

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

080411

乾坤大挪移—數字華容道解題策略與數序關係
之探究

學校名稱：金門縣金湖鎮金湖國民小學

作者： 小五 羅渝蘋 小五 邱宇睿	指導老師： 林郁菁 鄭詠馨
-------------------------	---------------------

關鍵詞：數字華容道、解題策略、數序關係

摘要

本次研究重點於探討數字華容道玩家的共同困境、兩種解題策略適用性、數序相反對數與有無解的關係。綜合研究發現概要如下：

- 一、受試者無法解出每一列的最後一個數字排列。
- 二、四格解法適用性： 3×3 的數字華容道分為四個顏色的範圍，該範圍內的四格，只要使目標數字至特定位置(左半邊 B、C，或右半邊 C、B)，就能解。
- 三、六格解法適用性：在目標六格範圍內移動，使每列最後的數字滑塊與前一個數字滑塊相鄰，即有解。
- 四、由 3×3 解題與六格解法過程中，初探一對數序相反無解。
- 五、由 2×2 數字華容道題型進行奇偶關係與有無解之證明，類推 3×3 、 4×4 數字華容道題型，皆符合奇數相反對數無解，偶數對數相反有解。

壹、研究動機

下課時，總是會跟同學一起玩華容道的遊戲，在蒐集相關華容道的資訊時，我們看到一則關於數字華容道的小故事，在 19 世紀 90 年代，自稱是 15-puzzle 的發明人的 Sam Loyd 曾懸賞 1000 美金，徵求能僅僅把 14 和 15 交換的方法，但是從來都沒有人能順利得到獎金，因此我們嘗試更好的解題策略，也推測數序相反可能跟有無解有極大的相關性，並從 2×2 、 3×3 、 4×4 數字華容道題型進行探究，想找出解題的策略和有無解的規律。

貳、研究目的

- 一、分析華容道的解題困境
- 二、探討四格解法對 3×3 數字華容道的適用性
- 三、探討六格解法的數字華容道適用性
 - 3-1 探討六格解法對 3×3 數字華容道的適用性
 - 3-2 探討六格解法對 4×4 數字華容道的適用性
- 四、探討數字華容道的目標列中，數序相反的對數數量對有無解的關係
 - 4-1 初探一對數序無解

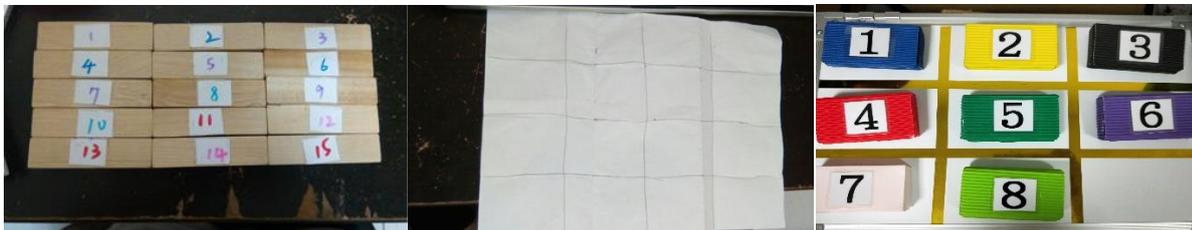
4-2 探討 2×2 數字華容道數序相反對數與有無解的關係

4-3 探討 3×3 數字華容道數序相反對數與有無解的關係

4-4 探討 4×4 數字華容道數序相反對數與有無解的關係

參、研究器材與設備

物品名稱	數量	物品名稱	數量
積木	15	膠帶	15
紙籤	15	A4 白紙	1
瓦楞紙	8	白板	1



肆、研究過程與討論

一、文獻與相關作品探討

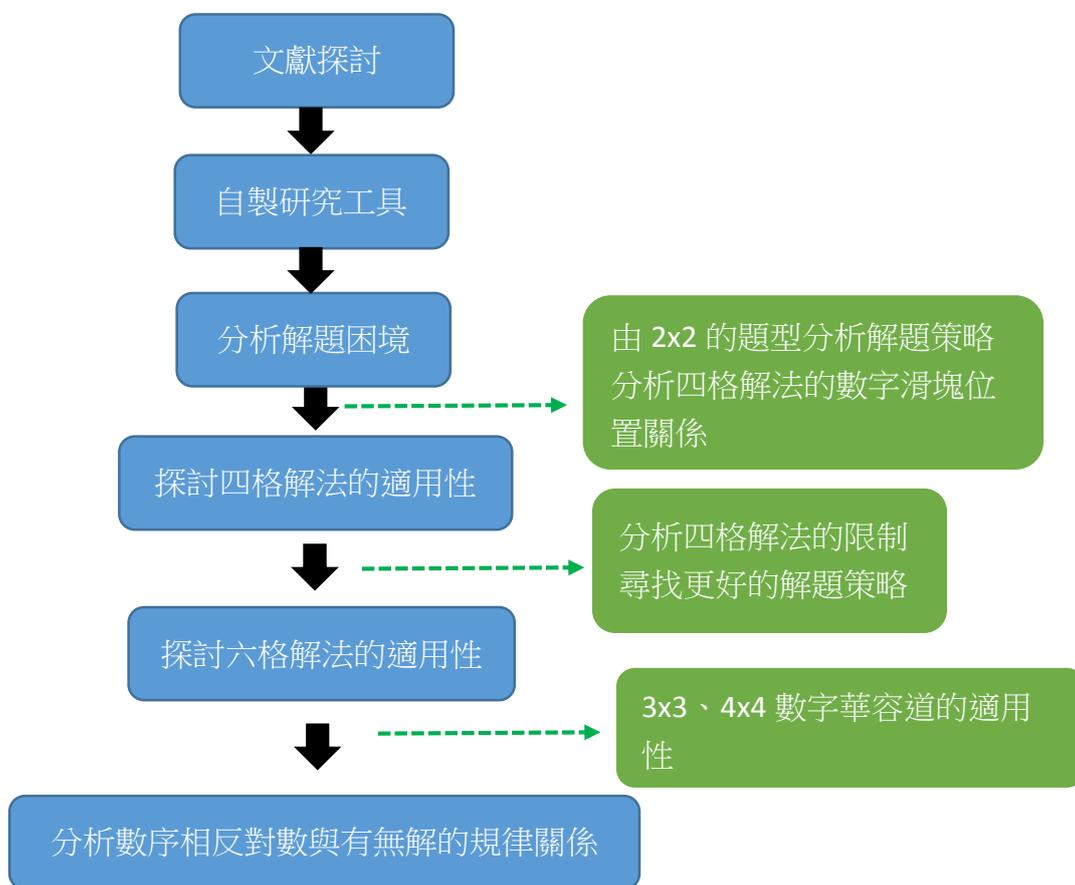
作品名稱/作者	內容	省思
數學與智慧盤/李嘉齊、黃國寶	<ol style="list-style-type: none"> 1. 用數學排列解決智慧盤出現的問題 2. 用算式證明智慧盤 1-15 數字的牌面有無解判定 3. 排面有解是不是有甚麼算式可以證明 4. 找出排面有解的條件 	<p>他們的作法太難了，對我來說有點困難，一些數學符號我第一次看到，但從他們研究過程的筆記來看，他們是先完成其他的剩下右下角的四塊，發現只有 3 種數序的情形有解，但這個研究只找出部分情形，而且跟我玩的遊戲介面不一樣，我除了玩 4x4 的還有完 3x3，我是用四格解法和六格解法</p>
智慧盤中的奧秘-智	1.以小區塊、中區塊的方式來算出	我覺得他們用算式來算有無解

