了想要提出**任意 M 柱 N 盤變化題**在**最少步數 Q** 合理範圍下上界，還要提出 M 柱 N 盤解法最少步數規律性成因，以及一般式的速算法，並且掌握如何分盤的技巧，讓所有人都能順利根據我們的研究，挑戰任意 M 柱 N 盤的河內塔並且以速算的方式算出最少步數 Q。

貳、 研究目的

一、 探討三柱河內塔遞迴解法合理性與公式推導

二、 探討「讓位法」與「換位法」以及最少步數 Q 值的合理範圍

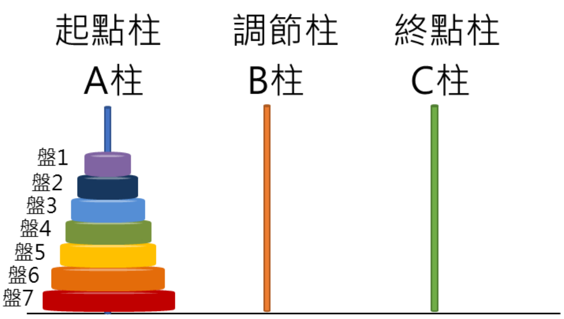
三、 探討「原始降柱法」的分盤技巧與最少步數解

四、 探討「複合降柱法」的分盤技巧與最少步數解

五、 探討「M 柱 N 盤河內塔最少步數解」的速算技巧

參、 名詞解釋

名詞	意義	解釋
河內塔	題目	目標：將所有盤從起點柱移動到終點柱 規則 1：任何柱上的盤都必須符合由下而上且盤數由大到小 規則 2：一次動一盤，當上方有盤時，必須先移開上方盤
Q	最少步數	以最有效率解法所找到的最少步數，為該題最佳步數解。M 柱與 N 盤的關係不同，會有不同的 Q 值。
M	柱數	題目有幾根柱子，討論範圍：M 為 3 以上的正整數
N	盤數	題目有幾個盤子，討論範圍：N 為正整數
最大盤	編號為最大數字的盤	1. 若題目為 N 盤的題型，那麼最大盤編號為 N。 2. 討論分盤後，該堆盤中，編號相對最大的盤。
其他盤	除了最大盤的其他盤	1. 若題目為 N 盤的類型，由 1 到$N-1$盤都稱其他盤。 2. 扣除分盤後的最大盤，剩餘可移動的盤，由 1 到$N-1$盤。



肆、 文獻探討

科展全國	名次	作品名稱	研究範疇
51 屆 國中數學	團隊 合作	N 柱河內塔的 捷徑建構 與通式的尋找	透過對稱性操作建立滿格數量關係表，再使用 G.S.P 軟體尋找 K 值從而建立$H_n(m)$公式，在 N 柱 M 環的通式中完成了 4 到 6 柱的討論，7 柱後未討論。
50 屆 國小數學	第二名	數學 101～ 河內塔變身	以歸納法完成 4 柱到 10 柱的探討，以區塊適用的概念將 N 柱與 M 盤的關係細分出數種公式，公式之間參數的改變並未說明遞增或遞減規則，以依序類推的形式表達。唯有 4 柱題型有完整的一般式。

歷屆科展在**盤數**與**柱數**的延伸規則研究中，成果有限且不完整；我們使用「**分盤降柱**」技巧討論**任意 N 盤 M 柱題型的最少步數**，而分盤降柱技巧運用了最少步數 Q「合理範圍」上界與下界的配對組合結果，因此，可以從這樣穩定的基礎進行後續的推論。

另一方面，我們發現能根據「**降柱法**」延伸概念建構「**2 的指數差距表**」，並適用任意 M 盤 N 柱河內塔最少步數解。因此，我們研究的目標要透過「**逆解**」與「**分盤降柱**」技巧的研究成果，建立「**差距表**」，運用差距累加計算任意 **M 柱 N 盤**的**最少步數 Q**，並根據「**差距表**」實際分盤降柱並成功挑戰河內塔的最少步數操作。

伍、 研究過程與結果

一、 探討三柱河內塔遞迴解法合理性與公式推導

(一) 從逆解方式探討每一步的合理性

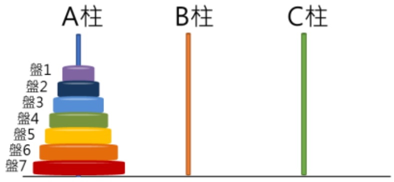
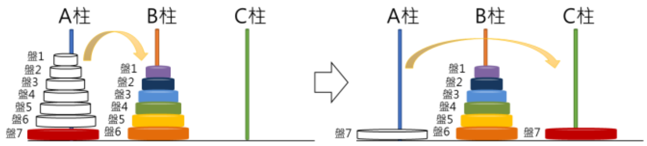
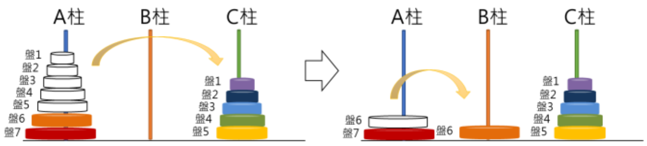
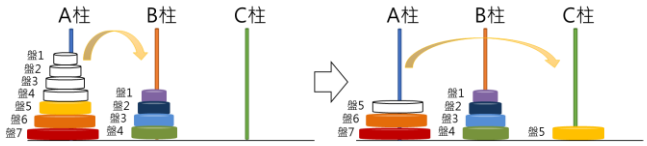
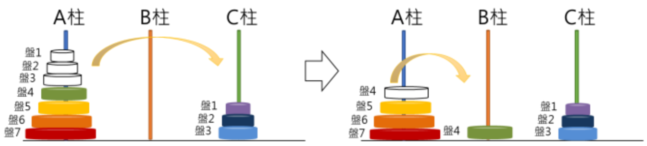
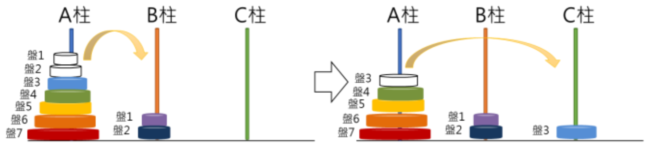
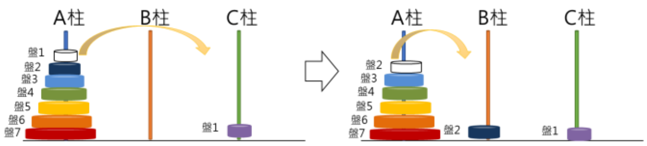
1. 定律 1：最大盤必須要一次到位

我們發現若要進行**最有效率的移動**，最佳結果是對於每一個盤只移動 1 次，在步數計算上，就只會紀錄最小的 1 步，那這個動作也只有直接從起點柱到終點柱才能達到，但由於題目**規則 2(**一次動一盤，當上方有盤時，必須先移開上方盤)的限制，會使得大部分的操作都無法滿足這個條件，唯一有機會 1 步到位的只有**最大盤**。

以 **3 柱 7 盤**為例，一開始的**盤 1** 要去 **B 柱**還是 **C 柱**會顯得沒有目標，無法有效地思考最佳化走法；**但若以逆解的角度，先從結果回推盤 7 的移動目標，問題會變得很清晰**：

最大盤要從 A 柱的底盤直接 1 步去 C 柱當底。

若要達成這樣的效果，此時的其他盤就必須在 **B 柱**。因此，我們可以使用一樣的邏輯，依序往前推理**盤 6**、**盤 5**、**盤 4**、**盤 3**、**盤 2** 與**盤 1** 的選擇。

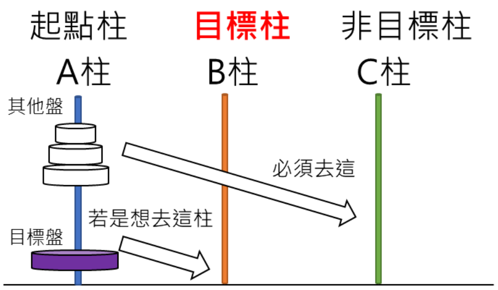
	原始題型，所有盤在 A 柱**起點柱**。 所有盤的移動都是由從 A 柱出發的。
 目標盤：盤**7**，此時盤**7**的目標柱為**C**柱	**盤 7** 必須 1 步到 C 柱，因此 1~6 其他盤先去 B 柱做調節，不要佔用空間
 目標盤：盤**6**，此時盤**6**的目標柱為**B**柱	**盤 6** 不可擋到盤 7 去 C 柱的位置，因此，盤 6 必須要 1 步到 B 柱，此時，1~5 其他盤先去 C 柱做調節，不要佔用空間
 目標盤：盤**5**，此時盤**5**的目標柱為**C**柱	**盤 5** 不可擋到盤 6 去 B 柱的位置，因此，盤 5 要 1 步到 C 柱，此時，1~4 其他盤先去 B 柱做調節，不要佔用空間
 目標盤：盤**4**，此時盤**4**的目標柱為**B**柱	**盤 4** 不可擋到盤 5 去 C 柱的位置，因此，盤 4 必須要 1 步到 B 柱，此時，1~3 其他盤先去 C 柱做調節，不要佔用空間
 目標盤：盤**3**，此時盤**3**的目標柱為**C**柱	**盤 3** 不可擋到盤 4 去 B 柱的位置，因此，盤 3 必須要 1 步到 C 柱，此時，1~2 其他盤先去 B 柱做調節，不要佔用空間
 目標盤：盤**3**，此時盤**3**的目標柱為**B**柱	**盤 2** 不可擋到盤 3 去 C 柱的位置，因此，盤 2 必須要 1 步到 B 柱，而**盤 1** 必須要 1 步到 C 柱

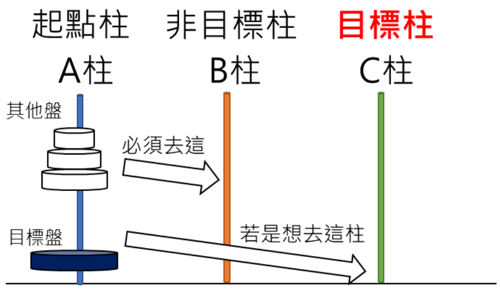
我們可以發現：**每一次要移動目標盤(此時的最大盤)時，其他盤(比目標盤小的那些盤)必須先避開與目標盤在同一柱，並且不能在目標柱**。另外，由於上面圖表關係是**逆向推理**的結果，因此，若我們從圖表下方往回看，就回到原始解題的正向技巧，可以知道每一次盤 N 第一次移動時要去的目標是哪裡。

2. **定律 2：其他盤必須與最大盤前進的柱位必須錯開**

從**逆解**的討論結果發現，**目標盤**與**其他盤**要前進的柱位都是錯開的。

- ◆ 若目標盤要 1 步去 **B 柱**(目標柱)，那**其他盤**必須先停留在 **C 柱**(非目標柱)
- ◆ 若目標盤要 1 步去 **C 柱**(目標柱)，那**其他盤**必須先停留在 **B 柱**(非目標柱)





(二) 奇數偶數題型第一步的合理位置

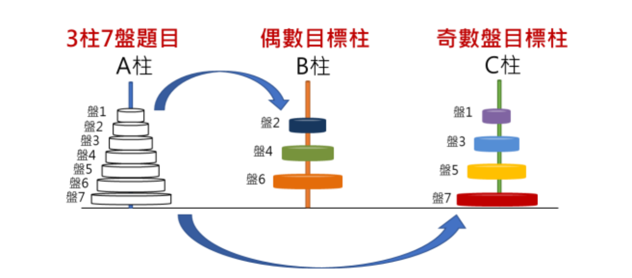
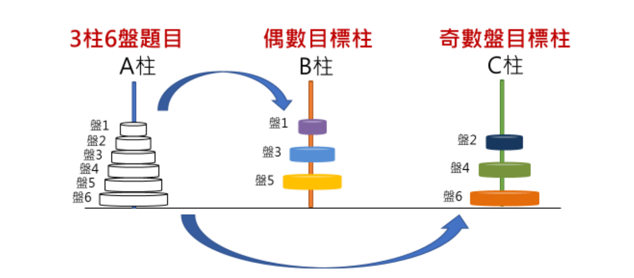
1. **定律 3：總盤數為奇或偶數時，目標盤第一次移動選擇不同**

以 **3 柱 7 盤(奇數)題型**逆解的討論結果，我們可以做一個統整：

- ◆ 目標盤為**奇數**時，第一次移動時(從 A 柱離開)，**目標柱**都是 C 柱
- ◆ 目標盤為**偶數**時，第一次移動時(從 A 柱離開)，**目標柱**都是 B 柱

但當 **3 柱 6 盤(偶數)題型**時，統整的結果正好顛倒：

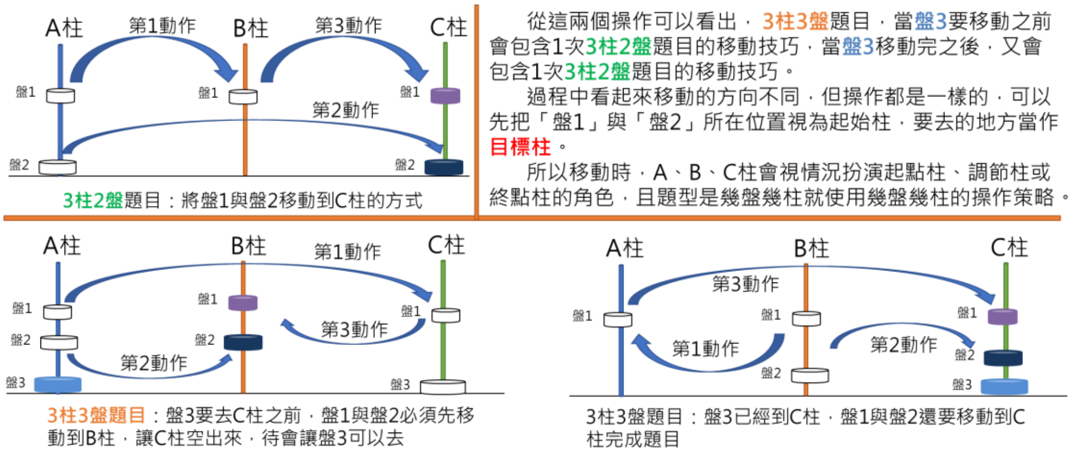
- ■ 目標盤為**奇數**時，第一次移動時(從 A 柱離開)，**目標柱**都是 B 柱
- ■ 目標盤為**偶數**時，第一次移動時(從 A 柱離開)，**目標柱**都是 C 柱

	
3 柱 N 盤，總盤數 N 為奇數時	**3 柱 N 盤，總盤數 N 為偶數時**
所有**奇數盤**第一次移動的目標：C 柱(終點)	所有**奇數盤**第一次移動的目標：B 柱(暫存)
所有**偶數盤**第一次移動的目標：B 柱(暫存)	所有**偶數盤**第一次移動的目標：C 柱(終點)

從「**從逆解方式探討每一步合理性**」角度來看，無論**總盤數 N** 為「奇數」或「偶數」，一定要符合「**最大盤必須要一次到位**」，移動 1 步就到達 C 柱，再搭配「**其他盤必須與最大盤前進的柱位必須錯開**」的結果。由後往前推理，2 個為一循環，因此總盤數是奇數或偶數會影響最後的落點，逐步往回推理，找到「**盤 1**」的選擇。

2. **定律 4：使用較低盤數題型的成功策略作為移動基礎：遞迴**

從上述的研究，我們已經知道對於任何盤數堆疊在任何一根柱子上，換位置時，一定要符合**定律 1：最大盤一次到位**，此時**其他盤**要先去**非目標柱暫存**，且所有盤數題目都必須符合這要求，因此，我們解決 N 盤的題目時，便可採用$N-1$盤的最佳換位方式，解決子題目$N-1$題時，又可採用$N-2$的最佳策略，依此類推，一直到$N=1$，這在數學上稱為**遞迴**。



進一步分析，要解開任意盤數 N 時，可以將最大盤 N 移動 A→C 那 1 步當作**分水嶺**，在此之前，必須包含$N-1$盤從 **A→B** 最佳換位步數，以及$N-1$盤從 **B→C** 最佳換位步數，$N-1$盤在這 2 次移動的**起始柱**與**目標柱**不同，但操作步數一致。因此，最大盤移動 1 步，再加上$N-1$盤最少步數會計算 2 次，依此形式循環，找到的步數就是最少步數 Q。

盤數	盤 N 的移動步驟	移動步數統計
1 盤	盤 1，A→C：**1** 步；	$1+0\times 2=1$
2 盤	盤 2，A→C：**1** 步 ＋ 其他盤 A→B 再 B→C：$1\times 2=\mathbf{2}$步	$1+1\times 2=3$
3 盤	盤 3，A→C：**1** 步 ＋ 其他盤 A→B 再 B→C：$3\times 2=\mathbf{6}$步	$1+3\times 2=7$
4 盤	盤 4，A→C：**1** 步 ＋ 其他盤 A→B 再 B→C：$7\times 2=\mathbf{14}$步	$1+7\times 2=15$
5 盤	盤 5，A→C：**1** 步 ＋ 其他盤 A→B 再 B→C：$15\times 2=\mathbf{30}$步	$1+15\times 2=31$
6 盤	盤 6，A→C：**1** 步 ＋ 其他盤 A→B 再 B→C：$31\times 2=\mathbf{62}$步	$1+31\times 2=63$
7 盤	盤 7，A→C：**1** 步 ＋ 其他盤 A→B 再 B→C：$63\times 2=\mathbf{126}$步	$1+63\times 2=127$

解 N 盤時，操作方式為包含 2 次$N-1$盤的移動方式，必須先設 A→B，之後再 B→C，再加上最大盤 N 從 A→C 一次到位計算 1 步；解$N-1$盤時，又必須包含 2 次$N-2$盤移動，再加上最大盤$N-1$盤一次到位，依此類推循環使用。因此，對於不同階段的$N-i$盤移動，他們會反覆的被使用到，分別是 2 次，再 2 次，再 2 次，所以步數計算 **2 的次方**有關。

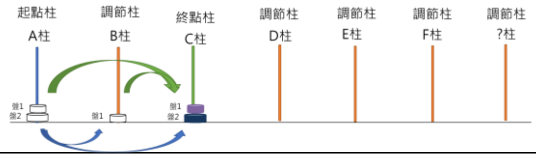
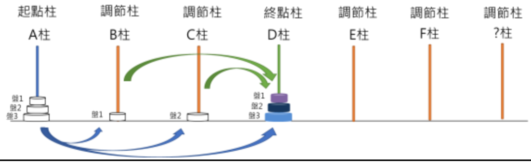
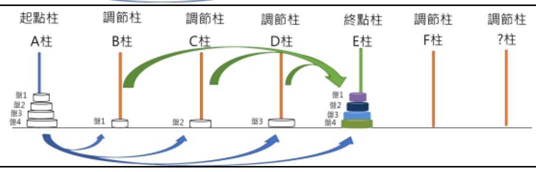
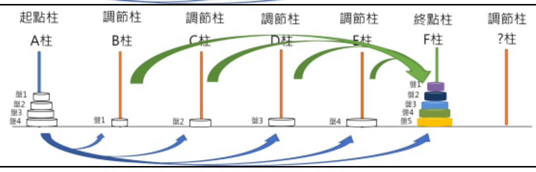
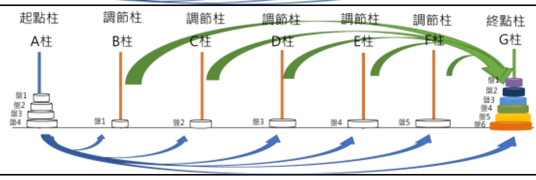
我們再從 1~7 盤的最佳步數結果來看，正好可以運用 2 的指數概念解開最少步數解 Q，整理一下，*3 柱 N 盤最少步數解法可以使用2^N-1表達*。

