中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080412

拓荒者的策略

學校名稱：彰化縣彰化市中山國民小學

作者：	指導老師：
小六 顏宏宇 小六 劉秉勳 小六 林士洋 小五 洪宇宸 小五 陳彥宇 小五 楊尚衡	陳瑩柔

關鍵詞：塗色法、箭頭法、標準生成樣式

摘要

本研究旨在建立拓荒者遊戲之贏棋樣式策略導向模式，由觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得結果如下：

一、確立3×3、4×4、5×5……n×n拓荒者遊戲的研究方向為探討贏棋樣式策略導向模式。

二、找到3×3、4×4、5×5……n×n拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式並提出公式。

三、找到3×3、4×4、5×5……n×n拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式，並證明任何樣式皆可透過空格與棋子的移動還原成標準生成樣式。

四、確立3×3、4×4、5×5……n×n拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式，並能論證可快速構成四種標準生成樣式的三個特性。

五、建立贏棋樣式策略導向模式。

壹、 研究動機

有一天，我們發現一個有趣的數學遊戲叫「拓荒者遊戲」，遊戲規則是：在 3×3 方格紙上的每一個方格內放入一個棋子，兩個玩家猜拳決定誰為先手，遊戲規則有三條：1.兩位玩家輪流拿走棋子；2. 一次只能拿走一個棋子；3. 輪到拿棋子者，在取走棋子後，必須讓每一行及每一列至少留下一個棋子。最後合法拿走棋子者，即為優勝者，如圖 1-1-1 所示。我們想知道最多拿掉幾個棋子及最少拿掉幾個棋子，就能結束遊戲？此外，在玩完 3×3 拓荒者遊戲之後，我們也想了解在 4×4、5×5、6×6……n×n 的拓荒者遊戲中有何策略可以快速結束遊戲？有沒有可能找出贏棋的判準與樣式？

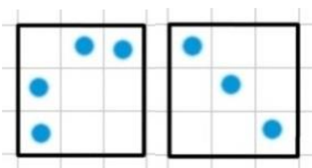


圖 1-1-1 3×3 棋盤上結束遊戲時的結果示意圖

貳、 名詞釋義

一、 塗色法：

用顏色將贏棋樣式的棋子按照他們在棋盤上管控行列的功能分類；第一類棋子：位置可管控一行及一列，將它塗上黃色；第二類棋子：其位置只能管控一列，將它塗上紅色；第三類棋子：其位置只能管控一行，將它塗上綠色，如圖 2-1-1 所示。

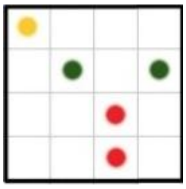


圖 2-1-1 塗色法示意圖

二、箭頭法：

在 n×n 棋盤的上方，用 n 個綠箭頭代表 n 行，在棋盤的左側，用 n 個紅箭頭代表 n 列，以便於對贏棋樣式中要管控的行列數，進行論述，如圖 2-2-1 所示。

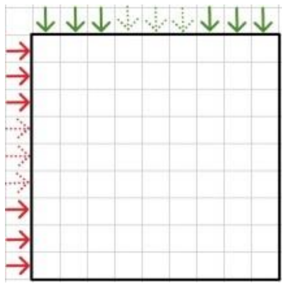


圖 2-2-1 箭頭法示意圖

三、贏棋所需棋子數量的有效區間:

以 6×6 棋盤為例，贏棋所需棋子數量的最小值、最大值分別為 6、10，又棋子數量是 7、8、9 時，也都能構成贏棋樣式，因此，贏棋所需棋子數量有效區間就定為 6-10，如圖 2-3-1 所示。

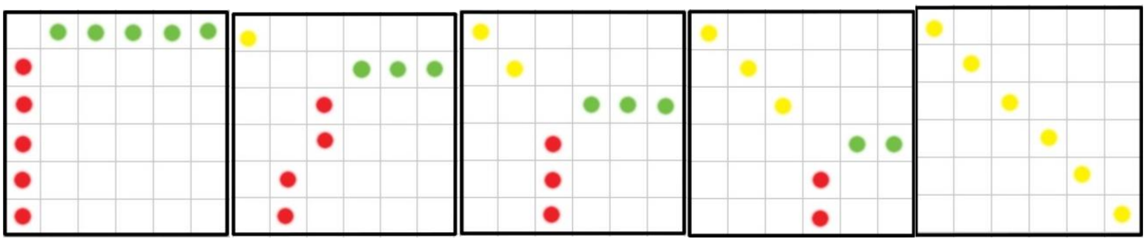
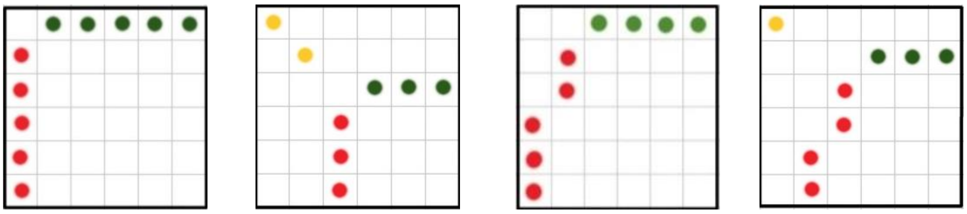


圖 2-3-1 6×6 贏棋樣式有效區間示意圖

四、贏棋樣式的標準生成樣式：

以棋子樣式具有規律性、對稱性的贏棋樣式，定為贏棋樣式的標準生成樣式，且具有以下特徵：以 6×6 為例，所有與標準生成樣式中的三種顏色棋子數量相同的贏棋樣式皆可透過棋子、空格的移動及圖形的旋轉、對稱還原成標準生成樣式，如圖 2-4-1。



N(Y)=0，N(R)=N(G)	**N(Y)>0，N(R)=N(G)**	**N(Y)=0，N(R) >N(G)**	**N(Y)>0，N(R)>N(G)**

圖 2-4-1 標準生成樣式示意圖

參、 研究目的

一、探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲的研究方向。

二、探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式。

三、探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

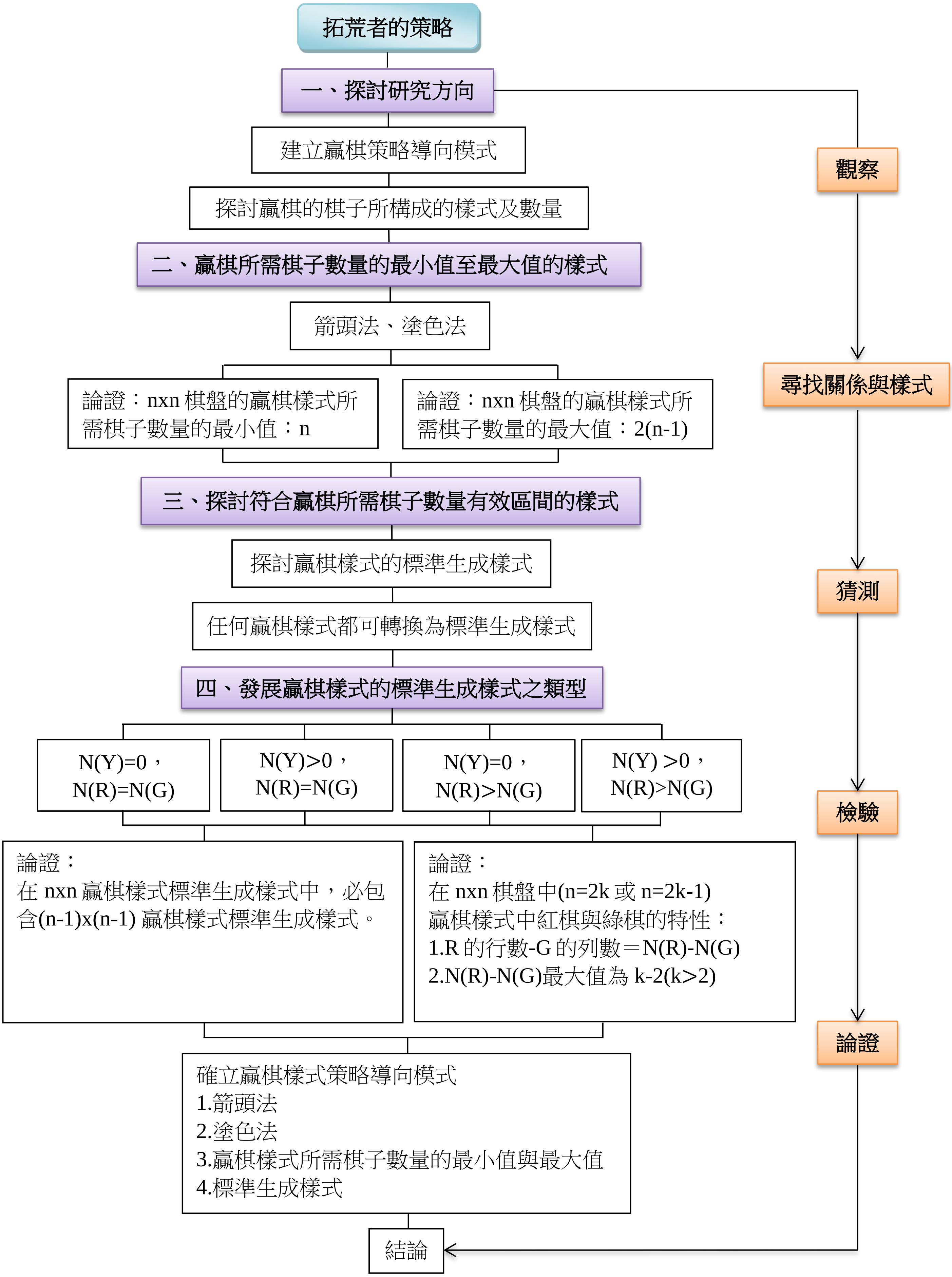
四、發展 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式的類型。

肆、研究設備及器材

繪圖軟體 Doceri、筆、電腦、平板電腦、方格紙。

伍、研究過程及方法

一、研究架構與流程圖



二、研究過程

(一) 探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲研究方向。

1.觀察

一開始我們發現此遊戲時，第一件做的事就如同大部分的人一樣，想要嘗試著玩玩看，我們雖然看到遊戲規則寫著「3×3」方格表，但我們仍然想要體驗各式棋盤大小的遊戲，因此，我們便從 1×1 的方格表開始嘗試，而這時的我們，想要找出的是致勝的方法，但在 1×1 的遊戲中，無法拿走棋子，開始時就勝負已定，不須探討。

接著，我們開始觀察 2×2 的方格表上進行拓荒者遊戲，輪流拿走一個棋子後，後手必勝，如圖 5-2-1 所示，至此，我們發現 2×2 拓荒者遊戲無需探討。

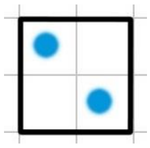
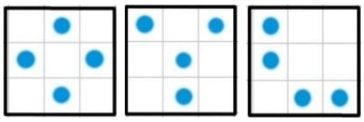


圖 5-2-1 2×2 的拓荒者遊戲結果示意圖

當我們在進行 3×3 拓荒者遊戲對戰時，一開始認為玩家進行遊戲的先後順序應該不會對遊戲勝負造成影響，但後來發現似乎後手較容易贏，這讓我們不禁開始懷疑：「這真的是個公平的遊戲嗎?」，因此我們就對 3×3 拓荒者遊戲過程進行觀察，發現是先手若要贏棋，結束遊戲時的棋子數量必須是剩下四個，而剩下四個棋子的贏棋樣式共有以下三種情形，如 圖 5-2-2 圖 A、圖 B 及圖 C 所示。



A B C

圖 5-2-2 3×3 拓荒者遊戲先手最終能贏棋的贏棋樣式

為分析後手是否較容易贏，我們將先手與後手進行遊戲的過程詳細討論如下，此外，我們也將棋盤上的位置以座標表示以方便說明，如圖 5-2-3 所示。

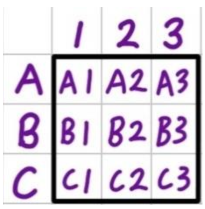


圖 5-2-3 3×3 棋盤座標

我們根據先手開局所取的棋子位置進行以下分類討論：

一、若先手在遊戲開始時先取邊上或中間的棋：

若先手在遊戲開始時先取邊上或中間的棋，則後手在第二步可取邊上或中間的另一棋，例如：當先手取 C2 的棋時，後手可取 B2 的棋子，而當先手取 B2 的棋時，後手可取 C2 的棋子，一旦橘框處的棋子皆消失，則會讓先手無法達成圖 5-2-2 中的 A 贏棋樣式及 B 贏棋樣式，如圖 5-2-4 所示。

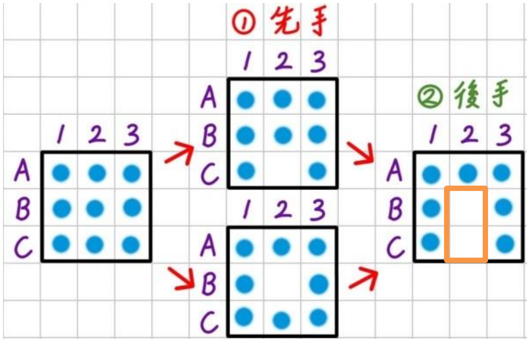
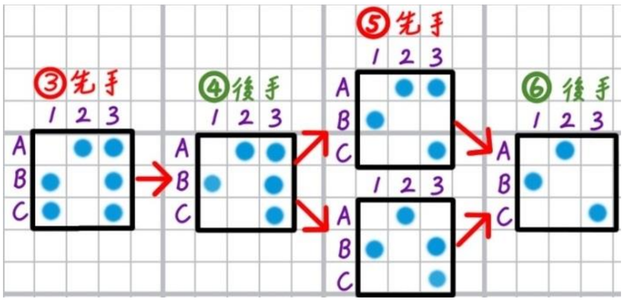


圖 5-2-4 先手在遊戲開始時先取邊上或中間的棋而後手對應的情形

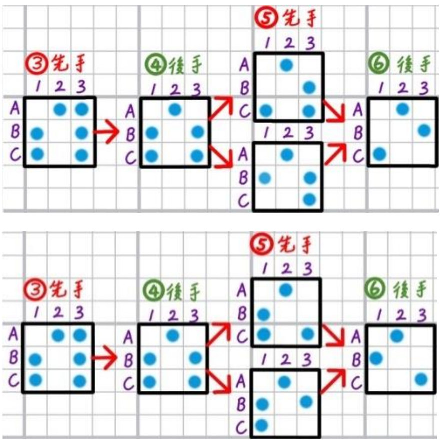
若先手無法達成圖 5-2-2 中的 A 贏棋樣式及 B 贏棋樣式，則只能在接下來的第三步取走 A1 或 B1 或 C1 的棋子以達成圖 5-2-2 中的 C 贏棋樣式。以先手在第三步取走 A1 為例，此時後手在第四步若避免有行及列的剩餘兩顆棋子都在同一行或同一列，就可避免先手達成 C 贏棋樣式，形成後手必勝的局面，但若後手在進行遊戲時未將先手贏棋樣式列入下棋時的考量，隨意亂取棋子，先手就有機會可以贏棋，如圖 5-2-5 所示。

1.後手取 C1



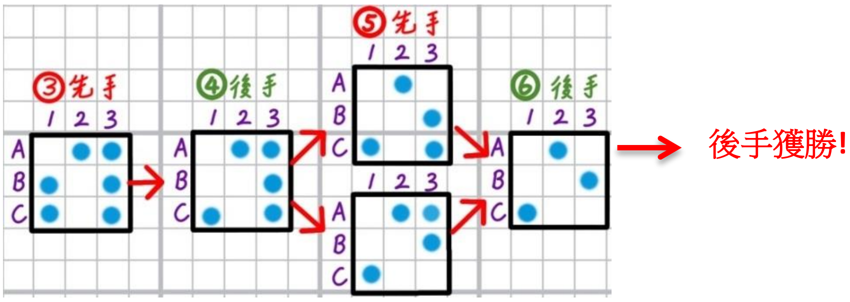
後手獲勝!

2.後手取 A3

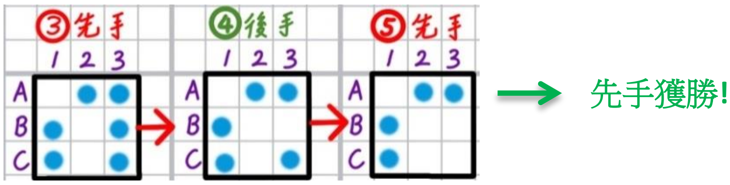


後手獲勝!

3.後手取 B1



4.後手取 B3



5.後手取 C3

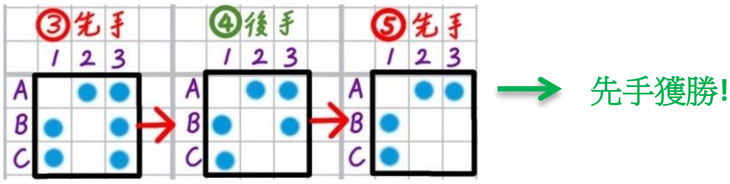


圖 5-2-5 後手在第四步可能的對應的情形及導致的勝負局面

二、若先手在遊戲開始時先取角上的棋：

若先手在遊戲開始時先取角上的棋，則能保留圖 5-2-2 中的三種贏棋樣式，此時，並沒有任何贏棋樣式已被消去，因此後手也不像先手先取邊上或中間的棋時容易應對，但也非無法贏棋，例如，先手取 A1 的棋，此時後手取 B1 邊上的棋，先避免先手形成圖 5-2-2 中圖 A 贏棋樣式，如圖 5-2-6 所示。而各種後手可在第四步應對先手取得圖 5-2-2 中圖 B 及圖 C 贏棋樣式的方式，如圖 5-2-7 所示。

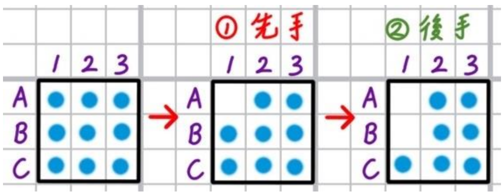
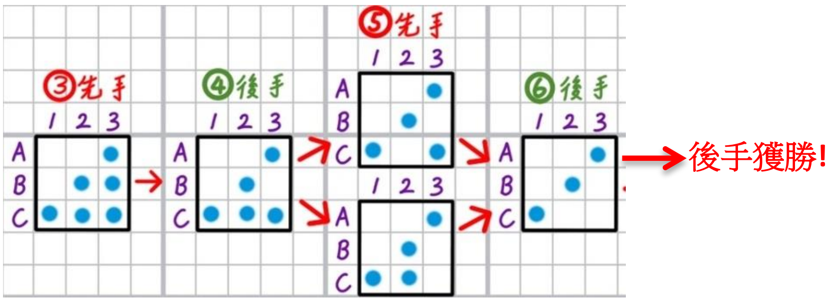
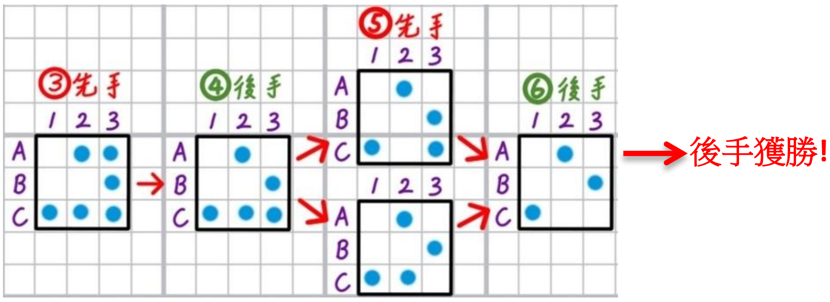