慧盤遊戲推移策略 探討/陳星奎、胡登傑、張維方、藍寅瑋	最大相減次數 2.用最大相減次數來算出 3x2 有解的組合 3.觀察奇數、偶數有無解的共通性	太過複雜，所以我用數幾對的方法來證明題目有無解，方法上相對容易。
--------------------------------	--	----------------------------------

● 研究省思

由相關的文獻中，了解到智慧盤成功的規則，但是是以 2×3 來進行探究，類推於一般數字華容道的題型缺乏了廣泛性與價值性，因此，決定從試玩中尋找相關的解題策略與規律性，進一步延伸至 2×2 、 3×3 、 4×4 數字華容道題型之探究。

二、研究流程



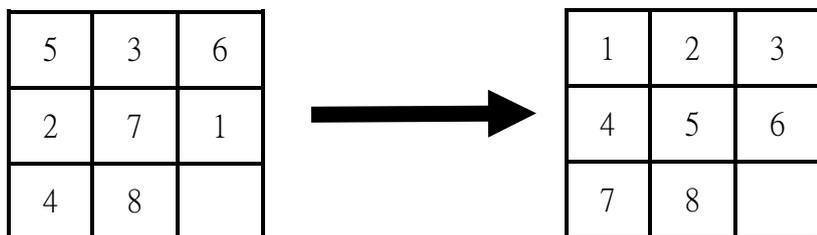
三、研究過程

研究目的一：找出共同的華容道困境

(一)數字華容道的遊戲規則：

將亂掉的數字以不離開格子的方式滑動數字滑塊，將數字滑塊由左至右、由上到下、由

小到大排列。數字華容道遊戲屬於滑塊類遊戲，就是在格子範圍內，按照一次移動一格的條件把數字滑塊移動到正確位置。



(二)研究方法說明

1. 嘗試完成各種不同組合的題目中分析解題困境。
2. 找 3 位沒玩過數字華容道相關經驗的玩家進行試玩，因為我們都可以在 50~60 步之間完成，所以就給玩家 80 步的解題步數，讓他們在 80 步內完成指定題目，因為如果沒有限制步數他們可能不會仔細思考，而增加更多的解題步數，在他們無法將特定數字排到正確位置，且針對特定數字滑塊不停重複同樣的移動步驟時，拍照並記錄下來找出解題困境共通點。
3. 題目為 3x3 的題型，題目的組合如右圖：

2	1	5
4	7	8
3	6	

(三)受試者的解題困境

受試者 編號	步數	照片	困境說明
1	59		3、6 無法到對的位置。

2	36		1、2 數相反，和 3 無法到正確位置。
3	62		2、3 排好，無法讓 1 也排進去。

(四)研究發現：

試玩過後我發現玩家都能在 80 步以內完成，且第 1、2 列的最後一個數字，無法將特定數字排到正確位置，且不停重複同樣的步驟，所以，我想嘗試能解決這個困境的方法。

研究目的二：探討四格解法對 3x3 數字華容道的適用性

(一)研究方法說明

我在找數字華容道相關資料的時候，看到一個影片在分享數字華容道的解題方法，他有提到 3x3 題型的關鍵是先完成第一列，第二列和第三列要同時完成，所以我很好奇為什麼這樣就能解出來，有沒有更簡單的方法，因此先從 2x2 的題目進行解題策略的探究，讓我發現其中數字滑塊之間的位置關係，想到了四格解法，是否能廣泛解決所有數字華容道题目的困境。

(二)探討 2x2 數字華容道的解題策略

1.列出所有 2x2 题目的排列組合

組合一			組合二			組合三		
1	3			2	3		2	1
2				1			3	
經順時針移動，無解			經順時針移動，有解			經順時針移動，無解		

組合四			組合五			
3	1		3	2		
2			1			
經順時針移動，有解			經順時針移動，無解			

3.分析有解組合共同的條件

組合四		組合二	
3	1	2	3
2		1	

(1)2、3 一定都會相鄰

(2)2、3 移動後是對角位置關係

(三)四格解法初步定義

由 2x2 分析有解的條件，猜想這樣的方式或許可以成為數字華容道的解題策略，所以我想到了四格解法。四格解法就是將三個目標數字與一個空格，移動至正確的位置，使 B、C 相鄰或互為對角關係，就能滑成正確位置，如下圖。

相鄰			相鄰			相鄰			相鄰		
B	C			B					C		
				C		C	B		B		
對角關係			對角關係			對角關係			對角關係		
C			B				B			C	
		B		C		C			B		

(四)研究過程

將 3x3 的格子分成紅色、藍色、綠色、黃色的格子，另外將空格定義為 X 格，每一個格子都圍住四塊，再一個一個去試玩，最後用四格解法完成數字滑塊的排列。如下圖：

1	2	3
4	5	6

7	8	
---	---	--

1. 紅色範圍

(1)第一次嘗試：先將目標數字滑塊 1、2、4、X 移動至紅色範圍格子內，不考慮順序，但是要符合四格解法 B、C 在相鄰的位置，排好正確位置後，再將 5 的數字滑塊移動至 X 格中。滑動步驟分析圖如下(箭頭代表滑動方向，黃色為起始滑動的數字塊，綠色為最後滑動的數字塊)：

步驟一			步驟二			步驟三		
2	1	5	2	1	5	2	1	5
4	7	8	4	7	7	4		7
3	6		3	6	8	3	6	8

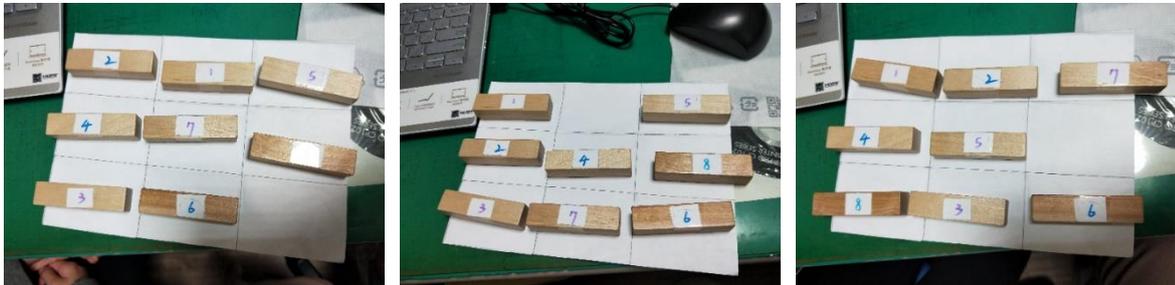


(2)第二次嘗試：先將目標數字滑塊 1、2、4、X 移動至紅色範圍格子內，接著將 B、C 移動至相對位置，像是左邊由上往下的數序必須是 4、2，右邊由上往下的數序必須是 2、4，接著將 1、2、4 排到正確位置，最後再將 5 的數字滑塊移動至 X 格中。滑動步驟分析圖如下：(箭頭代表滑動方向，黃色為起始滑動的數字塊，綠色為最後滑動的數字塊)