二、　探討「讓位法」與「換位法」以及最少步數 Q 值的合理範圍

(一) 讓位法的操作概念

1.　適用範圍討論

核心關鍵：位置足夠，從以下題型討論，發現「讓位法」適用範圍為$\mathbf{M \geq N+1}$。

盤數 N=2		柱數 M 只要 3 柱就夠了。 $2\times 2-1=3$
盤數 N=3		柱數 M 只要 4 柱就夠了。 $2\times 3-1=5$
盤數 N=4		柱數 M 只要 5 柱就夠了。 $2\times 4-1=7$
盤數 N=5		柱數 M 只要 6 柱就夠了。 $2\times 5-1=9$
盤數 N=6		柱數 M 只要 7 柱就夠了。 $2\times 6-1=11$

2.　操作原理

每 1 盤都能自由佔據任何 1 柱，唯獨「**終點柱**」要讓出來給**最大盤** 1 次移動到位，稱「讓位法」。先想像所有盤先移動到**調節柱**，再移動到**終點柱**，所以盤數$N\times 2$，但**最大盤**其實 1 次就到位了，所以必須**扣除**$(\mathbf{-1})$，就可以得到讓位法最少步數公式為$\boldsymbol{2\times N-1}$。

因此，當M柱$\geq$ N盤$+1$，此時可用「讓位法」，使用$\boldsymbol{2\times N-1}$算出最少步數 Q。

3.　讓位法是最少步數 Q 的最小值

若所有盤數都能 1 步到達終點，那 N 盤就是 N 步完成。但由於**規則 2：一次動一盤，當上方有盤時，必須先移開上方盤**，所以除了**最大盤**有機會 1 步到位之外，其他疊在最大盤上的**其他盤**都至少需要經歷 1 步先到**暫存柱**，等待最大盤 1 步到位之後，再花費 1 步移動到**終點柱**，所以，其他盤被計算到 2 步是最簡的解法，最大盤 1 步也是最簡的解法。因此，可歸納出「讓位法」是任意 M 柱 N 盤河內塔最少步數 Q 的最小值。

(二) 換位法的操作概念

1. 適用範圍討論

核心關鍵：位置不足夠，河內塔的挑戰在**起點柱**與**終點柱**之外，還必須至少要有一柱作為**調節柱**；此時，當任何一盤從**起點柱**離開時，將有**終點柱**以外的選擇，有了路徑的選擇才有討論的意義，因此河內塔至少要 **3** 柱以上才具討論價值。

2. 操作原理

以 **3 柱 2 盤**(盤 1 為小盤，盤 2 為大盤)來說，操作將可分為以下 3 個步驟：

(1) 將起點柱 A 的小盤移動到調節柱 B

(2) 將起點柱 A 的大盤移動到終點柱 C

(3) 將調節柱 B 的小盤移動到終點柱 C

3 柱 2 盤需要 3 步，若提升為 **3 柱 3 盤**，將**新增 1 個最大盤(盤 3)**，視為大盤，因為已經知道 3 柱 2 盤移動到另一個柱子的步驟了，所以將前一題型(盤 1 與盤 2)視為小盤，做為群組移動，因此整體而言，操作方式就能重複上述的 3 個步驟。

(1) 將起點柱 A 的**小盤(上方 2 個其他盤)**移動到調節柱 B

(2) 將起點柱 A 的**大盤(下方 1 個最大盤)**移動到終點柱 C

(3) 將調節柱 B 的**小盤(上方 2 個其他盤)**移動到終點柱 C

只是在步驟(1)與(3)要移動小盤時，是以 2 個其他盤打包移動的概念完成，因此，詳細操作可參考前一題型的實際操作方式，依此堆疊出來的題型可以回歸到最簡的題型來化簡，將問題規模逐步縮小的過程，就稱作**遞迴**。而起點柱上的每一盤要移動時，其他盤就必須重新換位一次，且每一次都將頻繁地反覆這個動作，所以我們稱為「換位法」。

因此，當M柱 = 3 時，此時為「換位法」，可使用$2^N - 1$算出最少步數。

3. 換位法是最少步數 Q 的最大值

當柱數只剩下 3 柱時，只有 1 個**調節柱**，因此每一次要從起點柱移動任何一盤(此時它是最大盤)時，其他盤就必須換位置，空出目標柱讓最大盤存放，且必須依序反覆重複同樣的動作，因此每增加一盤，操作步數根據其他盤的數量翻倍，因此換位法所找到的步數雖然是 3 柱題型裡的最少步數，但它卻是任意 M 柱題型裡最困難的題型，因此換位法是最少步數 Q 的最大值。

(三) 最少步數 Q 的合理範圍

我們在**最少步數 Q 合理範圍**的討論中，是以 N 盤為思考主體，討論 M 柱改變時，觀察對任意 N 盤來說，M 柱如何影響最小步數 Q 的最大值與最小值。這裡所討論的最大值或最小值都是以最佳效率解，也就是不浪費任何步數情況下，只是 M 柱的多寡影響了遊戲的難易度，所以找到的最小步數 Q 就會有最大與最小之分。

「讓位法」使用時機，當$M \geq N+1$時，使用$2 \times N - 1$計算步數，此時 Q 是最小值；「**換位法**」使用時機，若$M = 3$時，使用$2^N - 1$找到最少步數 Q，此時 Q 是最大值。

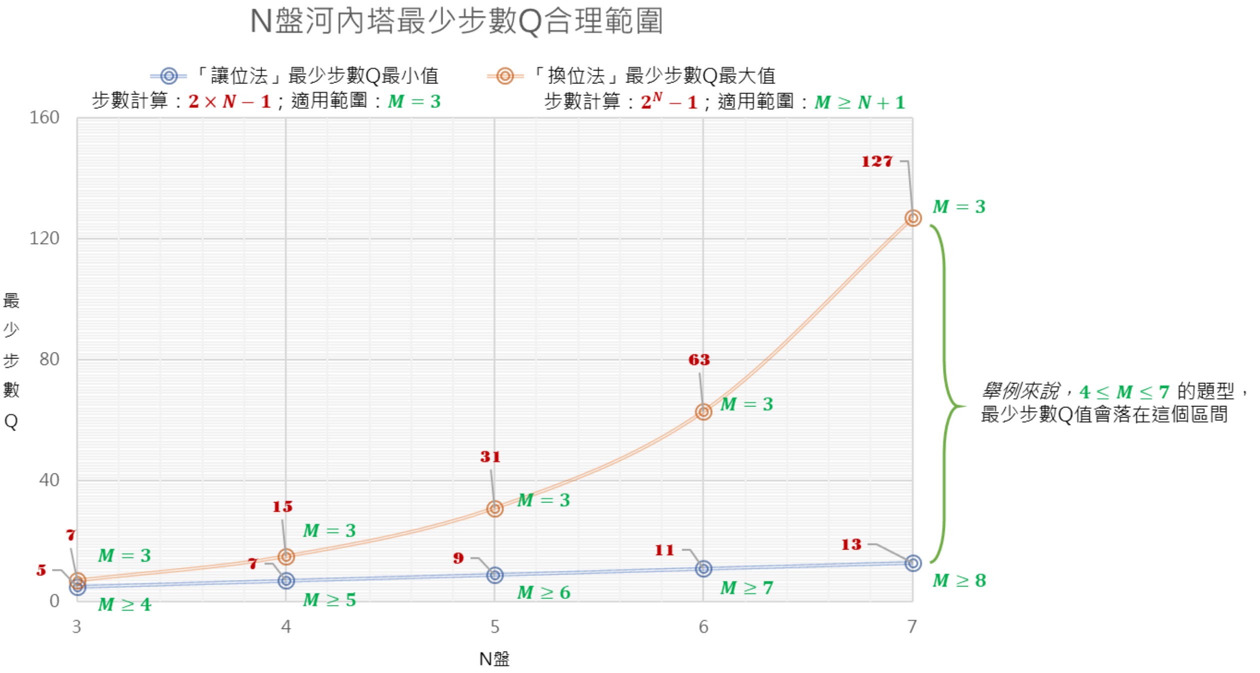
以$N = 7$盤為例，當柱數 M 為 **8** 以上時，使用讓位法：$2 \times 7 - 1 = 13$步，找到 7 盤的最少步數 Q 最小值為 **13** 步；當柱數 M 等於 **3** 時，使用換位法：$2^7 - 1 = 127$步，找到 7 盤的最少步數 Q 最大值為 **127** 步。

從「讓位法」與「換位法」研究中，可發現若將盤數 N 固定，柱數從 3 柱開始討論，此時每一次移動選擇最少，所以題目最困難，可使用「換位法」解題，隨著柱數 M 越大，操作限制越少，得到步數就會越少，一直到達$\mathbf{M = N + 1}$時，代表足夠讓每 1 盤占據 1 柱，還多出終點柱讓最大盤移動，其他盤再依序堆疊到終點柱，此時是「讓位法」的概念，步數來到最小值，之後 M 繼續增大，步數並不會隨之減少，因為多出來的柱數並不會使用到，因此，維持在與$\mathbf{M = N + 1}$題型一樣的**最少步數 Q**。

以$\mathbf{N = 3, 4, 5, 6, 7}$盤，交叉配對$\mathbf{M = 3, 4, 5, 6, 7, 8}$柱為例，根據 M 與 N 關係進行判斷，若符合「**讓位法**」使用$2 \times N - 1$計算步數，若符合「**換位法**」使用$2^N - 1$計算步數，剩下部分配對結果不屬於讓位法也不屬於換位法，將格子空出，做為後續討論目標(降柱法)。

		N 盤				
		3	4	5	6	7
M 柱	3	換位法(7 步)	換位法(15 步)	換位法(31 步)	換位法(63 步)	換位法(127 步)
	4	讓位法(5 步)				
	5	讓位法(5 步)	讓位法(7 步)			
	6	讓位法(5 步)	讓位法(7 步)	讓位法(9 步)		
	7	讓位法(5 步)	讓位法(7 步)	讓位法(9 步)	讓位法(11 步)	
	8	讓位法(5 步)	讓位法(7 步)	讓位法(9 步)	讓位法(11 步)	讓位法(13 步)

以 **N 盤河內塔最少步數 Q 合理範圍**座標圖觀察，以 N 盤為 X 軸，而 Y 軸以最小步數 Q 做紀錄，根據 N 盤適用「讓位法：$\mathbf{2 \times N - 1}$」與「換位法：$\mathbf{2^{N} - 1}$」時，分別計算出來的**最少步數 Q** 並完成 **2** 條曲線。



從座標圖 **2** 曲線中，對任意 N 盤來說， 落在$\mathbf{3 < M < N + 1}$的題型，代表未有合適的解法找出**最少步數 Q**，但 2 曲線分別是 Q 的最大值與最小值，因此，未來在$\mathbf{3 < M < N + 1}$題型找出的最少步數 Q 一定會小於「換位法」的步數，且大於「讓位法」的步數。

比方說固定$N = 7$盤，改變M柱來產生不同的題目，「7 盤 3 柱」使用「換位法」解題，「7 盤 8 柱以上(≥ 8 柱)」使用「讓位法」解題，中間題型有「4 柱 7 盤」、「5 柱 7 盤」、「6 柱 7 盤」與「7 柱 7 盤」，這 4 個題目的最少步數一定比「7 盤 3 柱」的步數少，但一定比「7 盤 8 柱以上」的題型步數多。以表格列舉 9 盤 10 柱以內題型做示範。

N盤M柱最少步數Q		M柱數							
以9盤10柱以內為例		3	4	5	6	7	8	9	10
N盤	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3	3	3	3	3
	3	7	5	5	5	5	5	5	5
	4	15	$7 < Q < 15$	7	7	7	7	7	7
	5	31	$9 < Q < 31$		9	9	9	9	9
	6	63		$11 < Q < 63$		11	11	11	11
	7	127		$13 < Q < 127$			13	13	13
	8	255			$15 < Q < 255$			15	15
	9	511			$17 < Q < 511$				17

三、 探討「原始降柱法」的分盤技巧與最少步數解

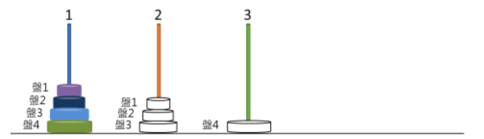
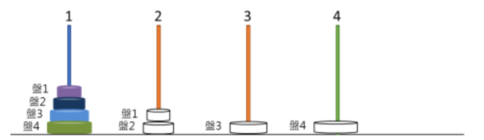
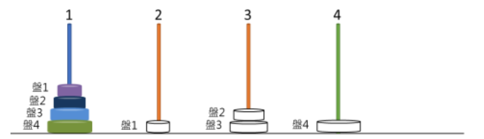
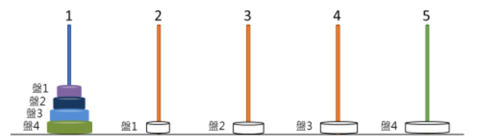
(一) 「降柱」在 $3 < M < N + 1$，且 $N > 3$ 的必然性

河內塔遊戲最少需要 3 柱是因為至少要有一個「調節柱」讓遊戲可以達到交換位置而順利讓所有盤都能過關，因此若有越多柱，代表有越多空間可做為調節。

研究發現對於任意 M 柱 N 盤題型來說，若 $\mathbf{N > 3}$，且 M 的範圍：$\mathbf{3 < M < N + 1}$，那就代表不需使用「換位法」：因為題型範圍均符合 $\mathbf{M > 3}$，這代表有多餘「調節柱」可暫存，所以，每一次從 A 柱要移動最大盤時，其他盤就不必一定要換位，可以先暫存在多出來的「調節柱」；但也不能使用「讓位法」：因為 $\mathbf{M < N + 1}$，所以不足每 1 盤有 1 柱可以暫存，一定有其中 1 柱必須暫存 2 盤以上，才能使剩下來的柱數能維持基本移動需求，這個動作是必然的，否則剩下來還堆疊在 A 柱的盤無空間可以移動，這說明了降柱的必然性。

從 A 柱起點先出發到「調節柱」暫存的盤一定是相對較小的盤，因此當他們完成暫存堆疊之後，就代表後續的盤比他們大，無法使用這 1 個柱子。**移開部份盤到「調節柱」暫存使得剩下來的盤變少，透過減少柱數換取部份盤數，進而降低後續操作過程的複雜度，我們把這個動作命名為「降柱」。**

以 $\mathbf{N = 4}$ 盤，$\mathbf{M = 3, 4, 5}$ 柱時，討論當最大盤(盤 4)要移動到**終點柱**時，其它盤必須堆疊在哪，進一步說明「換位、降柱、讓位」概念的不同。因為要求最少步數 Q，因此當有多的柱子時就必須充分運用才能減少換位的步驟，而達到最少步數 Q。

$N = 4$ 盤 $M = 3$ 柱		**換位**：盤 1、盤 2、盤 3 必須先經過多次換位，才能讓盤 4 到達終點柱。
$N = 4$ 盤 $M = 4$ 柱		**降柱**：盤 1 與盤 2 堆疊，少了一個柱子，盤 3 與盤 4 變成一個 3 柱 2 盤的題目，可使用讓位移動。
$N = 4$ 盤 $M = 4$ 柱		**降柱**：盤 2 與盤 3 堆疊以及盤 1 共用了 2 個柱子，盤 4 變成 2 柱 1 盤的題目，可直接解題。
$N = 4$ 盤 $M = 5$ 柱		**讓位**：盤 1、盤 2、盤 3 各佔 1 個柱子，盤 4 就能直接 1 步到達終點。

由此可以看出，「**換位**」讓調節柱堆滿其他盤，而「**讓位**」讓每一個調節柱正好放一盤，兩者選擇都是固定的；但「**降柱**」卻可選擇如何分盤來堆疊在調節柱暫存。

(二) 原始降柱法是讓位法的延伸，多重使用讓位法與換位法的效率走法

題型範圍在$3 < M < N+1$，且$N > 3$，那麼「降柱」就是必然的操作方式，那如何選擇要將幾盤透過「降柱」堆疊在任一調節柱呢？我們將這問題視為「分盤」，先分出幾盤降柱，再剩下幾盤可以順利解題。

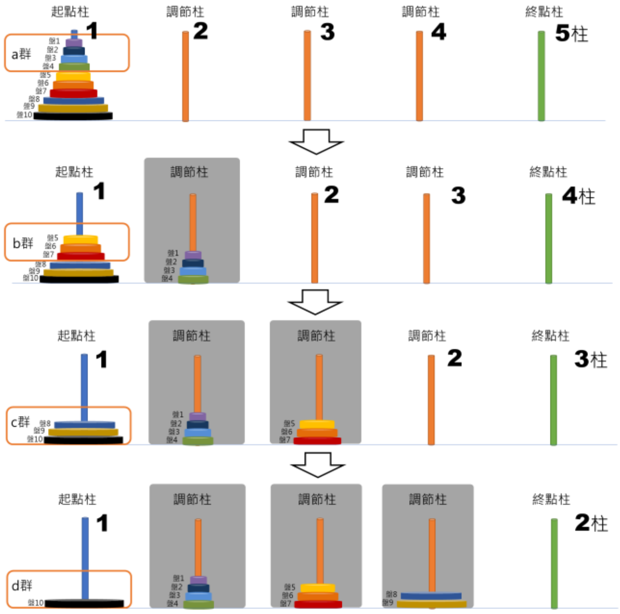
研究發現，題型在降住範圍的話，當 M 柱確定時，N 盤在指定範圍內，降柱技巧又可以細分出透過多重使用**讓位法**完成降柱，這種**技巧**我們稱為「原始降柱法」。

若每次分盤後，要降柱的題型能使 M 與 N 的關係符合$M \geq N+1$的話，那「讓位法」是將 N 盤從一柱移動到另一柱的最佳效率走法，因此，每次分盤降柱由最佳效率走法概念堆疊完成，那麼得到的步數就會是最少步數 Q 也會是最有效率的。

以 5 柱說明，若要決定幾盤可從「起點柱」使用「讓位法」移動到「調節柱」，一開始有 5 柱，最多 4 盤使用讓位法移動，佔據一個調節柱可使用，所以必須扣除；還剩下 4 柱，最多 3 盤使用讓位法移動，移動完畢後，扣除一柱；剩下 3 柱，最多 2 盤使用讓位法移動，移動完畢後，扣除一柱；剩下 2 柱，最多 1 盤移動到終點註直接解題完成。

因此，5 柱「分盤降柱」可分「5 柱 4 盤」,「4 柱 3 盤」,「3 柱 2 盤」與「2 柱 1 盤」。每一次分盤都能使用最有效率的「讓位法」移動位置。所以 5 柱「原始降柱法」的最高盤數為$4+3+2+1=10$盤。

概念為將 a、b、c 群依序暫存在調節柱，等待 d 群到達終點柱之後，再依序 c、b、a 群移動到終點柱，步數計算就是a 群 + b 群 + c 群 + d 群 + c 群 + b 群 + a 群的累加。



(三) 任意 M 柱可使用原始降柱法最高盤數與適用範圍

從 5 柱題型研究可以發現 5 柱可使用「原始降柱法」最高可到 10 盤，每一次「分盤」為 5、4、3、2、1，這裡為 1 到 M 的連續正整數，因此，我們可以採用「**梯形公式**」算出 M 柱可使用「原始降柱法」的最高盤數。

$$\frac{[\mathbf{1}+(M-\mathbf{1})]\times(M-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}=\frac{M^{2}-M}{\mathbf{2}}$$

任意 M 柱可使用「原始降柱法」**的**最高盤數**：** $\frac{M^2-M}{2}$*盤*

但對於任意 M 柱題型，我們知道當$M \geq N+1$時，可使用「讓位法」，因此從 M 盤後，隨著 M 遞增，一直到$(M^2-M)\div 2$時，是 M 柱可使用「原始降柱法」的盤數適用範圍。

以 5 柱為例，「5 柱 5 盤」一直到「5 柱 10 盤」都能使用「原始降柱法」；而5 柱 4 盤以下，5 柱 3 盤、5 柱 2 盤、5 柱 1 盤，都能使用「讓位法」。

任意 M 柱可使用「原始降柱法」的適用範圍：***M柱M盤 ≤ 原始降柱法 ≤ M柱$\frac{M^2-M}{2}$盤***

(四) 原始降柱法的操作與紀錄格式設計

「原始降柱法」概念是找出能以「讓位法」的最高盤數，移動到調節柱暫存完成降柱，重複相同操作方式，直到題型的最大盤能 1 步到達終點，接下來再將暫存在調節柱的盤數，同樣以「讓位法」的方式移動到終點柱。以 5 柱為例，我們可以將紀錄方式紀錄如下：