圖 5-2-6 後手為避免先手達成贏棋樣式 A 在第二步所對應的情形

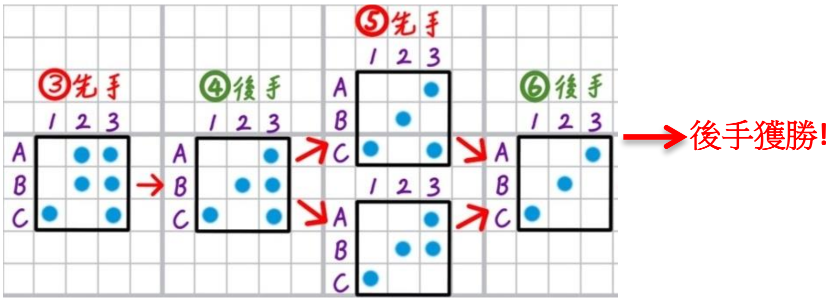
1.先手先取 A2



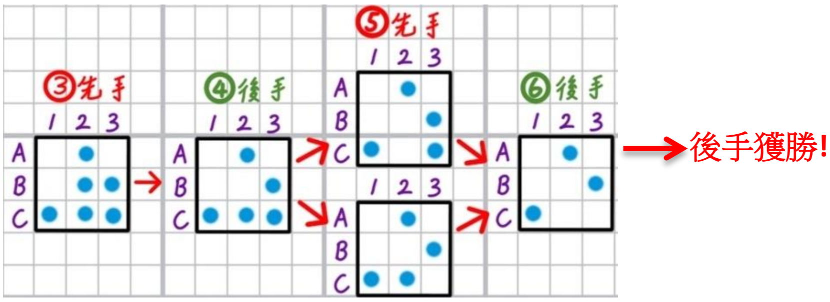
2.先手先取 B2



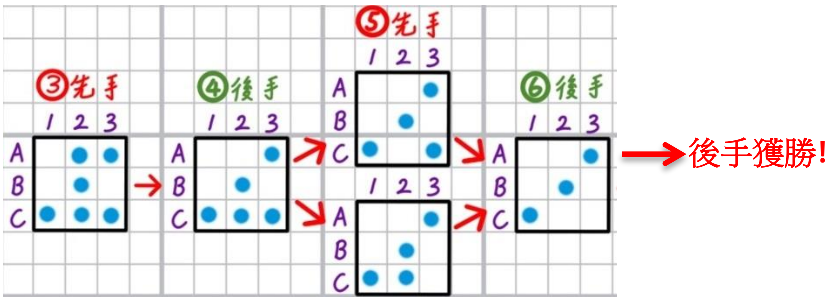
3.先手先取 C2



4.先手先取 A3



5.先手先取 B3



6.先手先取 C3

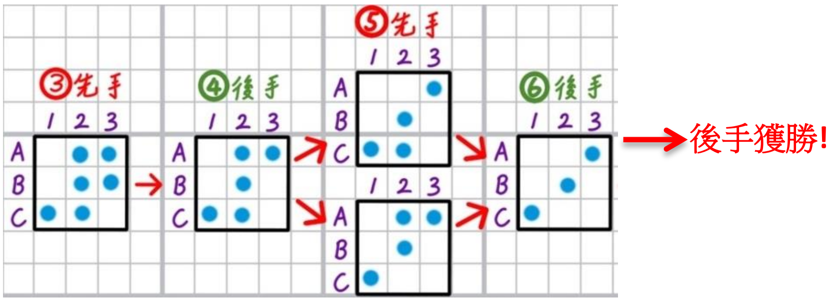


圖 5-2-7 後手在第四步為避免先手達成贏棋樣式 B 及 C 所對應的情形

至此，我們已從對戰過程中確定了後手必勝的原因，而我們又對於後手必勝的情形產生了好奇心：「後手為何必勝?後手的優勢有在哪呢?」，發現後手的優勢其實在於對應先手時，若能存有先手能贏的三個贏棋樣式，如圖 5-2-2 所示，則後手可在先手意圖

製造贏棋樣式時輕易破壞，自然造成後手易勝的情形。

我們在了解 3×3 拓荒者遊戲中後手必勝的情形之後，原本希望繼續尋找 4×4 的先手與後手各種對弈棋局與贏棋的關係，但因 4×4 拓荒者遊戲先手跟後手至少要各走 5 步後才會贏棋，而在這 10 步內有極多的變化，同樣的，若是 5x5 拓荒者遊戲，則先手與後手，分別要各走 9 步及 8 步，而在這 17 步內有更多的變化，若棋盤持續擴大，要分析的量就遠超過我們的研究內容及時間的負荷，因此，我們與老師討論後，轉而將研究方向調整為探討贏棋的棋子所構成的樣式及數量，以建立贏棋策略導向模式，讓玩家能有策略方法判定自己該怎麼下以提高玩家贏棋的機會。

(二) 探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式。

1.觀察：

原始遊戲規則為：在 3×3 的方格表中，雙方玩家輪流拿走棋盤上的棋子，最後合法拿走棋子者，即為贏棋者，遊戲過程如圖 5-2-8 所示：

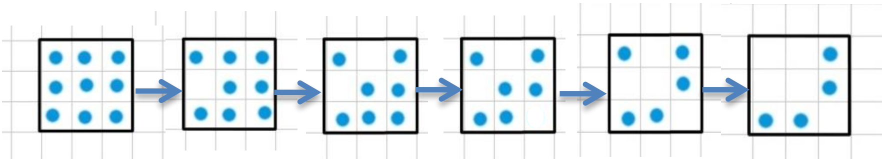


圖 5-2-8 3×3 拓荒者遊戲過程示意圖

我們由前述遊戲規則中得知：3×3 的方格表中，只要有一行或列沒有棋子，就會落敗，因此可推論出，若要贏棋，必須要使每一行或列上都只剩一棋，不能有其他棋子存在，否則尚不會贏棋，而以下是 3×3 拓荒者遊戲的贏棋樣式，如圖 5-2-9 所示，而尚未結束遊戲的情形就是除了每行每列需要保留的棋子外，棋盤上仍存在其他可被拿掉的棋子，如圖 5-2-10 所示。

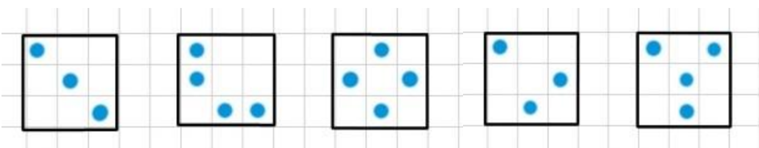


圖 5-2-9 3×3 拓荒者遊戲中的贏棋樣式

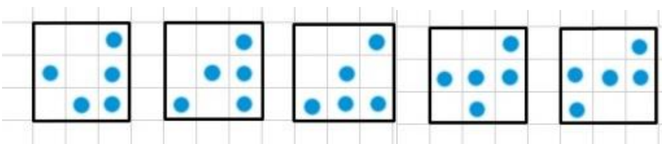


圖 5-2-10 3×3 拓荒者遊戲中非贏棋樣式，即遊戲尚未結束

2.尋找關係與樣式：

了解遊戲規則之後，我們開始嘗試在 3×3 拓荒者遊戲的遊戲中，找出符合贏棋要求的贏棋樣式，我們發現在 3×3 拓荒者遊戲中有兩種不一樣的贏棋樣式棋子數量，分別為 3 個及 4 個，當贏棋樣式棋子數量為 3 個時為後手贏棋，而當贏棋樣式棋子數量為 4 個，則為先手贏棋。我們同時也發現，當贏棋樣式棋子數量為 3 個時，每個棋子皆佔一行及一列，也就代表任一行或列都不會有兩個以上的棋子，如圖 5-2-11 所示，而贏棋樣式棋子數量為 4 個時則必有一行及一列上有二個棋子，也就代表此時各棋子皆只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，如圖 5-2-12 所示。

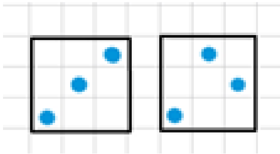


圖 5-2-11 3×3 拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

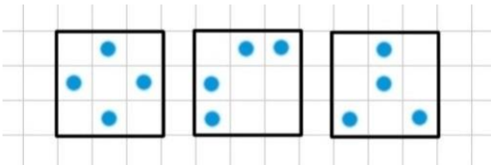


圖 5-2-12 3×3 拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

接著我們繼續觀察 4×4 的遊戲，發現贏棋樣式多了不少，而贏棋樣式棋子數量最小值則變為 4 個，贏棋樣式棋子數量最大值則變為 6 個，此外，當贏棋樣式棋子數量為 4 個時每個棋子皆佔一行及一列，也就代表任一行或列都不會有兩個以上的棋子，而當贏棋樣式棋子數量 6 個時，則必有一行及一列上有三棋，也就代表此時各棋子皆只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，如圖 5-2-13 及圖 5-2-14 所示。

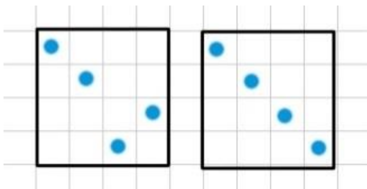


圖 5-2-13 4×4 拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

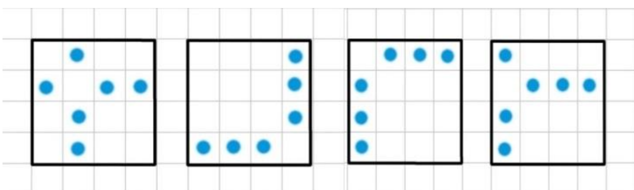


圖 5-2-14 4×4 拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

3.猜測：

透過觀察及尋找關係，我們發現，每個棋子所佔的行列數，跟棋子總數有關，因為棋盤中的總行列數是固定的，若贏棋樣式中的棋子數量越少，每個棋子所負責佔的行列數就需越多，而若贏棋樣式中的棋子數量越多，各自所佔的行列數自然就越少。我們也發現在 3×3 拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為 3，而在 4×4 拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為 4，在 3×3、4×4 拓荒者遊戲中贏棋樣式棋子數量最小值都每個棋子皆佔一行及一列，也就代表任一行或列都不會有兩個以上的棋子，因而在 3×3、4×4 拓荒者遊戲中贏棋樣式棋子數量之最小值都等同邊長的數值。

此外，我們也發現在 3×3 拓荒者遊戲中，當贏棋樣式棋子數量最大值為 4，在結束時，必有一行及一列上有二個棋子，也就代表此時一棋子只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，而在 4×4 拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最大值為 6，在結束遊戲時，必有一行及一列上有 3 個棋子，也就代表此時一個棋子只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，而在同一行及列的棋子數量皆為 (邊長)-1，因而 3×3、4×4 拓荒者遊戲中贏棋樣式棋子數量最大值為(邊長-1)×2，因此，**因此我們猜測在 n×n 方格表進行拓荒者遊戲時贏棋樣式棋子數量最小值為 n，最大值為(n-1)×2。**

4.檢驗：

為了檢驗我們的猜測，我們繼續嘗試畫出 5×5 拓荒者遊戲中的最小值及最大值樣式，發現贏棋樣式棋子數量最小值是 5 個，符合前述猜測最小值為 n 個，即邊長數值，如圖 5-2-15 所示，而在贏棋樣式棋子數量最大值為 8 個，且必有一行及一列上有 4 個棋子，也就代表此時一個棋子只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，因此棋子數量為最大值為(邊長-1)×2，即(n-1)×2，如圖 5-2-16 所示。

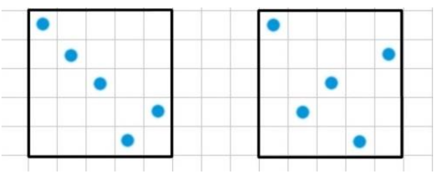


圖 5-2-15 5×5 拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

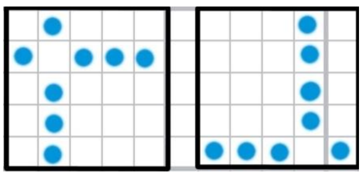


圖 5-2-16 5×5 拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

接著我們繼續進行 6×6 及 7×7 拓荒者遊戲的遊戲，發現贏棋樣式棋子數量最小值

分別為 6 個及 7 個，贏棋樣式棋子數量最大值分別是 10 個及 12 個，如圖 5-2-17、圖 5-2-18、圖 5-2-19 及圖 5-2-20 所示，發現都符合我們前述的猜測，在 n×n 方格表進行遊戲時贏棋樣式棋子數量最小值為 n，最大值為(n-1)×2。

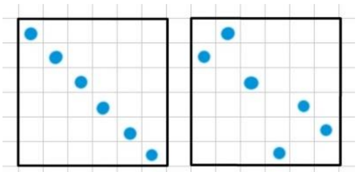


圖 5-2-17 6×6 拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

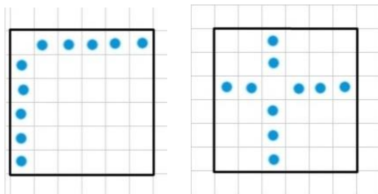


圖 5-2-18 6×6 拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

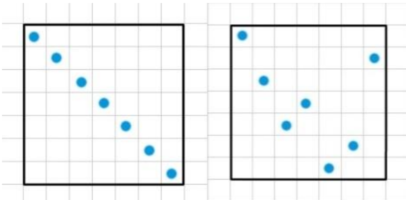


圖 5-2-19 7×7 拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

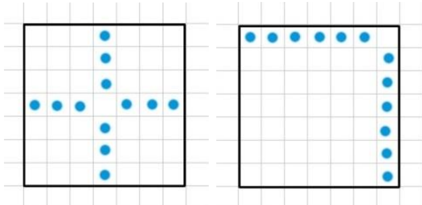


圖 5-2-20 7×7 拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

5.論證：

為了論證贏棋樣式棋子數量最小值必定為 n，最大值必定為(n-1)×2，因此我們開始嘗試運用塗色法將贏棋樣式的棋子按照它們在棋盤上管控行列的功能分類，發現可分三類，第一類棋子：其位置可同時管控一行及一列，為了易於分辨，我們將它塗上黃色；第二類棋子：其位置只管控列，我們將它塗上紅色；第三類棋子：其位置只管控行，我們將它塗上綠色，將棋子分類之後，開始針對之前的猜測進行論證。

命題一：**在 n×n 拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為 n**

論證一：

在 n×n 棋盤中，用 n 個綠箭頭代表 n 行，用 n 個紅箭頭代表 n 列。一個黃棋剛好可管控一對紅綠箭頭，而 n×n 棋盤中恰有 n 對紅綠箭頭，如圖 5-2-21 所示。若用 n-1 個或更少的黃棋嘗試組成贏棋樣式，則會多出 1 對或多對紅綠箭頭無棋管控，無法構成贏棋樣式，由此可證，在 n×n 遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為 n，如圖 5-2-22 所示。

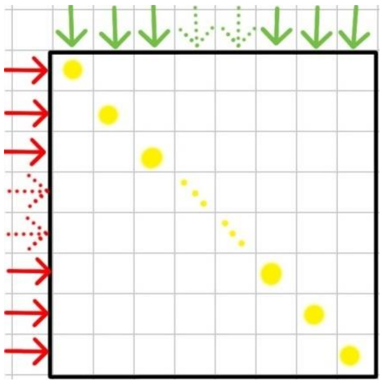


圖 5-2-21 n×n 拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

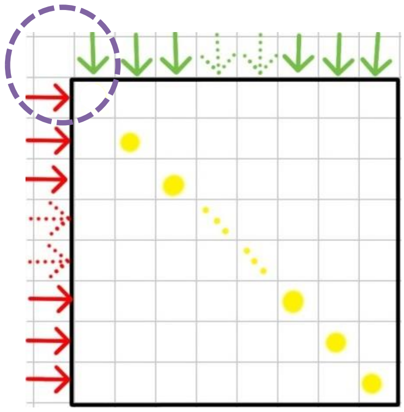


圖 5-2-22 n×n 拓荒者遊戲中無法構成棋子數量最小值的贏棋樣式之情形

命題二：**在 n×n 遊戲中，贏棋樣式棋子數量最大值為 2(n-1)。**

論證二：

在 n×n 棋盤中，用 n 個綠箭頭代表 n 行，用 n 個紅箭頭代表 n 列。一個紅棋子管控一個紅箭頭，一個綠棋管控一個綠箭頭， n-1 個紅棋子可管控 n-1 個紅箭頭，又可由 n-1 連紅棋串管控一個綠箭頭，而剩下的 n-1 個綠箭頭及一個紅箭頭可由 n-1 個綠棋管控，如圖 5-2-23 所示。若自此棋盤上再增放一個紅棋或綠棋，則因所有箭頭都已被管控，因此必被拿除，無法形成贏棋樣式，如圖 5-2-24 所示。由此可證，在 n×n 遊戲中，結束樣式棋子數量最大值為 2(n-1)。

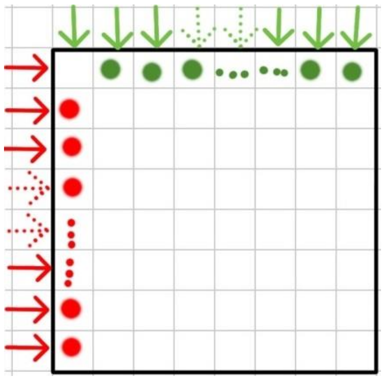


圖 5-2-23 n×n 拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

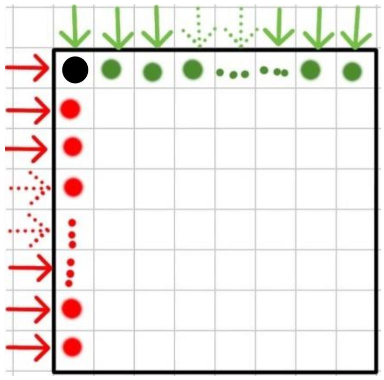


圖 5-2-24 n×n 拓荒者遊戲中無法構成棋子數量最大值的贏棋樣式之情形

(三) 探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

1.觀察：

首先，我們觀察到 2×2 的方格表上進行拓荒者遊戲，因為結束遊戲時棋盤上的棋子數量最大值與最小值皆為 2，且後手必勝，如圖 5-2-25 所示，因此，我們發現不需要探討 2×2 的拓荒者遊戲。

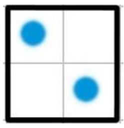


圖 5-2-25 2×2 的拓荒者遊戲結果示意圖

接著，我們開始在 3×3 的方格表上進行拓荒者遊戲，發現遊戲結束時棋局樣式有很多種，但棋子數量的最大值與最小值分別是 4 個與 3 個，也就是棋子數量為 4 個時，則先手贏棋，棋子數量為 3 個時，則後手贏棋，由此可知，先手及後手皆可能贏棋，如圖 5-2-26 所示。