● 方格右邊位置為 2、4 移動數字滑塊步驟分析圖

步驟一			步驟二			步驟三		
2	1	5	1	7	5	1	2	7
4	7	8	4	2	8	4		5
3	6		4	3	6	3	6	8
步驟四			步驟五					

1	2	7	1	2	7	
	4	5	4	5		
3	6	8	3	6	8	



● 方格左邊位置為 4、2 移動數字滑塊步驟分析圖

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr> </table>	2	1	5	4	7	8	3	6		<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	4	2	5		1	7	3	6	8	<table border="1"> <tr><td></td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> </table>		4	5	3	2	7	6	1	8	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td></tr> </table>	3	4	5	6	7	7	1	2	8
2	1	5																																					
4	7	8																																					
3	6																																						
4	2	5																																					
	1	7																																					
3	6	8																																					
	4	5																																					
3	2	7																																					
6	1	8																																					
3	4	5																																					
6	7	7																																					
1	2	8																																					
步驟五	步驟六	步驟七	步驟八																																				
<table border="1"> <tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	3	4	5	1		7	2	6	8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	1	3	5		4	7	2	6	8	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>		1	5	4	3	7	2	6	8	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td></td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	4	1	5	2	3	7		6	8
3	4	5																																					
1		7																																					
2	6	8																																					
1	3	5																																					
	4	7																																					
2	6	8																																					
	1	5																																					
4	3	7																																					
2	6	8																																					
4	1	5																																					
2	3	7																																					
	6	8																																					
步驟九	步驟十	步驟十一																																					
<table border="1"> <tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>8</td></tr> </table>	4	1	5	2		7	6	3	8	<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>8</td></tr> </table>		1	5	4	2	7	6	3	8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>8</td></tr> </table>	1	2	5	4		7	6	3	8										
4	1	5																																					
2		7																																					
6	3	8																																					
	1	5																																					
4	2	7																																					
6	3	8																																					
1	2	5																																					
4		7																																					
6	3	8																																					

研究發現

2、4 雖然相鄰，但是數字顛倒，無法使數字滑塊 1、2、4、X 移動至其正確位置，我發現不是所有數字都只要相鄰、對角就可以解出來，B、C 的位置在左右有不同的順序，而且 B、C 滑動之後，會呈現相對位置，就可以將範圍內的數字滑塊移動至正確的位置，如下

圖：

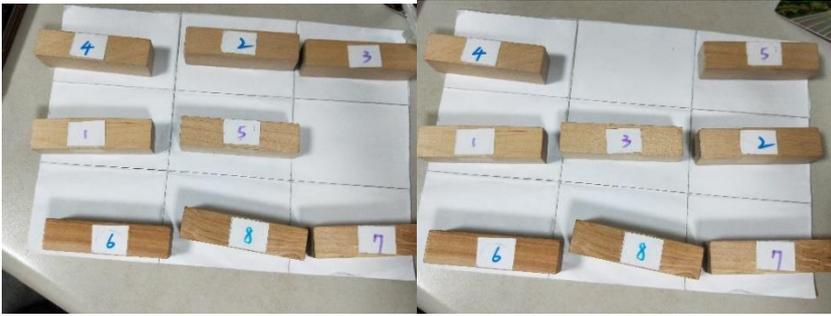
左側 C、B	經逆時針滑動兩次之後	右側 B、C	B、C 位置關係圖																
<table border="1"> <tr><td>C</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td></tr> </table>	C		B		<table border="1"> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td>B</td></tr> </table>			C	B	<table border="1"> <tr><td></td><td>B</td></tr> <tr><td></td><td>C</td></tr> </table>		B		C	<table border="1"> <tr><td>C</td><td>B</td></tr> <tr><td>B</td><td>C</td></tr> </table>	C	B	B	C
C																			
B																			
C	B																		
	B																		
	C																		
C	B																		
B	C																		

由上述證明，重新定義四格解法的位置關係，只要將 B、C 數字滑塊移動至範圍內左右的特定位置，就能將 A、B、C 數字滑塊與 X 格移動至正確位置，更容易使 C+1 的數字滑塊移動到 X 格中，因此推測以下藍色、黃色與綠色格子範圍，解題皆只要符合左邊 C、B 或者右邊 B、C 的其中一個條件，就能將數字滑塊移動至正確位置。

2.藍色範圍

先將目標數字滑塊 2、3、5、X 移動至藍色範圍格子內，將左邊由上往下的數序必須是 5、3，右邊由上往下的數序必須是 3、5 接著將 2、3、5 排到正確位置，最後再將 6 的數字滑塊移動至 X 格中。

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr> </table>	2	1	5	4	7	8	3	6		<table border="1"> <tr><td></td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>		2	1	4	7	5	3	6	8	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	4	2	1	3	7	5		6	8	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> </table>	4	2	1		3	5	6	7	8
2	1	5																																					
4	7	8																																					
3	6																																						
	2	1																																					
4	7	5																																					
3	6	8																																					
4	2	1																																					
3	7	5																																					
	6	8																																					
4	2	1																																					
	3	5																																					
6	7	8																																					
步驟五	步驟六	步驟七	步驟八																																				
<table border="1"> <tr><td></td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>5</td></tr> </table>		4	2	6	3	1	7	8	5	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td></td></tr> </table>	6	4	2	7	3	1	8	5		<table border="1"> <tr><td>6</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td>1</td></tr> </table>	6	4	2	7	5	3	8		1	<table border="1"> <tr><td>4</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table>	4		2	6	5	3	7	8	1
	4	2																																					
6	3	1																																					
7	8	5																																					
6	4	2																																					
7	3	1																																					
8	5																																						
6	4	2																																					
7	5	3																																					
8		1																																					
4		2																																					
6	5	3																																					
7	8	1																																					
步驟九	步驟十	步驟十																																					
<table border="1"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table>	4	5		2	6	3		7	8	1	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table>	4	2		6	5	3	7	8	1	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table>	4	2	3	6	5		7	8	1									
4	5	2																																					
6	3																																						
7	8	1																																					
4	2																																						
6	5	3																																					
7	8	1																																					
4	2	3																																					
6	5																																						
7	8	1																																					



3.黃色範圍

先將目標數字滑塊 4、5、7、X 移動至黃色範圍格子內，左邊由上往下的數字序必須是 7、5，右邊由上往下的數字序必須是 5、7，接著將 4、5、7 排到正確位置，最後再將 8 的數字滑塊移動至 X 格中。

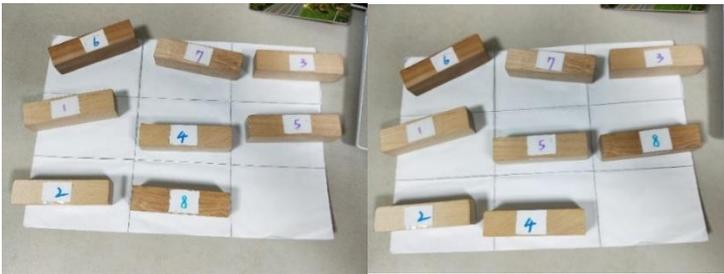
步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr> </table>	2	1	5	4	7	8	3	6		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr> </table>	2	1	5	7		8	4	3	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr> </table>	2		1	7	8	5	4	3	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr> </table>	2	8	1	7		5	4	3	6
2	1	5																																					
4	7	8																																					
3	6																																						
2	1	5																																					
7		8																																					
4	3	6																																					
2		1																																					
7	8	5																																					
4	3	6																																					
2	8	1																																					
7		5																																					
4	3	6																																					
步驟五	步驟六	步驟七	步驟八																																				
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>4</td><td>6</td></tr> </table>	2	8	1		3	5	7	4	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td>6</td></tr> </table>	2	8	1	3	4	5	7		6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	2	8	1	4	5		3	7	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>7</td></tr> </table>	2	8	1	5		6	4	3	7
2	8	1																																					
	3	5																																					
7	4	6																																					
2	8	1																																					
3	4	5																																					
7		6																																					
2	8	1																																					
4	5																																						
3	7	6																																					
2	8	1																																					
5		6																																					
4	3	7																																					
步驟九	步驟十	步驟十	步驟十一																																				
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	2	8	1	5	3		4	7	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	2	8	1	5		3	4	7	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	2	1	8		5	3	4	7	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td>6</td></tr> </table>	2	1	8	4	5	3	7		6
2	8	1																																					
5	3																																						
4	7	6																																					
2	8	1																																					
5		3																																					
4	7	6																																					
2	1	8																																					
	5	3																																					
4	7	6																																					
2	1	8																																					
4	5	3																																					
7		6																																					