操作	5	柱	10	盤	最高盤容納值	步數	根據操作次數累加小記	總步數
2次	5	柱	4	盤	4	7	14	31
	4	柱	3	盤	3	5	10	
	3	柱	2	盤	2	3	6	
1次	2	柱	1	盤	1	1	1	

除了最後的 2 柱 1 盤使最大盤 1 步到位之外，其他題型 3 柱 2 盤、4 柱 3 盤與 5 柱 4 盤都是以「讓位法」方式從「起點柱」到「調節柱」暫存，又依序以「讓位法」從「調節柱」到「終點柱」完成挑戰，因此步數操作要乘以 2。

根據實際的操作發現，當「降柱」過程剩下 3 柱時，其實也能視為 3 柱使用「換位法」的操作方式，因此我們可以進一步把「原始降柱法」的表格紀錄進行修改：

操作技巧	操作次數	5	柱	10	盤	最高盤容納值	步數	根據操作次數累加小記	總步數
讓位法	2次	5	柱	4	盤	4	7	14	31
		4	柱	3	盤	3	5	10	
換位法	1次	3	柱	3	盤	3	7	7	

(五) 原始降柱法實作討論

分盤時應該將盤數分配到**讓位法(要算 2 次)**還是**換位法(只算 1 次)**，哪一種才能取得最少步數解；根據研究結果，使用「**原始降柱法**」時，不管幾柱，最後分盤都留下 **3 柱 3 盤**，因此，相同差距的題型都採用相同方式解完群組內的所有題型。

以下以 4 柱、5 柱、6 柱做示範，使用$\frac{M^2-M}{2}-(M-1)$算出使用原始降柱法的個數。

4 柱1~3盤使用「讓位法」，4 柱4~6盤使用「原始降柱法」，共 3 題。

5 柱1~4盤使用「讓位法」，5 柱5~10盤使用「原始降柱法」，共 6 題。

6 柱1~5盤使用「讓位法」，6 柱5~15盤使用「原始降柱法」，共 10 題。

最少步數		M柱數			
		3	4	5	6
N盤	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3
	3	7	5	5	5
	4	15	9	7	7
	5	31	13	11	9
	6	63	17	15	13
	7	127		19	17
	8	255		23	21
	9	511		27	25
	10	1023		31	29
	11	2047			33
	12	4095			37
	13	8191			41
	14	16383			45
	15	32767			49

讓位法

原始降柱法

換位法

4柱

4柱原始降柱有幾組

$$\frac{4^2-4}{2}-(4-1)=\mathbf{3}\text{組}$$

與前組差 **4** 步

操作	題目	4	柱	4	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	4	柱	1	盤	1	2	9
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	4	柱	5	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	4	柱	2	盤	3	6	13
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	4	柱	6	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	4	柱	3	盤	5	10	17
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

5柱

5柱原始降柱有幾組

$$\frac{5^2-5}{2}-(5-1)=\mathbf{6}\text{組}$$

與前組差 **4** 步

操作	題目	5	柱	5	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	1	盤	1	2	11
		4	柱	1	盤	1	2	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	6	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	1	盤	1	2	15
		4	柱	2	盤	3	6	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	7	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	1	盤	1	2	19
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	8	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	2	盤	3	6	23
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	9	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	3	盤	5	10	27
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	10	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	4	盤	7	14	31
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

6柱

6柱原始降柱有幾組

$$\frac{6^2-6}{2}-(6-1)=\mathbf{10}\text{組}$$

與前組差 **4** 步

操作	題目	6	柱	6	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	1	2	13
		5	柱	1	盤	1	2	
		4	柱	1	盤	1	2	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	7	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	1	2	17
		5	柱	1	盤	1	2	
		4	柱	2	盤	3	6	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	8	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	1	2	21
		5	柱	1	盤	1	2	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	9	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	1	2	25
		5	柱	2	盤	3	6	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	10	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	1	2	29
		5	柱	3	盤	5	10	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	11	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	1	2	33
		5	柱	4	盤	7	14	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	12	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	2	盤	3	6	37
		5	柱	4	盤	7	14	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	13	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	3	盤	5	10	41
		5	柱	4	盤	7	14	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	14	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	4	盤	7	14	45
		5	柱	4	盤	7	14	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	6	柱	15	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	5	盤	9	18	49
		5	柱	4	盤	7	14	
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

從上圖看出，因為都採用 3 柱 3 盤，**換位法**公式都是2^3-1，因此可以先忽略不討論。

對於 4 柱來說，4、5、6 盤分別減去 3 柱 3 盤後，會得到 4 柱 1、2、3 盤的降柱題目，都採用$(\mathbf{2}\times\mathbf{N}-\mathbf{1})\times\mathbf{2}$的公式，得到的步數分別為 **2**、**6**、**10** 步，所以他們的差距是 4 步。

對於 5 柱來說，5、6、7、8、9、10 盤分別減 3 柱 3 盤後，得到(5 柱 1 盤+4 柱 1 盤)、(5 柱 1 盤+4 柱 2 盤)、(5 柱 1 盤+4 柱 3 盤)、(5 柱 2 盤+4 柱 3 盤)、(5 柱 3 盤+4 柱 3 盤)、(5 柱 4 盤+4 柱 3 盤)的降柱題目，不論分在 4 柱或 5 柱都符合**讓位法**，以$(\mathbf{2}\times\mathbf{N}-\mathbf{1})\times\mathbf{2}$的公式，得到的步數分別為 **4**、**8**、**12**、**16**、**20**、**24** 步，所以他們的差距也會是 4 步。

以上討論發現，原始降柱法最少步數解與前一題步數差距都是 2 步，而差距 2 步的重複次數也是可以推算的。

4 柱**原始降柱法**由 **4 柱 1~3 盤**+**3 柱 3 盤**的配對最多 **6** 盤。

5 柱**原始降柱法**由 **5 柱 1~4 盤**+**4 柱 1~3 盤**+**3 柱 3 盤**的配對最多 **10** 盤。

6 柱**原始降柱法**由 **6 柱 1~5 盤**+**5 柱 1~4 盤**+**4 柱 1~3 盤**+**3 柱 3 盤**的配對，最多 **15** 盤。

以 M 柱 N 盤的配對總表來看

4 柱、5 柱、6 柱題型使用讓位法分別有 3 題、4 題、5 題可採用$2\times N-1$公式解。

剩下 3 題(4 柱有 3 個橘色區塊)、6 題(5 柱有 6 個橘色區塊)、10 題(6 柱有 7 個橘色區塊)，區塊內解的差距都正好是 4 步，換句話說，橘色區塊數就是差距 4 步使用次數

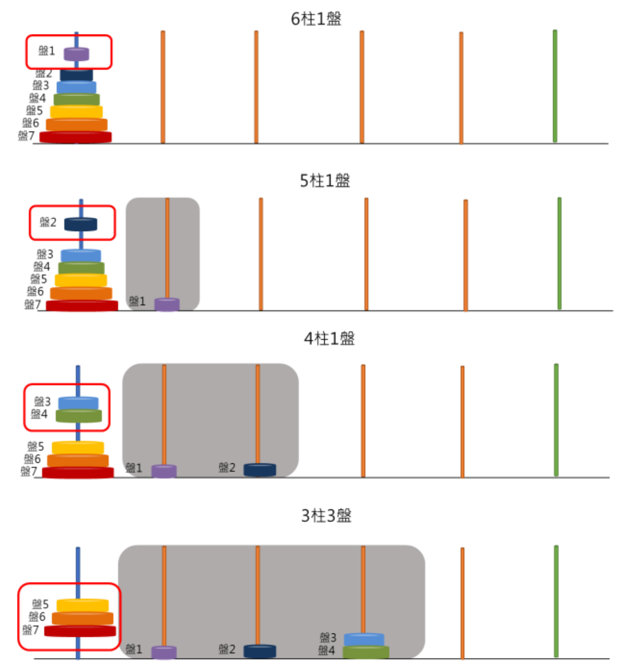
在「原始降柱法」時，可以直接看紀錄表格就知道如何操作河內塔，如下

操作	題目	6	柱	7	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	1	2	17
		5	柱	1	盤	1	2	
		4	柱	2	盤	3	6	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

分盤後，各柱不換位的最高值如下

操作	題目	6	柱	7	盤	最高盤容納值
2次	2*n-1	6	柱	1	盤	5
		5	柱	1	盤	4
		4	柱	2	盤	3
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	3

我們要優先將底層填滿，依序往上，操作時反過來操作，從多柱的開始分盤，並先操作到調節柱上，進行降柱。



從結果觀察，各組之間，每增加 1 盤，總步數都多 4 步，這是因為每增加 1 盤都代表相較於前 1 個題目的不同在於要多 1 盤花費**2**步移到到**調節柱**暫存，再從調節柱移動到**終點柱**還必須花費**2**步，總共會多$\mathbf{2\times 2=4}$步。

從研究結果可發現，使用「讓位法」前後題型最少步數 Q 差距都固定為 2 步之外，使用**「原始降柱法」**前後題型最少步數 Q 的差距也是固定的，都差距 4 步。因此，我們可以運用**「差距」**計算出**「原始降柱法」**的最少步數 Q。根據適用範圍$\mathbf{M\geq N+1}$先找出 M 柱能使用「讓位法」的最大題數為$\mathrm{M}-1$盤，此時$\mathrm{N}=\mathrm{M}-1$，帶入公式$\mathbf{2\times \boldsymbol{N}-1}$，就能算出 M 柱使用讓位法最大題數的最小步數 Q 公式為 $\mathbf{2\times(\boldsymbol{M}-1)-1=2\times \boldsymbol{M}-3}$。

因此 M 柱能使用「讓位法」最大題數為 $\boldsymbol{M}-\mathbf{1}$盤，其最少步數 Q 公式為 $\mathbf{2\times \boldsymbol{M}-3}$。接下來從 M 盤到 $\frac{M^2-M}{2}$ 盤的題數範圍都能使用「原始降柱法」解題，我們就能依序**+4**，累加計算各題目的最少步數 Q。

以$\mathrm{M}=\mathbf{4}$柱為例，使用「讓位法」最大題數為 $\boldsymbol{M}-\mathbf{1}=\mathbf{4}-\mathbf{1}=\mathbf{3}$，為 4 柱 3 盤，最少步數 Q 公式為$\mathbf{2\times \boldsymbol{M}-3=2\times 4-3=5}$**步**；接下來從$\mathrm{M}=4$盤 到 $\frac{M^2-M}{2}=\frac{4^2-4}{2}=6$ 盤的題數範圍都能使用「原始降柱法」解題，分別為 4 柱 4 盤、4 柱 5 盤、4 柱 6 盤。接下來，依序從**5步**累加差距**4步**，就算出最少步數 Q 分別為9步、13步、17步。

以$\mathrm{M}=\mathbf{5}$柱為例，使用「讓位法」最大題數為 $\boldsymbol{M}-\mathbf{1}=\mathbf{5}-\mathbf{1}=\mathbf{4}$，為 5 柱 4 盤，最少步數 Q 公式為$\mathbf{2\times \boldsymbol{M}-3=2\times 5-3=7}$**步**；接下來從$\mathrm{M}=5$盤 到 $\frac{M^2-M}{2}=\frac{5^2-5}{2}=10$ 盤的題數範圍都能使用「原始降柱法」解題，分別為 5 柱 5 盤、5 柱 6 盤、5 柱 7 盤、5 柱 8 盤、5 柱 9 盤、5 柱 10 盤。接下來，依序從**7步**累加差距**4步**，就算出最少步數 Q 分別為11步、15步、19步、23步、27步、31步。

以$\mathrm{M}=\mathbf{6}$柱為例，使用「讓位法」最大題數為 $\boldsymbol{M}-\mathbf{1}=\mathbf{6}-\mathbf{1}=\mathbf{5}$，為 6 柱 5 盤，最少步數 Q 公式為$\mathbf{2\times \boldsymbol{M}-3=2\times 6-3=9}$**步**；接下來從$\mathrm{M}=6$ 盤到 $\frac{M^2-M}{2}=\frac{6^2-6}{2}=15$ 盤的題數範圍都能使用「原始降柱法」解題，分別為 6 柱 6 盤到 6 柱 20 盤。接下來，依序從**9步**累加差距4步，就算出最少步數 Q 分別為13步、17步、21步、25步、29步、33步、37步、41步、45步、49步。

四、 探討「複合降柱法」的分盤技巧與最少步數解

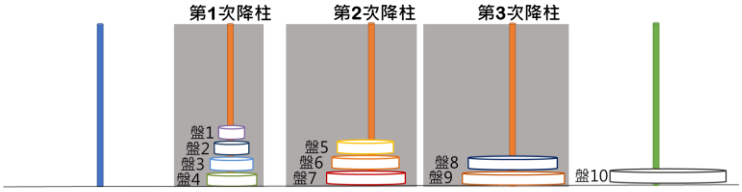
(一) 複合降柱法適用範圍

若 M 柱 N 盤的題型，N 值繼續增大，超過$\frac{M^2-M}{2}$時，代表超過原始降柱法能使用範圍，因此，每一次分盤不能使用「讓位法」來進行降柱，將使用複合性的操作方式，我們將這類型的操作方式稱作「複合降柱法」。

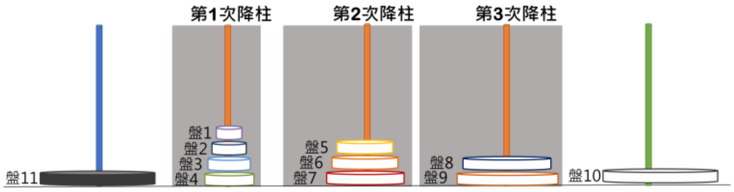
因此，M 柱 N 盤題型，N > $\frac{M^2-M}{2}$ 就必須使用「複合降柱法」才能找到最少步數 Q。

(二) 複合降柱法分盤技巧

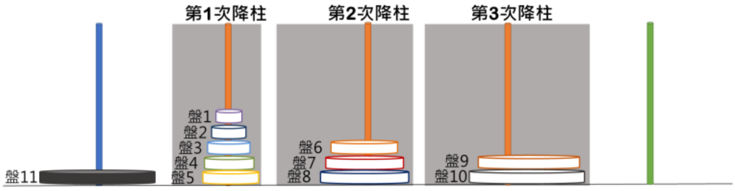
5 柱能使用「原始降柱法」最高盤數為 5 柱 10 盤，每一次降柱都能使用「讓位法」:



但從 5 柱 11 盤開始，將不能每一次降柱都使用「讓位法」，否則就會剩下如「盤 11」沒有任何空間可移動，還停留在起點柱。



因此，至少要有一部份的盤移到調節柱時，要使用「讓位法」下一階段的移動技巧：原始降柱法移動到調節柱進行降柱。我們以盤 1~5 為例，使用「原始降柱法」將 5 盤移動到調節柱暫存。

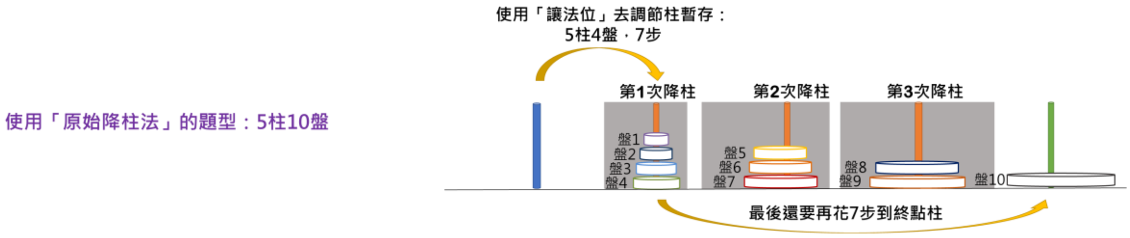


所以第 1 次降柱使用「原始降柱法」將盤 1~5 移動到調節柱；第 2 次降柱使用「讓位法」將盤 6~8 移動調節柱；第 3 次降柱使用「讓位法」將盤 9~10 移動到調節柱。這就符合我們的定義，接下來採複合的方式完成降柱，所以命名為「複合降柱法」。

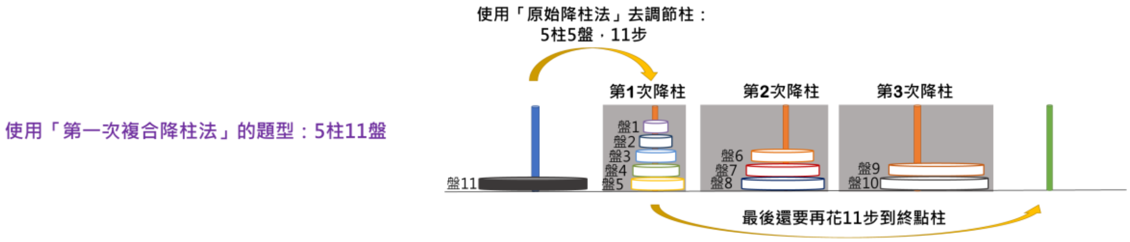
(三) 第一次複合降柱法原理說明

從 **5 柱 11 盤**對比 **5 柱 10 盤**討論，可以發現，原本每一次分盤都使用「讓位法」降柱，提升到「複合降柱法」後，至少有一柱在分盤時將使用「原始降柱法」進行降柱。

在必須使用「複合降柱法」分盤降柱的過程中，因為盤數變多，多出來的盤會使得降柱技巧從「讓位法」提升到「原始降柱法」，就代表與前一題型的差距會從 2 步提升到 4 步，但這只計算了從「起點柱」到「調節柱」這些分盤降柱題型與前一題型差距，等最大盤順利到達「終點柱」後，暫存在「調節柱」的部份盤還要依序移動到「終點柱」，差距的 4 步，還要乘以 2，因此，**「第一次複合降柱法」**與前一題步數差距會差 8 步。



5 柱 10 盤，使用「原始降柱法」解題，可分出 4 盤以 5 柱的方式來「調節柱」暫存，而 5 柱 4 盤可使用「讓位法」技巧換柱，因此步數計算是7步到「調節柱」。



5 柱 11 盤，使用**「第一次複合降柱法」**，其中，必須分出 5 盤以 5 柱方式到「調節柱」暫存，而 5 柱 5 盤可使用「原始降柱法」技巧換柱，因此步數計算是11步到「調節柱」。

5 柱 11 盤比 5 柱 10 盤多了$\mathbf{11-7=4}$步來到「調節柱」，還要再多 **4** 步到「終點柱」，因此總差距為**8**步，依此類推，接下來繼續增加盤數，將必須繼續使用「原始降柱法」換柱到「調節柱」，而「原始降柱法」屬於差距 4 步的題型，但分盤到「調節柱」後，還要再移動到「終點柱」，所以「原始降柱法」差距 4 步必須再乘以 2，與前一題型差距來到 8 步，這就是**「第一次複合降柱法」**與前一題型差距都是 8 步的原因。