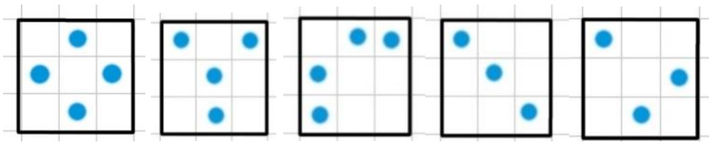


圖 5-2-26 3×3 的拓荒者遊戲結果示意圖

2.尋找關係與樣式：

我們在 4×4 的方格表上進行拓荒者遊戲，發現遊戲結束時棋子數量除了有最大值與最小值，分別是 6 個與 4 個，在最大值與最小值之間，當遊戲結束時棋子數量 5 個棋子時，也可以產生贏棋樣式，而我們就將所有可以產生贏棋樣式的棋子數量，稱為「贏棋所需棋子數量有效區間」，如圖 5-2-27 所示。

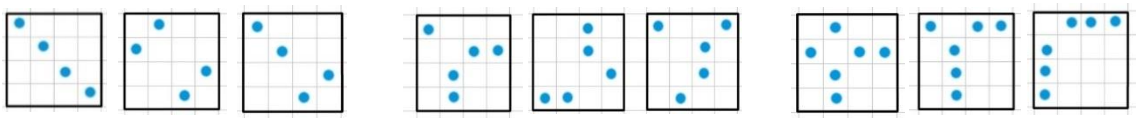
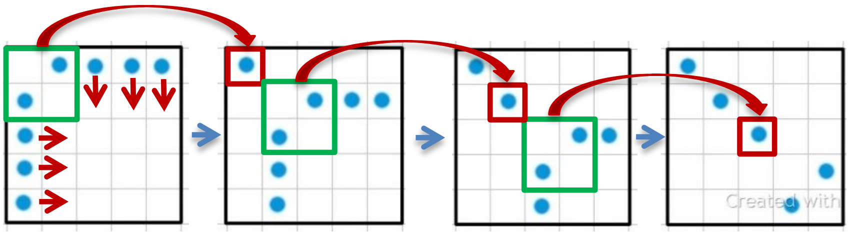


圖 5-2-27 4×4 的拓荒者遊戲贏棋所需棋子數量有效區間：4~6 個

此外，在探討 5×5 拓荒者遊戲的贏棋樣式時，我們也發現 5×5 拓荒者遊戲結束時不同棋子數量的贏棋樣式彼此間似乎有關聯，如圖 5-2-28 所示，圖 A 為 5×5 遊戲結束時棋子數量為最大值，也就是棋子數量為 8 個的贏棋樣式，只要將綠框處的兩個棋子置換成圖 B 紅框中的一個棋子，並調整其他棋子的位置，就可形成圖 B，也就是遊戲結束時棋子數量為 7 個的贏棋樣式，依此類推，若將圖 B 綠框處的兩個棋子置換成圖 C 紅框的一個棋子，並調整其他棋子的位置，就可形成圖 C，將圖 C 將綠框處的兩個棋子置換成圖 D 紅框的一個棋子，並調整其他棋子的位置，就可形成圖 D。從上述的發現，我們認為棋子所在位置會影響遊戲結束時棋子所需數量，為了符合遊戲規則，讓每一行及每一列至少留下一個棋子，當每個棋子所在的位置能控制的行列皆為單行或單列時，如圖 5-2-28 的圖 A 時，棋子數量最大；當每個棋子所在的位置能同時控制單行與單列時，如圖 5-2-28 的圖 D

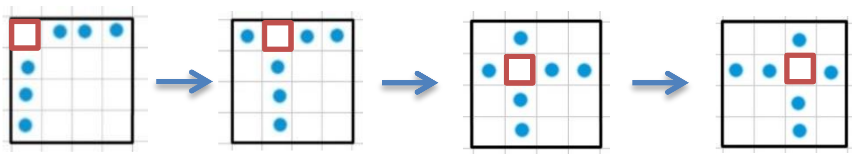
時，棋子數量最小；此外，透過觀察圖 5-2-28 的圖 B、C、D 紅框處的棋子，我們也了解每增加一個可同時控制單行與單列的棋子，就可減少所需的棋子數量，構成 5×5 拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。



A B C D

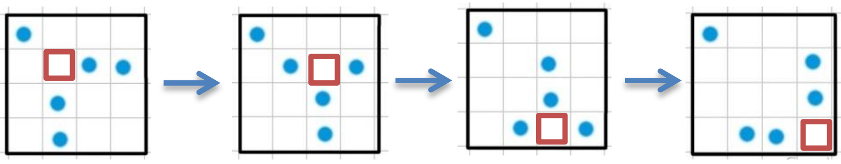
圖 5-2-28 5×5 拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式

此外，在探討 4×4 的拓荒者遊戲的有效區間時，當剩下的棋子個數為 6 個時，我們發現遊戲結果的樣式雖然有多種，但彼此之間似乎有關聯，以圖 5-2-29 中的 A、B、C、D 四圖為例，當空格移動時，為了讓每一行及每一列至少留下一個棋子，棋子的位置也會跟著移動，而透過空格與棋子的移動，就會形成許多不一樣的樣式。而這種現象在剩下的棋子個數為 5 個及 4 個時也有同樣的情形，如圖 5-2-30 和 5-2-31 所示。



A B C D

圖 5-2-29 4×4 贏棋樣式棋子個數為 6 個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式



A B C D

圖 5-2-30 4×4 贏棋樣式棋子個數為 5 個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式

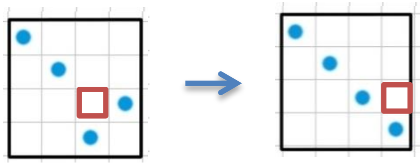


圖 5-2-31 4×4 贏棋樣式棋子個數為 4 個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式

另外，我們持續嘗試在 5×5 的方格表上進行拓荒者遊戲，發現遊戲結束時棋子數量會有 5~8 個不等，而且每一種數量的遊戲結果樣式都比 4×4 更多，但跟 4×4 一樣，如圖 5-2-32 為例，當空格移動時，為了讓每一行及每一列至少留下一個棋子，棋子的位置也會

跟著移動，而透過空格與棋子的移動，就會形成許多不一樣的樣式。

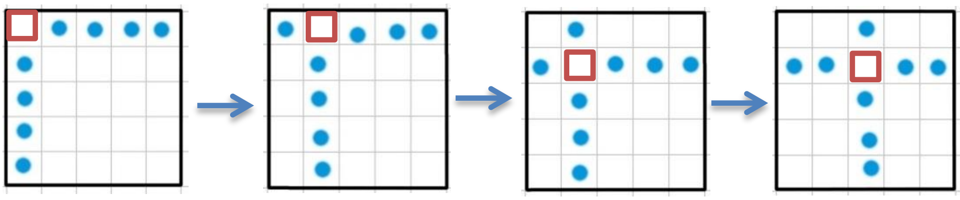


圖 5-2-32 5×5 贏棋樣式棋子個數為 8 個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式

3.猜測：

透過尋找關係與樣式，我們有兩個重大的發現：

(1) 每增加一個可同時控制單行與單列的棋子，就可減少所需的棋子數量，構成 n×n 拓荒者遊　戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

(2) 雖然在同樣規格的棋盤中，在相同贏棋數量遊戲結果中的看似有許多不同的贏棋樣式，但其 實可以透過空格的移動，造成棋子移動，成為相同的樣式。

根據上述發現，我們**將有規律性，對稱性的贏棋樣式訂為「標準生成樣式」，並猜測所有贏棋樣式皆可透過棋子、空格的移動及圖形的旋轉、對稱還原成標準生成樣式。**

4.檢驗：

為了檢驗前述的猜測，我們先根據棋子所在位置所能控制的行、列，發展 5×5 的拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式，以塗色法將單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，如圖 5-2-33 所示，圖 A~圖 D 為 5×5 拓荒者遊戲獲勝所需棋子數量有效區間的標準生成樣式，也就是棋子數量為 5~8 個的標準生成樣式，依此規則著色，圖 A 為遊戲結束時棋子數量為 8 個的標準生成樣式，為 4 個綠色棋子、4 個紅色棋子所組成，圖 B 則為遊戲結束時棋子數量為 7 個的贏棋樣式，為 1 個黃色棋子，3 個綠色棋子，3 個紅色棋子所組成，再將遊戲結束時棋子數量為 6 個及 5 個的贏棋樣式以塗色法進行表示，如圖 5-2-33 中的圖 C 及圖 D 所示。

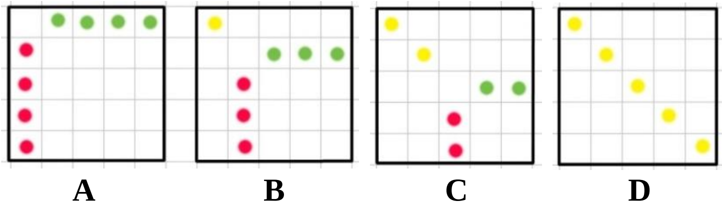


圖 5-2-33 5×5 拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式

接著，我們以圖 5-2-34 中圖 A 為例，將任意 5×5 棋子數量為 6 個的贏棋樣式，先根據塗色法將贏棋樣式的棋子以不同顏色表示，單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，接著透過空格的移動造成棋子的移動，將該贏棋樣式還原成對應的標準生成樣式。此外，在圖 5-2-34 中的圖 B 為任意 5×5 棋子數量為 7 個的贏棋樣式，根據一樣的塗色規則，接著再透過空格的移動造成棋子的移動，發現亦可還原成贏棋樣式的標準生成樣式。

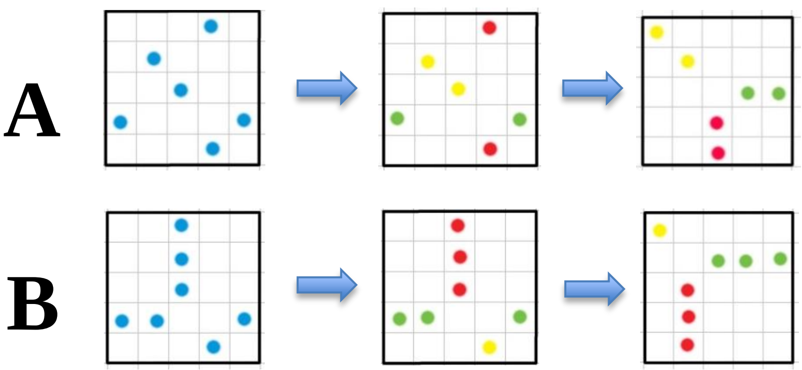
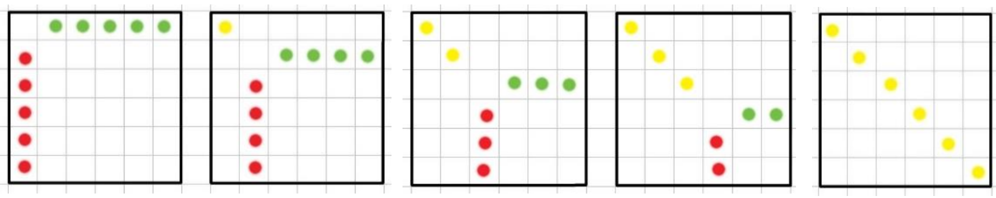


圖 5-2-34 將 5×5 拓荒者遊戲贏棋樣式任意贏棋樣式還原成標準生成樣式的過程

確認在 5x5 拓荒者遊戲可發展出贏棋樣式還原成標準生成樣式的方法後，我們持續在 6×6 拓荒者遊戲中建立贏棋樣式還原成標準生成樣式的方法，以塗色法將贏棋樣式的棋子以不同顏色表示，單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，如圖 5-2-35 所示，圖 A~圖 E 為 6×6 的拓荒者遊戲獲勝所需棋子數量有效區間的標準生成樣式，也就是棋子數量為 6~10 個的標準生成樣式。



A B C D E

圖 5-2-35 6×6 拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式

接著，我們以圖 5-2-36 中圖 A 為例，將任一個 6×6 棋子數量為 8 個的贏棋樣式，先以塗色法將贏棋樣式的棋子以不同顏色表示，單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，接著透過空格的移動造成棋子的移動，發現也可還原成贏棋樣式的標準生成樣式。此外，在圖 5-2-36 中的圖 B 為任意 6×6 棋子數量為 7 個的贏棋樣式，根據一樣的塗色規則，接著再透過空格的移動造成棋子的移動，發現亦可還原成贏棋樣式的標準生成樣式。

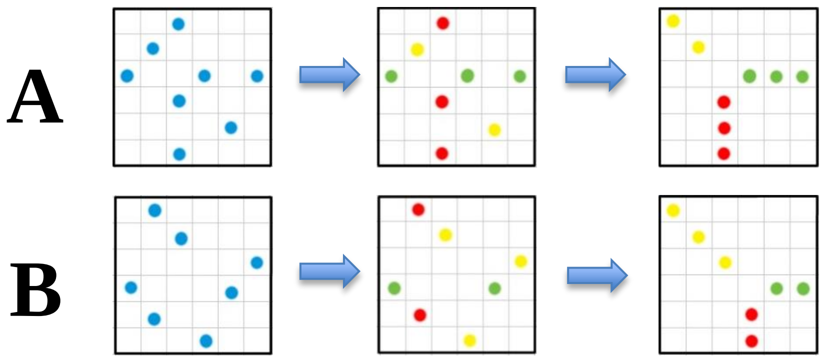


圖 5-2-36 將 6×6 拓荒者遊戲贏棋樣式任意贏棋樣式還原成標準生成樣式的過程

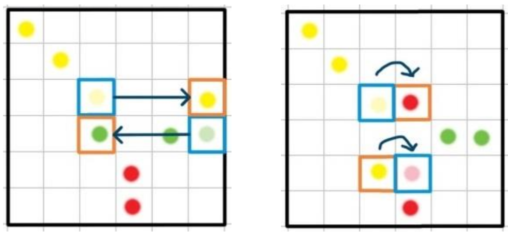
5.論證：

命題：6×6 遊戲中的所有贏棋樣式皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。

論證：我們以 6×6 遊戲中結束遊戲時棋子數量為 7 個的贏棋樣式為例進行論證，當結束遊戲時棋子數量為 7 個時，在標準生成樣式中黃棋有 3 個，我們可將黃棋移動後贏棋樣式的情形分類討論各種可能產生的樣式，以證明所有贏棋樣式皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。

第一種情形：任選 1 個黃棋，移動這個黃棋後，會產生兩種情形，一是所有棋皆不變色，如圖 5-2-37 中圖 A 所示，二是有一個紅或綠棋隨之變色，如圖 5-2-37 中圖 B 所示。從 5-2-37 中的兩個贏棋樣式，我們可發現透過移動任一黃棋，無論其他棋

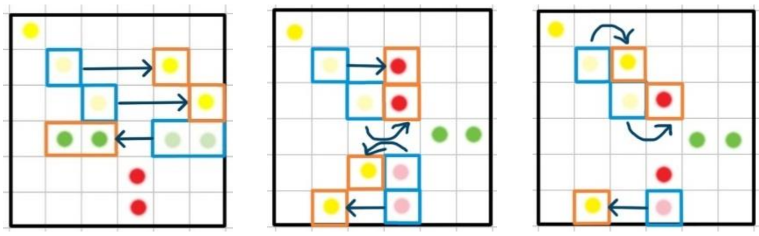
隨之移動變色與否，其黃棋、紅棋及綠棋數量皆不變，均為標準生成樣式所生成的贏棋樣式，皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。



A　　B

圖 5-2-37 任選 1 個黃棋進行移動所產生的 2 種贏棋樣式

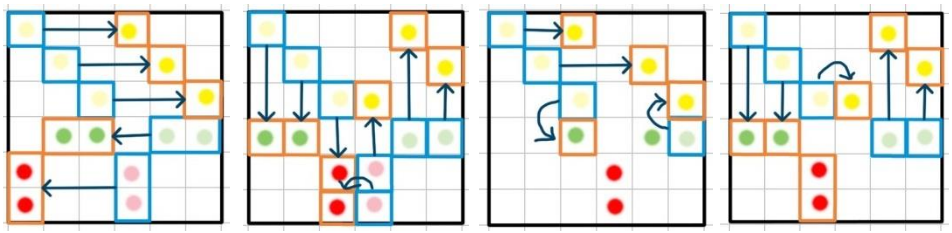
第二種情形：任選 2 個黃棋，移動這些棋後，所有棋皆不變色、皆變色或是有 1 個紅或綠棋隨之變色，如圖 5-2-38 中的圖 A 及圖 B 所示。圖 C 則為任選 2 個黃棋，移動後，會有一個黃棋不變色，另一個黃棋則會變紅色，使其中一個紅棋變成黃色。從圖 5-2-38 中的三個贏棋樣式，我們可發現透過移動任一黃棋，無論其他棋隨之移動變色與否，其黃棋、紅棋及綠棋數量皆不變，均為標準生成樣式所生成的贏棋樣式，皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。



A　　B　　C

圖 5-2-38 任選 2 個黃棋進行移動所產生的 3 種贏棋樣式

第三種情形：任選 3 個黃棋，移動這些棋後，所有棋皆不變色、皆變色、有 1 個紅或綠棋隨之變色或是有 2 個紅或綠棋隨之變色，如圖 5-2-39 所示。從圖 5-2-39 中的四個贏棋樣式，我們可發現透過移動任一黃棋，無論其他棋子隨之移動變色與否，其黃棋、紅棋及綠棋數量皆不變，均為標準生成樣式所生成的贏棋樣式，皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。



A　B　C　D

圖 5-2-39 任選 3 個黃棋進行移動所產生的 4 種贏棋樣式的類型

(四) 發展 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式的類型。

1. 觀察：

透過研究贏棋所需棋子數量的最小值至最大值與有效區間的樣式，我們發現各個贏棋樣式的「標準生成樣式」。然而，我們偶然在 6×6 的拓荒者遊戲中，我們發現當贏棋所需棋子數量為 8 個的時候，除了我們原本發現的標準生成樣式，居然還有其他贏棋樣式！也就是說，我們原本認為贏棋樣式中，可雙向控制行與列的黃色棋子數量固定只有 2 個，可單向控制行或列的紅色棋子及綠色棋子數量相等，固定只有各 3 個，如圖 5-2-40 所示。

但是在遊戲的過程中，我們發現有些贏棋樣式中的黃色棋子數量居然不是 2 個，可以只有 1 個黃棋，且紅、綠棋子數量居然分別可以是 3 個跟 4 個，與我們一開始發現的標準生成樣式不同，我們再進一步觀察也發現，黃棋可只剩下一個的原因是由於紅棋分成兩行佔據，且佔據的行數比原本的標準生成樣式多一行，如圖 5-2-41 所示。

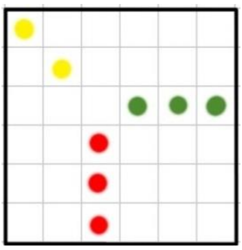


圖 5-2-40 6×6 贏棋樣式棋子個數為 8 個時的標準生成樣式

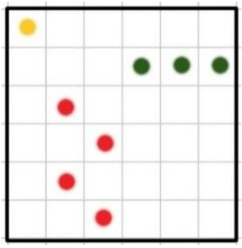


圖 5-2-41 6×6 贏棋樣式棋子個數為 8 個時紅綠棋數量不等的情形

2. 尋找關係與樣式

為持續研究這種與原標準生成樣式不同的樣式，是否存在於 6×6 拓荒者遊戲以外的其他棋盤，我們從 3×3 拓荒者遊戲開始探討，發現在 3×3 及 4×4 拓荒者遊戲中，由於贏棋所需棋子數量的最大值其紅棋與綠棋數量最多仍各少於 4 個，且因為紅色或綠色棋子需要至少 4 個才能進行交錯排列，以佔據行或列，因此無法構成紅綠棋子數量不相