4.綠色範圍

先將目標數字滑塊 5、6、8、X 移動至藍色範圍格子內，左邊由上往下的數字序必須是 8、6，右邊由上往下的數字序必須是 6、8，最後將 5、6、8 排到正確位置。

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr> </table>	2	1	5	4	7	8	3	6		<table border="1"> <tr><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	2		1	4	8	5	3	7	6	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td>6</td></tr> </table>	4	2	1	3	8	5	7		6	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td>6</td></tr> </table>	4	2	1	3	8	5	7		6
2	1	5																																					
4	7	8																																					
3	6																																						
2		1																																					
4	8	5																																					
3	7	6																																					
4	2	1																																					
3	8	5																																					
7		6																																					
4	2	1																																					
3	8	5																																					
7		6																																					



5.以四格解法依序將紅色、藍色、黃色與綠色進行 3x3 數字華容道之解題

(1)紅色格子：

在滑紅色格子時先將目標數字滑塊 1、2、4、X 移動至紅色範圍格子內，接著將 B、C 移動至相對位置，左邊由上往下的數字序必須是 4、2，右邊由上往下的數字序必須是 2、4，接著將 1、2、4 排到正確位置，最後再將 5 的數字滑塊移動至 X 格。

步驟一	步驟二	步驟三																											
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr> </table>	2	1	5	4	7	8	3	6		<table border="1"> <tr><td>1</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>6</td></tr> </table>	1	7	5	4	2	8		3	6	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	1	2	7	4		5	3	6	8
2	1	5																											
4	7	8																											
3	6																												
1	7	5																											
4	2	8																											
	3	6																											
1	2	7																											
4		5																											
3	6	8																											
步驟四	步驟五																												
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td></td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	1	2	7		4	5	3	6	8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	1	2	7	4	5		3	6	8										
1	2	7																											
	4	5																											
3	6	8																											
1	2	7																											
4	5																												
3	6	8																											



(2)藍色格子：

在滑紅色格子時，就已經把藍色格子的 2、5 固定在範圍內，所以可以把 3 移動至藍色範圍格子內，應該就能排列正確位置，最後再將 6 的數字滑塊移動至 X 格中。但是紅色範圍內的數字滑塊 4、1、2，容易因為移動數字塊而打亂數序，因此在移動數字塊時，必須注意 4、1、2 相連且不打亂數序的情況下移動，才便於使左邊 B、C 可以排成 5、3，接著讓 X 格在藍色範圍內空出，且必須讓數字 6 在 X 格下面，便於解題後讓數字滑塊 6 順勢上移一格到正確的位置，最後將一開始移動的數字塊 4、1、2 順時針滑動回原本的位置，即可將前兩列所有數字塊排列至正確位置。

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	1	2	7	4	5		3	6	8	<table border="1"> <tr><td>2</td><td></td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr> </table>	2		7	1	5	8	4	3	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	2	5		1	3	7	4	6	8	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>7</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	2	3	5	1	7		4	6	8
1	2	7																																					
4	5																																						
3	6	8																																					
2		7																																					
1	5	8																																					
4	3	6																																					
2	5																																						
1	3	7																																					
4	6	8																																					
2	3	5																																					
1	7																																						
4	6	8																																					
步驟五	步驟六	步驟七																																					
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	2	3	5	1		8	4	7	6	<table border="1"> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>		2	3	1	8	5	4	7	6	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8											
2	3	5																																					
1		8																																					
4	7	6																																					
	2	3																																					
1	8	5																																					
4	7	6																																					
1	2	3																																					
4	5	6																																					
7	8																																						

(3)黃色範圍、綠色範圍：

排好紅色範圍、藍色範圍，7、8 就自動回到正確位置了。

(五)研究小結與討論

1. 我發現四格解法在 2x2 可以用來判斷題目是否有解，但解題時，每個顏色範圍都有重疊的數字滑塊，可能會導致已排好數字滑塊的順序打亂，所以必須在思考，有無更好的策略可以不打亂已排好數字滑塊數序的解題策略，因此接續探討另一種解題策

略。

- 只要將前兩列排到正確數字，第三列的數字滑塊就會自動回到正確位置，如果題目數字依序為 1、2、3、4、5、6、8、7，第三列數字滑塊相反的情況之下，還會不會有解呢？因此接續探討一對數字相反有無解的證明。

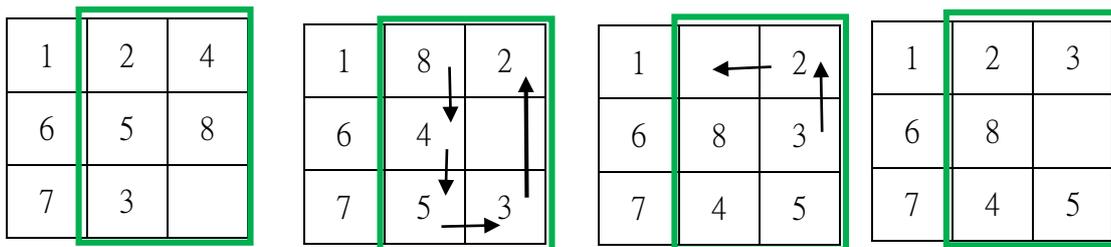
研究目的三：探討六格解法對數字華容道的適用性

(一)研究方法說明

由於四格解法無法解決每一列最後一個數字排列回到正確位置，我從網路上蒐集相關資料，發現別人分享了一個通用解法，或許可以解決最後數字排列的困境，於是我決定要嘗試看看，是不是真的能解決數字排列的困境。

(二)六格解法

主要是讓每一列中沒辦法完成的最後一個數字滑塊排列至正確位置。在目標數字滑塊的六格範圍內，使每列最後一個目標數字滑塊 Y 與其相鄰的數字滑塊 Y-1，在六格範圍內移動，依序移動，讓目標數字滑塊 Y 與相鄰數字滑塊 Y-1 之間有 X 格，接著再移動至正確位置。例如：第一排正確排列數字是 1、2、3，2、3 就是為最後的兩個目標數字滑塊，按照四格解法 B、C 位置關係，2、3 必須讓它連在一起在，右邊位置為 2、3，移動範圍必須採取六格，使 X 格落於 2、3 之間，依序讓它回到正確位置，故稱為六格解法。步驟解析如下：



(三)研究過程

3-1 探討六格解法對 3x3 數字華容道的適用性

有些人在 3x3 的題目 1、2 排的最後一個數字不會滑，所以我就從 3x3 的題目開始嘗試六格解法在 3x3 能不能用，後來發現六格解法在 3x3(的第 1、2 排)、4x4(的第 1、2、3 排)都可以完成最後一個數字都可以使用。以下為三個例題進行實作，將第一列的最後一個數字滑塊進行六格解法的實作，步驟一為佈題，省略第一列與第二列的前兩個數字滑塊的過程排

序，直接從排列最後一個目標數字滑塊開始分析：

例題一：17526348

步驟一			步驟二			步驟三			步驟四		
1	7	5	1	2	7	1	5	2	1	5	2
2	6	3	4	5		4	5	7	4	7	2
4	8		6	8	3	6	8	3	6	8	3
步驟五			步驟六			步驟七			步驟八		
1		2	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	3	4	5		5		8	5	8	7
6	7	8	6	7	8	4	6	7	4		6
步驟九			步驟十			步驟十一					
1	2	3	1	2	3	1	2	3			
5	7	6	4	5	6	4	5	6			
4	8		7	8		7	8				

例題二：21547836

步驟一			步驟二			步驟三			步驟四		
2	1	5	1	2		1	2	5	1	2	
4	7	8	8	7	5	8		6	8	6	5
3	6		4	3	6	4	7	3	4	7	3
步驟五			步驟六			步驟七			步驟八		
1	6	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3
8	5	3	8	6		4	5		4	5	6
4	7		4	5	7	7	8	6	7	8	