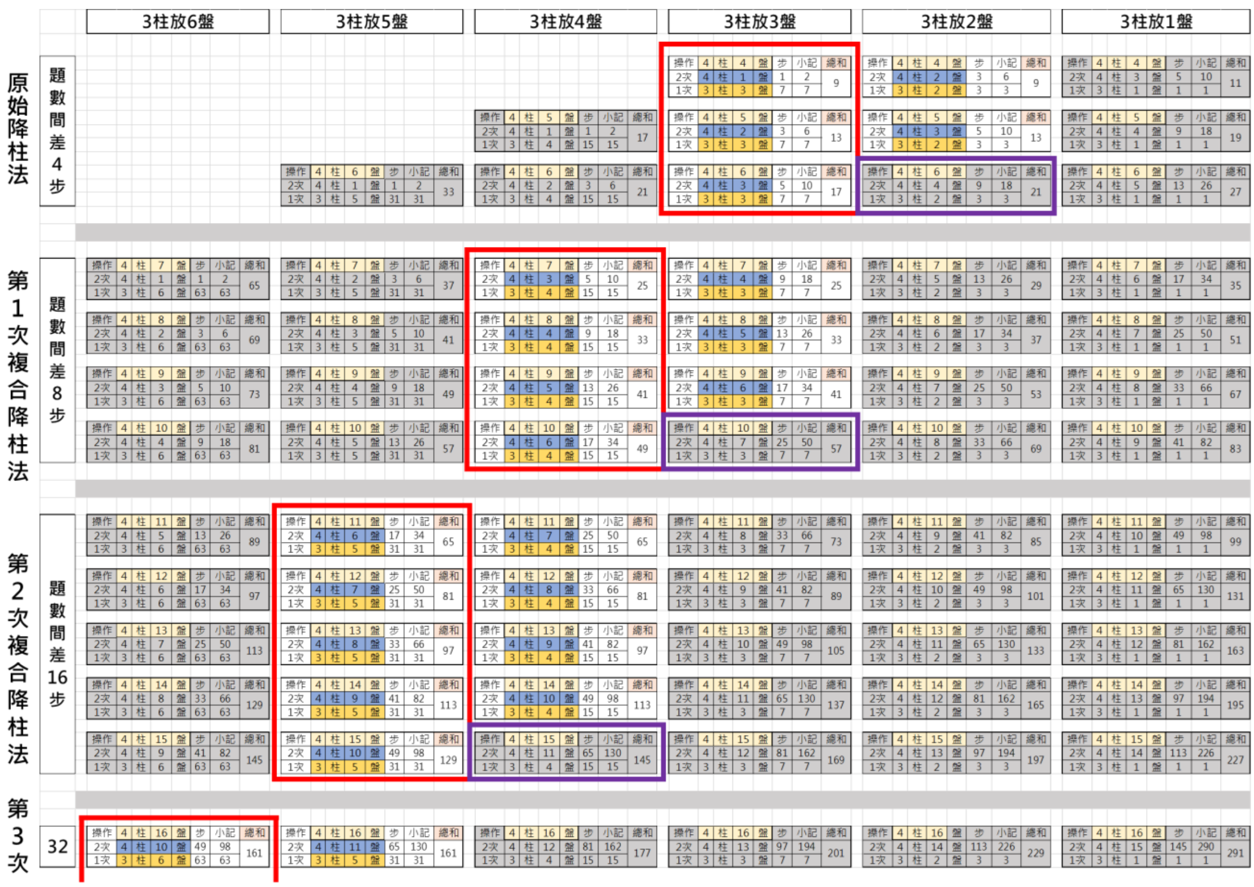
而使用**「第一次複合降柱法」**共可以破解多少題目呢？因為到「調節柱」暫存通通必須使用「原始降柱法」，因此我們可以從他使用的「原始降柱法」所能參考的題目數做計算。

(四) 以「降柱法」討論與前一題差距的規律

從研究結果已知，對於任意 M 柱來說：盤數$N \le M-1$ 的話，使用「讓位法」解題，題數間差距 **2** 步；盤數$N \ge M$，且$N \le \frac{M^2-M}{2}$ 的話，使用「原始降柱法」，可以使用的題數參考分盤後「讓位法」的題數，題數間差距 **4** 步；盤數$N > \frac{M^2-M}{2}$ 的話，可使用**「第一次複合降柱法」**，但盤數 N 最大到幾盤為適用範圍，還需參考分盤後**「原始降柱法」**的題數，可確定的是，題數間差距來到 **8** 步，從以上結構我們發現，每次分盤降柱需參照較少題數的最佳解題法，先分盤到調節柱再移動到終點柱，動作會反覆地重複，因此，**題數間差距為 2 的指數成長**，但對於 M 柱來說，有多少題目適用何種方法，從**「複合降柱法」**開始，還沒找到公式直接計算，以及分盤要如何選擇才能最有效率，因此，進一步以**有限範圍的列舉法**進行討論。

我們以 **4 柱 4 盤**以上需要使用「降柱法」技巧的類型進行研究，列舉分盤降柱時，應該分出幾盤先到「調節柱」(這部分要被計算 2 次，因為還要到終點柱)，剩下來的盤數以 3 柱的技巧解題，這可套用「換位法」(只需操作 1 次，因為完成時會在終點柱)的所有可能。

我們把不同分法由左而右分別鎖定 3 柱分盤分 6、5、4、3、2、1 盤，剩下來的盤分給操作 2 次的部分；再由上而下列舉 4 柱 4 盤到 16 盤，討論**分盤技巧**的選擇。



「降柱法」的核心精神就是**分盤降柱**，所以隨著盤數增加，每一次新增的盤必須面臨要將它分配到**操作 2 次(去調節柱暫存)**或**操作 1 次(以 3 柱換位法直接到終點柱)**的選擇。透過上面實作的討論可以發現，我們將每一個題目的選擇都做了列舉討論，若求出的步數不是最少步數，我們就將那個配對組合反灰，若求出的步數是最少步數 Q，那就保持彩色的形式。

研究發現**題目與前一題的差距**會呈現以下的規律：

差距 4 步的有 3 題(最後分盤：3 柱放 3 盤)，是使用**原始降柱法**解題。

差距 8 步的有 4 題(最後分盤：3 柱放 4 盤)，是使用**第一次複合降柱法**解題。

差距 16 步的有 5 題(最後分盤：3 柱放 5 盤)，是使用**第二次複合降柱法**解題。

因此，發現 4 柱題型「題數間步數差距」與「相同差距題數」有其規律，可依此類推。

「題數間步數差距」規律為 2 的指數成長，與前面的討論結果一致，因為部分盤到調節柱是使用前面題型最佳效率解法，而還必須以相同方式移動到終點柱，所以反覆參考步數的過程中，就會不斷地以 2 的指數成長，形成後一題與前一題的總步數差距為 2 的指數。

「相同差距題數」規律為連續正整數，從列舉題型觀察到**「題數間步數差距」**相同時，分給 3 柱的盤數可以相同。比方說「4 柱 4 盤」到「4 柱 6 盤」，都能從**分盤**給**「3 柱 3 盤」**得**最少步數 Q**，雖然「4 柱 4 盤」與「4 柱 5 盤」，分盤給**「3 柱 2 盤」**也能得**最少步數 Q**，但以分盤降柱給**「3 柱 2 盤」**的概念解「4 柱 6 盤」時，得到的步數卻不是最少步數。

因此，我們認為**「題數間步數差距」**相同時，既然可以分盤給 3 柱時，分出相同盤數，那麼就盡量採用相同的規律技巧來處理同組的題型，如此一來就有機會找到一致的操作流程來破解後續的題型。

「4 柱 4 盤」到「4 柱 6 盤」都屬於**「題數間步數差距 4 步」**，因此分盤選**「3 柱 3 盤」**為一致性解法。當盤數增加，來到「4 柱 7 盤」時，分盤降柱有 2 個選擇：可分盤 **3 柱 3 盤**或 **3 柱 4 盤**都得最小步數 Q，「4 柱 7 盤」到「4 柱 10 盤」都屬於**「題數間步數差距 8 步」**，因此，以一致性解法來看，分盤選擇要以**「3 柱 4 盤」**，就能以相同概念解差距 8 步題型。

因此，可以得到一個小結論，當盤數 N 繼續遞增，必須改變**「題數間步數差距」**時，先將增加的盤分配到 3 柱使用換位法，再繼續增加盤數時，才將新增的盤分配到調節柱暫存(操作 2 次)。

我們再以 **5 柱 5 盤**以上需要使用**「降柱法」**技巧的類型進行研究，列舉分盤降柱時，應該分出幾盤先到「調節柱」(這部分要被計算 2 次，因為還要到終點柱)，剩下來的盤數以 3 柱的技巧解題，這可套用**「換位法」**(只需操作 1 次，因為完成時會在終點柱)的所有可能。

我們把不同分法由左而由分別鎖定 3 柱分盤分 6、5、4、3、2、1 盤，剩下來的盤分給操作 2 次的部分；再由上而下列舉 5 柱 5 盤到 21 盤，討論**分盤技巧**的選擇。

發現 5 柱題型規律與 4 柱一致，當盤數 N 遞增，必須要改變**「題數間步數差距」**時，先將新增的第 1 盤分配到 3 柱使用**換位法**，再繼續增加盤數時，才將新增的盤分配到**調節柱**暫存。

分盤降柱的選擇就是透過分盤後，讓部分盤先去**調節柱**暫存，每減少 1 柱代表減少了部分盤還需要移動的負擔，直到最後分盤的結果為 3 柱(可使用「換位法」技巧到達終點)。

4 柱：分 4 柱(降柱暫存)與 3 柱(終點完成)。

5 柱：分 5 柱(降柱暫存)、4 柱(降柱暫存)與 3 柱(終點完成)。

6 柱：分 6 柱(降柱暫存)、5 柱(降柱暫存)、4 柱(降柱暫存)與 3 柱(終點完成)。

除了留下 3 柱使用換位法，**還剩多少柱**代表**可降柱幾次**。因此，降柱共有$M-3$次。

隨著柱數 M 遞增，$M-3$的結果終究會大於 1。如柱數$M=5$，代表$5-3=2$個調節柱先以 **5 柱題型**將**部分盤**暫存在**第一個調節柱**，再以 **4 柱題型**將**部分盤**暫存在**另一個調節柱**，最後剩下來的盤以 3 柱題型移動到終點柱。在「**題數間步數差距**」相同時，已知分給 3 柱的盤數是固定的，但其他盤要分給 5 柱或 4 柱，到底該如何選擇呢？

經過研究討論，「**題數間步數差距**」相同的條件下，不論分給哪一柱，不影響總步數。因為，若是 5 柱使用「第一次複合降柱法」的題型，那麼分出部分盤給非 3 柱進行降柱時，將**部分盤**移動到「調節柱」的方法一定是使用了「**原始降柱法**」，那「**原始降柱法**」的步數差距都是 4，所以，無論分給哪一柱使用「**原始降柱法**」，移動到調節柱的差距都是 4 步；若是 5 柱使用「原始降柱法」的題型，那分盤給非 3 柱的分盤降柱題型時，將部分盤移動到調節柱的方法一定是使用了「讓位法」，那「讓位法」的步數差距都是 2，所以分給哪一柱使用「讓位法」，移動到調節柱的差距都是 2 步，依此類推。

無論柱數 M 為多少，當需要**分盤降柱**時，只需要考慮分給 3 柱(參考換位法)**操作 1 次**或非 3 柱(隨著 N 值依序參考讓位、原始降柱、第 J 次複合降柱法…)**操作 2 次**。

根據實作結果，將「與前一盤差距相同的題型」歸類為同一組(以紅框圈起來的組別)，可以發現共同點為 3 柱的分盤都是一樣的題型。

比方說，只要是與前一題型差距 8 步的題目，在最後分盤時都要分 3 柱 4 盤，其他盤再依序分給降柱的部分，一直增加盤數，直到總步數差距變成 16 步時停止。所以我們可以得到一個結果，只要改變差距時，先增加 1 盤給 3 柱，接下來再依序把盤數分給調節柱。

我們發現，這樣相同差距的組數就可以預測。一定會先加 1，因為 3 柱提升 1 盤，接下來增加盤數給降柱的部分，而降柱的部分最高極限值會是多少，才會使得總差距維持在同一組內呢？

與前組差8步

操作	題目	5	柱	11	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	4	盤	7	14	39
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

3柱提升1盤

從3柱3盤提升到3柱4盤

操作	題目	5	柱	12	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	4	盤	7	14	47
		4	柱	4	盤	9	18	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

操作	題目	5	柱	13	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	4	盤	7	14	55
		4	柱	5	盤	13	26	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

操作	題目	5	柱	14	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	4	盤	7	14	63
		4	柱	6	盤	17	34	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

參考4柱解法

操作	題目	4	柱	4	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	4	柱	1	盤	1	2	9
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	4	柱	5	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	4	柱	2	盤	3	6	13
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	4	柱	6	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	4	柱	3	盤	5	10	17
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	15	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	5	盤	15	30	79
		4	柱	6	盤	17	34	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

操作	題目	5	柱	16	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	6	盤	19	38	87
		4	柱	6	盤	17	34	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

操作	題目	5	柱	17	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	7	盤	23	46	95
		4	柱	6	盤	17	34	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

操作	題目	5	柱	18	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	8	盤	27	54	103
		4	柱	6	盤	17	34	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

操作	題目	5	柱	19	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	9	盤	31	62	111
		4	柱	6	盤	17	34	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

操作	題目	5	柱	20	盤	步數	小記	總步數
2次	降柱	5	柱	10	盤	31	62	111
		4	柱	6	盤	17	34	
1次	換位	3	柱	4	盤	15	15	

參考5柱解法

操作	題目	5	柱	5	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	1	盤	1	2	11
		4	柱	1	盤	1	2	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	6	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	1	盤	1	2	15
		4	柱	2	盤	3	6	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	7	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	1	盤	1	2	19
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	8	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	2	盤	3	6	23
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	9	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	3	盤	5	10	27
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

操作	題目	5	柱	10	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	4	盤	7	14	31
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	7	7	

5柱第一次複合降柱

1 + 3 + 6 = 10組

必須使用前一個題型操作解法，且差距步數為一半的題型，因為「降柱」代表必須移動 2 次，所以步數會乘以 2，所以關鍵在於差距步數為一半的題型有幾題。所有的題目都是依此類推，所以只要從數量小的題目慢慢推理過來，就可以知道任何題型相同差距的題數有幾題。所以我們想到，如果差距知道，且還能推理出有幾組，那只要累加差距就可以完成任何題型的推算了。

根據 4 種操作方式完成 3 柱、4 柱與 5 柱各類型的最少步數 Q 計算，得到以下表格。

M柱N盤最少步數解實作

		M柱數				
		3	4	5	6	7
N盤	1	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3	3
	3	7	5	5	5	5
	4	15	9	7	7	7
	5	31	13	11	9	9
	6	63	17	15	13	11
	7	127	25	19	17	15
	8	255	33	23	21	19
	9	511	41	27	25	23
	10	1023	49	31	29	27
	11	2047	65	39	33	31
	12	4095	81	47	37	35
	13	8191	97	55	41	39
	14	16383	113	63	45	43
	15	32767	129	71	49	47
	16	65535	161	79	57	51
	17	131071	193	87	65	55
	18	262143	225	95	73	59
	19	524287	257	103	81	63
	20	1048575	289	111	89	67
	21	2097151	321	127	97	71
	22	4194303	385	143	105	79
	23	8388607	449	159	113	87
	24	16777215	513	175	121	95
	25	33554431	577	191	129	103

可以發現差距的出現是非常有規律的，3 柱的差距都只出現與公式$\mathbf{2^N-1}$有關。而 4 柱以上，**回歸到最原始的操作，都是讓位法**。隨著盤數 N 與柱數 M 的差距越來越大，無法繼續使用「讓位法」時，就必須藉由「**降柱法**」的精神，透過多出來的調節柱進行降柱減少部分盤數，所以就會依序使用**原始降柱、複合降柱(第 1 次)、複合降柱(第 2 次)、複合降柱(第 J 次)…等**。那因為降柱過程都是採用前者的最佳效率解，因此差距有規律出現。

盤數	3柱 最少步數結果	與前1盤 步數差距	次數	差與差 的差距
0	0	0	0	0
1	1	1	1	0
2	3	2	1	0
3	7	4	1	0
4	15	8	1	0
5	31	16	1	0
6	63	32	1	0
7	127	64	1	0
8	255	128	1	0
9	511	256	1	0
10	1023	512	1	0
11	2047	1024	1	0
12	4095	2048	1	0
13	8191	4096	1	0
14	16383	8192	1	0
15	32767	16384	1	0
16	65535	32768	1	0
17	131071	65536	1	0
18	262143	131072	1	0
19	524287	262144	1	0
20	1048575	524288	1	0
21	2097151	1048576	1	0
22	4194303	2097152	1	0
23	8388607	4194304	1	0
24	16777215	8388608	1	0
25	33554431	16777216	1	0
26	67108863	33554432	1	0
27	134217727	67108864	1	0
28	268435455	134217728	1	0
29	536870911	268435456	1	0
30	1073741823	536870912	1	0
31	2147483647	1073741824	1	0
32	4294967295	2147483648	1	0
33	8589934591	4294967296	1	0
34	17179869183	8589934592	1	0
35	34359738367	17179869184	1	0
36	68719476735	34359738368	1	0

盤數	4柱 最少步數結果	與前1盤 步數差距	次數	差與差 的差距
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	3	2	2	1
3	5	2		
4	9	4	3	1
5	13	4		
6	17	4		
7	25	8	4	1
8	33	8		
9	41	8		
10	49	8		
11	65	16	5	1
12	81	16		
13	97	16		
14	113	16		
15	129	16		
16	161	32	6	1
17	193	32		
18	225	32		
19	257	32		
20	289	32		
21	321	32		
22	385	64	7	1
23	449	64		
24	513	64		
25	577	64		
26	641	64		
27	705	64		
28	769	64		
29	897	128	8	1
30	1025	128		
31	1153	128		
32	1281	128		
33	1409	128		
34	1537	128		
35	1665	128		
36	1793	128		

盤數	5柱 最少步數結果	與前1盤 步數差距	次數	差與差 的差距
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	3	2	3	2
3	5	2		
4	7	2		
5	11	4	6	3
6	15	4		
7	19	4		
8	23	4		
9	27	4		
10	31	4		
11	39	8	10	4
12	47	8		
13	55	8		
14	63	8		
15	71	8		
16	79	8		
17	87	8		
18	95	8		
19	103	8		
20	111	8		
21	127	16	15	5
22	143	16		
23	159	16		
24	175	16		
25	191	16		
26	207	16		
27	223	16		
28	239	16		
29	255	16		
30	271	16		
31	287	16		
32	303	16		
33	319	16		
34	335	16		
35	351	16		
36	383	32		

3 柱題型，求最小步數 Q 要使用「換位法」，柱數$\mathbf{M = 3}$限制最多，是最困難的解法，所以每增加一盤，差距就改變，因此，相同差距出現的次數只會有 **1** 次。

4 柱題型，前後題最少步數 Q 相減的差距出現次數為**連續正整數**，若連續正整數相減，差與差的差距會回歸到都是 **1**。

5 柱題型，前後題最少步數 Q 相減的差距出現次數為**三角形數**，但若把三角形數相減，差與差的差距回歸到**連續正整數**。若連續正整數再繼續相減，那得到的數列每一項都是 **1**。

從這裡得到重要的結果，再繼續增加柱數，差距出現的次數是可以透過累加算出來的。而差距從前面的研究成果得知，是 2 的指數，從$\mathbf{2^0}$ 、$\mathbf{2^1}$ 、$\mathbf{2^2}$ 、$\mathbf{2^3}$ ... $\mathbf{2^k}$ 增長。

所以任意 M 柱 N 盤可以透過計算差距重複使用了幾次，累加出最少步數 Q

以 **4 柱 12 盤**為例，說明如何運用差距出現次數累加出**最小步數 Q**

$$2^0 \times \mathbf{1} + 2^1 \times \mathbf{2} + 2^2 \times \mathbf{3} + 2^3 \times \mathbf{4} + 2^4 \times \mathbf{2} = 81$$

目標是 $\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + ？ = 12}$，因此$\mathbf{？ = 2}$。依據盤數累加使用次數，當兩者相等時，可求出解。若差距出現次數累加不等於盤數，**剩下數字 ×下組差距**完成步數計算。

若柱數 M=4，而盤數是 N 盤，最少步數可以依據下列規律計算出

$$2^0 \times \mathbf{1} + 2^1 \times \mathbf{2} + 2^2 \times \mathbf{3} + 2^3 \times \mathbf{4} + 2^4 \times \mathbf{5} + \cdots + 2^{P-1} \times P$$

過程中，從 1 累加到 P 的總和要正巧等於 N。

五、 探討「M 柱 N 盤河內塔最少步數解」的速算技巧

(一) M 柱 N 盤解題的選擇

3 柱題型中，1 盤與 2 盤可使用「讓位法」或「換位法」，3 盤可使用「原始降柱法」或「換位法」，因此，對於任意 3 柱 N 盤題型，都能使用**換位法$2 \times N - 1$**算出**最少步數 Q**。