等的贏棋樣式，如圖 5-2-42 所示。

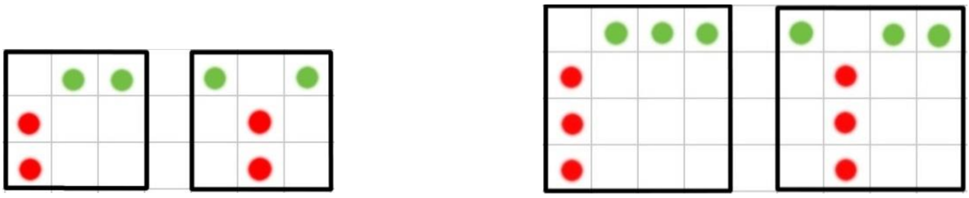


圖 5-2-42 3×3 及 4×4 拓荒者遊戲中無法構成紅綠數量不相等的贏棋樣式

接著，我們嘗試在 5×5 拓荒者遊戲中進行探討，發現在 5×5 拓荒者遊戲中只有贏棋所需棋子數量為 7 個時的贏棋樣式時，可出現紅綠棋子數量不相等的贏棋樣式，如圖 5-2-43 所示，而在 6×6 拓荒者遊戲中，則在贏棋所需棋子數量分別為為 8 個及 9 個時的贏棋樣式時，可出現紅綠棋子數量不相等的贏棋樣式，如圖 5-2-44 所示，而在 7×7 拓荒者遊戲中，則在贏棋所需棋子數量分別為為 9 至 11 個時的贏棋樣式時，如圖 5-2-45 所示，此外我們也觀察到在上述這些紅綠棋子數量不相等的贏棋樣式中，黃棋數量也可不一。

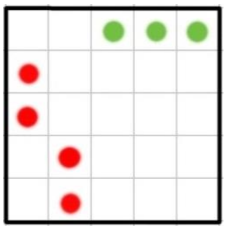


圖 5-2-43 5×5 贏棋樣式棋子個數為 7 個時紅綠棋子數量不相等

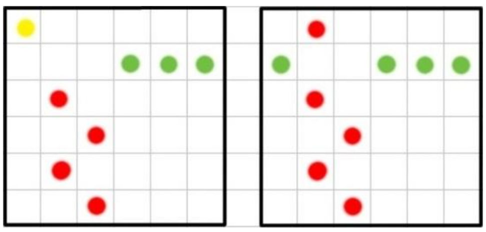


圖 5-2-44 6×6 贏棋樣式棋子個數為 8 個及 9 個時紅綠棋子數量不相等

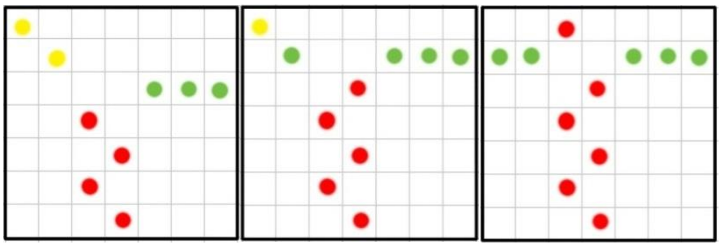


圖 **5-2-45 7×7 贏棋樣式棋子個數為 9** 至 **11 個時紅綠棋子數量不相等**

3. 猜測

根據尋找關係與樣式的發現，我們猜測在 n×n 拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式不只有原本的一種，可以再細分成四類：

第一類：N(Y)= 0，N(R)=N(G)，沒有黃棋，而紅綠數量一樣，這種標準生成樣式必為 n-1 個紅棋加上 n-1 個綠棋，棋子數量無變化，為最大值，如圖 5-2-46 所示。

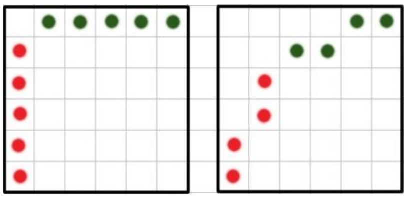


圖 5-2-46 沒有黃棋，而紅綠數量一樣的標準生成樣式

第二類：N(Y)>0，N(R)=N(G)，有黃棋，而紅綠數量一樣，這個標準生成樣式黃棋加紅或綠棋皆必等於 n-1，黃棋越多，紅綠棋就越少，棋子數量可變化，如圖 5-2-47 所示。

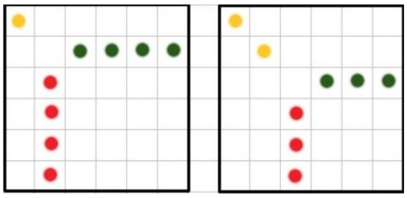


圖 5-2-47 有黃棋，而紅綠數量一樣的標準生成樣式

第三類：N(Y)=0，N(R)>N(G)，沒有黃棋，紅綠數量不同，且若 N(R)>N(G)，則 N(R)-N(G)＝R 的行數-G 的列數，紅綠棋數可變化，如圖 **5-2-48** 所示。

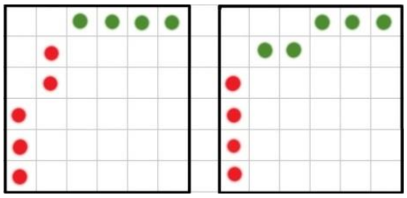


圖 5-2-48 沒有黃棋，而紅綠數量不同的標準生成樣式

第四類：N(Y)> 0，N(R)>N(G)，有黃棋，紅綠數量不同，且若 N(R)>N(G)，則 N(R)-N(G)＝R 的行數-G 的列數，紅綠棋數可變化，如圖 **5-2-49** 所示。

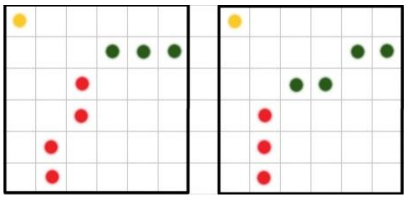


圖 5-2-49 有黃棋，而紅綠數量不同的標準生成樣式

4. 檢驗

我們在 8×8 拓荒者遊戲及 9×9 拓荒者遊戲中持續進行檢驗，發現也符合上述猜測，在 8×8 拓荒者遊戲及 9×9 拓荒者遊戲中，也包含了上述四類遊戲贏棋樣式的標準生成樣式。同時在紅綠數量不同的標準生成樣式中，也符合猜測，在棋盤中紅棋的行數減去綠棋的列數，也等於紅棋與綠棋的數量差，如圖 5-2-50 及圖 5-2-51 所示。

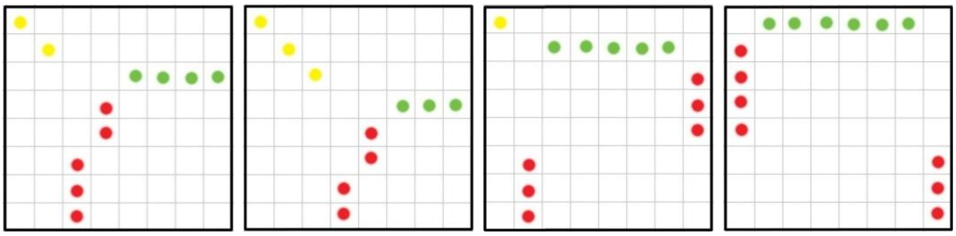


圖 **5-2-50 8×8 贏棋樣式棋子個數為 10 至 13 個時紅綠棋子數量不相等**

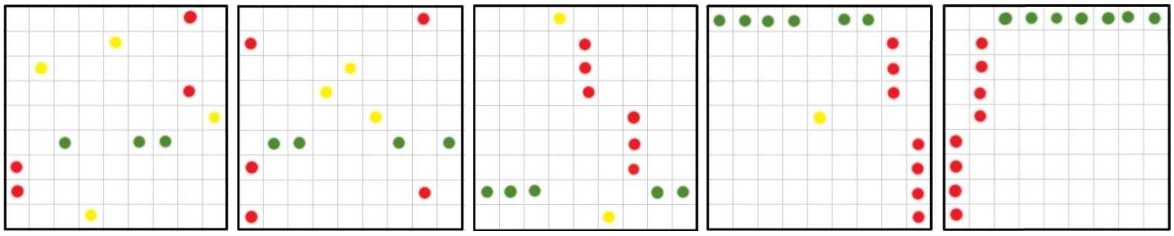


圖 **5-2-51 9×9 贏棋樣式棋子個數為 11 至 15 個時紅綠棋子數量不相等**

此外，透過研究 8×8 拓荒者遊戲及 9×9 拓荒者遊戲，我們也發現在 9×9 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式裡，存在著 8×8 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式，若要繪製 7×7 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式，只要將 6×6 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式再加上外圍的一個黃點或將紅點與綠點各加一顆，就可完成，且 5×5 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式為規格最小的紅綠數量不同的標準生成樣式，如圖 5-2-52 所示。

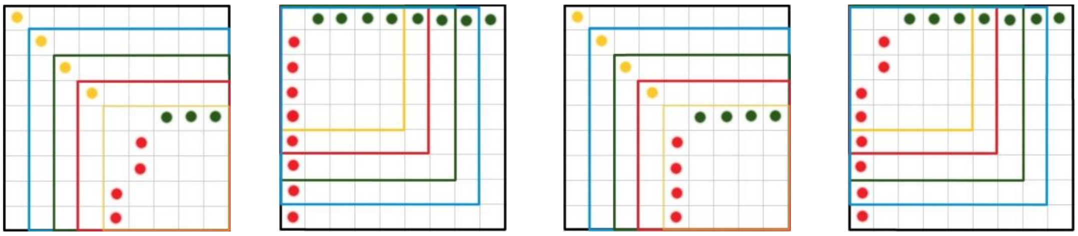


圖 **5-2-52 有與無黃棋，紅綠數量相同與不同的標準生成樣式**

5. 論證

透過觀察、尋找關係與樣式、猜測及檢驗，我們發現了贏棋樣式的標準生成樣式的四種類型，也發現構成這四種標準生成樣式的三大特性，分別為，在 nxn 棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)贏棋樣式中，紅棋的數量(以 N(R)表示)、綠棋的數量(以 N(G)表示)及黃棋的數量(以 N(Y)表示)所構成的贏棋樣式的兩個特性，以及在 n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含(n-1) ×(n-1)贏棋樣式標準生成樣式的特性。以下就這三大特性進行論證，以支持前述的研究發現，藉以確立贏棋樣式策略導向模式。

命題一：在 nxn 棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)，若 N(R)、N(G)及 N(Y)構成贏棋樣式，且 N(R)>N(G)，N(Y)>0，則：

(1)R 的行數-G 的列數＝N(R)-N(G)

(2)N(Y)=綠箭頭數量- N(G)- R 的行數

論證一：

(1) 不妨設 n=14，N(R)-N(G)=1，若 R 的行數-G 的列數=2，如圖 5-2-53 所示，在此情形下，可推知紅箭頭被守住的數量如下，N(R)守住 9 個紅箭頭，N(G)所構成的兩列守住 2 個紅箭頭，總共守住 11 個紅箭頭；亦可推知綠箭頭被守住的數量如下，N(G)守住 8 個綠箭頭，N(R)所構成的 4 行守住 4 個綠箭頭，總共守住 12 個綠箭頭，即剩下 3 個紅箭頭及 2 個綠箭頭未被守住，又 N(Y)恰可守住 N(Y)對紅綠箭頭，但 3 個紅箭頭及 2 個綠箭頭不能完全配對，因此 N(Y)必無法守住全部的紅綠箭頭，由此可得知，R 的行數-G 的列數=2>1，不能構成贏棋樣式。

(2) 若 R 的行數-G 的列數=0<1，如圖 5-2-54 所示，同理可證，必不能構成贏棋樣式

(3) 因此，由(1)、(2)可得知，若要構成贏棋樣式，則 **R 的行數-G 的列數＝N(R)-N(G)，** 如圖 5-2-55 所示。

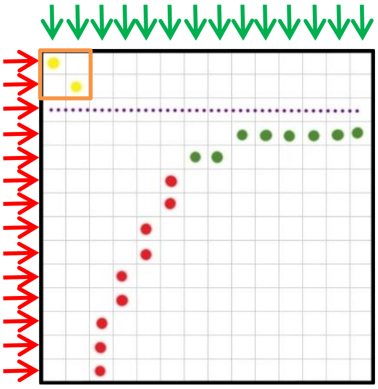


圖 5-2-53
R 的行數-G 的列數=2

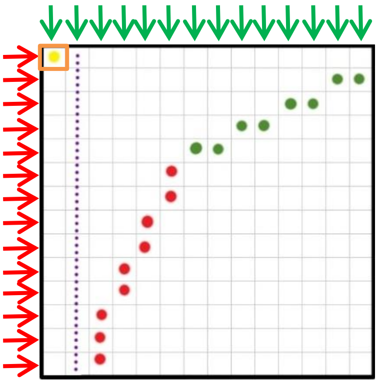


圖 5-2-54
R 的行數-G 的列數=0

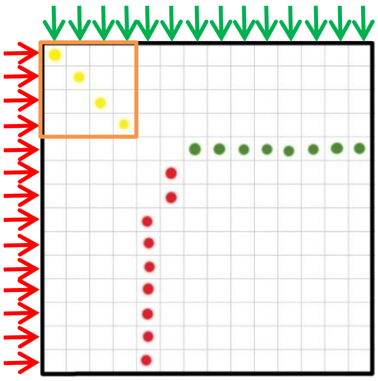


圖 5-2-55
R 的行數-G 的列數=1

此外，若 nxn 棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)，而 N(R)、N(G)及 N(Y)可構成贏棋樣式，且 N(R)>N(G)，N(Y)>0，由圖 5-2-55 亦可推知綠箭頭數量=N(Y)+N(G)+R 的行數，即 **N(Y)=綠箭頭數量- N(G)- R 的行數。**

命題二：在 n×n 棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)中，若 N(Y)=0，N(R) >N(G) >0，則自 5×5 以後， **N(R)與 N(G)差的最大值為 k-2(其中 k>2)**

論證二：

1.對奇數 ((2k-1) ×(2k-1))棋盤進行證明

(1) 先用 2k-2 個紅棋，2k-2 個綠棋，以守住 2k-1 個紅箭頭及 2k-1 個紅箭頭，若以

k=6 為例，則如圖 5-2-56 所示。

(2)若將 2k-2 個紅棋，分為 k-1 串的 2 連紅棋串(此為最小的單位棋串)，此 k-1 串的 2 連紅棋串可守住 k-1 個綠箭頭，剩下(2k-1)-(k-1)=k 個綠箭頭，即綠棋可由 2k-2 個縮減為 k 個，就可守住剩下的 k 個綠箭頭。

(3) 由(1)、(2)可得知，若要構成贏棋樣式，贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差為 **N(R)-N(G)=(2k-2)-k=k-2 個(其中 k>2)。**

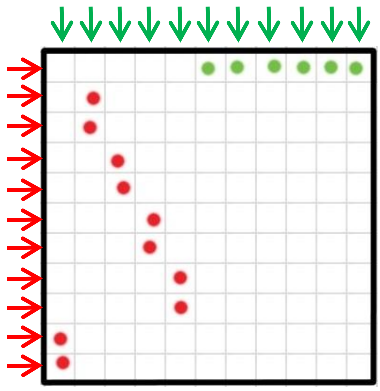


圖 5-2-56 奇數棋盤贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差的證明示例圖

2.對偶數 (2k ×2k) 棋盤進行證明

(1) 先用 2k-1 個紅棋，2k-1 個綠棋，以守住 2k 個紅箭頭及 2k 個綠箭頭，若以 k=6 為例，則如圖 5-2-57 所示。

(2)若將 2k-1 個紅棋，分為 k-2 串的 2 連紅棋串(此為最小的單位棋串)及一串 3 連紅棋串，此 k-2 串的 2 連紅棋串及一串 3 連紅棋串，可守住 k-1 個綠箭頭，剩下 2k-(k-1)=k+1 個綠箭頭，即綠棋可由 2k-1 個縮減為 k+1 個，就可守住剩下的 k+1 個綠箭頭。

(3) 由(1)、(2)可得知，若要構成贏棋樣式，贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差為 **N(R)-N(G)=(2k-1)-(k+1)=k-2 個(其中 k>2)。**

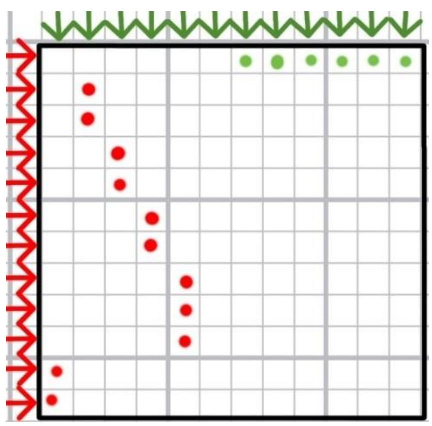


圖 5-2-57 偶數棋盤贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差的證明示例圖

我們發現透過命題二的論證，可得知無論是在偶數棋盤(2k×2k)及奇數棋盤((2k-1)× (2k-1))中，要能構築出紅綠棋子數量不相等，黃棋數量為 0 或大於 0 的兩種情況，紅棋與綠棋數量的最大差為 k-2，而 k-2 若要為正整數，則 k≥3，可得知構成此兩種贏棋樣式的標準生成樣式之棋盤最小必定為 5×5。

命題三：在 n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含(n-1) ×(n-1)贏棋樣式標準生成樣式。

論證三：

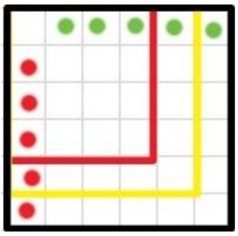
對於(1)N(Y)= 0，N(R)=N(G)，即紅綠棋子數量相等，黃棋數量為 0

(2)N(Y)>0，N(R)=N(G) ，即紅綠棋子數量相等，黃棋數量大於 0

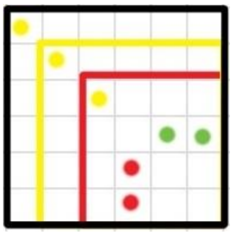
(3)N(Y)=0，N(R)>N(G)，即紅綠棋子數量不相等，黃棋數量為 0

(4)N(Y)> 0，N(R)>N(G)，即紅綠棋子數量不相等，黃棋數量大於 0

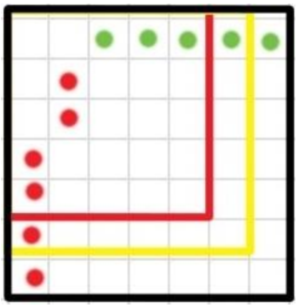
這四種類型的(k-2) ×(k-2)贏棋樣式的標準生成樣式都可運用往左上角增加棋子以擴張棋盤的方式，構造出(k-1) ×(k-1) 贏棋樣式的標準生成樣式，再用同樣的方法亦可構造出 k×k 贏棋樣式的標準生成樣式，由上述推論，可推得在 n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含(n-1) ×(n-1)贏棋樣式標準生成樣式，如圖 5-2-58 所示。



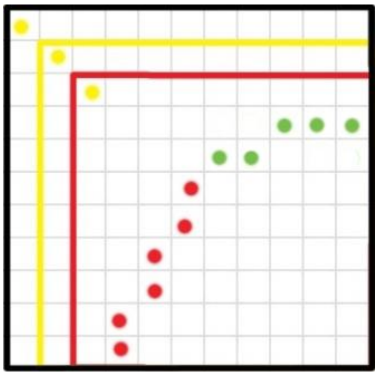
N(Y)= 0，N(R)=N(G)