例題三：53627148

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>8</td></tr> </table>	1	2	7	5		6	3	4	8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td></td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>8</td></tr> </table>	1	2	7		4	6	5	3	8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>3</td></tr> </table>	1	2	7	4	6	8	5		3	<table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>3</td></tr> </table>	1		2	4	8	7	5	6	3
1	2	7																																					
5		6																																					
3	4	8																																					
1	2	7																																					
	4	6																																					
5	3	8																																					
1	2	7																																					
4	6	8																																					
5		3																																					
1		2																																					
4	8	7																																					
5	6	3																																					
步驟五	步驟六	步驟七	步驟八																																				
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>6</td></tr> </table>	1	8	2	4	7	3	5		6	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	1	2	3	4	8		5	7	6	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>6</td></tr> </table>	1	2	3	4	5		7	8	6	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	8	2																																					
4	7	3																																					
5		6																																					
1	2	3																																					
4	8																																						
5	7	6																																					
1	2	3																																					
4	5																																						
7	8	6																																					
1	2	3																																					
4	5	6																																					
7	8																																						

3-2 探討六格解法對4 × 4數字華容道的適用性

在4 × 4用六格解法可以完成第一、二、三列的數字滑塊排列，但第四排的格子不夠用六格的範圍進行解題，所以就先把數字 9、10、11 按照數序往逆時針的方向滑動，再把剩下的數字 12 滑塊倒退排回去，最後如果 13、14、15 沒有排到正確位置的話，就在把數字 13、14、15 以順時針或逆時針的方式進行滑動，只要數序對了，在不改變第三列的數序之下，將其他數字滑塊移動回去特定位置。(黃色的數字滑塊為起始滑動塊，綠色則是最後移動的數字滑塊。)

- 第一列的數字滑塊排列(步驟一到八)：列出第一列的解題步驟，嘗試列出六格解法於最後數字滑塊 4 的解題過程，進一步探討其適用性。
- 第二列的數字滑塊排列(步驟九到十二)：略過 5、6、7 的數字滑塊排列步驟，嘗試列出六格解法於最後數字滑塊 8 的解題過程，進一步探討其適用性。
- 第三列的數字滑塊排列(步驟十三到十七)：略過 9、10、11 的數字滑塊排列步驟，嘗試列出六格解法於最後數字滑塊 12 的解題過程，進一步探討其適用性。
- 第四列的數字滑塊排列(步驟十八到二十)：最後一列無法採取六格解法，自行嘗試解題探究，進一步探討與3 × 3數字華容道解題最後一列數字滑塊的數序關係。

步驟一				步驟二				步驟三				步驟四							
1	9	2	4	1	2		4	1	2	6	4	1	2	7	6				
12	↓	6	7	15	12	9	6	15	12	9	↑	7		12	9	↑	3	4	
10	14	↓	5	3	10	14	↑	7	3	↓	10	14	↑	3	15	10	14	15	
13	11	↓	8		13	11	5	8	13	11	5	8	13	11	5	8			
步驟五				步驟六				步驟七				步驟八							
1	2	3	7	1	2		3	1	2	6	3	1	2	3	4				
12	9	←	6	↓	12	9	6	7	12	9	↓	7	4	12	9	6			
10	14	15	4	10	14	15	4	10	14	↓	15	→	10	14	7	15			
13	11	5	8	13	11	5	8	13	11	5	8	13	11	5	8				
步驟九				步驟十				步驟十一				步驟十二							
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
5	6	7	12	5	6	11	7	5	6	11	7	5	6	7	8				
14	9	11	↓	14	9	←	12	↑	14	9	12	8	14	9	11				
10	13	15	8	10	13	15	8	10	13	15	8	10	13	12	15				
步驟十三				步驟十四				步驟十五				步驟十六							
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8				
9	10	11	15	14	9	10	11	9	15	10		9	15	10	11				
14	13	12	↓	14	13	12	15	14	13	12	11	14	↓	13	12				
步驟十七				步驟十八				步驟十九				步驟二十							
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8				
9	10	11	12	9	10	11	12	14	9	10	11	14	13	9	10				
14	15	13		14	15	13	↓	15	13	12	↓	15	13	12	11				
步驟二十一				步驟二十二															
1	2	3	4	1	2	3	4												
5	6	7	8	5	6	7	8												
13	9	10	11	9	10	11	12												
14	15		12	13	14	15													

(四)研究發現

1. 六格解法的解題順序建立在由小到大、由上而下的解題條件之下，不但能將 3×3 的第一、二列最後數字滑塊的排列至正確位置，在 4×4 更可以解決第一、二、三列最後數字滑塊的排列，但是也必須參考四格解法中 B、C 的位置關係，才能將目標數字滑塊移動至正確位置。
2. 3×3 題目倒數第二列，4、5 若以移動至正確位置，數字滑塊 6 必定會出現在第二列 X 格下面，順勢移動就能完成。
3. 我們發現在 4×4 的數字華容道中，將前三列排依序移動至正確位置後，最後一列並不會像 3×3 的題目一樣自動排列至正確位置，反而呈現數序顛倒的情況，但是在不改變數序的方式進行解題，卻能夠解出來，我們猜想是否跟數序顛倒是否有極大的相關。
4. 在滑動的過程中，發現六格解法主要目的是使一對相反的數序滑塊，有正確的排序，但同時也會讓另一對數序相反。

研究目的四：探討數字華容道的目標列中，數序相反的對數數量對有無解的關係。

(一)研究方法說明：

先將 3×3 的題型嘗試將一對數序顛倒去探討有無解，再來把兩對數序顛倒有解，推測數序顛倒的對數與數字華容道題目的有、無解有關，因此持續嘗試將題目改變為三、四、五、六對數序相反，驗證奇數對數相反就無解，偶數對數相反就有解。

(二)數序對數計算方式：每列數字由左而右的排列，應為小到大，只要由左側開始檢視，數字大於右側的數字，兩兩配對，算一算有幾對。範例數列如下計算：

數列一：3、2、1

此數列可以左側開始兩兩配對成：第一對：(3、2)、第二對：(3、1)、第三對：(2、1)，且符合大數在前、小數在後的條件，以上三對皆符合條件，故此計算為 3 對數序相反的數列。

數列二：2、1、3

此數列可以左側開始由大數配小數，兩兩配對成：(2、1)、(2、3)、(1、3)，且符合大數在前、小數在後的條件，只有(2、1)，故此計算為 1 對數序相反的數列。

(三)研究過程

4-1 初探一對數字無解

發現一

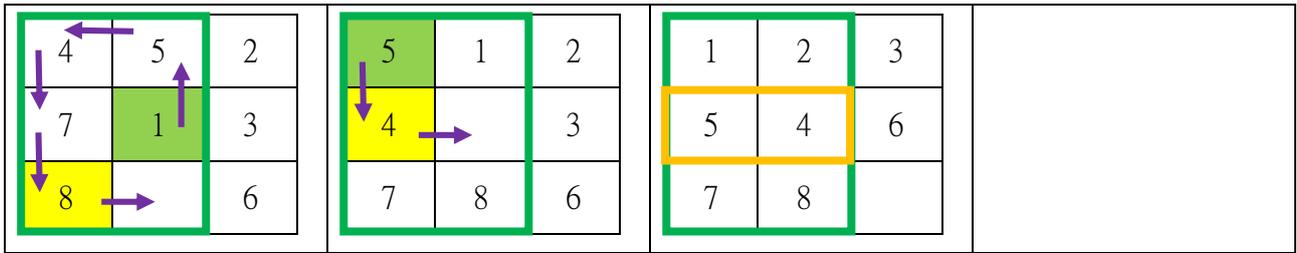
在玩 3x3 的題目過程當中，若先將前兩列排到正確位置，7、8 數字滑塊就會呈現正確的數字排列，嘗試將題目只變化第三列一對數字相反，將題目數字滑塊依序排列成 12345687，進行解題。發現無法將 7、8 兩個數字滑塊排列出正確位置，經過多次解題，即使成功將 7、8 數字滑塊完成正確的數字排列，也會產生跨列有一對數字滑塊相反的情況。