4 柱以上的題目，又多了**調節柱**，所以解題操作方式有了變化。對於 N 盤來說，隨著盤數增加，解題都先使用「讓位法」，接下來使用「原始降柱法」，再來使用「複合降柱法」。

(二) 差距法建立原理說明

讓位與**原始降柱法**都已找出公式了，以 4 柱與 5 柱題型分析**複合降柱法**個數增長模式：

解題策略	直接解題	讓位法	原始降柱法	第1次複合降柱法	第2次複合降柱法
題目間差距	差1步	差2步	差4步	差8步	差16步
最後分盤(換位)	3柱放1盤	3柱放2盤	3柱放3盤	3柱放4盤	3柱放5盤
4柱題型					
適用幾盤 (四柱)	4柱1盤	4柱2盤	4柱4盤(使用4柱1盤直解)	4柱7盤(使用4柱3盤讓位)	4柱11盤(使用4柱6盤原始降柱)
		4柱3盤	4柱5盤(使用4柱2盤讓位)	4柱8盤(使用4柱4盤原始降柱)	4柱12盤(使用4柱7盤複合降柱)
			4柱6盤(使用4柱3盤讓位)	4柱9盤(使用4柱5盤原始降柱)	4柱13盤(使用4柱8盤複合降柱)
				4柱10盤(使用4柱6盤原始降柱)	4柱14盤(使用4柱9盤複合降柱)
					4柱15盤(使用4柱10盤複合降柱)
各組個數	1	2	3	4	5
5柱題型					
適用幾盤 (五柱)	5柱1盤	5柱2盤	5柱 5 盤(5柱1盤直解+4柱1盤直解)	5柱11盤(5柱4盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱21盤(5柱10盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)
		5柱3盤	5柱 6 盤(5柱1盤直解+4柱2盤讓位)	5柱12盤(5柱4盤讓位+4柱4盤原始降柱)	5柱22盤(5柱10盤原始降柱+4柱 7 盤複合降柱)
		5柱4盤	5柱 7 盤(5柱1盤直解+4柱3盤讓位)	5柱13盤(5柱4盤讓位+4柱5盤原始降柱)	5柱23盤(5柱10盤原始降柱+4柱 8 盤複合降柱)
			5柱 8 盤(5柱2盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱14盤(5柱4盤讓位+4柱6盤原始降柱)	5柱24盤(5柱10盤原始降柱+4柱 9 盤複合降柱)
			5柱 9 盤(5柱3盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱15盤(5柱 5 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱25盤(5柱10盤原始降柱+4柱10盤複合降柱)
			5柱10盤(5柱4盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱16盤(5柱 6 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱26盤(5柱11盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱17盤(5柱 7 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱27盤(5柱12盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱18盤(5柱 8 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱28盤(5柱13盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱19盤(5柱 9 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱29盤(5柱14盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱20盤(5柱10盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱30盤(5柱15盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱31盤(5柱16盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱32盤(5柱17盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱33盤(5柱18盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱34盤(5柱19盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱35盤(5柱20盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
各組個數	1	3	6	10	15
個數公式	1	$M - 2$	$(M^2 - M)/2 - (M - 1)$		

從我們的研究整理表格可發現任何 **M 柱使用第 X 次複合降柱法的解題題數**，是由前者的**直接解題、讓位法、原始降柱法與前次複合降柱法**堆疊出來的，而前 3 者我們都已經研究出個數公式，所以可透過這個基礎，算出任意 M 柱在直接解題、讓位法與原始降柱法分別的個數後，依序堆疊出 M 柱 X 次複合降柱法的個數，概念如下：

M柱使用第X次複合降柱法的解題題數 = M柱使用第X − 1次複合降柱法的解題題數

+M − 1柱使用第X次複合降柱法的解題題數

如**5柱第2次複合降柱法題數 = 5柱第1次複合降柱法題數 + 4柱第2次複合降柱法題數**

15 = 10 + 5

依此類推，就能建立**任意 M 柱的差距個數表**，運用這個方式我們就能**破解算出任意 M 柱 N 盤河內塔最少步數需要幾步**。

(三) 差距表算最少步數的基本邏輯

我們已知差距是 2 的指數翻倍成長，也能計算差距相同時出現的次數，因此只要將所有差距累加起來，就能找出該題的最少步數解，以 5 柱 17 盤為例

同差距個數	0	1	3			6						7						
5柱題型	0盤	1盤	2盤	3盤	4盤	5盤	6盤	7盤	8盤	9盤	10盤	11盤	12盤	13盤	14盤	15盤	16盤	17盤
最少步數解	0	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31	39	47	55	63	71	79	87
與前一題步數差距	0	1	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8

最少步數 Q=$\mathbf{1} \times \mathbf{1} + \mathbf{2} \times \mathbf{3} + \mathbf{4} \times \mathbf{6} + \mathbf{8} \times \mathbf{7} = \mathbf{87}$步

或轉換成 2 的次方計算最小步數 Q=$\mathbf{2^0} \times \mathbf{1} + \mathbf{2^1} \times \mathbf{3} + \mathbf{2^2} \times \mathbf{6} + \mathbf{2^3} \times \mathbf{7} = \mathbf{87}$步

(四) 透過 EXCEL 軟體完成差距表

由於差距出現次數是需要逐步累加的，所以我們可以透過 Excel 的建立，產生差距表，透過自動填滿的功能，將差距表逐步累加完成。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	差距表		如何計算差距使用的次數		柱數M								
2	2的次方	差距	解題法	差距次數的公式	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	0	1	直接解題	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	讓位法	(M-1)-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	2	4	原始降柱法	(M^2-M)/2-(M-1)	3	6	10	15	21	28	36	45	55
6	3	8	第1次複合降柱法	每一格的個數 = 上方1格 + 左邊1格	4	10	20	35	56	84	120	165	220
7	4	16	第2次複合降柱法		5	15	35	70	126	210	330	495	715
8	5	32	第3次複合降柱法		6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
9	6	64	第4次複合降柱法		7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
10	7	128	第5次複合降柱法		8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
11	8	256	第6次複合降柱法		9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
12	9	512	第7次複合降柱法		10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620
13	10	1024	第8次複合降柱法		11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378
14	11	2048	第9次複合降柱法		12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960
15	12	4096	第10次複合降柱法		13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930

未來任何只要知道我們研究成果的人都能建立出這樣的表格，只要在 9 個位置寫入數字或公式，透過 **EXCEL 自動填滿**功能，就可以**往下或往右拖曳**完成差距表，並且根據實際需求建立不同大小的表格。

A3	A4	B3	E2	F2	E3	E4	E5	F6
填數字 **0**	填數字 **1**	填公式 $= \mathbf{2^{\wedge}A3}$	填數字 **4**	填數字 **5**	填數字 **1**	填公式 $= (E2-1)-1$	填公式 $= (E2^{\wedge}2-E2)/2-(E2-1)$	填公式 $= E6+F5$
選取A3與A4，使用自動填滿的小黑點往下拉完成**2的次方**		使用自動填滿的小黑點往下拉完成**與前題差距**	選取E2與F2，使用自動填滿的小黑點往右拉完成**柱數M**		使用自動填滿的小黑點往右拉完成**直接解題個數**	使用自動填滿的小黑點往右拉完成**讓位法個數**	使用自動填滿的小黑點往右拉完成**原始降柱個數**	使用自動填滿的小黑點往右及往下拉完成**複合降柱個數**

以上是我們根據各種解題策略建立差距表的方式，在後續的研究我們又發現，如果只是單純要產生**差距表**，我們有更加快速的方式。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	差距表		柱數M									
2	2的次方	差距步數	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	2	4	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
6	3	8	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
7	4	16	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
8	5	32	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
9	6	64	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
10	7	128	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
11	8	256	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
12	9	512	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620
13	10	1024	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378
14	11	2048	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960
15	12	4096	1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930

透過 Excel 在 A 欄第 3 列後填連續正整數，在$\boldsymbol{B3}$寫下$= \mathbf{2\text{^}}\boldsymbol{A}\mathbf{3}$，完成 2 的指數差距表；由於 3 柱題型的「題目間差距」步數都只會出現 1 次，所以可以先建立 C 欄全部為 1。任意 M 柱只有 1 盤時，步數也只需要 1 步，與 0 盤題目相差 1 步，所以第 3 列全部為 1。從前面的討論 5 柱題型前後題差距所產生的數列為三角形數，將三角形數的數列前後相減又可以得到 4 柱題型前後題差距所產生的數列連續正整數，再將連續正整數的數列前後數相減又可以得到 3 柱題型前後題差距所產生的數列全部為 1。因此，柱數間差距存在累加的關係，我們可以直接從 3 柱全部為 1 的數列反過來累加得到其他柱數 M 的差距重複次數。

因此，最後一個動作就是在 D2 這格寫下=D3+C4，再選擇自動填滿的小黑點，複製邏輯往右及往下拉填滿整個差距表，就能快速建立差距表了。縮小為 7 個動作。

差距遞增規律，為2的指數成長，完成每一回合的步數差			柱數M從3開始遞增		相同步數差出現的次數，正好等於巴斯卡三角形，運用此概念完成相同差距出現次數	
A3	A4	B3	C2	D2	C3	D4
填數字**0**	填數字**1**	填公式$= \mathbf{2\text{^}}\boldsymbol{A}\mathbf{3}$	填數字**3**	填數字**4**	填數字**1**	填公式$= \boldsymbol{F3 + E4}$
選取A3與A4，使用自動填滿往下拖曳完成**2的次方**		使用自動填滿往下拖曳完成**與前題差距**	選取E2與F2，使用自動填滿往右拖曳完成**柱數M**		使用自動填滿**往右**拖曳完成**直接解題個數；往下**拖曳完成**「換位法」差的重複出現次數**	使用自動填滿**往右**及**往下**拖曳完成**完整差距表**

建立好差距表後，M 柱 N 盤河內塔題目就能透過查表進行最少步數的計算，先根據柱數 M 找到正確 M 欄，接下來根據 N 盤的數值，依序減去第 3 列以後的數字，直到結果為負值，最後一個減數之前的所有數字就是各組 2 的次方差距所使用的個數，剩下來的商就是下一組 2 的次方差距所使用的個數，將所有差距相加就是 M 柱 N 盤最少步數解。

以 **9 柱 100 盤**為例，先找到**柱數**$\boldsymbol{M} = \mathbf{9}$那一欄，將 100 依序減掉 1、7、28，再減掉 84 後就為負值。所以**1**、**7**、**28**就分別是差距**1**、**2**、**4**所使用的次數，在減去 84 之前的商為 64。所以**64**就是剩下來使用差距**8**的次數，將所有差距累加加總找到最小步數 Q

因此 9 柱 100 盤的最少步數解為：$\mathbf{1} \times \mathbf{1} + \mathbf{2} \times \mathbf{7} + \mathbf{4} \times \mathbf{28} + \mathbf{8} \times \mathbf{64} = \mathbf{639}$步。

陸、　研究結論

一、　透過逆解的概念，可以分析解題策略的是否為最佳解

逆解的核心：**最大盤必須一次到位**。對於我們討論的任意解題策略都能透過逆解方式，反覆將分盤後當時的最大盤 1 次到目標柱，將拆解後的題目反過來逐步堆疊出最少步數。

二、　對於任意 M 柱 N 盤題目有最少步數解合理範圍

若$M > N$，使用讓位法解題，其公式為$\mathbf{2 \times N - 1}$。除了最大盤只要 1 步之外，其他每一盤步數也都只用了 2 步，是河內塔題型中最有效率的走法；而限制最多的走法是$M = 3$柱的類型，從起點柱每次要移動盤時，其他柱的盤必須不斷地換位把柱數空出來，此為**換位法**，公式為$\mathbf{2^N - 1}$ ，是河內塔題型中最複雜的走法。

因此，以 N 盤固定的角度來思考，改變 M 柱會使題目變得困難也會變得簡單，但任意 M 柱 N 盤河內塔的最少步數的解法，一定會落在**讓位法**與**換位法**兩曲線之間(合理範圍)。

三、　解題方法可分：讓位法、換位法、原始降柱法與複合降柱法

對於任意 3 柱的題型，使用換位法是最有效率的解題策略

對於任何 4 柱以上題型，都將隨著 N 變大，依序使用 4 種解題策略。當$\boldsymbol{N \leq M - 1}$ 時，可使用「讓位法」解題，題數間差距 **2** 步；當 $\boldsymbol{N \geq M}$，且$\boldsymbol{N \leq \frac{M^2-M}{2}}$ 時，使用「原始降柱法」，題數間差距 **4** 步；當 $\boldsymbol{N > \frac{M^2-M}{2}}$ 時，使用**「第 1 次複合降柱法」**，題數間差距 **8** 步，隨著 N 值繼續變大，將陸續使用**第 1 次、第 2 次…第 i 次複合降柱法**，題數間差距為 **2 的指數成長**。

四、　使用差距表進行查表算出任意 M 柱 N 盤河內塔最少步數解

任何讀者都能根據我們的研究結果，按照規律完成**差距表**，再根據 M 柱 N 盤從差距表依序對應不同組的差距(2 的次方)使用了幾次，將所有差距累加就是**最少步數解 Q**。

為什麼差距是呈現 2 的次方，是因為**複合降柱法**是以**原始降柱法**為基礎，而**原始降柱法**是以**讓位法**為基礎，若降柱法需要將部分盤暫存調節柱在移到終點柱，且這個過程會因為柱數不足而反覆操作的話，那步數的差距就會一直呈現翻倍的成長。

M 柱 N 盤題型能使用「**讓位法**」與「**換位法**」都已整理出公式，而「**降柱法**」是複合使用前兩者技巧，因此當我們要了解複合降柱法差距的個數時，只要運用前者的公式累加就可以完整了解降柱法每一組的差距個數。

五、 差距表快速建立技巧

透過 Excel 在 A 欄第 3 列後填連續正整數，在$B3$寫下$=2^\wedge A3$，下拉完成指數差距表；再填 3 柱 C 欄差距使用次數都是 1 次，以及第 3 列完成每一柱差距 1 步使用次數也是 1 次(這 2 個動作就是藍色區塊的部分)。接下來在$D4$寫下$=D3+C4$，再根據研究需要決定自動填滿的小黑點往右與往下拖曳距離，就能完成 M 柱差距表，未來只要查表就能算出步數。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	差距表		柱數M									
2	2的次方	差距步數	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	2	4	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
6	3	8	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
7	4	16	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
8	5	32	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
9	6	64	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
10	7	128	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
11	8	256	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
12	9	512	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620
13	10	1024	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378
14	11	2048	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960
15	12	4096	1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930

六、 運用差距表完成任意 M 柱 N 盤速算技巧

在差距表查看 M 柱欄位，將 N 盤往下依序減去「差距重複次數」直到 N 盤全部對應完畢，再將每一組步數差距(2的指數) × 差距重複次數，並全部累加，就能算出該 M 柱 N 盤的最小步數 Q，以下列舉使用差距表完成河內塔 20 柱 20 盤以內的最少步數 Q。

最少步數列表		M柱																	
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N盤	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	3	7	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	4	15	9	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	5	31	13	11	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	6	63	17	15	13	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	7	127	25	19	17	15	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
	8	255	33	23	21	19	17	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
	9	511	41	27	25	23	21	19	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
	10	1023	49	31	29	27	25	23	21	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
	11	2047	65	39	33	31	29	27	25	23	21	21	21	21	21	21	21	21	21
	12	4095	81	47	37	35	33	31	29	27	25	23	23	23	23	23	23	23	23
	13	8191	97	55	41	39	37	35	33	31	29	27	25	25	25	25	25	25	25
	14	16383	113	63	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	27	27	27	27	27
	15	32767	129	71	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	29	29	29	29
	16	65535	161	79	57	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	31	31	31
	17	131071	193	87	65	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	33	33
	18	262143	225	95	73	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	35
	19	524287	257	103	81	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37
	20	1048575	289	111	89	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41

柒、 參考資料

周穎(2016)。打下好基礎_程式設計必修的數學思維與邏輯訓練。台北市：碁峰資訊。

Christian Hesse(2016)。德國一流大學教你數學家的 22 個思考工具。台北市：大雁文化。

黃祈昌等(2011)。n 柱河內塔的捷徑建構與通式的尋找。全國科展第 51 屆。

陶佳妤等(2010)。數學 101～河內塔變身！。全國科展第 50 屆。

【評語】080414

本作品探討河內塔的變種遊戲，從原來的三條柱變成 M 條柱與 N 個盤的情況下，探討最少要把 N 個盤都搬到目標柱的最少步數 Q 的合理範圍，研究中提出了讓位法、換位法、原始降柱法與複合降柱法等解題策略。本作品較大的挑戰是如何有效地透過分盤的技巧達到最佳化的降柱，從而減少步數。報告中討論了很多特例，並歸納出某些情況下的最少步數，可以看出作者非常用心。然而，本作品研究比較缺乏有效利用數學工具說明來顯現研究成果的完整度。河內塔遊戲已有好一段的歷史，相關的研究為數不少，而且已經有研究者探討過關於 M 條柱與 N 個盤的情況，因此從原創性的角度來說，本作品的原創性稍嫌不足。本作品的報告內容較偏向於說明，比較缺乏的嚴謹的論證。此外部分名詞的說明不夠清楚，例如 14 頁的題型，而且部分說明還有待商榷，宜作進一步的檢查。建議在發展科展研究前可先做比較廣泛的文獻探討，並善用他人研究的結果做一些延伸的研究探討。

作品海報

壹、研究動機

河內塔是經典的研究題目，因此，過去有許多團隊嘗試將題目變形進行研究，如*多色盤數*、*多柱圍繞題型*以及*改變柱數M*…等。較常見的是改變柱數M進行延伸研究，根據我們初步探索，**改變柱數M後，任何盤數N最少步數Q的解會落在一定的範圍內**，也就是他有**上下界的合理值**，這是我們第一個想提出的研究成果，**變化題之最少步數Q的合理範圍**。我們還發現在4柱以上的解法，雖然其他研究成果可透過他們的一系列指引計算出最少步數，但並未提出一般式，以及他們研究的成果也只適用指定柱數的條件下，當柱數與題數的關係改變時，最少步數的計算方式又必須跟著改變，沒有通則性的解題策略。目前，我們發現，解題方式可歸納**讓位法**、**換位法**、**原始降柱法**與**複合降柱法**4類。其中**降柱法**是我們主要克服的難題，**如何有效地透過分盤的技巧達到最佳化的降柱，並減少最少步數的解，是一大挑戰**。因此，我們的研究除了想要提出**任意M柱N盤變化題**在**最少步數Q**合理範圍下上界，還要提出M柱N盤解法最少步數規律性成因，以及一般式的速算法，並且掌握如何分盤的技巧，讓所有人都能順利根據我們的研究，挑戰任意M柱N盤的河內塔並且以速算的方式算出最少步數Q。

貳、研究目的

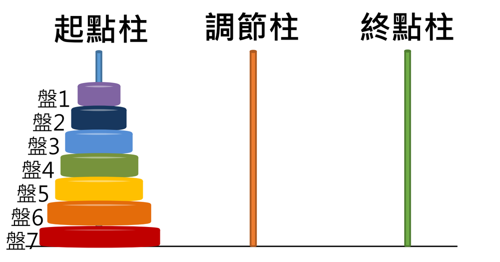
一. 探討三柱河內塔遞迴解法合理性與公式推導
二. 探討「讓位法」與「換位法」以及最少步數Q值的合理範圍
三. 探討「原始降柱法」的分盤技巧與最少步數解
四. 探討「複合降柱法」的分盤技巧與最少步數解
五. 探討「M柱N盤河內塔最少步數解」的速算技巧

參、名詞解釋

名詞	意義	解釋
Q	最少步數	以最有效率解法所找到的最少步數，為該題最佳步數解。M柱與N盤的關係不同，會有不同的Q值。
M	柱數	題目有幾根柱子，討論範圍：M為3以上的正整數
N	盤數	題目有幾個盤子，討論範圍：N為正整數
最大盤	編號為最大數字的盤	1. 若題目為N盤的題型，那麼最大盤編號為N。 2. 討論分盤後，剩餘可移動盤裡頭最大的盤。
其他盤	除了最大盤的其他盤	1. 若題目為N盤的類型，由1到$N-1$盤都稱其他盤。 2. 扣除分盤後的最大盤，剩餘可移動的盤，由1到 $N-1$ 盤