N(Y)>0，N(R)=N(G)



N(Y)=0，N(R)>N(G)



N(Y)> 0，N(R)>N(G)

圖 5-2-58 n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含(n-1) ×(n-1)贏棋樣式標準生成樣式

陸、研究結果

一、探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲的研究方向。

藉由探討 3×3 拓荒者遊戲中後手必勝的情形，我們發現贏棋樣式策略導向模式的重要性，將研究方向確立為建立贏棋策略導向模式，讓玩家能有策略方法判定自己該怎麼下以提高玩家贏棋的機會。

二、探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式。

在 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 遊戲中，透過塗色法與箭頭法，我們確立贏棋樣式棋子數量最小值為 n，且贏棋樣式皆為由同時可管控行與列的黃棋所構成，如圖 6-2-1 所示，而在在 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 遊戲中，贏棋樣式棋子數量最大值為 2(n-1)，且贏棋樣式皆為由相等數量的紅棋與綠棋所構成，如圖 6-2-2 所示。

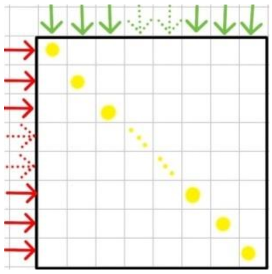


圖 6-2-1 n×n 贏棋樣式棋子數量最小值的樣式

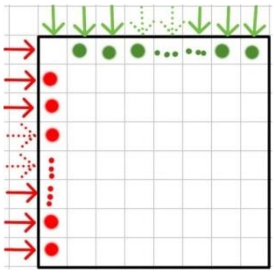


圖 6-2-2 n×n 贏棋樣式棋子數量最大值的樣式

三、探討 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

在 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲中，我們透過塗色法找出符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式，並以黃棋的移動證明任何贏棋樣式皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成贏棋標準生成樣式。

四、確立 3×3、4×4、5×5、6×6……n×n 拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式可分為下列四種類型：

(1) N(Y)= 0，N(R)=N(G) ，即黃棋數量為 0 ，紅綠棋子數量相等。

(2) N(Y)>0，N(R)=N(G)，即黃棋數量大於 0， 紅綠棋子數量相等。

(3) N(Y)=0，N(R)>N(G)，即黃棋數量為 0，紅綠棋子數量不相等。

(4) N(Y)>0，N(R)>N(G)，即黃棋數量大於 0，紅綠棋子數量不相等。

五、在 nxn 棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)，若 N(R)、N(G)及 N(Y)構成贏棋樣式，且 N(R)>N(G)，則：

(1) R 的行數-G 的列數=N(R)-N(G)

(2) N(Y)=綠箭頭數量-N(G)-R 的行數

六、在 nxn 棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)，若 N(Y)=0，N(R)>N(G)>0，則：

自 5x5 以後，N(R)與 N(G)差的最大值為 k-2 (其中 k>2)

七、在 nxn 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含 (n-1)x(n-1) 贏棋樣式標準生成樣式。

八、建立贏棋策略導向模式：提供棋手在進行對奕中，藉由不斷循環運用下列四個步驟，以提高贏棋的勝率：

1. 觀察。

2. 使用塗色法對棋子進行功能定色。

3. 運用贏棋樣式所需棋子數量的有效區間。

4. 運用贏棋樣式標準生成樣式導引對奕。

柒、研究結論

本研究旨在建立拓荒者遊戲中贏棋樣式策略導向模式，我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、確立3×3、4×4、5×5、6×6……n×n拓荒者遊戲的研究方向為探討贏棋樣式策略導向模式。

二、 找到在3×3、4×4、5×5、6×6……n×n拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式，並推導出最大值、最小值的公式。 (如：陸、研究結果-二)。

三、 找到3×3、4×4、5×5、6×6……n×n拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式，並證明任何樣式皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。(如：陸、研究結果-三)。

四、確立3×3、4×4、5×5、6×6……n×n拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式的四種類型。(如：陸、研究結果-四)。

五、發現並論證：能快速構成贏棋樣式標準生成樣式的四種類型的三個特性。(如:陸、研究結果 -五、六、七)

六、建立贏棋樣式策略導向模式。(如:陸、研究結果-八)

捌、參考資料

一、Downie, D., Slesnick, T., & Stenmark, J. K. (1999). 女生來做數學(Math for Girls and Other Problem Solvers,梁崇惠和楊翠勤譯)。台北:聯經。(原著出版於 1981)

二、 國民小學課本南一版第 12 冊第 2 單元—怎樣解題(一)。

三、 國民小學課本南一版第 6 冊第 8 單元—乘法與除法。

【評語】080412

本作品探討在拓荒者遊戲贏棋終局的樣貌，得到初始的結果：關於水平紅標與垂直綠標、以及水平與垂直共用的黃標。雖然沒能進一步地探討，但是這三中標很可能是最終“先/後手誰必贏”的策略之重要參考。保證先手或後手的必勝策略一直是這類似對戰遊戲的數學研究重點，因此本研究探討還有更進一步改善的空間，雖然這部分通常非常難解。

作品海報

壹、 研究動機

有一天，我們發現一個有趣的數學遊戲叫「拓荒者遊戲」，遊戲規則是：在 3×3 方格紙上的每一個方格內放入一個棋子，兩個玩家猜拳決定誰為先手，**遊戲規則有三條：1.兩位玩家輪流拿走棋子；2. 一次只能拿走一個棋子；3. 輪到拿棋子者，在取走棋子後，必須讓每一行及每一列至少留下一個棋子。最後合法拿走棋子者，即為優勝者**，如圖1-1-1所示。我們想知道最多拿掉幾個棋子及最少拿掉幾個棋子，就能結束遊戲？此外，在玩完 3×3 拓荒者遊戲之後，我們也想了解在 4×4、5×5、6×6.....n×n 的拓荒者遊戲中有何策略可以快速結束遊戲？有沒有可能找出贏棋的判準與樣式？

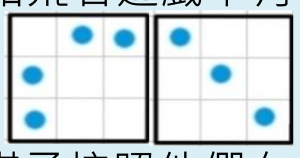


圖1-1-1 3×3棋盤上結束遊戲時的結果示意圖

貳、名詞釋義

一、塗色法：用顏色將贏棋樣式的棋子按照他們在棋盤上管控行列的功能分類；第一類棋子：位置可管控一行及一列，將它塗上黃色；第二類棋子：其位置只能管控一列，將它塗上紅色；第三類棋子：其位置只能管控一行，將它塗上綠色，如圖2-1-1所示。

二、箭頭法：在n×n棋盤的上方，用n個綠箭頭代表n行，在棋盤的左側，用n個紅箭頭代表n列，以便於對贏棋樣式中要管控的行列數，進行論述，如圖2-2-1所示。

三、贏棋所需棋子數量的有效區間：以6×6棋盤為例，贏棋所需棋子數量的最小值、最大值分別為6、10，又棋子數量是7、8、9時，也都能構成贏棋樣式，因此，贏棋所需棋子數量有效區間就定為6-10，如圖2-3-1所示。

四、贏棋樣式的標準生成樣式：以棋子樣式具有規律性、對稱性的贏棋樣式，定為贏棋樣式的標準生成樣式且具有以下特徵：以6×6為例，所有與標準生成樣式中的三種顏色棋子數量相同的贏棋樣式皆可透過棋子、空格的移動及圖形的旋轉、對稱還原成標準生成樣式，如圖2-4-1。

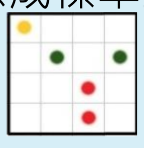


圖2-1-1塗色法示意圖

圖2-2-1箭頭法示意圖

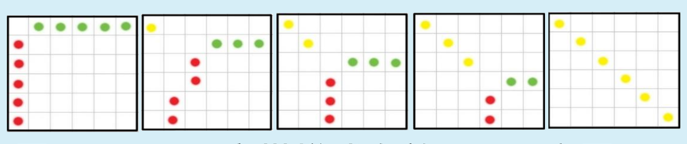
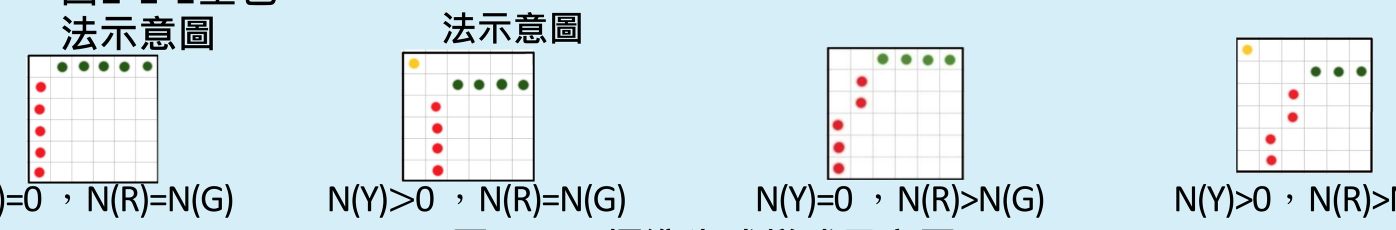


圖2-3-1 6×6贏棋樣式有效區間示意圖



N(Y)=0，N(R)=N(G)　N(Y)>0，N(R)=N(G)　N(Y)=0，N(R)>N(G)　N(Y)>0，N(R)>N(G)

圖2-4-1 標準生成樣式示意圖

參、研究目的

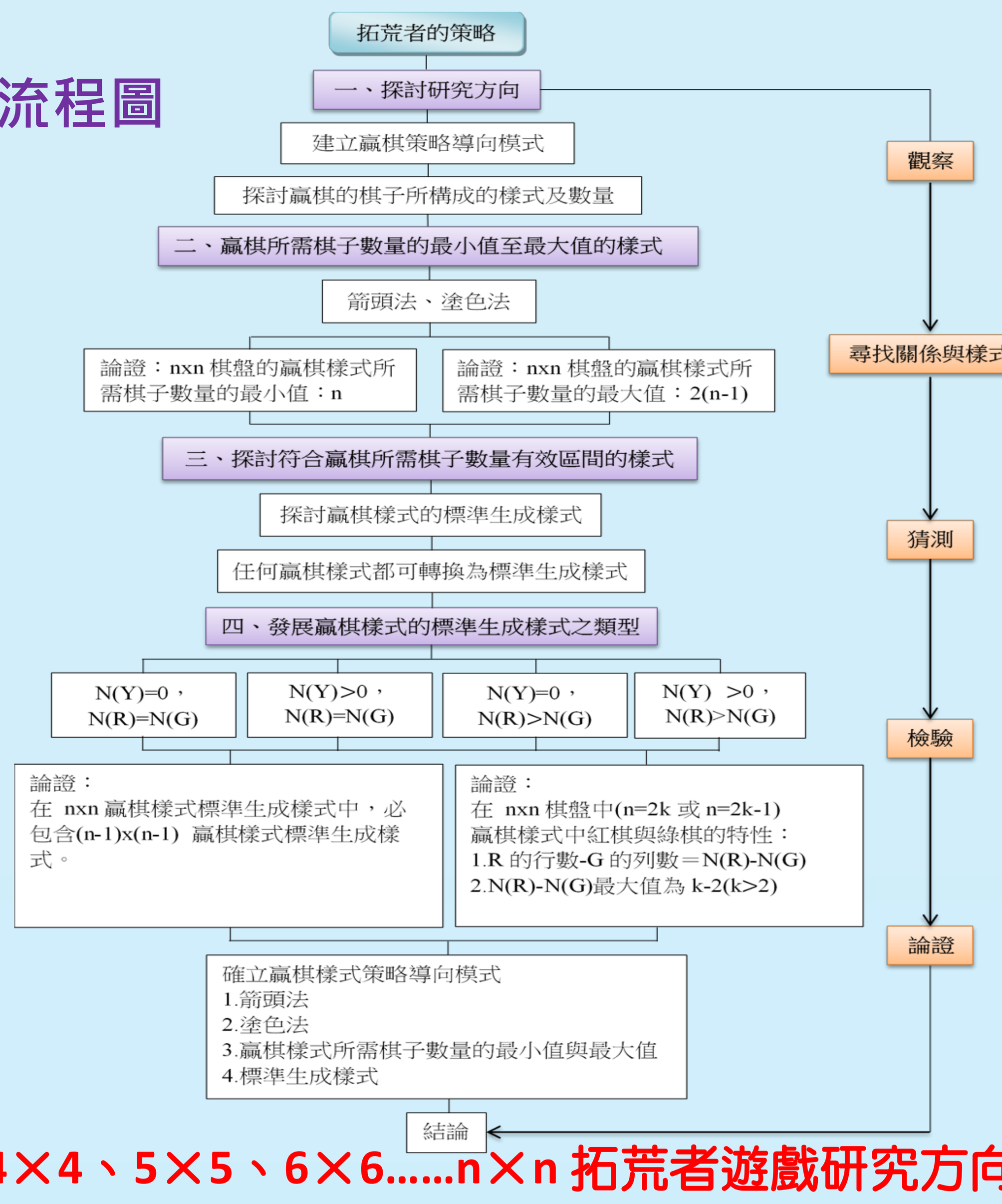
一、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲的研究方向。

二、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式。

三、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

四、發展3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式的類型。

肆、研究架構與流程圖



伍、研究過程

(一)、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 拓荒者遊戲研究方向

一開始我們發現此遊戲時，第一件做的事就如同大部分人一樣，想要嘗試著玩玩看，我們雖然看到遊戲規則寫著「3×3」方格表，但我們仍然想要體驗各式棋盤大小的遊戲，因此，我們便從 1×1 的方格表開始嘗試，而這時的我們想要找出的是致勝的方法，但在 1×1 的遊戲中，無法拿走棋子，開始時就勝負已定，不須探討。

接著，我們開始觀察 2×2 的方格表上進行拓荒者遊戲，輪流拿走一個棋子後，後手必勝，如圖5-2-1所示，至此，我們發現 2×2 拓荒者遊戲無需探討。

當我們在進行3×3拓荒者遊戲對戰時，一開始認為玩家進行遊戲的先後順序應該不會對遊戲勝負造成影響，但後來發現似乎**後手較容易贏**，這讓我們不禁開始懷疑：「這真的是個公平的遊戲嗎？」，因此我們就對 3×3 拓荒者遊戲過程進行觀察，發現**若先手若要贏棋，結束遊戲時的棋子數量必須是剩下四個，而剩下四個棋子的贏棋樣式共有以下三種情形**，如圖5-2-2 圖A、圖B及圖C所示。

為分析後手是否較容易贏，我們將先手與後手進行遊戲的過程詳細討論如下，此外，我們也將棋盤上的位置以座標表示以方便說明，如圖5-2-3所示。

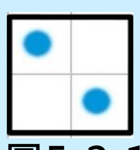


圖5-2-1 2×2的拓荒者遊戲結果示意圖

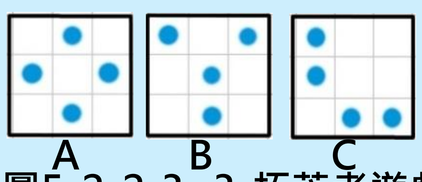


圖5-2-2 3×3 拓荒者遊戲先手最終能贏棋的贏棋樣式

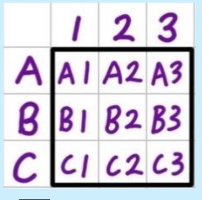


圖5-2-3 3×3棋盤座標

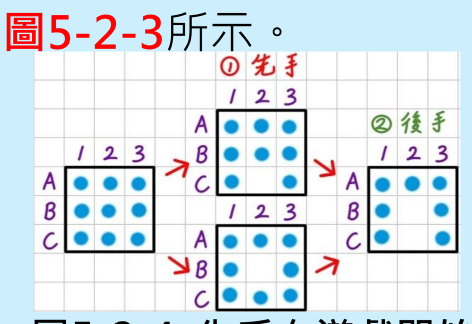


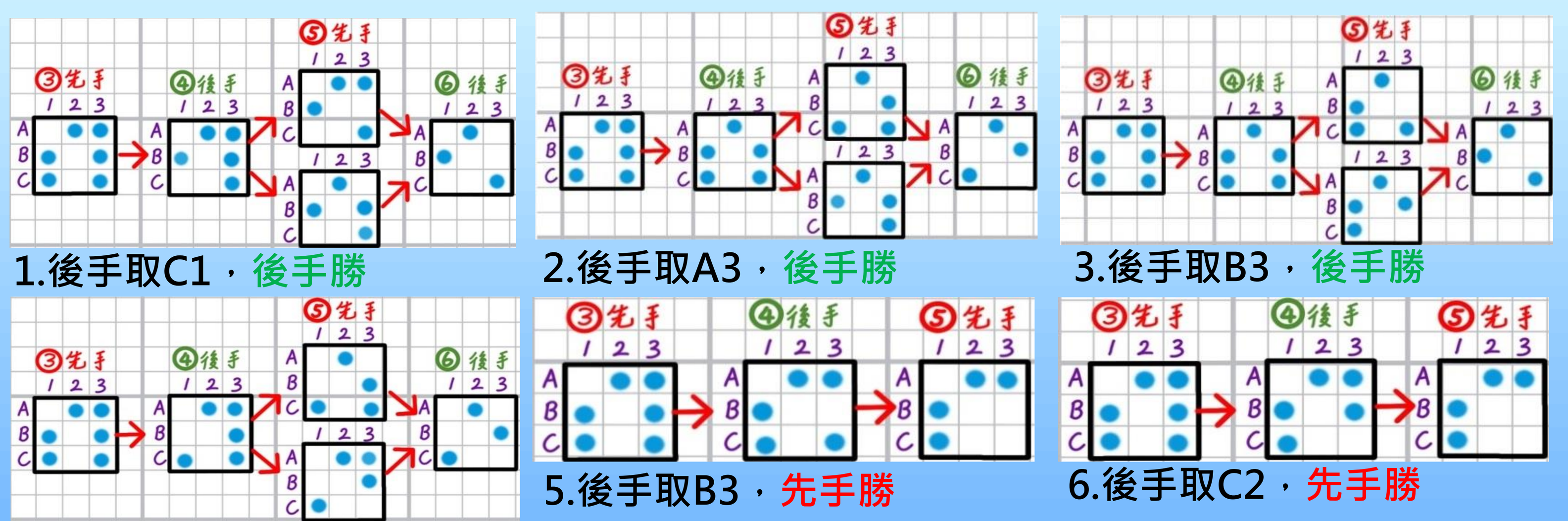
圖5-2-4 先手在遊戲開始時先取邊上或中間的棋而後手對應的情形

我們根據**先手開局**所取的棋子位置進行以下分類討論：

一、若先手在遊戲開始時先取邊上或中間的棋：

若先手在遊戲開始時先取邊上或中間的棋，則後手在第二步可取邊上或中間的另一棋，例如：當先手取C2的棋時，後手可取B2的棋子，而當先手取B2的棋時，後手可取C2的棋子，一旦橘框處的棋子皆消失，則會讓先手無法達成圖5-2-2中的A贏棋樣式及B贏棋樣式，如圖5-2-4所示。

若先手無法達成圖5-2-2中的**A贏棋樣式**及**B贏棋樣式**，則只能在接下來的第三步取走A1或B1或C1的棋子以達成圖5-2-2中的**C贏棋樣式**。以先手在第三步取走A1或B1或C1的棋子以達成圖5-2-2中的**C贏棋樣式**。以先手在第三步取走A1為例，此時後手在第四步若避免有行及列的剩餘兩顆棋子都在同一行或同一列，就可避免先手達成**C贏棋樣式**，形成**後手必勝**的局面，但若後手在進行遊戲時未將先手贏棋樣式列入下棋時的考量，隨意亂取棋子，先手就有機會可以贏棋，如圖5-2-5所示。