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	8	7		<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td>6</td></tr> </table>	1	2	3	8	4	5	7		6	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>6</td><td>5</td></tr> </table>	1	2	3	7	8	4		6	5	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	7	4	5	6	8	
1	2	3																																					
4	5	6																																					
8	7																																						
1	2	3																																					
8	4	5																																					
7		6																																					
1	2	3																																					
7	8	4																																					
	6	5																																					
1	2	3																																					
7	4	5																																					
6	8																																						
步驟五	步驟六																																						
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table>	1			2	3		4	5	7	6	8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	6	5	7	8																			
1	2	3																																					
	4	5																																					
7	6	8																																					
1	2	3																																					
4	6	5																																					
7	8																																						

發現二

從之前的研究，發現六格解法在將目標列的最後數字滑塊移動至正確位置時，會導致另一對數字滑塊相反，因此由 3 × 3 的題目進行推測，若將第三列變化為 8、7 的數字滑塊排列，再運用有效的六格解法進行解題，必定會導致另一列的數字滑塊相反。發現無法解出題，經過多次解題，也會產生跨列數字相反的情況，但是依舊是一對數字相反。

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	8	7		<table border="1"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td>6</td></tr> </table>	1	5	2	4	7	3	8		6	<table border="1"> <tr><td></td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>3</td></tr> </table>		7	5	1	4	2	8	6	3	<table border="1"> <tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>3</td></tr> </table>	7	4	5		1	2	8	6	3
1	2	3																																					
4	5	6																																					
8	7																																						
1	5	2																																					
4	7	3																																					
8		6																																					
	7	5																																					
1	4	2																																					
8	6	3																																					
7	4	5																																					
	1	2																																					
8	6	3																																					
步驟五	步驟六	步驟七																																					



4-2 探討 2×2 數字華容道數序相反對數與有無解的關係

依據右下角為空格的規則，皆採順時針的方向進行解題，先將 2x2 的所有解組合依序列出，觀察數序相反對數的翻轉次數與對數變化之規律性，進一步探究有解與無解的差異。

一、順時針

組合	數列變化	數序對數變化(對)	有解
231	231→123	2→0	√
312	312→231→123	2→2→0	√
123	123	0	√
132	132→213→321→132	1→1→3→1	
213	213→321→132→213	1→3→1→1	
321	321→132→213→321	3→1→1→3	

二、逆時針

組合	數列變化	數序對數變化(對)	有解
231	231→312→123	2→2→0	√
312	312→123	2→0	√
123	123	0	√
132	132→321→213→132	1→3→1→1	
213	213→132→321→213	1→1→3→1	
321	321→213→132→321	3→1→1→3	

● 研究小結：

1. 偶數數序相反對數有解，奇數數序相反對數無解。
2. 不論是順時針或逆時針，都不會影響數序對數相反的奇偶關係，更不會影響有無解。

3. 只要是奇數對數相反作為題目，經過數序的循環後，每次的數序對數皆為奇數，又會回到原本的題目；只要是偶數對數相反作為題目，經過數序的循環後，解出題目的數序對數必定為 0 對。
4. 依據此發現數序相反對數的奇偶證明，決定嘗試設計 3×3 與 4×4 的數字華容道題目，來驗證我們的發現。

4-3 探討 3×3 數字華容道數序相反對數與有無解的關係

探討兩對數序相反有無解

在 3×3 的題目中兩對數序相反有解，不管是同一列或不同列只要是兩對數序相反都有解。在其他數字滑塊不更動正確位置的情況下，將數字滑塊做數序對數為兩對的變動調整進行解題，發現兩對數序相反有解，跨列數序相反並不會改變解題的結果。

1. 第一列的數序 1、2、3(0 對數序相反)改成 2、3、1(2 對數序相反)最後有解
2. 第二列的數序 4、5、6(0 對數序相反)改成 5、6、4(2 對數序相反)，最後有解。
3. 第一列的數序 1、2、3(0 對數序相反)改成 3、1、2(2 對數序相反)，最後有解。
4. 第二列的數序 4、5、6(0 對數序相反)改成 5、4、6(2 對數序相反)，最後有解。
5. 跨列數序改變：第一列數序 2、1、3(1 對數序相反)/第二列數序 5、4、6(1 對數序相反)，最後有解。
6. 跨列數序改變：第一列數序 2、1、3(1 對數序相反)/第三列數序 8、7(1 對數序相反)，最後有解。
7. 跨列數序改變：第二列數序 5、4、6(1 對數序相反)/第三列數序 8、7(1 對數序相反)，最後有解。

探討三對數序相反有無解

在 3×3 的題目中，三對數序相反就跟一對數序相反一樣無解，跨列並不會影響解題結果。

1. 第一列的數序 1、2、3 改成 3、2、1(3 對數序相反)，最後無解。
2. 第二列的數序 4、5、6 改成 6、5、4(3 對數序相反)，最後無解。
3. 跨列數序改變：第一列數序 2、3、1(2 對數序相反)/第三列數序 8、7(1 對數序相反)，最後無解。

4. 跨列數序改變：第二列數序 5、6、4(2 對數序相反)/第三列數序 8、7(1 對數序相反)，最後無解。
5. 跨列數序改變：第一列數序 2、3、1(2 對數序相反)/第二列數序 4、6、5(1 對數序相反)，最後無解。

探討四對數序相反有無解

在 3×3 的題目中四對數序相反有解，由於前面做過跨列不會影響到解題的結果，由此可知 4 對數序相反是有解的。

1. 第一列改成 3、2、1(3 對數序相反)/第二列改成 5、4、6(1 對數序相反)最後有解
2. 第一列改成 3、2、1(3 對數序相反)/第三列改成 8、7(1 對數序相反)最後有解
3. 第一列改成 2、1、3(1 對數序相反)/第二列改成 6、4、5 (2 對數序相反)最後有解

探討五對數序相反有無解

由於前面做過跨列不會影響到解題的結果由此可知 5 個是無解的，由 1、3、5 個對數相反的實作證明奇數對數個數序相反，題目就會是無解。

1. 數序改變：第一列改成 3、2、1(3 對數序相反)/第二列改成 6、4、5(2 對數序相反)最後無解
2. 數序改變：第一列改成 3、1、2(2 對數序相反)/第二列改成 6、5、4(3 對數序相反)最後無解
3. 數序改變：第一列改成 3、1、2(2 對數序相反)/第二列改成 6、4、5 (2 對數序相反) /第三列改成 7、8(1 對數序相反)最後無解

探討六對數序相反有無解

由於前面做過跨列不會影響到解題的結果由此可知 6 個是有解的，由 2、4、6 個對數相反的實作證明偶數對數個，題目就會是有解。

1. 數序改變：第一列改成 3、2、1(3 對數序相反)/第二列改成 6、5、4(3 對數序相反)最後有解。
2. 數序改變：第一列改成 3、2、1(3 對數序相反)/第二列改成 6、4、5(2 對數序相反)/第三列改成 8、7(1 對數序相反)，最後有解。

4-4 探討 4×4 數字華容道數序相反對數與有無解的關係

由3×3發現數序跨列，並不會影響解題結果，故隨意設計數序相反的數量，來觀察4×4數序對數相反與有無解的關係，並依據正確4×4的數字華容道題目(如下圖)，進行數序調整與驗證，最後無解的局勢有兩種：第一種最後一列為 14、13、15，第二種最後一列為 13、15、14(如下圖)。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