河內塔遊戲規則

目標：將所有盤從起點柱移動到終點柱
規則1：任何柱必須由下而上分別是盤數大到小
規則2：一次動一盤，當上方有盤必須先移開



肆、文獻探討

科展全國	名次	作品名稱	研究範疇
51屆國中數學	團隊合作	n柱河內塔的捷徑建構與通式的尋找	透過對稱性操作建立滿格數量關係表，再使用G.S.P軟體尋找K值從而建立$H_n(m)$公式，在n柱m環的通式中完成了4到6柱的討論，7柱後未討論。
50屆國小數學	第二名	數學101～河內塔變身	以歸納法完成4柱到10柱的探討，以區塊適用的概念將N柱與M盤的關係細分出數種公式，公式之間參數的改變並未說明遞增或遞減規則，以依序類推的形式表達。唯有4柱題型有完整的一般式。

歷屆科展在**盤數**與**柱數**的延伸規則研究中，成果有限且不完整；我們使用「**分盤降柱**」技巧討論**任意N盤M柱題型的最少步數**，而分盤降柱技巧運用了最少步數Q「合理範圍」上界與下界的配對組合結果，因此，可以從這樣穩定的基礎進行後續的推論。

另一方面，我們發現能根據「**降柱法**」延伸概念建構「**2的指數差距表**」，並適用任意M盤N柱河內塔最少步數解。因此，我們研究的目標要透過「**逆解**」與「**分盤降柱**」技巧的研究成果，建立「**差距表**」，運用差距累加計算任意**M柱N盤**的**最少步數Q**，並根據「**差距表**」實際分盤降柱並成功挑戰河內塔的最少步數操作。

伍、研究過程或方法

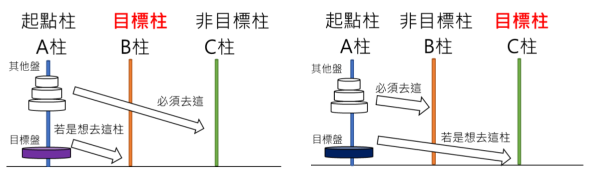
一、探討三柱河內塔遞迴解法合理性與公式推導

(一)從逆解方式探討每一步的合理性

定律1：其他盤必須與最大盤前進的柱位必須錯開

定律2：最大盤必須要一次到位

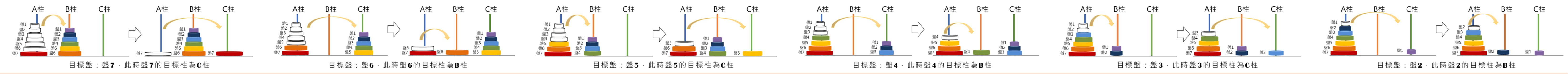
從逆解的討論結果發現，目標盤與其他盤要前進的柱位都是錯開的。
◆ 若目標盤要1步去B柱(目標柱)，那其他盤必須先停留在C柱(非目標柱)
◆ 若目標盤要1步去C柱(目標柱)，那其他盤必須先停留在B柱(非目標柱)



我們發現若要進行最有效率的移動，最佳結果是對於每一個盤只移動1次，在步數計算上，就只會紀錄最小的1步，那這個動作也只有直接從**起點柱**到**終點柱**才能達到，但由於**目標規則**2的限制，會使得大部分的操作都無法滿足這個條件。

以3柱7盤為例，一開始的盤1要去B柱還是C柱會顯得沒有目標，無法有效地思考最佳化走法；但若以逆解的角度，先從結果回推盤7的移動目標，問題會變得很清晰：最大盤要從A柱的底盤直接1步去C柱當底，且這樣其他盤在移動上，還可以少一個限制。

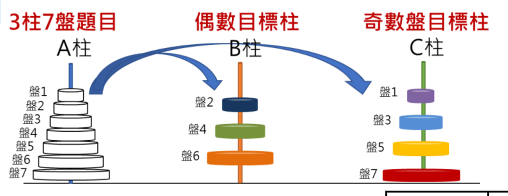
若要達成這樣的效果，此時的其他盤就必須在B柱。因此，我們可以使用一樣的邏輯，依序往前推理**盤6**、**盤5**、**盤4**、**盤3**、**盤2**與**盤1**的選擇。



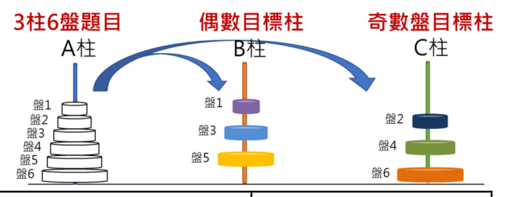
(二)奇數偶數題型第一步的合理位置

定律3：總盤數為奇或偶數時，目標盤第一次移動選擇不同

以3柱7盤(**奇數**)題目逆解的討論結果做一個統整：
◆ 目標盤為**奇數**時，第一次移動要去的目標柱都是C柱
◆ 目標盤為**偶數**時，第一次移動要去的目標柱都是B柱



但當3柱6盤(**偶數**)題型時，統整的結果正好顛倒：
■ 目標盤為**奇數**時，第一次移動要去的目標柱都是B柱
■ 目標盤為**偶數**時，第一次移動要去的目標柱都是C柱



定律4：使用前一盤數題型成功策略作為移動基礎：遞迴

解任何盤數時，可將**最大盤n**移動A→C那1步當作**分水嶺**，在此之前必須包含**其他n-1盤**從A→B最佳換位的總步數，以及還要再計算將**其他n-1盤**從B→C最佳換位的總步數。

其他n-1盤在這2次移動時的起始柱與目標柱不同，但操作總步數一致，因此最大盤移動的1步，再加上n-1盤最少步數會計算2次，就是最少步數統計。

三柱N盤最少步數解法可以使用2^N-1表達，此為**換位法**

盤數	盤n的移動步驟	移動步數統計	歸納
一盤	盤1(最大盤)，A→C：1步；	$1+0\times2=1$	$2^1-1=1$
二盤	盤2(最大盤)，A→C：1步＋其他盤A→B再B→C：$1\times2=2$步	$1+1\times2=3$	$2^2-1=3$
三盤	盤3(最大盤)，A→C：1步＋其他盤A→B再B→C：$3\times2=6$步	$1+3\times2=7$	$2^3-1=5$
四盤	盤4(最大盤)，A→C：1步＋其他盤A→B再B→C：$7\times2=14$步	$1+7\times2=15$	$2^4-1=15$
五盤	盤5(最大盤)，A→C：1步＋其他盤A→B再B→C：$15\times2=30$步	$1+15\times2=31$	$2^5-1=31$
六盤	盤6(最大盤)，A→C：1步＋其他盤A→B再B→C：$31\times2=62$步	$1+31\times2=63$	$2^6-1=63$
七盤	盤7(最大盤)，A→C：1步＋其他盤A→B再B→C：$63\times2=126$步	$1+63\times2=127$	$2^7-1=127$

二、探討「讓位法」與「換位法」以及最少步數Q值的合理範圍

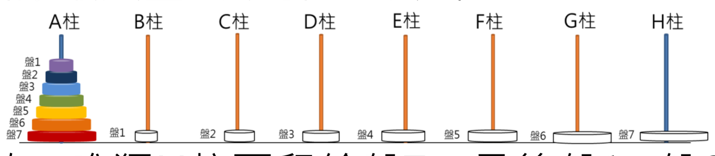
(一)我們將任意M柱N盤河內塔的所有解題操作方式分為4種類型

基礎操作方式

讓位法

核心關鍵：位置足夠。每1盤都能自由佔據任何1柱，唯獨終點柱要讓出來給最大盤1次移動到位，所以稱為「**讓位**」，**除了最大盤1步，其他盤只要2步，所以是最佳效率的最少步數解**。先想像所有盤都移動到調節柱，再移動到終點柱，所以N × 2 ，但必須扣除最大盤1次到位，公式$2\times N-1$。

題目：8柱7盤



盤1~盤6可以任意放，唯獨H柱要留給盤7。最後盤1~盤6再依序放到H柱上完成挑戰。

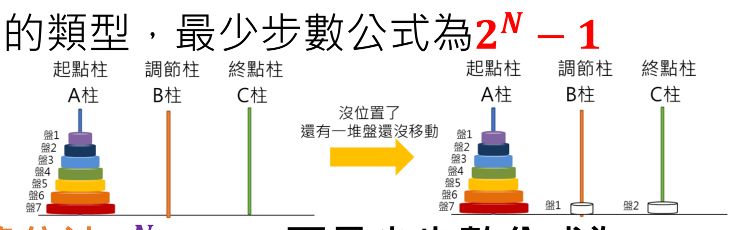
可使用**讓位法**$2\times N-1$，而最少步數公式為

$2\times7-1=14-1=13$步

換位法

核心關鍵：位置不足夠，必須滿足**定律1：最大盤必須要一次到位**、**定律2：其他盤必須與最大盤前進的柱位必須錯開**、**定律3：使用較低盤數題型的成功策略作為移動基礎：遞迴**。所以這是一個3柱的類型，最少步數公式為2^N-1

題目：3柱7盤



只能使用**換位法**2^N-1，而最少步數公式為

$2^7-1=128-1=127$步

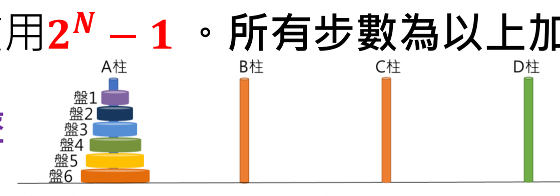
進階操作方式

原始降柱法

核心關鍵：位置夠，每次分盤都能使用讓位法，透過**降柱**，使用**讓位法**每次消耗1柱暫存部分盤數反覆操作，直到剩下3柱3盤。

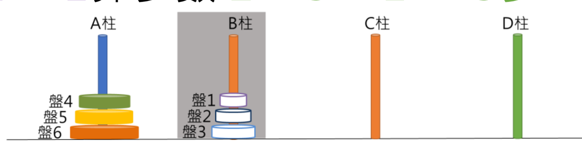
透過$2\times N-1$，計算出如何從起點到調節點。但最後還要從調節柱到終點柱，所以步數要$\times2$。而最後3柱3盤時使用2^N-1。**所有步數為以上加總**

題目：4柱6盤



盤1~盤3從A到B柱換位置(為4柱3盤題目)

讓位法$2\times N-1$算步數 $2\times3-1=5$步



盤4~盤6從A到D柱到達終點(為3柱3盤題目)

換位法2^N-1算步數 $2^3-1=7$步

5步(盤1~3, $A\to B$)
$+7$步(盤4~6, $A\to D$)
$+5$步(盤1~3, $B\to D$)
$=5\times2+7=27$步

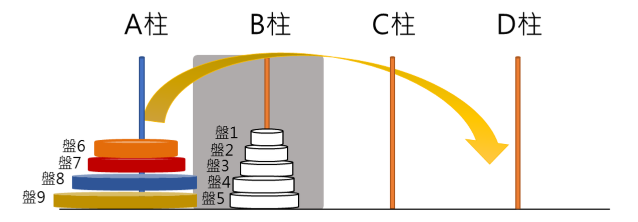
過程中，使用**讓位法**降柱的部分都會計算2次，最後使用**換位法**到達終點只需算1次。

複合降柱法

核心關鍵：位置不夠，分盤後使用各種方法，**降柱**時無法只使用**讓位法**降柱，也會使用到**原始降柱法**，甚至**複合降柱法**無論使用哪一種方式，目標是使用最有效率的移動操作方式完成降柱，因此如何有效分盤是複合降柱法的核心關鍵。

在這過程中，將使用到讓位法、換位法、原始降柱法與複合降柱法這4種操作方式，因此，最少步數解公式的計算必須使用複合的方式完成。

題目：4柱9盤



先分4柱5盤，剩下3柱4盤。而4柱5盤**不能**直接使用**讓位法**算出步數，但可以使用**原始降柱法**算出4柱5盤移動的步數，因此，這一題的複合降柱法，可運用**原始降柱法**+**換位法**算出步數。

那合併起來的總步數算法為4柱5盤(原始降柱法)+3柱4盤(換位法)+ 4柱5盤(原始降柱法)

13步(盤1~5, $A\to B$)
$+15$步(盤6~9, $A\to D$)
$+13$步(盤1~5, $B\to D$)
$=13\times2+15=41$步

(二)最小步數Q的合理範圍

我們在**最少步數Q合理範圍**的討論中，是以**N盤**為思考主體，討論M柱改變時，觀察對任意N盤來說，M柱如何影響最少步數Q的最大值與最小值。這裡所討論的最大值或最小值都是以最佳效率解，也就是不浪費任何步數情況下，只是M柱的多寡影響了遊戲的難易度，所以找到的最少步數Q就會有最大與最小之分。

「**讓位法**」使用時機，當$M\geq N+1$時，使用$2\times N-1$計算步數，此時Q是最小值；「**換位法**」使用時機，若$M=3$時，使用2^N-1找到最少步數Q，此時Q是最大值。

以$N=7$盤為例，當柱數M為8以上時，使用**讓位法**：$2\times7-1=13$步，找到**7盤**的最少步數Q最小值為13步；當柱數M等於3時，使用**換位法**：$2^7-1=127$步，找到**7盤**的最少步數Q最大值為127步。

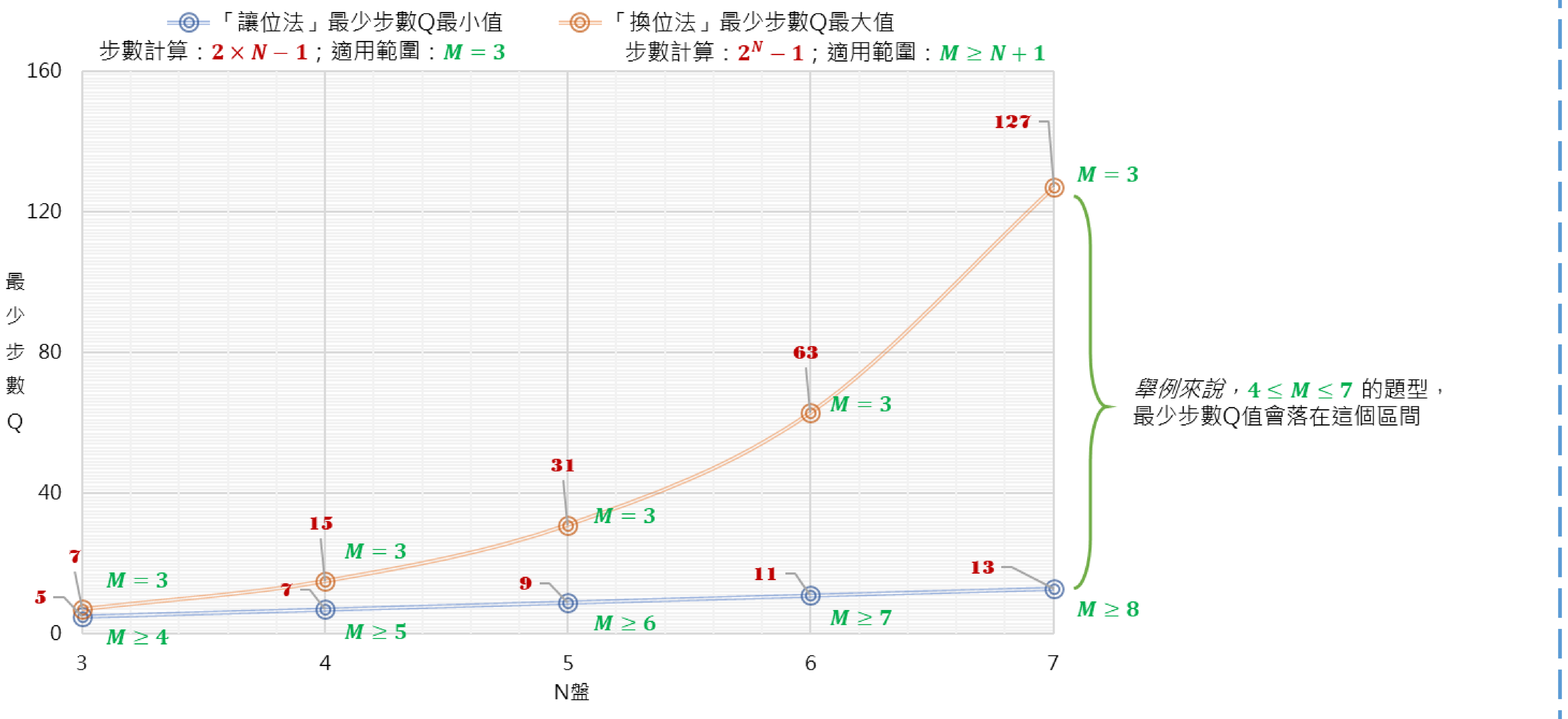
從「**讓位法**」與「**換位法**」研究中，可發現若將盤數N固定，柱數從3柱開始討論，此時每一次移動選擇最少，所以題目最困難，可使用「**換位法**」解題，隨著柱數M越大，操作限制越少，得到步數就會越少，一直到達$M=N+1$時，代表足夠讓每1盤占據1柱，還多出終點柱讓最大盤移動，其他盤再依序疊到終點柱，此時是「**讓位法**」概念，步數來到最小值，之後M繼續增大，步數並不會隨之減少，因為多出來的柱數並不會使用到，因此，維持在與$M=N+1$題型一樣的**最少步數Q**。

以$N=3,4,5,6,7$盤，交叉配對$M=3,4,5,6,7,8$柱為例，根據M與N關係進行判斷，若符合「**讓位法**」使用$2\times N-1$計算步數，若符合「**換位法**」使用2^N-1計算步數，剩下部分配對結果不屬於讓位法也不屬於換位法，將格子空出，後續討論目標(降柱法)。

M柱	N 盤 3	4	5	6	7
3	換位法(7步)	換位法(15步)	換位法(31步)	換位法(63步)	換位法(127步)
4	讓位法(5步)				
5	讓位法(5步)	讓位法(7步)			
6	讓位法(5步)	讓位法(7步)	讓位法(9步)		
7	讓位法(5步)	讓位法(7步)	讓位法(9步)	讓位法(11步)	
8	讓位法(5步)	讓位法(7步)	讓位法(9步)	讓位法(11步)	讓位法(13步)

以N盤為X軸，而Y軸以最少步數Q做紀錄，根據N盤適用「**讓位法**：$2\times N-1$」與「**換位法**：2^N-1」時，分別計算出來的**最少步數Q**並完成2條曲線。

N盤河內塔最少步數Q合理範圍



從座標圖2曲線中，對任意N盤來說，落在$3<M<N+1$的題型，代表未有合適的解法找出**最少步數Q**，但2曲線分別是Q的最大值與最小值，因此，未來在$3<M<N+1$題型找出的最少步數Q一定會小於「**換位法**」的步數，且大於「**讓位法**」的步數。

比方說固定$N=7$盤，改變M柱來產生不同的題目，「7盤3柱」使用「**換位法**」解題，「7盤8柱以上(≥ 8柱)」使用「**讓位法**」解題，中間題型有「4柱7盤」、「5柱7盤」、「6柱7盤」與「7柱7盤」，這4個題目的最少步數一定比「7盤3柱」的步數少，但一定比「7盤8柱以上」的題型步數多。以表格列舉9盤10柱以內題型做示範。

N盤M柱最小步數Q 以9盤10柱以內為例		M柱數 3	4	5	6	7	8	9	10
N盤	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3	3	3	3	3
	3	7	5	5	5	5	5	5	5
	4	15	$7<Q<15$	7	7	7	7	7	7
	5	31	$9<Q<31$		9	9	9	9	9
	6	63	$11<Q<63$			11	11	11	11
	7	127	$13<Q<127$				13	13	13
	8	255	$15<Q<255$					15	15
	9	511	$17<Q<511$						17