1.後手取C1，後手勝　2.後手取A3，後手勝　3.後手取B3，後手勝
4.後手取B1，後手勝　5.後手取B3，先手勝　6.後手取C2，先手勝

圖5-2-5 後手在第四步可能的對應的情形及導致的勝負局面

二、若先手在遊戲開始時先取角上的棋：

若先手在遊戲開始時先取角上的棋，則能保留圖5-2-2中的三種贏棋樣式，此時，並沒有任何贏棋樣式已被消去，因此後手也不像先手取邊上或中間的棋時容易應對，但也非無法贏棋，例如，先手取A1的棋，此時後手取B1邊上的棋先避免先手形成圖5-2-2中**圖A贏棋樣式**，如圖5-2-6所示。而各種後手可在第四步應對先手取得圖5-2-2中**圖B**及**圖C贏棋樣式**的方式，如圖5-2-7所示。

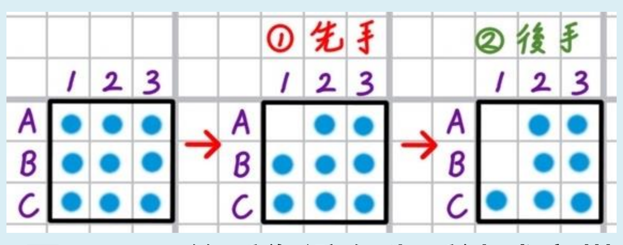
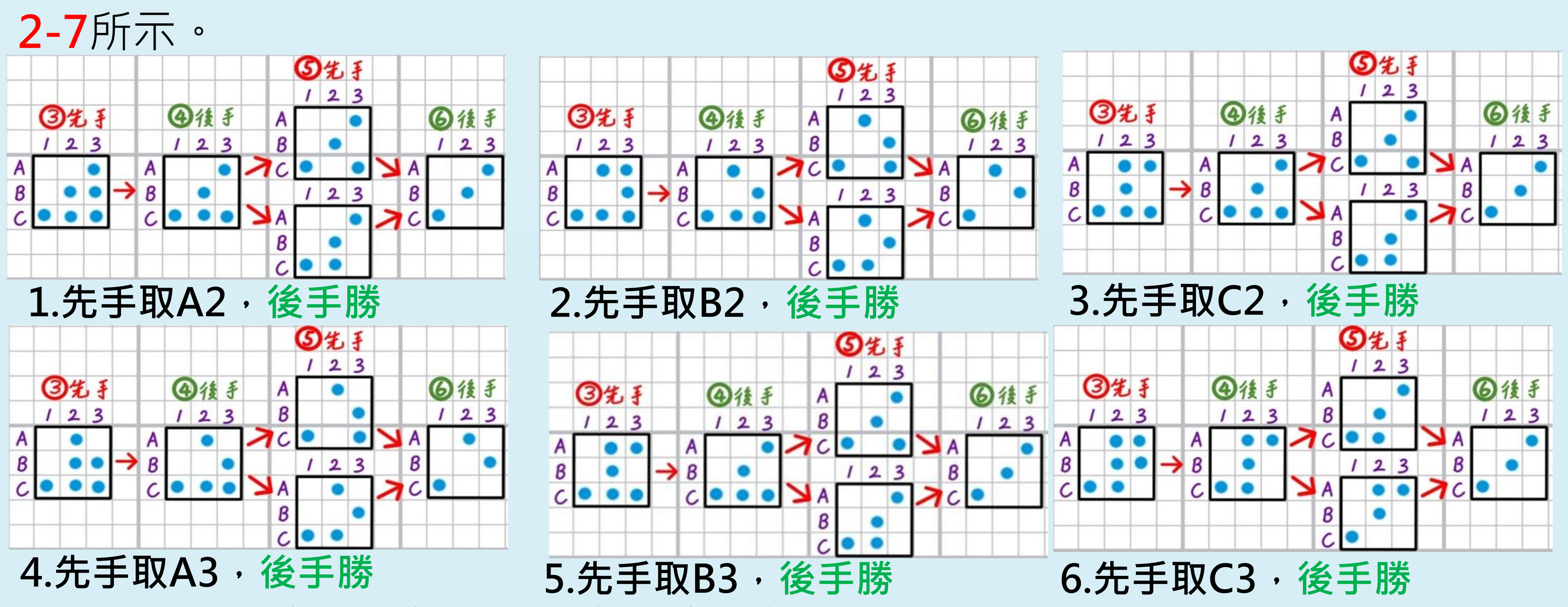


圖5-2-6 後手為避免先手達成贏棋樣式A在第二步所對應的情形



1.先手取A2，後手勝　2.先手取B2，後手勝　3.先手取C2，後手勝
4.先手取A3，後手勝　5.先手取B3，後手勝　6.先手取C3，後手勝

圖5-2-7 後手在第四步為避免先手達成贏棋樣式B及C所對應的情形

至此，我們已從對戰過程中確定了後手必勝的原因，而我們又對於後手必勝的情 形產生了好奇心：**「後手為何必勝?後手的優勢在哪呢?」**，發現**後手的優勢其實在於對應先手時，若能存有先手能贏的三個贏棋樣式，如圖5-2-2所示**，則後手可在先手意圖製造贏棋樣式時輕易破壞，自然造成後手易勝的情形。

我們在了解 3×3 拓荒者遊戲中後手必勝的情形之後，原本希望繼續尋找 4×4 的先手與後手各種對弈棋局與贏棋的關係，但因 **4×4 拓荒者遊戲先手跟後手至少要各走5步後才會贏棋**，而在這 10 步內有極多的變化，同樣的，若是 **5x5 拓荒者遊戲，則先手與後手，分別要走 9 步及 8 步**，而在這 17 步內有更多的變化，**若棋盤持續擴大，要分析的量就遠超過我們的研究內容及時間的負荷**，因此，我們與老師討論後，轉而**將研究方向調整為探討贏棋的棋子所構成的樣式及數量，以建立贏棋策略導向模式，讓玩家能有策略方法判定自己該怎麼下以提高玩家贏棋的機會**。

(二)、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式。

1. 觀察

原始遊戲規則為：在 3×3 的方格表中，雙方玩家輪流拿走棋盤上的棋子最後合法拿走棋子者，即為贏棋者，遊戲過程如圖5-2-8 所示：

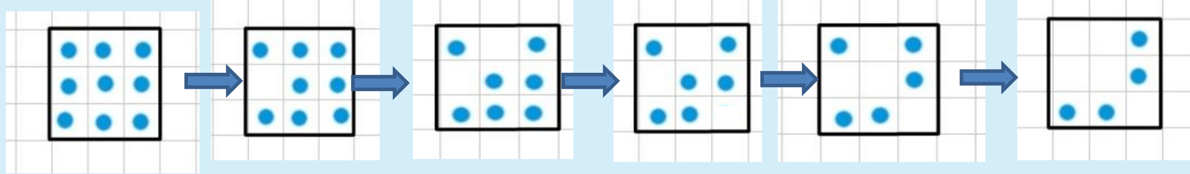


圖5-2-8 3×3拓荒者遊戲過程示意圖

我們由前述遊戲規則中得知：**3×3的方格表中，只要有一行或列沒有棋子就會落敗**，因此可推論出，若要贏棋，必須要使每一行或列上都只剩一棋，不能有其他棋子存在，否則尚不會贏棋，而以下是 3×3 拓荒者遊戲的贏棋樣式，如圖5-2-9所示，而尚未結束遊戲的情形就是除了每行每列需要保留的棋子外棋盤上仍存在其他可被拿掉的棋子，如圖5-2-10所示。

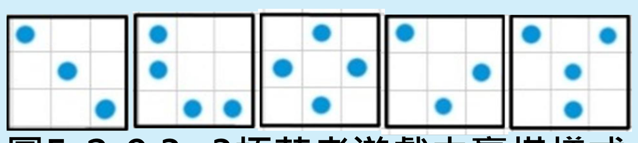


圖5-2-9 3×3拓荒者遊戲中贏棋樣式

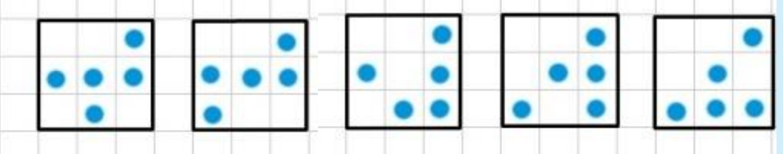


圖5-2-10 3×3拓荒者遊戲中非贏棋樣式，即遊戲尚未結束

2.尋找關係與樣式

了解遊戲規則之後，我們開始嘗試在 3×3 拓荒者遊戲的遊戲中，找出符合贏棋要求的贏棋樣式，我們發現在 3×3 拓荒者遊戲中有兩種不一樣的贏棋樣式棋子數量，分別為 3 個及 4 個，當贏棋樣式棋子數量為 3 個時為後手贏棋，而當贏棋樣式棋子數量為 4 個，則為先手贏棋。我們同時也發現，當贏棋樣式棋子數量為 3個時，每個棋子皆佔一行及一列，也就代表任一行或列都不會有兩個以上的棋子，如圖5-2-11所示，而贏棋樣式棋子數量為 4 個時，則必有一行及一列上有二個棋子，也就代表此時各個棋子皆只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，如圖5-2-12所示。

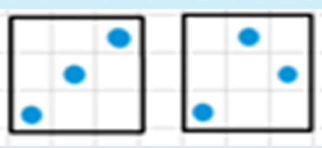


圖5-2-11 3×3拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

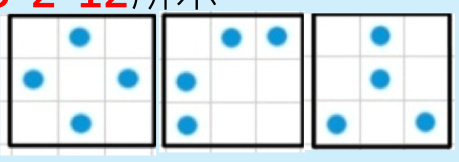


圖5-2-12 3×3拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

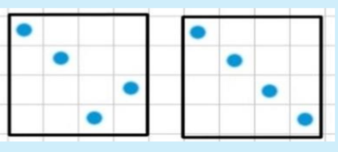


圖5-2-13 4×4拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

接著我們繼續觀察 4×4 的遊戲，發現贏棋樣式多了不少，而贏棋樣式棋子數量最小值則變為 4 個，贏棋樣式棋子數量最大值則變為 6 個，此外，當贏棋樣式棋子數量為 4 個時，每個棋子皆佔一行及一列，也就代表任一行或列都不會有兩個以上的棋子，而當贏棋樣式棋子數量 6 個時，則必有一行及一列上有三棋也就代表此時各棋子皆只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，如圖5-2-13及圖5-2-14所示。

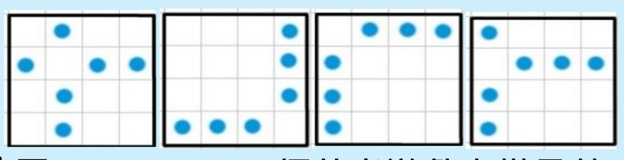


圖5-2-14 4×4拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

3. 猜測

透過觀察及尋找關係，我們發現，每個棋子所佔的行列數，跟棋子總數有關，因為棋盤中的總行列數是固定的，若贏棋樣式中的棋子數量越少，每個棋子所負責佔的行列數就需越多，而若贏棋樣式中的棋子數量越多，各自所佔的行列數則越少。此外我們也發現**在3×3拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為3**，而**在4×4拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為4**，在3×3、4×4拓荒者遊戲中贏棋樣式棋子數量最小值的每個棋子皆佔一行及一列，也就代表任一行或列都不會有兩個以上的棋子，因而**在3×3、4×4拓荒者遊戲中贏棋樣式棋子數量之最小值都等同邊長的數值**。

此外，我們也發現在3×3拓荒者遊戲中，當贏棋樣式棋子數量最大值為 4，在結束時，必有一行及一列上有二個棋子，也就代表此時一棋子只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，而在 4×4 拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最大值為 6 ，在結束遊戲時，必有一行及一列上有 3 個棋子，也就代表此時一個棋子只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，而在**同一行及列的棋子數量皆為 (邊長)-1，因而 3×3、4×4 拓荒者遊戲中贏棋樣式棋子數量最大值為(邊長-1)×2，因此，因此我們猜測在n×n方格表進行拓荒者遊戲時贏棋樣式棋子數量最小值為n，最大值為(n-1)×2**。

4. 檢驗

為了檢驗我們的猜測，我們繼續嘗試畫出5×5拓荒者遊戲中的最小值及最大值樣式，發現**贏棋樣式棋子數量最小值是 5 個，符合前述猜測最小值為 n 個，即邊長數值**，如圖5-2-15所示，而在**贏棋樣式棋子數量最大值為 8 個**，且必有一行及一列上有4個棋子，也就代表此時一個棋子只佔一行或一列，而剩下的行或列則必是由其他棋子同佔，因此**棋子數量為最大值為(邊長-1)×2，即(n-1)×2**，如圖5-2-16所示。

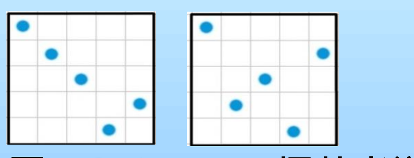


圖5-2-15 5×5拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

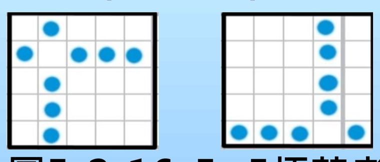


圖5-2-16 5×5拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

接著我們繼續進行6×6及7×7拓荒者遊戲，發現**贏棋樣式棋子數量最小值分別為6個及7個，贏棋樣式棋子數量最大值分別是10個及12個**，如圖5-2-17、圖5-2-18、圖5-2-19及圖5-2-20所示，發現都符合我們前述的猜測，**在n×n方格表進行遊戲時贏棋樣式棋子數量最小值為n，最大值為(n-1)×2**。

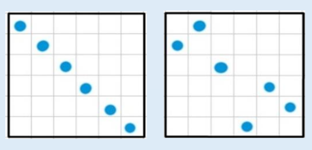


圖5-2-17　6×6最小值

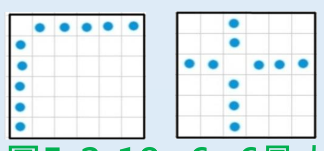


圖5-2-18　6×6最大值

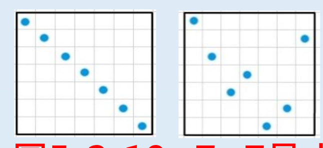


圖5-2-19　7×7最小值

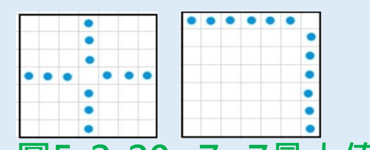


圖5-2-20　7×7最大值

5. 論證

為了論證贏棋樣式棋子數量最小值必定為n，最大值必定為(n-1)×2，因此我們開始嘗試運用塗色法將贏棋樣式的棋子**按照它們在棋盤上管控行列的功能分類**，發現可分三類，**第一類棋子：**其位置可同時管控一行及一列，為了易於分辨，我們將它塗上**黃色**；**第二類棋子：**其位置只管控列，我們將它塗上**紅色**；**第三類棋子：**其位置只管控行，我們將它塗上**綠色**，將棋子分類之後，開始針對之前的猜測進行論證。

命題一：在n×n拓荒者遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為n

論證一：

在n×n棋盤中，用n個綠箭頭代表n行，用n個紅箭頭代表n列。一個黃棋剛好可管控一對紅綠箭頭，而n×n棋盤中恰有n對紅綠箭頭，如圖5-2-21所示。若用n-1個或更少的黃棋嘗試組成贏棋樣式，則會多出1對或多對紅綠箭頭無棋管控，無法構成贏棋樣式，由此可證，在**n×n遊戲中，贏棋樣式棋子數量最小值為n，**如圖5-2-22所示。

命題二：在n×n遊戲中，贏棋樣式棋子數量最大值為2(n-1)。

論證二：

在n×n棋盤中，用n個綠箭頭代表n行，用n個紅箭頭代表n列。一個紅棋子管控一個紅箭頭，一個綠棋管控一個綠箭頭， n-1個紅棋子可管控n-1個紅箭頭，又可由n-1連紅棋串管控一個綠箭頭，而剩下的n-1個綠箭頭及一個紅箭頭可由n-1個綠棋管控，如圖5-2-23所示。若自此棋盤上再增放一個紅棋或綠棋，則因所有箭頭都已被管控，因此必被拿除，無法形成贏棋樣式，如圖5-2-24所示。由此可證**在n×n遊戲中，結束樣式棋子數量最大值為(n-1)x2。**

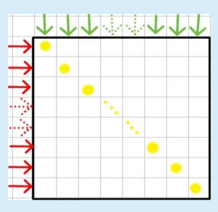


圖 5-2-21　n×n 拓荒者遊戲中棋子數量最小值的贏棋樣式

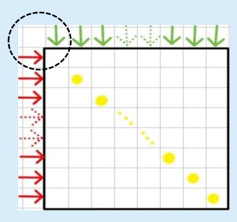


圖5-2-22　n×n拓荒者遊戲中無法構成棋子數量最小值的贏棋樣式之情形

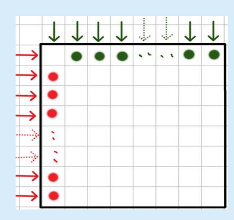


圖5-2-23　n×n拓荒者遊戲中棋子數量最大值的贏棋樣式

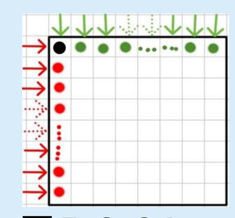


圖5-2-24　n×n拓荒者遊戲中無法構成棋子數量最大值的贏棋樣式之情形

(三)、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式

1. 觀察

首先，我們觀察到2×2的方格表上進行拓荒者遊戲，因為結束遊戲時棋盤上的棋子數量最大值與最小值皆為2，且後手必勝，如圖5-2-25所示，因此，我們發現不需要探討2×2的拓荒者遊戲。

接著，我們開始在3×3的方格表上進行拓荒者遊戲，發現遊戲結束時棋局樣式有很多種但棋子數量的最大值與最小值分別是4個與3個，也就是棋子數量為4個時，則先手贏棋棋子數量為3個時，則後手贏棋，由此可知，先手及後手皆可能贏棋，如圖5-2-26所示。

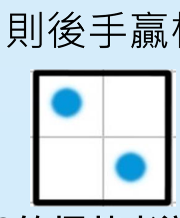


圖5-2-25 2×2的拓荒者遊戲結果示意圖

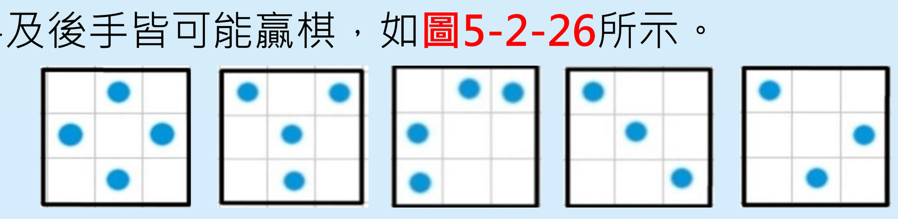


圖5-2-26　3×3的拓荒者遊戲結果示意圖

2.尋找關係與樣式

我們在 4×4 的方格表上進行拓荒者遊戲，發現遊戲結束時棋子數量除了有最大值與最小值，分別是 6 個與 4 個，在最大值與最小值之間，當遊戲結束時棋子數量 5 個棋子時，也可以產生贏棋樣式，而我們就**將所有可以產生贏棋樣式的棋子數量，稱為「贏棋所需棋子數量有效區間」**，如圖5-2-27所示。