▲ 4×4有解的正確排列

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

▲ 4×4無解題目的最後局勢 ▲

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
14	13	15	

1. 一對數序相反：第四列改成 13、15、14(1 對數序相反)，最後無解。
2. 兩對數序相反：第二列改成 5、8、6、7(2 對數序相反)，最後有解。
3. 三對數序相反：第四列改成 15、14、13(3 對數序相反)，最後無解。
4. 四對數序相反：第一列改成 1、2、4、3(1 對數序相反)/第二行改成 5、6、8、7(1 對數序相反)/第三行改成 10、9、11、12(1 對數序相反)/第四行改成 14、13、15(1 對數序相反)，最後有解。
5. 五對數序相反：第一列改成 2、1、3、4(1 對數序相反)/第二行改成 6、5、8、7(1 對數序相反)/第三行改成 10、9、12、11(2 對數序相反)/第四行改成 14、13、15(1 對數序相反)，最後無解。
6. 六對數序相反：第一列改成 4、3、2、1(6 對數序相反)，最後有解。

(四)研究發現

1. 初探一對數序無解，運用3×3解題第三列的 7、8 數字滑塊自動移至正確位置之特性，也觀察到嘗試使用六格解法會同時讓兩對數字滑塊相反，經過兩種證明，可以得知若是一對數序相反必定無解，且將數字華容道在第一、二列數序皆正確的情況下，第三列呈

現 8、7 數字滑塊相反的局勢，判定為無解。

2. 由 2×2 數字華容道所有組合中，發現奇數對數相反就無解，偶數對數相反就有解
3. 由 2×2 數字華容道所有組合中，發現偶數對數相反，可經由順時針或逆時針方向，偶數移動次數，解出答案；奇數對數相反，則無法經由偶次數移動來解出題目。
4. 數序對數固定的條件下，不會因為跨列而影響到解題的結果。
5. 以 3×3 的題目為例，只要奇數對數的數序相反就無解，雙數對數的數序相反就有解。

(紅色字體代表有更改數字數序的數字列)

題目			數序相反對數	是否跨列	有解	無解
第一列	第二列	第三列				
123	456	87	1	否		V
231	456	78	2	否	V	
123	564	78	2	否	V	
312	456	78	2	否	V	
123	546	78	2	否	V	
213	546	78	2	是	V	
213	456	87	2	是	V	
123	546	87	2	是	V	
321	456	78	3	否		V
123	654	78	3	否		V
231	456	87	3	是		V
231	465	78	3	是		V
123	564	87	3	是		V
321	546	78	4	是	V	
213	645	78	4	是	V	
321	456	87	4	是	V	

321	645	78	5	是		V
312	654	78	5	是		V
312	645	87	5	是		V
321	654	78	6	是	V	
321	654	87	6	是	V	

6. 以 4×4 的題目為例，只要奇數對數的數序相反就無解，偶數對數的數序相反就有解。

(紅色字體代表有更改數字數序的數字列)

題目				數序相反對數	是否跨列	有解	無解
第一列	第二列	第三列	第四列				
1234	5678	9 10 11 12	13 15 14	1	否		V
1234	5867	9 10 11 12	13 14 15	2	否	V	
1234	5678	9 10 11 12	15 14 13	3	否		V
1243	5687	10 9 11 12	14 13 15	4	是	V	
2134	6578	10 9 12 11	14 13 15	5	是		V
4321	5678	9 10 11 12	13 14 15	6	否	V	

伍、研究結論

- 一、玩家大都是無法完成目標數字列中的最後一個數字滑塊或一些數序顛倒的數字滑塊，像是 4、5 或是 2、3。
- 二、列出 2×2 數字華容道的所有組合，並非所有組合都有解，從有解的組合分析共同的條件，若正確數序為 A、B、C，將數字華容道分為左半邊、右半邊，左半邊為 C、B，右半邊為 B、C，由此發想四格解法的策略，在解題時，只要能將目標數字滑塊，在四格範圍內，移動成這兩種位置關係，就能順利解題。
- 三、四格解法的位置關係，將 3×3 分為四個顏色範圍，每一個範圍都能解出四個數字的正確數序排列，但是要以四格解法依序紅色、藍色、黃色與綠色進行解題，會面臨到共用的數字滑塊，除了範圍內目標數字滑塊，必須將相鄰的數字滑塊在不打亂的數序情況下，進行範圍以外的移動，才會便於移動範圍內的數字滑塊，對於初次使用四格解法策略的玩家，較不建議。
- 四、六格解法比較適合在 3×3 題目的第一、二列、 4×4 題目的第一、二、三列完成每排最後一個數字的正確排序，並不適合用在 3×3 、 4×4 的最後一排，因為最後一排的格子不夠用六格，且如果要用六格解法的話，會容易打亂其他排好的數字。
- 五、 3×3 與 4×4 剩下最後一排的局勢不同： 3×3 的題目在完成前面兩列時，第三列會自動使數字滑塊移動到正確位置； 4×4 的題目在完成前三列時，最後一列會呈現兩對數序相反的局勢。
- 六、由 3×3 題目只變動最後一列的數序相反是無解、 4×4 題目最後一列為偶數對數相反，推論一對數序相反無解，並以六格解法的特性驗證，六格解法在變更目標數字滑塊位置時，同時也會導致另一對相鄰數字相反，由此推論一對數序無解、兩對數序有解，進一步探究對數相反的對數有無規律關係。
- 七、以 2×2 所有題目組合驗證：奇數數序相反對數無解，偶數數序相反對數則有解；順時針或逆時針並不會影響到解題結果。
- 八、由 3×3 設計一對到六對數序相反的題目，不論對數相反的數量是在同一列或是不同列，總和的數序相反對數只要相同，奇數對數的數序相反就無解，雙數對數的數序相反

就有解。

九、由 4×4 設計一對到六對數字相反的題目，不論對數相反的數量是在同一列或是不同列，總和的數字相反對數只要相同，奇數對數的數字相反就無解，雙數對數的數字相反就有解。

陸、研究心得

甲生

終於好像找到一點規律了！我從一開始只想過關，不知道甚麼是研究，到現在已經可以整理我的發現紀錄做科展了！起先要把「數字華容道」的遊戲變成研究，寫成書面我有點抗拒，也曾經因為一直留下來做研究，而不想繼續做這個研究，幸好有家人和夥伴陪我、鼓勵我，讓我有堅持下去的動力，在這之後我慢慢的喜歡上研究這件事，尤其是找出更棒的解題方法，過程中一度感覺到很大的疲累，許多研究中的方法和表達，都是不斷對自己的挑戰，直到現在我已經快完成科展的報告了，我很有成就感，加上自己研究出來四格解法，居然可以幫助解題，我真的很高興！

我真的很期待能參加這次科展，但是又會害怕不敢說話給評審聽，所以家長和老師鼓勵我，還說了比賽最重要的是過程，而不是結果，這句話讓我更有自信，不用擔心沒得獎會被嘲笑或被罵，如果有得獎就要歸功於家長、老師、夥伴，因為有他們才讓我堅持下去。

我希望未來的研究者要有鏗而不捨的精神，遇到難題時也要選擇面對，不要逃避，也希望你們可以找出數字華容道的不同的數字規律，像是上下數字顛倒，或是其他的解題困境或是出題陷阱和技巧。

乙生

終於要完成它了！我們研究了許多好用的方法，最有心得的是四格解法可以順時針的移動，也可以逆時針的移動數字，但是有發現他不能改變數字，也只能在四格範圍裡面移動；而六格解法可以在六格的範圍裡面移動，我也發現到只要有一對數字滑塊交換，證明數字數續對數與有無解有很大的關係，而且六格解法可以讓數字交換，雖然我很欣賞六格解法解題，但是能一起和夥伴研究出四格解法，真的很不容易。