換位法　　降柱法　　讓位法

三、探討「原始降柱法」的分盤技巧與最少步數解

(一)「降柱」在 3<M<N+1，且N>3的必然性

河內塔遊戲最少需要3柱是因為至少要有一個「調節柱」讓遊戲可以達到交換位置而順利讓所有盤都能過關，因此若有越多柱，代表有越多空間可做為調節。

研究發現對於任意M柱N盤題型來說，若$N>3$，且M的範圍：$3<M<N+1$，那就代表不需使用「換位法」：因為題型範圍均符合$M>3$，這代表有多餘「調節柱」可暫存，所以，每一次從A柱要移動最大盤時，其他盤就不必一定要換位，可以先暫存在多出來的「調節柱」；但也不能使用「讓位法」：因為$M<N+1$，所以不足每1盤有1柱可以暫存，一定有其中1柱必須暫存2盤以上，才能使剩下來的柱數能維持基本移動需求，這個動作是必然的，否則剩下來還堆疊在A柱的盤無空間可以移動，這說明了降柱的必然性。

從A柱起點先出發到「調節柱」暫存的盤一定是相對較小的盤，因此當他們完成暫存堆疊之後，就代表後續的盤比他們大，無法使用這1個柱子。**移開部份盤到「調節柱」暫存使得剩下來的盤變少，透過減少柱數換取部份盤數，進而降低後續操作過程的複雜度，我們把這個動作命名為「降柱」**。

(二)原始降柱法是讓位法的延伸，是一種多重使用讓位法的最佳效率走法：

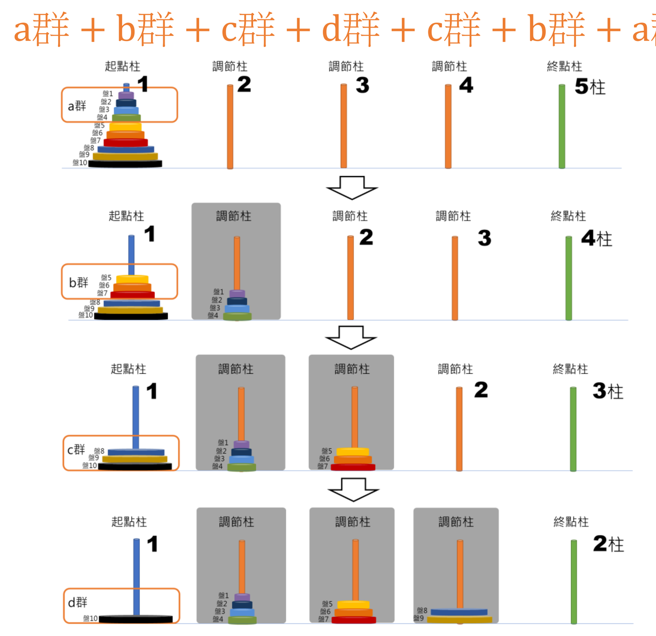
當「柱數$M<$盤數$N+1$」時，代表柱數不足讓所有的盤都各放1柱，其中幾盤必須先透過「**讓位法**」暫放調節柱，等最大盤一次到位後，再使用「讓位法」從暫存的調節柱移到終點柱。暫存在調節柱的動作就稱作**「降柱」**。**若過程中一直無法直接使用「讓位法」直接將最大盤移動到終點柱，那就繼續進行「降柱」，直到剩下3柱。**

(三)任意M柱可使用原始降柱法最高盤數與適用範圍

以5柱說明，分盤降柱可分**5柱4盤**，**4柱3盤**，**3柱2盤**，最後**2柱1盤**。每一次分盤都能使用最有效率的**讓位法**移動位置。5柱**原始降柱法**的最高盤數為$4+3+2+1=10$盤。

概念為將a、b、c群依序暫存在調節柱，等待d群到達終點柱之後，再依序c、b、a群移動到終點柱，步數累加：

a群 + b群 + c群 + d群 + c群 + b群 + a群



操作	題目	5	柱	10	盤	最高盤容納值
2次	2*n-1	5	柱	4	盤	4
		4	柱	3	盤	3
		3	柱	2	盤	2
1次	2^n-1	2	柱	1	盤	1

➡

操作	題目	5	柱	10	盤	最高盤容納值
2次	2*n-1	5	柱	4	盤	4
		4	柱	3	盤	3
1次	2^n-1	3	柱	3	盤	3

其中「3柱2盤+2柱1盤」操作方式可整併為「3柱3盤」，操作方式一模一樣，就是一個換位法的概念。所以記錄表格更新為右表

對於任意M柱可使用「原始降柱法」的最高盤數，可運用**梯形公式**計算出最高盤數：

$$\frac{[1+(M-1)]\times(M-1)}{2}=\frac{M^2-M}{2}$$

對於任意M柱可使用「原始降柱法」的適用範圍：

$$M\text{柱}M\text{盤}\le\text{原始降柱法}\le M\text{柱}\frac{M^2-M}{2}\text{盤}$$

(四)原始降柱法如何記錄

操作	題目	5	柱	9	盤	步數	小記	總步數
2次	2*n-1	5	柱	4	盤	7	14	27
		4	柱	3	盤	5	10	
1次	2^n-1	3	柱	2	盤	3	3	

使用**讓位法**移動到調節柱暫存再移動到終點柱，所以算2次

最後3柱時，**換位法**直接算出步數。一次操作就達終點，只計算1次。

(五)原始降柱法實作及原理解說

分盤時應該將盤數分配到**讓位法(要算2次)**還是**換位法(只算1次)**，哪一種才能取得最少步數解；根據研究結果，使用「**原始降柱法**」時，不管幾柱，最後分盤都留下3柱3盤，可以使同差距的題型都採用相同方式解完群組內的所有題型。

以下以4柱、5柱、6柱做示範，使用$\frac{M^2-M}{2}-(M-1)$算出使用原始降柱法的個數。

從結果觀察，各組之間，每增加1盤，總步數都多4步，這是因為每增加1盤都代表相較於前1個題目的不同在於要多1盤花費2步移到到**調節柱**暫存，再從調節柱移動到**終點柱**還必須花費2步，總共會多$2\times2=4$步。

最少步數		M柱數			
		3	4	5	6
N盤	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3
	3	7	5	5	5
	4	15	9	7	7
	5	31	13	11	9
	6	63	17	15	13
	7	127		19	17
	8	255		23	21
	9	511		27	25
	10	1023		31	29
	11	2047			33
	12	4095			37
	13	8191			41
	14	16383			45
	15	32767			49

讓位法

原始降柱法

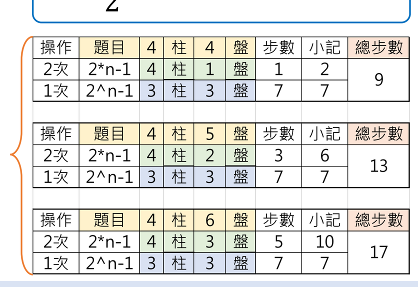
換位法

4柱降柱法

4柱原始降柱有幾組

$$\frac{4^2-4}{2}-(4-1)=3\text{組}$$

與前組差4步

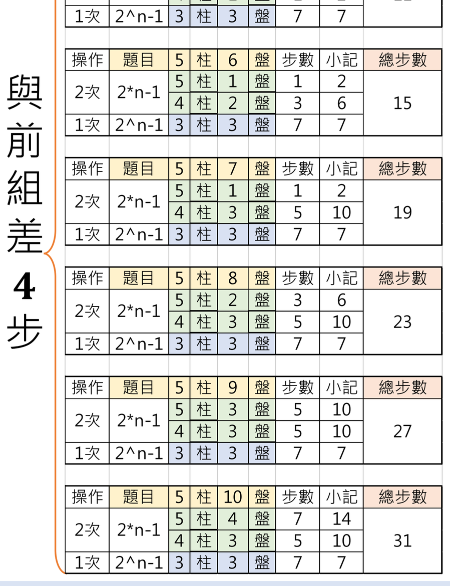


5柱降柱法

5柱原始降柱有幾組

$$\frac{5^2-5}{2}-(5-1)=6\text{組}$$

與前組差4步

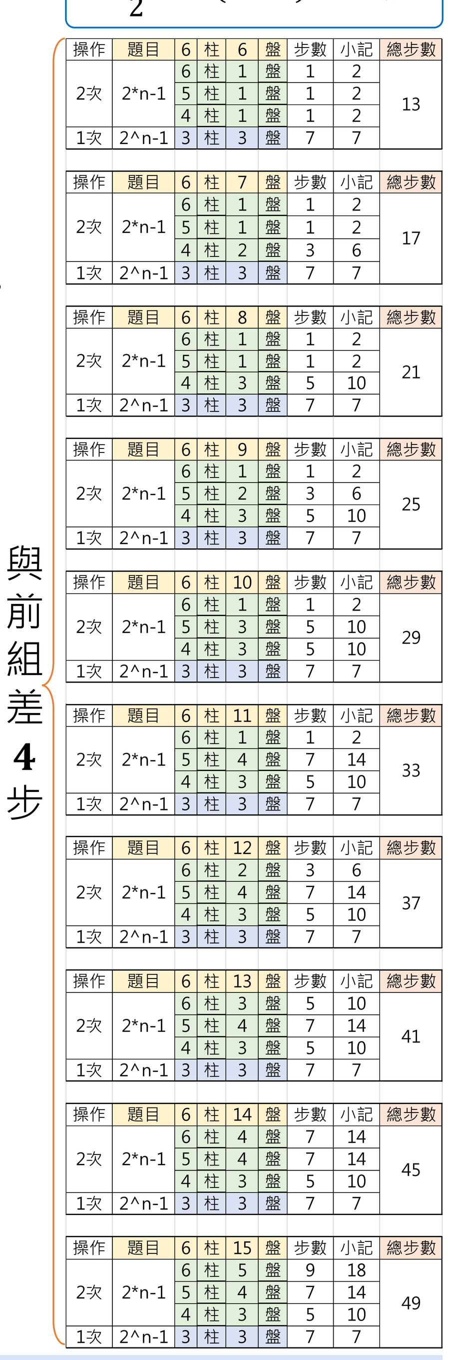


6柱降柱法

6柱原始降柱有幾組

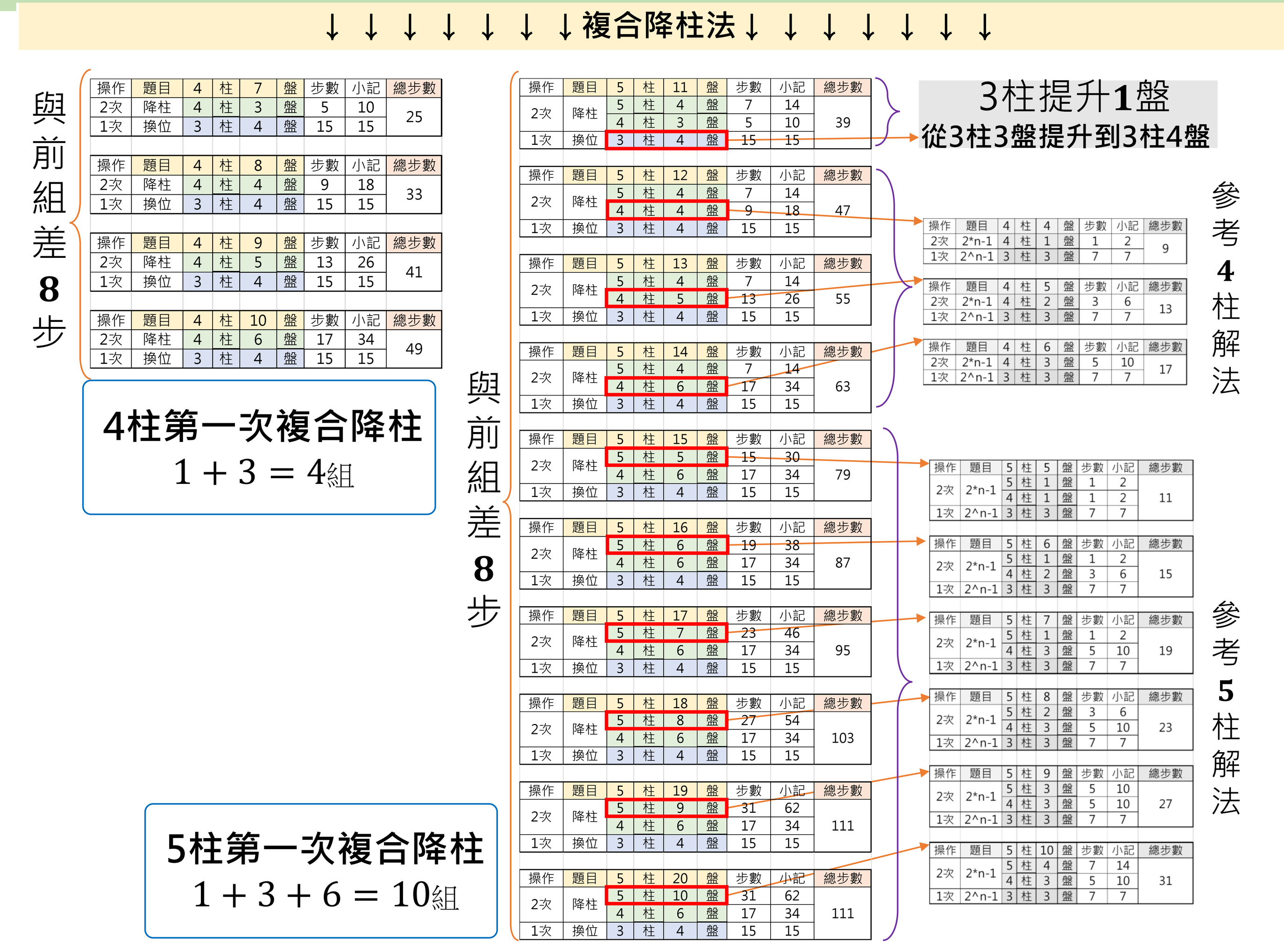
$$\frac{6^2-6}{2}-(6-1)=10\text{組}$$

與前組差4步



↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑原始降柱法↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓複合降柱法↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓



4柱第一次複合降柱

$1+3=4$組

5柱第一次複合降柱

$1+3+6=10$組

四、探討「複合降柱法」的分盤技巧與最少步數解

(一)複合降柱法實作

從研究結果已知，對於任意M柱來說：盤數$N\le M-1$的話，使用「讓位法」解題，題數間差距2步；盤數$N\ge M$，且$N\le\frac{M^2-M}{2}$的話，使用「原始降柱法」，可以使用的題數參考分盤後「讓位法」的題數，題數間差距4步；盤數$N>\frac{M^2-M}{2}$的話，可使用**「第一次複合降柱法」**，但盤數N最大到幾盤為適用範圍，還需參考分盤後**「原始降柱法」**的題數，可確定的是，題數間差距來到8步，從以上結構我們發現，每次分盤降柱需參照較少題數的最佳解題法，先分盤到調節柱再移動到終點柱，動作會反覆地重複，因此，**題數間差距為2的指數成長**，但對於M柱來說，有多少題目適用何種方法，從**「複合降柱法」**開始，還沒找到公式直接計算，以及分盤要如何選擇才能最有效率，因此，進一步以**有限範圍的列舉法**進行討論。

我們以**4柱4盤**以上需要使用**「降柱法」**技巧的類型進行研究，列舉分盤降柱時，應該分出幾盤先到「調節柱」(這部分要被計算2次，因為還要到終點柱)，剩下來的盤數以3柱的技巧解題，這可套用**「換位法」**(只需操作1次，因為完成時會在終點柱)的所有可能。

我們把不同分法由左而右分別鎖定3柱分盤分6、5、4、3、2、1盤，剩下來的盤分給操作2次的部分；再由上而下列舉4柱4盤到16盤，討論**分盤技巧**的選擇

以4柱討論「降柱法」規律

「降柱法」的核心精神就是**分盤降柱**，所以隨著盤數增加，每一次新增的盤必須面臨要將它分配到**操作2次(去調節柱暫存)**或**操作1次(以3柱換位法直接到終點柱)**的選擇。透過上面實作的討論可以發現，我們將每一個題目的選擇都做了列舉討論，若求出的步數不是最少步數，我們就將那個配對組合反灰，若求出的步數是最少步數Q，那就保持彩色的形式。

研究發現**題目與前一題的差距**會呈現以下的規律：

差距 4步的有 3題(最後分盤：3柱放3盤)，是使用**原始降柱法**解題。

差距 8步的有 4題(最後分盤：3柱放4盤)，是使用**第一次複合降柱法**解題。

差距16步的有5題(最後分盤：3柱放5盤)，是使用**第二次複合降柱法**解題。

因此，發現4柱題型「題數間步數差距」與「相同差距題數」有其規律，可依此類推。

「題數間步數差距」規律為2的指數成長，與前面的討論結果一致，因為部分盤到調節柱是使用前面題型最佳效率解法，而還必須以相同方式移動到終點柱，所以反覆參考步數的過程中，就會不斷地以2的指數成長，形成後一題與前一題的總步數差距為2的指數。

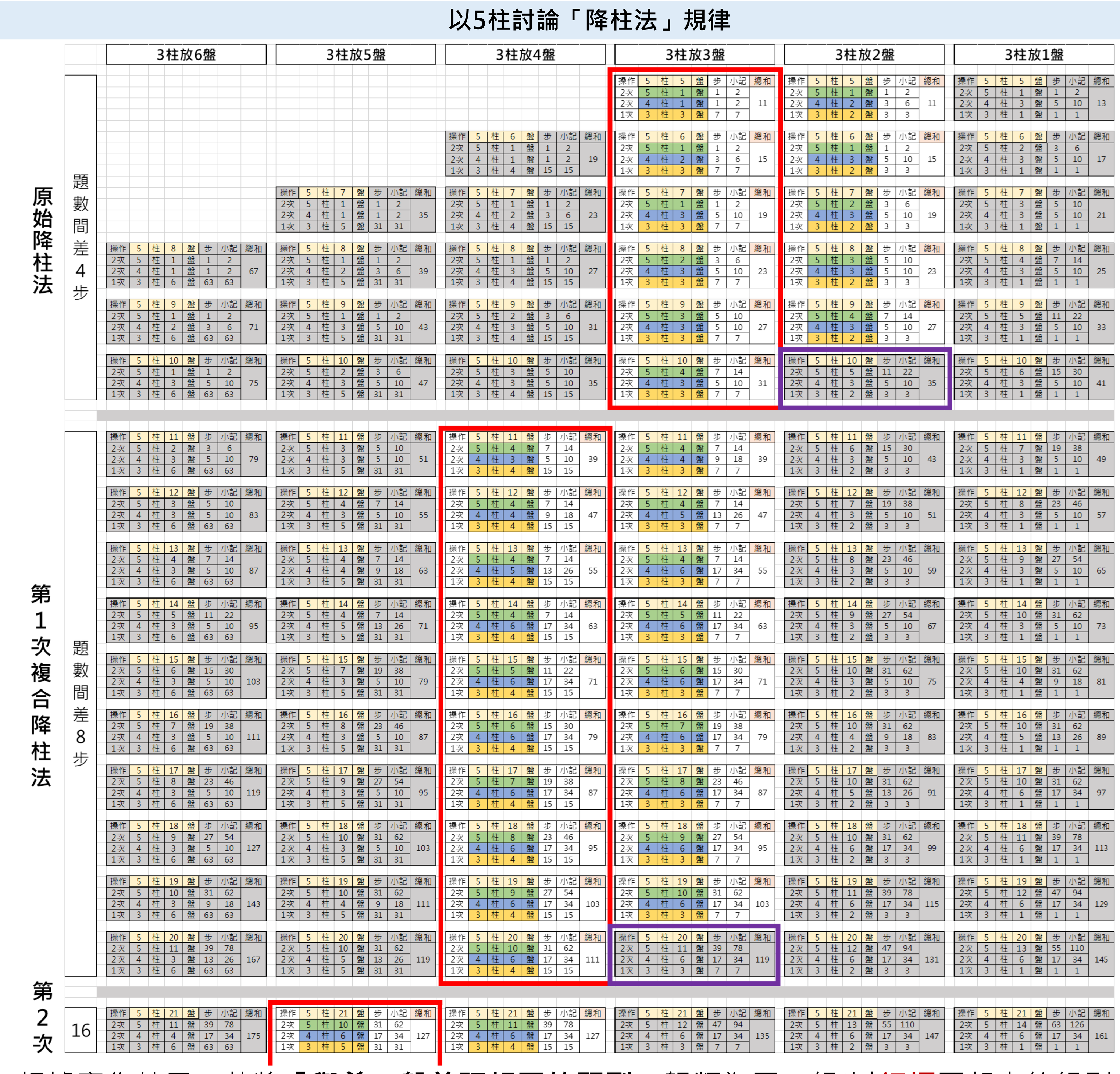
「相同差距題數」規律為連續正整數，從列舉題型觀察到**「題數間步數差距」**相同時，分給3柱的盤數可以相同。比方說「4柱4盤」到「4柱6盤」，都能從**分盤**給**「3柱3盤」**得**最少步數Q**，雖然「4柱4盤」與「4柱5盤」，分盤給**「3柱2盤」**也能得**最少步數Q**，但以分盤降柱給**「3柱2盤」**的概念解「4柱6盤」時，得到的步數卻不是最少步數。