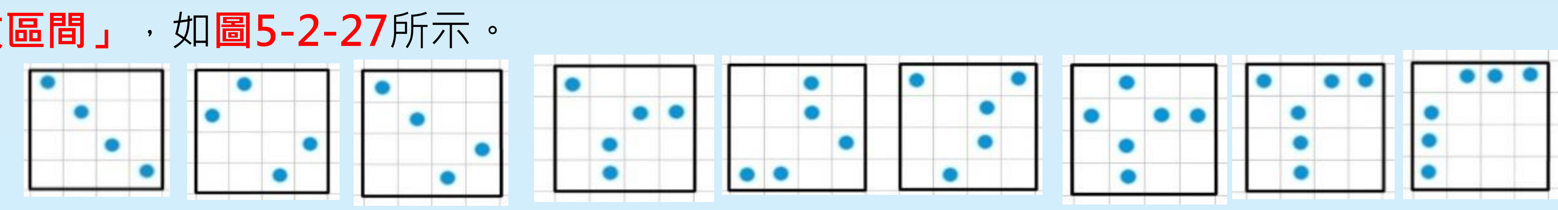


圖5-2-27　4×4的拓荒者遊戲贏棋所需棋子數量有效區間：4~6個

此外，在探討5×5拓荒者遊戲的贏棋樣式時，我們也發現5×5拓荒者遊戲結束時，不同棋子數量的贏棋樣式彼此間似乎有關聯，如圖5-2-28所示，**圖A為5×5遊戲結束時棋子數量為最大值，也就是棋子數量為 8 個的贏棋樣式，只要將綠框處的兩個棋子置換成圖B紅框中的一個棋子，並調整其他棋子的位置，就可形成圖B**，也就是遊戲結束時棋子數量為 7 個的贏棋樣式，依此類推，若將圖B綠框處的兩個棋子置換成圖C紅框的一個棋子，並調整其他棋子的位置，就可形成圖C，將圖C將綠框處的兩個棋子置換成圖D紅框的一個棋子，並調整其他棋子的位置，就可形成圖D。從上述的發現，我們認為棋子所在位置會影響遊戲結束時棋子所需數量，為了符合遊戲規則，讓每一行及每一列至少留下一個棋子，當每個棋子所在的位置能控制的行列皆為單行或單列時，如圖5-2-28的圖A時，棋子數量最大；當每個棋子所在的位置能同時控制單行與單列時，如圖5-2-28的圖D時，棋子數量最小；此外，透過觀察圖5-2-28的圖B、C、D紅框處的棋子，我們也了解每增加一個可同時控制單行與單列的棋子，就可減少所需的棋子數量，構成5 5拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

此外，在探討4×4 的拓荒者遊戲的有效區間時，當剩下的棋子個數為 6 個時，我們發現遊戲結果的樣式雖然有多種，但彼此之間似乎有關聯，以圖5-2-29中的**A、B、C、D四圖**為例，當空格移動時，為了讓每一行及每一列至少留下一個棋子，棋子的位置也會跟著移動，而透過空格與棋子的移動，就會形成許多不一樣的樣式。而這種現象在剩下的棋子個數為5個及4個時也有同樣的情形，如圖5-2-30和5-2-31所示。

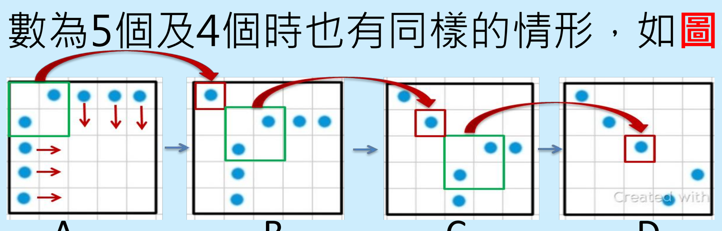

A　B　C　D

圖5-2-28 5×5拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式

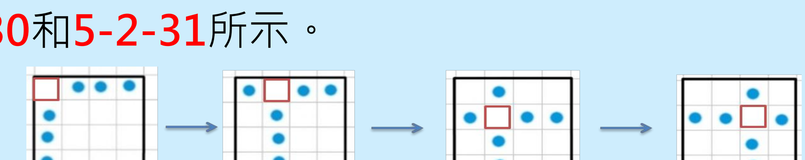

A　B　C　D

圖5-2-29　4×4贏棋樣式棋子個數為6個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式

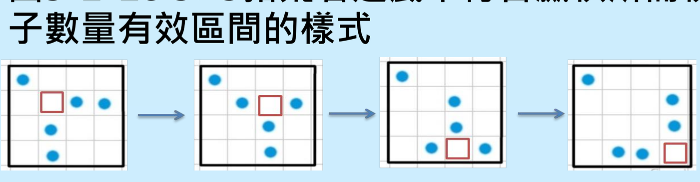


圖5-2-30　4×4贏棋樣式棋子個數為5個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式

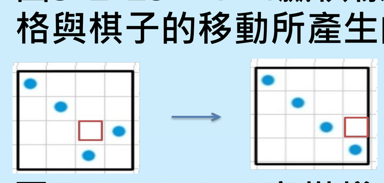


圖5-2-31　4×4贏棋樣式棋子個數為4個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式

另外，我們持續嘗試在 5×5 的方格表上進行拓荒者遊戲，發現遊戲結束時棋子數量會有 5~8 個不等，而且每一種數量的遊戲結果樣式都比 4×4 更多，但跟 4×4 一樣，如圖5-2-32為例，當空格移動時，為了讓每一行及每一列至少留下一個棋子，棋子的位置也會跟著移動，而透過空格與棋子的移動，就會形成許多不一樣的樣式。

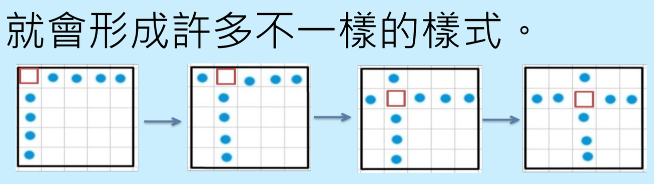


圖5-2-32　5×5贏棋樣式棋子個數為8個時透過空格與棋子的移動所產生的各種樣式

3.猜測

透過尋找關係與樣式，我們有**兩個重大的發現：**

(1)每增加一個可同時控制單行與單列的棋子，就可減少所需的棋子數量，構成n×n拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

(2)雖然在同樣規格的棋盤中，在相同贏棋數量遊戲結果中的看似有許多不同的贏棋樣式，但其實可以透過空格的移動，造成棋子移動，成為相同的樣式。

根據上述發現，我們**將有規律性，對稱性的贏棋樣式訂為「標準生成樣式」，並猜測所有贏棋樣式皆可透過棋子、空格的移動及圖形的旋轉、對稱還原成標準生成樣式。**

4.檢驗

為了檢驗前述的猜測，我們先根據棋子所在位置所能控制的行、列，發展 5×5 的拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式，以塗色法將單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，如圖5-2-33所示，圖A~圖D為 5×5 拓荒者遊戲獲勝所需棋子數量有效區間的標準生成樣式，也就是棋子數量為 5~8 個的標準生成樣式，依此規則著色，圖A為遊戲結束時棋子數量為 8 個的標準生成樣式，為 4 個綠色棋子、4 個紅色棋子所組成，圖B則為遊戲結束時棋子數量為 7 個的贏棋樣式，為 1 個黃色棋子，3 個紅色棋子所組成，依此規則著色，最後可將遊戲結束時棋子數量為 6 個及 5 個的贏棋樣式以塗色法進行表示，如圖5-2-33中的圖C及圖D所示。

接著，我們以圖5-2-34中圖A 為例，將任意 5×5 棋子數量為 6 個的贏棋樣式，先根據棋子所在位置所能控制的行、列，將贏棋樣式的棋子以不同顏色表示，**單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色**，接著**透過空格與棋子的移動，發現可還原成贏棋樣式的標準生成樣式**。此外，在圖5-2-35中的圖B 為任意 5×5 棋子數量為 7 個的贏棋樣式，根據一樣的塗色規則，接著再透過空格與棋子的移動，發現亦可還原成贏棋樣式的標準生成樣式。

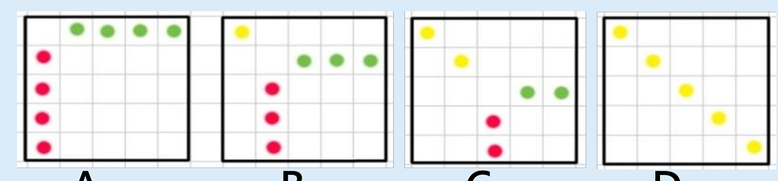

A　B　C　D

圖5-2-33 5×5拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式

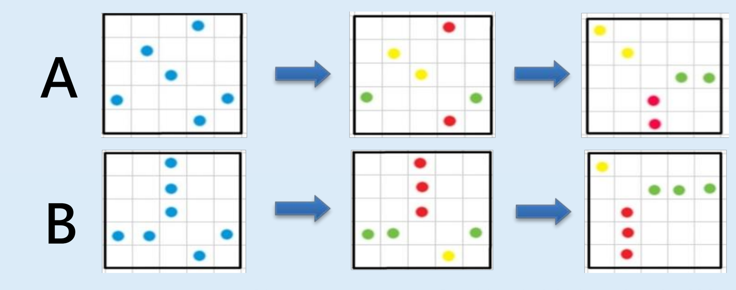


圖5-2-34　將5×5拓荒者遊戲的任意贏棋樣式還原成標準生成樣式的過程

確認在 5×5 拓荒者遊戲可發展出贏棋樣式的標準生成樣式後，我們持續在 6×6 拓荒者遊戲中建立贏棋樣式的標準生成樣式，根據棋子所在位置所能控制的行、列，分為單向控制與雙向控制，並將贏棋樣式的棋子以不同顏色表示，單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，如圖5-2-35所示，圖A~圖E為 6×6 的拓荒者遊戲贏棋所需棋子數量有效區間的標準生成樣式，也就是棋子數量為 6~10 個的贏棋樣式。

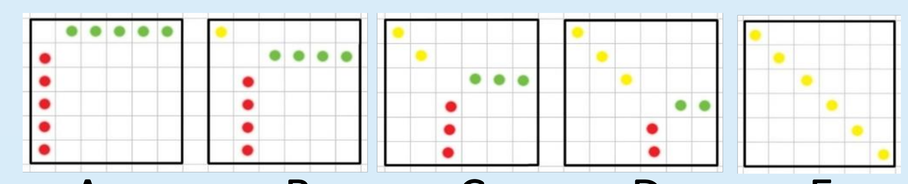

A　B　C　D　E

圖5-2-35 6×6拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式

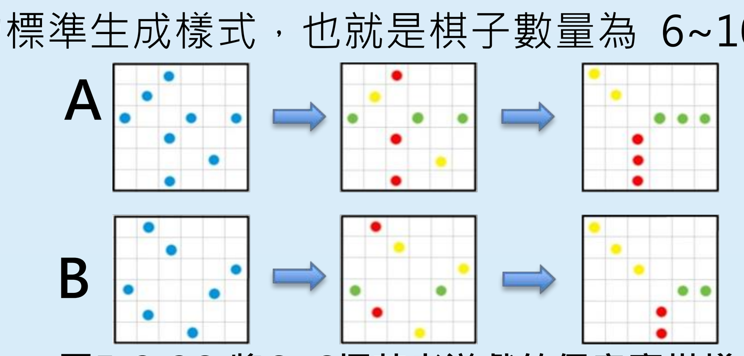


圖5-2-36　將6×6拓荒者遊戲的任意贏棋樣式還原成標準生成樣式的過程

接著，我們以圖5-2-36中圖A 為例，將任意 6×6 棋子數量為 8 個的贏棋樣式，先根據棋子所在位置所能控制的行、列，將贏棋樣式的棋子以不同顏色表示，單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，接著透過空格與棋子的移動，發現可還原成贏棋樣式的標準生成樣式。此外，在圖5-2-37中的圖B 為任意 6×6 棋子數量為 7 個的贏棋樣式，一樣先根據棋子所在位置所能控制的行、列，將贏棋樣式的棋子以不同顏色表示，單向控制行的棋子塗為綠色，單向控制列的棋子塗為紅色，可同時雙向控制行及列的棋子塗為黃色，接著再透過空格與棋子的移動，發現亦可還原成贏棋樣式的標準生成樣式。

5.論證

命 題：6×6遊戲中的所有贏棋樣式皆可透過棋子、空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。

論證：

我們以 6×6遊戲中結束遊戲時棋子數量為 7 個的贏棋樣式為例進行論證，當結束遊戲時棋子數量為 7 個時，在標準生成樣式中黃色棋子有 3 個，我們可將黃色棋子移動後贏棋樣式的情形分類討論各種可能產生的樣式，以證明所有贏棋樣式皆可透過棋子、空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。

第一種情形：任選 1 個黃色棋子，移動這個黃棋後，會產生兩種情形，一是所有的棋子皆不變色，如圖5-2-37中圖A所示，二是有一個紅色或綠色的棋子隨之變色，如圖5-2-37中圖B所示。從圖5-2-37中的兩個贏棋樣式，我們可發現**透過移動任一黃棋，無論棋子隨之移動變色與否，其黃棋、紅棋及綠棋數量皆不變，均為標準生成樣式所生成的贏棋樣式皆可透過空格的移動及圖型的旋轉對稱，還原成標準生成樣式。**

第二種情形：任選 2 個黃棋，移動這些棋後，所有棋皆不變色、皆變色或是有 1 個紅或綠棋子隨之變色，如圖5-2-38中的圖A及圖B所示圖C則為任選 2 個黃棋，移動後，會有一個黃棋不變色，另一個黃棋則會變紅色，使其中一個紅棋變成黃色。從圖5-2-38中的三個贏棋樣式，**我們可發現透過移動任一黃棋，無論其他棋隨之移動變色與否，其黃棋、紅棋及綠棋數量皆不變，均為標準生成樣式所生成的贏棋樣式，皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。**

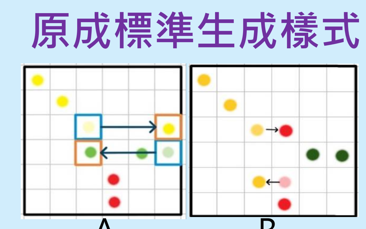

A　B

圖5-2-37　任選1個黃棋進行移動所產生的2種贏棋樣式

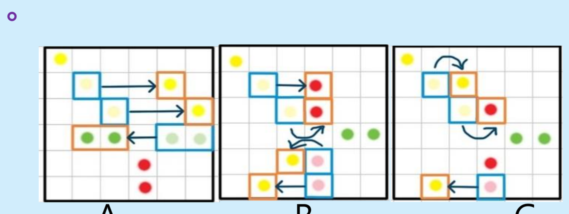

A　B　C

圖5-2-38　任選2個黃棋進行移動所產生的3種贏棋樣式

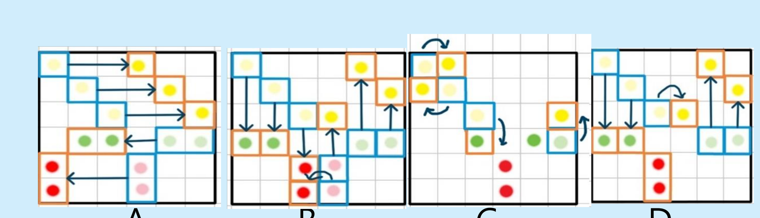

A　B　C　D

圖5-2-39　任選3個黃棋進行移動所產生的4種贏棋樣式的類型

第三種情形：任選 3 個黃棋，移動這些棋後，所有棋皆不變色、皆變色、有1個紅或綠棋隨之變色或是有2個紅或綠棋隨之變色，如圖5-2-39所示。從圖5-2-39中的四個贏棋樣式，**我們可發現透過移動任一黃棋，無論其他棋子隨之移動變色與否，其黃棋、紅棋及綠棋數量皆不變，均為標準生成樣式所生成的贏棋樣式，皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。**

(四)發展3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式的類型。

1.觀察

透過研究贏棋所需棋子數量的最小值至最大值與有效區間的樣式，我們發現各個贏棋樣式的「標準生成樣式」。然而，我們偶然在 6×6 的拓荒者遊戲中，我們**發現當贏棋所需棋子數量為 8 個的時候，除了我們原本發現的標準生成樣式，居然還有其他贏棋樣式**！也就是說，我們原本認為贏棋樣式中，可雙向控制行與列的黃色棋子數量固定只有 2 個，可單向控制行或列的紅色棋子及綠色棋子數量相等，固定只有各3個，如圖5-2-40 所示。

但是在遊戲的過程中，我們發現有些贏棋樣式中的黃色棋子數量居然不是 2 個，可以只有 1 個黃棋，且紅、綠棋子數量居然分別可以是 3 個跟 4 個，與我們一開始發現的標準生成樣式不同，我們再進一步觀察也發現，黃棋可只剩下一個的原因是由於紅棋分成兩行佔據，且佔據的行數比原本的標準生成樣式多一列，如圖5-2-41 所示。

2.尋找關係與樣式

為持續研究這種與原標準生成樣式不同的樣式，是否存在於 6×6 拓荒者遊戲以外的其他棋盤，我們從 3×3 拓荒者遊戲開始探討，發現在 3×3 及 4×4 拓荒者遊戲中，由於贏棋所需棋子數量的最大值其紅棋與綠棋數量最多仍各少於 4 個，且因為紅色或綠色棋子需要至少 4 個才能進行交錯排列，以佔據行或列，因此無法構成紅綠棋子數量不相等的贏棋樣式，如圖5-2-42 所示。


圖5-2-40　6×6棋子為8個的贏棋樣式

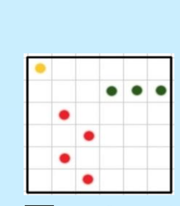


圖5-2-41　6×6棋子為8個紅綠不等的贏棋樣式

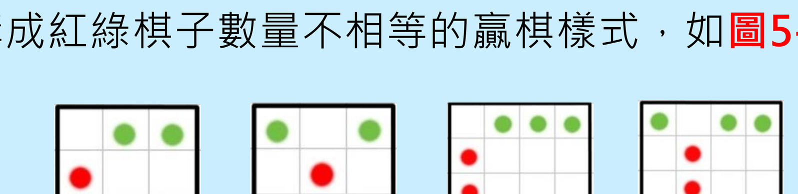


圖5-2-42　3×3及4×4拓荒者遊戲中無法構成紅綠數量不相等的贏棋樣式

接著，我們嘗試在 5×5 拓荒者遊戲中進行探討，發現在 5×5 拓荒者遊戲中只有贏棋所需棋子數量為 7 個時的贏棋樣式時，可出現紅綠棋子數量不相等的贏棋樣式，如圖5-2-43 所示，而在 6×6 拓荒者遊戲中，則在贏棋所需棋子數量分別為為 8 個及 9 個時的贏棋樣式時，可出現紅綠棋子數量不相等的贏棋樣式，如圖5-2-44 所示，而在 7×7 拓荒者遊戲中，則在贏棋所需棋子數量分別為為 9 至 11 個時的贏棋樣式時，如圖5-2-45所示，此外我們也觀察到在上述這些紅綠棋子數量不相等的贏棋樣式中，黃棋數量也可不一。