因此，我們認為**「題數間步數差距」**相同時，既然可以分盤給3柱時，分出相同盤數，那麼就盡量採用相同的規律技巧來處理同組的題型，如此一來就有機會找到一致的操作流程來破解後續的題型。

「4柱4盤」到「4柱6盤」都屬於**「題數間步數差距4步」**，因此分盤選**「3柱3盤」**為一致性解法。當盤數增加，來到「4柱7盤」時，分盤降柱有2個選擇：可分盤**3柱3盤**或**3柱4盤**都得最小步數Q，「4柱7盤」到「4柱10盤」都屬於**「題數間步數差距8步」**，因此，以一致性解法來看，分盤選擇要以**「3柱4盤」**，就能以相同概念解差距8步題型。

因此，可以得到一個小結論，當盤數N繼續遞增，必須改變**「題數間步數差距」**時，先將增加的盤分配到3柱使用換位法，再繼續增加盤數時，才將新增的盤分配到調節柱暫存(操作2次)。

以5柱討論「降柱法」規律



根據實作結果，若將**「與前一盤差距相同的題型」**歸類為同一組(以紅框圈起來的組別)，可以發現**共同點為3柱的分盤都是一樣的題型**。比方說，只要是與前一題型差距8步的題目，在最後分盤時都要分3柱4盤，其他盤再依序分給降柱的部分，一直加盤，直到總步數差距變成16步時停止。

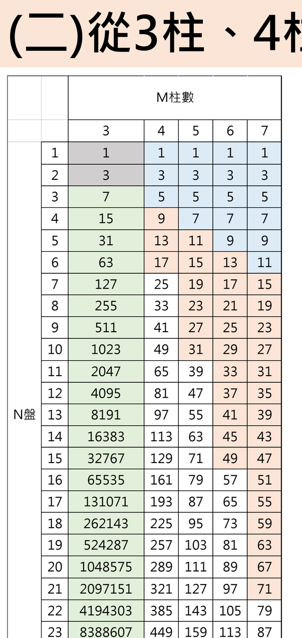
所以得到一個結果，只要改變差距時，先改變3柱的分盤，接下來再依序增加降柱的盤數。

因此，這樣相同差距的組數就可預測。一定會先加1，因為3柱提升1盤，接下來增加盤數給降柱的部分，而降柱的部分最高極限值會是多少，才會使得總差距維持在同一組內呢？

必須使用前一個題型的操作解法，且差距步數為一半的題型，因為降柱代表必須移動2次，所以步數會乘以2，所以**關鍵在於差距步數為一半的題型有幾題**。所有的題目都是依此類推，只要從數量小的題目慢慢推理過來，就可以知道任何題型相同差距的題數有幾題。

所以**如果差距知道，且還能推理出有幾組，那只要累加差距就可以完成任何題型的推算了**。

(二)從3柱、4柱與5柱實作的差距紀錄表找規律



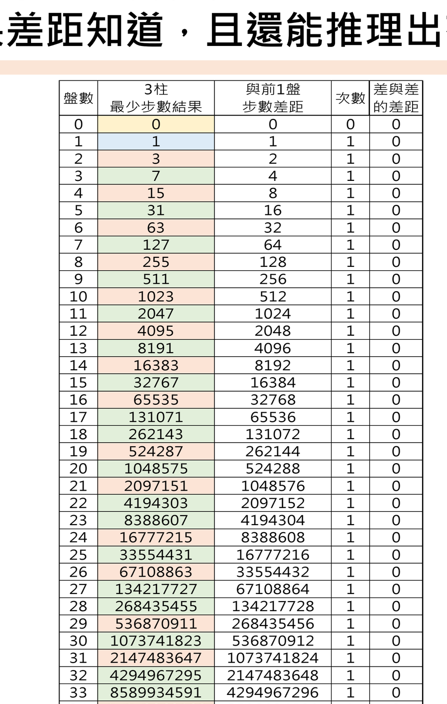
我們根據四種操作方式完成3柱、4柱與5柱各類型的最少步數計算，得到以下的表格，可以發現差距的出現是非常有規律的，**這是因為回歸到最原始的操作，都是讓位法**。隨著盤數與柱數的差距越來越大，就會依序使用原始降柱、複合降柱，再來就是換位法。

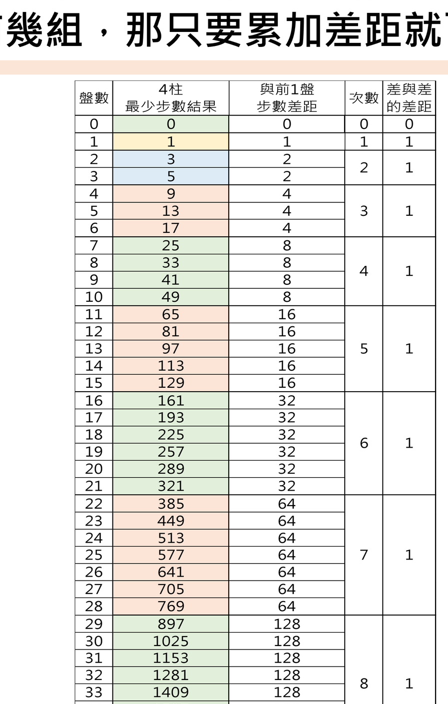
3柱相同差距出現的次數只會有**1**次，但若把**1數列**前後數相減，差與差的差距會回歸到都是**0**。 。

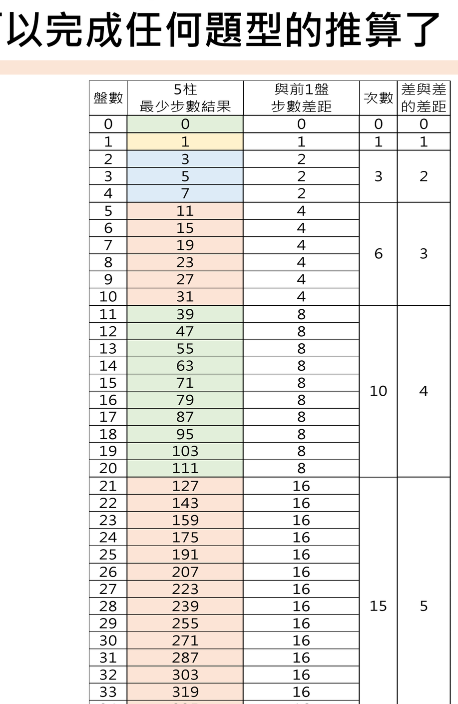
4柱相同差距出現次數為**連續正整數**，但若把連續正整數前後數相減，差與差的差距會回歸到都是**1**。

5柱相同差距出現次數為**三角形數**，但若把三角形數前後數相減，差與差的差距會回歸到**連續正整數**。

從這裡我們得到重要的結果，再繼續增加柱數，差距出現的次數是可以透過累加算出來的。







五、探討「M柱N盤河內塔最少步數解」的速算技巧

(一)M柱N盤解題技巧

3柱的題型中，1盤與2盤都可使用讓位法或換位法，3盤可使用原始降柱法或換位法，而對於任意3柱N盤的題目來說，都使用換位法2^n-1算出最少步數解。

4柱以上的題目，又多了調節柱，所以解題操作方式有了變化。對於N盤來說，隨著盤數增加，解題都先使用讓位法，接下來使用原始降柱法，再來使用複合降柱法。

(二)差距為2的指數成長且出現次數有規律

根據我們的研究，原始降柱法其實讓位法的延伸，而複合降柱法是原始降柱法的延伸。**兩者的概念都是在解題過程中，採用前一層次的解題技巧將盤數先暫存在調節柱，再以相同模式移動到終點柱。**因此，在計算步數上會有部分步數被計算2次。當盤數N越來越大，我們便需要不斷地重複使用前一層次的解題技巧，因此步數差距就會反覆地被重複計算，而呈現1、2、4、8、16、32...等2的指數形式。而我們研究又發現，差距出現的次數是有規律的，以4柱與5柱來說明

解題策略	**直接解題**	**讓位法**	**原始降柱法**	**第1次複合降柱法**	**第2次複合降柱法**
題目間差距	差**1**步	差**2**步	差**4**步	差**8**步	差**16**步
最後分盤(換位)	**3柱放1盤**	**3柱放2盤**	**3柱放3盤**	**3柱放4盤**	**3柱放5盤**
4柱題型					
適用幾盤 **(四柱)**	4柱1盤	4柱2盤	4柱4盤(使用4柱1盤直解)	4柱7盤(使用4柱3盤讓位)	4柱11盤(使用4柱6盤原始降柱)
		4柱3盤	4柱5盤(使用4柱2盤讓位)	4柱8盤(使用4柱4盤原始降柱)	4柱12盤(使用4柱7盤複合降柱)
			4柱6盤(使用4柱3盤讓位)	4柱9盤(使用4柱5盤原始降柱)	4柱13盤(使用4柱8盤複合降柱)
				4柱10盤(使用4柱6盤原始降柱)	4柱14盤(使用4柱9盤複合降柱)
					4柱15盤(使用4柱10盤複合降柱)
各組個數	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
5柱題型					
適用幾盤 **(五柱)**	5柱1盤	5柱2盤	5柱 5 盤(5柱1盤直解+4柱1盤直解)	5柱11盤(5柱4盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱21盤(5柱10盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)
		5柱3盤	5柱 6 盤(5柱1盤直解+4柱2盤讓位)	5柱12盤(5柱4盤讓位+4柱4盤原始降柱)	5柱22盤(5柱10盤原始降柱+4柱 7 盤複合降柱)
		5柱4盤	5柱 7 盤(5柱1盤直解+4柱3盤讓位)	5柱13盤(5柱4盤讓位+4柱5盤原始降柱)	5柱23盤(5柱10盤原始降柱+4柱 8 盤複合降柱)
			5柱 8 盤(5柱2盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱14盤(5柱4盤讓位+4柱6盤原始降柱)	5柱24盤(5柱10盤原始降柱+4柱 9 盤複合降柱)
			5柱 9 盤(5柱3盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱15盤(5柱 5 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱25盤(5柱10盤原始降柱+4柱10盤複合降柱)
			5柱10盤(5柱4盤讓位+4柱3盤讓位)	5柱16盤(5柱 6 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱26盤(5柱11盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱17盤(5柱 7 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱27盤(5柱12盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱18盤(5柱 8 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱28盤(5柱13盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱19盤(5柱 9 盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱29盤(5柱14盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
				5柱20盤(5柱10盤原始降柱+4柱6盤原始降柱)	5柱30盤(5柱15盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱31盤(5柱16盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱32盤(5柱17盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱33盤(5柱18盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱34盤(5柱19盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
					5柱35盤(5柱20盤複合降柱+4柱10盤複合降柱)
各組個數	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**
個數公式	**1**	$M-2$	$(M\text{^}2-M)/2-(M-1)$		

從我們的研究整理表格可發現任何**M柱使用第X次複合降柱法的解題題數**，是由前者的**直接解題**、**讓位法**、**原始降柱法與前次複合降柱法**堆疊出來的，而前3者我們都已經研究出個數公式，所以可透過這個基礎，算出任意M柱在直接解題、讓位法與原始降柱法分別的個數後，依序堆疊出M柱X次複合降柱法的個數，概念如下：

$$M\text{柱使用第}X\text{次複合降柱法的解題題數} = M\text{柱使用第}X-1\text{次複合降柱法的解題題數} + M-1\text{柱使用第}X\text{次複合降柱法的解題題數}$$

依此類推，就能建立任意M柱的差距個數表，運用這個方式我們就能**破解算出任意M柱N盤河內塔最少步數需要幾步**。

(四)差距表算最少步數的基本邏輯

我們已知差距是2的指數翻倍成長，也能計算差距相同時出現的次數，因此只要將所有差距累加起來，就能找出該題的最少步數解，以5柱17盤為例，最少步數87步

同差距個數	0	1	3			6						7						
5柱題型	0盤	1盤	2盤	3盤	4盤	5盤	6盤	7盤	8盤	9盤	10盤	11盤	12盤	13盤	14盤	15盤	16盤	17盤
最少步數解	0	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31	39	47	55	63	71	79	87
與前一題步數差距	**0**	**1**	**2**	**2**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**

$$1\times1+2\times3+4\times6+8\times7=87$$

or

$$2^0\times1+2^1\times3+2^2\times6+2^3\times7=87$$

(五)透過EXCEL軟體完成差距表

根據研究差距規律，只要在7個位置寫入數字或公式，透過**EXCEL自動填滿**功能，就可**以往下或往右拖曳完成差距表**，並且根據實際需求建立不同大小的表格。

差距遞增規律，為2的指數成長，完成每一回合的步數差			柱數M從3開始遞增		相同步數差出現的次數，正好等於巴斯卡三角形，運用此概念完成相同差距出現次數	
A3	A4	B3	E2	F2	E3	F4
填數字**0**	填數字**1**	填公式$=2\text{^}A3$	填數字**3**	填數字**4**	填數字**1**	填公式$=F3+E4$
選取A3與A4，使用自動填滿 往下拖曳完成**2的次方**		使用自動填滿 往下拖曳完成**與前題差距**	選取E2與F2，使用自動填滿 往右拖曳完成**柱數M**		使用自動填滿**往右**拖曳完成**直接解題個數**； **往下**拖曳完成「**換位法」差的重複出現次數**	使用自動填滿**往右**及**往下**拖曳完成**完整差距表**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	差距表		如何計算差距使用的次數		柱數M																	
2	2的次方	差距	解題法	差距次數的公式	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	0	1	直接解題	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	讓位法	(M-1)-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	2	4	原始降柱法	(M^2-M)/2-(M-1)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171
6	3	8	第1次複合降柱法	每一格的個數 = 上方1格 + 左邊1格	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140
7	4	16	第2次複合降柱法		1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	5985
8	5	32	第3次複合降柱法		1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	20349	26334
9	6	64	第4次複合降柱法		1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	54264	74613	100947
10	7	128	第5次複合降柱法		1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	116280	170544	245157	346104
11	8	256	第6次複合降柱法		1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	203490	319770	490314	735471	1081575
12	9	512	第7次複合降柱法		1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930	497420	817190	1307504	2042975	3124550
13	10	1024	第8次複合降柱法		1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646	1144066	1961256	3268760	5311735	8436285
14	11	2048	第9次複合降柱法		1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078	2496144	4457400	7726160	13037895	21474180
15	12	4096	第10次複合降柱法		1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156	5200300	9657700	17383860	30421755	51895935

(六)速算公式的運用

建立好差距表後，M柱N盤河內塔題目就能透過查表進行最少步數的計算，先根據柱數M找到正確M欄，接下來根據N盤的數值，依序減去第3列以後的數字，直到結果為負值，最後一個減數之前的所有數字就是各組2的次方差距所使用的個數，剩下來的商就是下一組2的次方差距所使用的個數，將所有差距相加就是M柱N盤最少步數解。

以9柱100盤為例，先找到柱數9那一欄，將100依序減掉1、7、28，再減掉84後就為負值。所以1、7、28就分別是差距1、2、4所使用的次數，在減去84之前的商為64。因此9柱100盤的最少步數解為：$1\times1+2\times7+4\times28+8\times64=639$步。

肆、研究結論

一、透過逆解的概念，可以分析解題策略的是否為最佳解

逆解核心：最大盤必須一次到位。對於我們討論任意解題策略都能透過逆解方式，反覆將分盤後當時的最大盤1次到目標柱，將拆解後的題目反過來逐步堆疊出最少步數。

二、對於任意N盤題目有最少步數解合理範圍

若$M>N$，使用**讓位法**解題，其公式為$2\times N-1$。除了最大盤只要1步之外，其他每一盤步數也都只用了2步，是河內塔題型中最有效率的走法；而限制最多的走法是M=3柱的類型，從起點柱每次要移動盤時，其他柱的盤必須不斷地換位把柱數空出來，此為**換位法**，公式為2^N-1，是河內塔題型中最複雜的走法。

因此，以N盤固定的角度來思考，改變M柱會使題目變得困難也會變得簡單，而最少步數解法一定會落在**讓位法**與**換位法**兩曲線之間(合理範圍)。

三、任意M柱N盤河內塔，解題可分：讓位法、換位法、原始降柱法與複合降柱法。

對於任意3柱的題型，使用換位法是最有效率的解題策略

對於4柱以上題型，都隨著N變大，依序使用4種解題策略。當$N\le M-1$時，可使用「讓位法」解題，題數間差距2步；當$N\ge M$，且$N\le\frac{M^2-M}{2}$時，使用「原始降柱法」，題數間差距4步；當$N>\frac{M^2-M}{2}$時，使用**「第1次複合降柱法」**，題數間差距8步，隨著N值繼續變大，將陸續使用**第1次、第2次...第i次複合降柱法**，題數間差距為**2的指數成長**。所以接下來的題數間差距就會是**16、32、64、128...**以**2的指數**成長下去。

四、運用4種解題的概念，可建立M柱N盤的差距個數表，並使用查表方式可以快速算出任意M柱N盤河內塔最少步數解。

任何讀者都能根據我們的研究結果，按照規律完成**差距表**，再根據M柱N盤從差距表依序對應不同組的差距(2的次方)使用了幾次，將所有差距累加就是**最少步數解Q**。

為什麼差距是呈現2的次方，是因為**複合降柱法**是以**原始降柱法**為基礎，而**原始降柱法**是以**讓位法**為基礎，若降柱法需要將部分盤暫存**調節柱**再移到**終點柱**，所以相同的動作做了2次，而且這個過程會因為柱數不足而反覆地操作，那步數的差距就會呈現翻倍的成長。

M柱N盤題型能使用**「讓位法」**與**「換位法」**都已整理出公式，而**「降柱法」**是複合使用前兩者技巧，因此當我們要了解複合降柱法差距的個數時，只要運用前者的公式累加就可以完整了解降柱法每一組的差距個數。

五、運用差距表列舉30柱25盤的河內塔最少步數解

最少步數列表		M柱																											
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	3	7	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	4	15	9	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	5	31	13	11	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	6	63	17	15	13	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	7	127	25	19	17	15	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
	8	255	33	23	21	19	17	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
	9	511	41	27	25	23	21	19	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
	10	1023	49	31	29	27	25	23	21	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
	11	2047	65	39	33	31	29	27	25	23	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
	12	4095	81	47	37	35	33	31	29	27	25	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
N盤	13	8191	97	55	41	39	37	35	33	31	29	27	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	14	16383	113	63	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
	15	32767	129	71	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29
	16	65535	161	79	57	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31
	17	131071	193	87	65	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
	18	262143	225	95	73	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
	19	524287	257	103	81	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37
	20	1048575	289	111	89	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39
	21	2097151	321	127	97	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	41	41	41	41	41	41	41	41
	22	4194303	353	143	105	79	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	43	43	43	43	43	43	43
	23	8388607	385	159	113	87	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	45	45	45	45	45	45
	24	16777215	417	175	121	95	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	47	47	47	47	47
	25	33554431	449	191	129	103	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	49	49	49	49