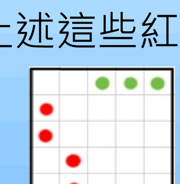


圖5-2-43 5×5 贏棋樣式棋子個數為7個時紅綠棋子數量不相等

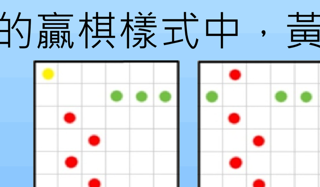


圖5-2-44　6×6贏棋樣式棋子個數為8個及9個時紅綠棋子數量不相等

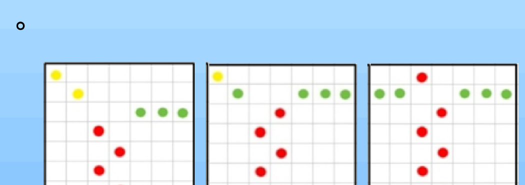


圖5-2-45　7×7贏棋樣式棋子個數為9至11個時紅綠棋子數量不相等

3.猜測

根據尋找關係與樣式的發現，我們猜測在n×n拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式不只有原本的一種，可以再細分成四類：

第一類：N(Y)=0，N(R)=N(G)，沒有黃棋，而紅綠數量一樣，這種標準生成樣式必為 n-1 個紅棋加上 n-1 個綠棋，棋子數量無變化，為最大值，如圖5-2-46所示。

第二類：N(Y)>0，N(R)=N(G)，有黃棋，而紅綠數量一樣，這個標準生成樣式黃棋加紅或綠棋皆必等於 n- 1，黃棋越多，紅綠棋就越少，棋子數量可變化如圖5-2-47所示。

第三類：N(Y)=0，N(R)>N(G)，沒有黃棋，紅綠數量不同，且若N(R)>N(G) 則N(R)-N(G)＝R的行數-G的列數，紅綠棋數可變化，如 圖5-2-48 所示。

第四類：N(Y)>0，N(R)>N(G)，有黃棋，紅綠數量不同，且若N(R)>N(G) 則N(R)-N(G)＝R的行數-G的列數，紅綠棋數可變化，如 圖5-2-49 所示。

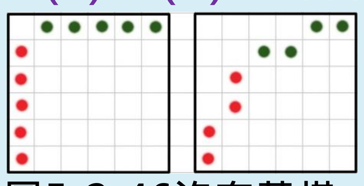


圖5-2-46沒有黃棋而紅綠數量一樣的標準生成樣式

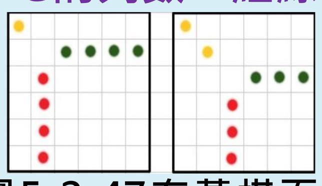


圖5-2-47有黃棋而紅綠數量一樣的標準生成樣式

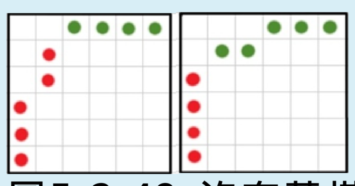


圖5-2-48 沒有黃棋而紅綠數量不同的標準生成樣式


圖5-2-49 有黃棋而紅綠數量不同的標準生成樣式

4.檢驗

我們在 8×8 拓荒者遊戲及 9×9 拓荒者遊戲中持續進行檢驗，發現也符合上述猜測，在 8×8 拓荒者遊戲及 9×9 拓荒者遊戲中，也包含了上述四類遊戲贏棋樣式的標準生成樣式。同時在紅綠數量不同的標準生成樣式中，也符合猜測，在棋盤中紅棋的行數減去綠棋的列數，也等於紅棋與綠棋的數量差，如圖5-2-50及圖5-2-51所示。

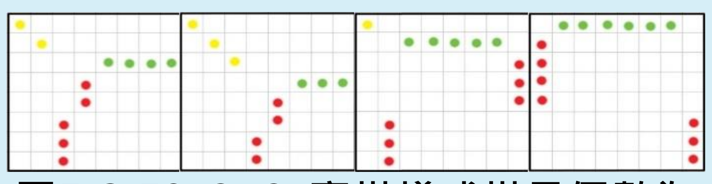


圖5-2-50 8×8 贏棋樣式棋子個數為10至13 個時紅綠棋子數量不相等


圖5-2-51 9×9 贏棋樣式棋子個數為 11 至 15 個時紅綠棋子數量不相等

此外，透過研究 8×8 拓荒者遊戲及 9×9 拓荒者遊戲，我們也發現在 9×9 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式裡，存在著 8×8 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式，若要繪製 7×7 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式，只要將 6×6 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式再加上外圍的一個黃點或將紅點與綠點各加一顆，就可完成，且 5×5 遊戲贏棋樣式的標準生成樣式為規格最小的紅綠數量不同的標準生成樣式，如圖5-2-52所示。

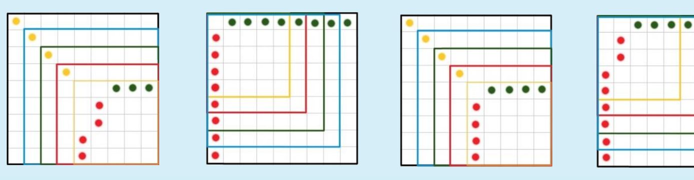


圖5-2-52 有與無黃棋，紅綠數量相同與不同的標準生成樣式

5.論證

透過觀察、尋找關係與樣式、猜測及檢驗，我們發現了贏棋樣式的標準生成樣式的四種類型，也發現構成這四種標準生成樣式的三大特性，分別為，在 nxn 棋盤中(n=2k或n=2k-1)贏棋樣式中，紅棋的數量(以N(R)表示)、綠棋的數量(以N(G)表示)及黃棋的數量(以N(Y)表示)所構成的贏棋樣式的兩個特性，以及在n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含(n-1)×(n-1)贏棋樣式標準生成樣式的特性。以下就這三大特性進行論證，以支持前述的研究發現，藉以建立贏棋樣式策略導向模式。

命題一： 在nxn棋盤中(n=2k或n=2k-1)，若N(R)、N(G)及N(Y)構成贏棋樣式，且N(R)>N(G)，N(Y)>0，則
(1)R的行數-G的列數＝N(R)-N(G)
(2)N(Y)＝綠箭頭數量- N(G)- R的行數

論證一：

(1)不妨設n=14，N(R)-N(G)=1，若R的行數-G的列數=2，如圖5-2-53所示，在此情形下，可推知紅箭頭被守住的數量如下，N(R)守住 9 個紅箭頭，N(G)所構成的兩列守住 2 個紅箭頭，總共守住 11 個紅箭頭；亦可推知綠箭頭被守住的數量如下，N(G)守住 8 個綠箭頭，N(R)所構成的 4 行守住 4個綠箭頭，總共守住 12 個綠箭頭，即剩下 3個紅箭頭及 2 個綠箭頭未被守住，又N(Y)恰可守住N(Y)對紅綠箭頭，但 3 個紅箭頭及 2 個綠箭頭不能完全配對，因此N(Y)必無法守住全部的紅綠箭頭，由此可得知，R的行數-G的列數=2>1，不能構成贏棋樣式。

(2)若R的行數-G的列數=0<1，如圖5-2-54所示，同理可證，必不能構成贏棋樣式。

(3)因此，由(1)、(2)可得知，若要構成贏棋樣式，則R的行數-G的列數＝N(R)-N(G)，如圖5-2-55所示。

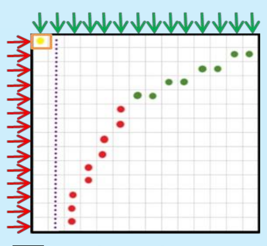


圖5-2-53
R的行數-G的列數=2

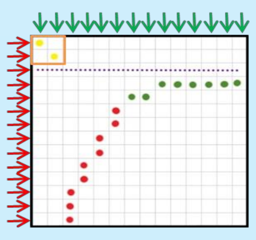


圖5-2-54
R的行數-G的列數=0

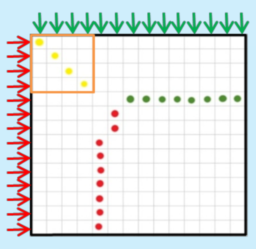


圖5-2-55
R的行數-G的列數=1

此外，若 nxn 棋盤中(n=2k或n=2k-1)，而N(R)、N(G)及N(Y)可構成贏棋樣式，且N(R)>N(G)，N(Y)>0，由圖5-2-55亦可推知綠箭頭數量=N(Y)+N(G)+R的行數，即N(Y)=綠箭頭數量- N(G)- R的行數。

命題二： 在 n×n 棋盤中(n=2k或n=2k-1)中，若N(Y)=0，N(R) >N(G) >0，且N(R)、N(G)構成贏棋樣式，則自 5×5 以後， N(R)與N(G)差的最大值為k-2(其中k>2)

論證二：

1.對奇數 ((2k-1) ×(2k-1))棋盤進行證明

(1) 先用 2k-2 個紅棋，2k-2 個綠棋，以守住 2k-1 個紅箭頭及 2k-1 個綠箭頭，若以k=6為例，則如圖5-2-56所示。

(2) 若將 2k-2 個紅棋，分為 k-1 串的 2 連紅棋串(此為最小的單位棋串)，此 k-1 串的 2 連紅棋串可守住 k-1 個綠箭頭，剩下(2k-1)-(k-1)=k 個綠箭頭，即綠棋可由 2k-2 個縮減為 k 個，就可守住剩下的 k 個綠箭頭。

(3) 由(1)、(2)可得知，若要構成贏棋樣式，贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差為N(R)-N(G)=(2k-2)-k=k-2個(其中k>2)。

2.對偶數 (2k ×2k) 棋盤進行證明

(1) 先用 2k-1 個紅棋，2k-1 個綠棋，以守住 2k 個紅箭頭及 2k 個綠箭頭，若以k=6 為例，則如圖5-2-57所示。

(2) 若將 2k-1 個紅棋，分為 k-2 串的 2 連紅棋串(此為最小的單位棋串)及一串 3 連紅棋串，此 k-2 串的 2 連紅棋串及一串 3 連紅棋串，可守住 k-1 個綠箭頭，剩下 2k-(k-1)=k+1 個綠箭頭，即綠棋可由 2k-1 個縮減為 k+1 個，就可守住剩下的 k+1 個綠箭頭。

(3) 由(1)、(2)可得知，若要構成贏棋樣式，贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差為N(R)-N(G)=(2k-1)-(k+1)=k-2個(其中k>2)。

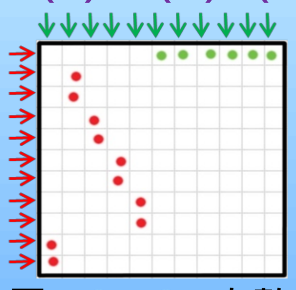


圖5-2-56 奇數棋盤贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差的證明示例圖

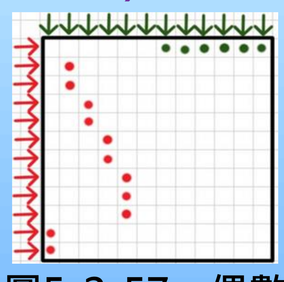


圖5-2-57 偶數棋盤贏棋樣式所需紅棋及綠棋數量最大差的證明示例圖

我們發現透過命題二的論證，可得知無論是在偶數棋盤 (2k×2k) 或奇數棋盤 ((2k-1)×(2k-1)) 中，要能構築出紅綠棋子數量不相等，黃棋數量為 0 或大於 0 的兩種情況，紅棋與綠棋數量的最大差為 k-2，而 k-2若要為正整數，則k≥3，可得知構成此兩種贏棋樣式的標準生成樣式之棋盤最小必定為5×5。

命題三： 在 n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含 (n-1)×(n-1) 贏棋樣式標準生成樣式

論 證 三：

對於(1)N(Y)= 0，N(R)=N(G)，即紅綠棋子數量相等，黃棋數量為 0
(2)N(Y)>0，N(R)=N(G) ，即紅綠棋子數量相等，黃棋數量大於 0
(3)N(Y)=0，N(R)>N(G)，即紅綠棋子數量不相等，黃棋數量為 0
(4)N(Y)> 0，N(R)>N(G)，即紅綠棋子數量不相等，黃棋數量大於 0

這四種類型的 (k-2)×(k-2) 贏棋樣式的標準生成樣式都可運用往左上角增加棋子以擴張棋盤的方式，構造出 (k-1)×(k-1) 贏棋樣式的標準生成樣式，再用同樣的方法亦可構造出 k×k 贏棋樣式的標準生成樣式，由上述推論，可推得在 n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含 (n-1)×(n-1) 贏棋樣式標準生成樣式，如圖5-2-58所示。

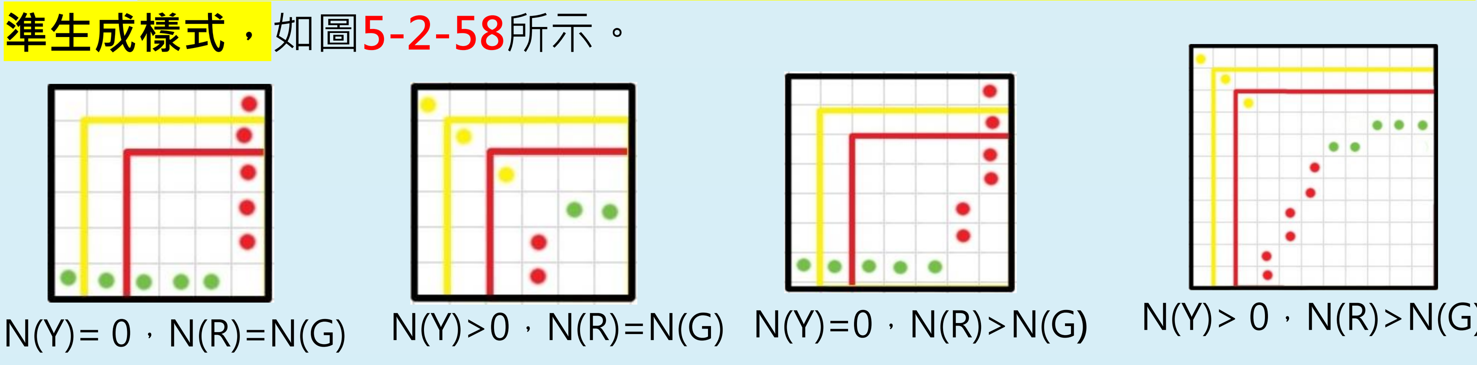

N(Y)= 0，N(R)=N(G)　N(Y)>0，N(R)=N(G)　N(Y)=0，N(R)>N(G)　N(Y)> 0，N(R)>N(G)

圖5-2-58 n×n 贏棋樣式標準生成樣式中，必包含 (n-1)×(n-1) 贏棋樣式標準生成樣式

陸、研究結果

一、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲的研究方向

藉由探討 3×3 拓荒者遊戲中後手必勝的情形，我們發現贏棋樣式策略導向模式的重要性，將研究方向確立為建立贏棋策略導向模式，讓玩家能有策略方法判定自己該怎麼下以提高玩家贏棋的機會。

二、探討 3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式

在 3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 遊戲中，透過塗色法與箭頭法，我們確立贏棋樣式棋子數量最小值為n，且贏棋樣式皆為由同時可管控行與列的黃棋所構成，如圖6-2-1所示，而在在 3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 遊戲中，贏棋樣式棋子數量最大值為 2(n-1)，且贏棋樣式皆為由相等數量的紅棋與綠棋所構成，如圖6-2-2所示。

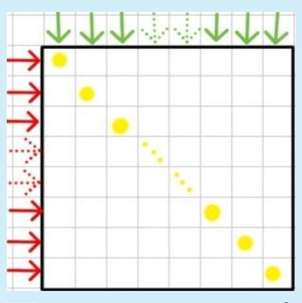


圖6-2-1 n×n 贏棋樣式棋子數量最小值的樣式

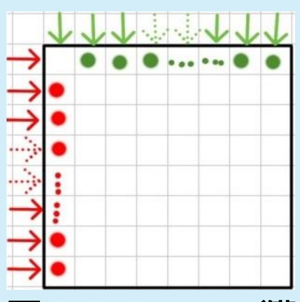


圖6-2-2 n×n 獲勝樣式棋子數量最大值的樣式

三、探討3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式。

在3×3、4×4、5×5、6×6.....n×n 拓荒者遊戲中，我們透過塗色法找出符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式，並以黃棋的移動證明任何贏棋樣式皆可透過空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成贏棋標準生成樣式。

四、確立3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式可分為下列四種類型：

(1) N(Y)= 0，N(R)=N(G) ，即黃棋數量為0 ，紅綠棋子數量相等。
(2) N(Y)>0，N(R)=N(G)，即黃棋數量大於0， 紅綠棋子數量相等。
(3) N(Y)=0，N(R)>N(G)，即黃棋數量為0，紅綠棋子數量不相等。
(4) N(Y)>0，N(R)>N(G)，即黃棋數量大於0，紅綠棋子數量不相等。

五、在 nxn 棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)，若N(R)、N(G)及N(Y)構成贏棋樣式，且N(R)>N(G)，則：

(1) R的行數-G的列數=N(R)-N(G)
(2) N(Y)=綠箭頭數量-N(G)-R的行數

六、在 nxn棋盤中(n=2k 或 n=2k-1)，若N(Y)=0，N(R)>N(G) 則：

自5x5 以後，N(R)與N(G)差的最大值為 k-2 (其中 k>2)

七、在 nxn贏棋樣式標準生成樣式中，必包含 (n-1)x(n-1) 贏棋樣式標準生成樣式。

八、建立贏棋策略導向模式：提供棋手在進行對奕中，藉由不斷循環運用下列四個步驟，以提高贏棋的勝率：

1. 觀察。
2. 使用塗色法對棋子進行功能定色。
3. 運用贏棋樣式所需棋子數量的有效區間。
4. 運用贏棋樣式標準生成樣式導引對奕。

柒、結論

本研究旨在建立拓荒者遊戲中贏棋樣式策略導向模式，我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、確立3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓 荒者遊戲的研究方向為探討贏棋樣式策略導向模式。

二、找到在3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 拓荒者遊戲中贏棋所需棋子數量的最小值與最大值的樣式，並推導出最大值、最小值的公式。 (如：陸、研究結果二)。

三、找到3×3、4×4、5×5、6×6......n×n 拓荒者遊戲中符合贏棋所需棋子數量有效區間的樣式，並證明任何樣式皆可透過棋子、空格的移動及圖型的旋轉、對稱，還原成標準生成樣式。(如：陸、研究結果三)。

四、確立3×3、4×4、5×5、6×6......n×n拓荒者遊戲贏棋樣式的標準生成樣式的類型。(如：陸、研究結果四)。

五、發現並論證：能快速構成贏棋樣式標準生成樣式的四種類型的三個特性。(如:陸、研究結果 五、六、七)

六、建立贏棋樣式策略導向模式。(如:陸、研究結果八)

捌、參考資料

一、Downie, D., Slesnick, T., & Stenmark, J. K. (1999). 女生來做數學(Math for Girls and OtherProblem Solvers,梁崇惠和楊翠勤譯)。台北:聯經。(原著出版於1981)。

二、 國民小學課本南一版第 12 冊第 2單元—怎樣解題(一)。

三、 國民小學課本南一版第 6 冊第 8單元—乘法與除法。