我覺得研究華容道很開心，我現在在華容道的時候可以更快速的過關，贏過其他人，也

因為整理與嘗試了四格解法、六格解法進行解題，讓我好像在歸納與整理的時候更有規律，我也想會分享給大家，讓大家一起思索成長。

柒、參考資料

一、網址

1.最強大腦 數字華容道的通用解法

<https://www.youtube.com/watch?v=-2br-Hlgmts>

2.數字華容道怎麼玩

<https://jingyan.baidu.com/article/7908e85cc2c709af491ad262.html>

二、相關研究

1. 李嘉齊、黃國寶(2018)。數學與智慧盤。嘉義市第 36 屆中小學科學展覽會。

<http://www2.cy.edu.tw/SCIENCE36/%E5%9C%8B%E4%B8%AD%E7%B5%84/%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%A7%91/%E5%9C%8B%E4%B8%AD%E7%B5%84-%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%A7%91-%E6%99%BA%E6%85%A7%E7%9B%A4%E8%A3%A1%E7%9A%84%E6%95%B8%E5%AD%B8/%E5%9C%8B%E4%B8%AD%E7%B5%84-%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%A7%91-%E6%99%BA%E6%85%A7%E7%9B%A4%E8%A3%A1%E7%9A%84%E6%95%B8%E5%AD%B8.pdf>

2. 陳星奎、胡登傑、張維方、藍寅璋(1997)。智慧盤中的奧秘-智慧盤遊戲推移策略探討。全國中小學科展。

<https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=698&sid=4648>

摘要

本次研究重點於探討數字華容道玩家的共同困境、兩種解題策略的適用性、數序相反對數與有無解的關係。綜合研究發現概要如下：
四格解法適用性：3×3的數字華容道分為四個顏色的範圍，該範圍內的四格，只要使目標數字至特定位置(左半邊B、C，或右半邊C、B)，就能解。
六格解法適用性：在目標六格範圍內，每列最後的數字滑塊與相鄰的數字，在六格範圍內移動，即有解，適用3×3或4×4的題目類型。
不以策略進行3×3解題，最後一列的數字會剛好呈現正確數字，證明一對數字相反無解。
由2×2數字華容道題型進行奇偶數對數與有無解之證明，進一步從3×3、4×4數字華容道題型，驗證一對至六對的數序相反對數，皆符合奇數相反對數無解，偶數對數相反有解。

壹、研究動機

同學間瘋玩數字華容道遊戲，進一步發現一件有趣的事情，19世紀的Sam Loyd曾懸賞1000美金，徵求能把14和15交換解題的方法，但從沒人能順利解開，因此讓我們想找出解題策略，也推測數序相反可能跟有無解有極大的相關性，並從2×2、3×3、4×4數字華容道題型進行廣泛性的探究。

貳、研究目的

- 一、分析華容道的解題困境
- 二、探討四格解法對3x3數字華容道的適用性
- 三、探討六格解法的數字華容道適用性
 - 3-1探討六格解法對3x3數字華容道的適用性
 - 3-2探討六格解法對4x4數字華容道的適用性
- 四、探討數字華容道的目標列中，數序相反的對數數量對有無解的關係
 - 4-1初探一對數字無解
 - 4-2探討2×2數字華容道數序相反對數與有無解的關係
 - 4-3探討3×3數字華容道數序相反對數與有無解的關係
 - 4-4探討4×4數字華容道數序相反對數與有無解的關係

參、研究架構



肆、研究器材

積木、紙籤、瓦楞紙、膠帶、A4白紙、白板



伍、遊戲規則

數字華容道的遊戲規則：

將亂掉的數字以不離開格子的方式滑動數字滑塊，將數字滑塊由左至右、由上到下、由小到大排列。數字華容道遊戲屬於滑塊類遊戲，就是在格子範圍內，按照一次移動一格的條件把數字滑塊移動到正確位置。

陸、文獻探討

作品名稱/作者	內容	省思
數學與智慧盤/李嘉齊、黃國寶	<ol style="list-style-type: none">1. 用數學排列解決智慧盤出現的問題2. 用算式證明智慧盤 1-15 數字的牌面有無解判定3. 牌面有解是不是有甚麼算式可以證明4. 找出牌面有解的條件	他們的作法太難了，對我來說有點困難，一些數學符號我第一次看到，但從他們研究過程的筆記來看，他們是先完成其他的剩下右下角的四塊，發現只有3種數序的情形有解，但這個研究只找出部分情形，而且跟我玩的遊戲介面不一樣，我除了玩4x4的還有完3x3，我是用四格解法和六格解法。
智慧盤中的奧秘-智慧盤遊戲推移策略探討/陳星奎、胡登傑、張維方、藍寅璋	<ol style="list-style-type: none">1. 以小區塊、中區塊的方式來算出最大相減次數2. 用最大相減次數來算出3x2有解的組合3. 觀察奇數、偶數有無解的共通性	我覺得他們用算式來算有無解太過複雜，所以我用數幾對的方法來證明題目有無解，方法上相對容易。

柒、研究過程

研究目的：找出共同的華容道困境

分析華容道的解題困境：找出數字華容道的規則用滑的把數字華塊由左至右、由上到下、由小到大大排好，在給沒玩過數字華容道的人試玩。針對他們的解題困境來找解法。

受試者編號	步數	照片	困境說明
1	59		3、6 無法到對的位置。
2	36		1、2 數相反，和 3 無法到正確位置。
3	62		2、3 排好，無法讓 1 也排進去。

研究目的二：探討四格解法對3x3數字華容道的適用性

四格解法初步定義：由2x2分析有解的條件，猜想這樣的方式或許可以成為數字華容道的解題策略，所以我想到了四格解法。

將3x3的格子分成紅色、藍色、綠色、黃色的格子，另外將空格定義為X格，每一個格子都圍住四塊，再一個一個去試玩，最後用四格解法完成數字滑塊的排列。如下圖：



研究發現：

2、4雖然相鄰，但是數字顛倒，無法使數字滑塊1、2、4、X移動至其正確位置，我發現不是所有數字都要相鄰，對角就可以解出來，B、C的位置在左右有不同的順序，而且B、C滑動之後，會呈現相對位置，就可以將範圍內的數字滑塊移動至正確的位置，如下圖：

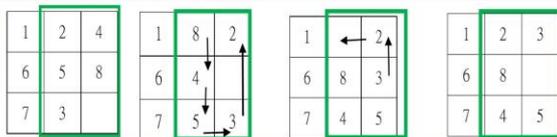


我們列出所有2x2题目的排列組合，在分析有解組合共同的條件，找出解題策略我們對2x2有解組合共同條件的初步定義是(1)2、3一定會相鄰的位置(2)2、3移動後是對角位置關係大後來發現是要左邊C、B或者右邊B、C就能將數字滑塊移動至正確位置，從這個規律我們發現了四格解法，並將它套用到3x3、4x4的題型使用發現它都適用。

相鄰	相鄰	相鄰	相鄰
對角關係	對角關係	對角關係	對角關係

研究目的三：探討六格解法對數字華容道的適用性

上網蒐集資料，發現別人分享一通用解法，可以解決最後數字排列的困境，於是我們決定要試看看，是否真的能解決數字排列的困境。六格解法是要讓每一列的最後一個數字滑塊排列至正確位置。在目標數字的六格範圍內，使每列最後一個目標數字滑塊Y與其相鄰的數字滑塊Y-1，在六格範圍內移動，依序移動，讓目標數字滑塊Y與相鄰數字滑塊Y-1之間有X格，接著再移動至正確位置。步驟解析如下：

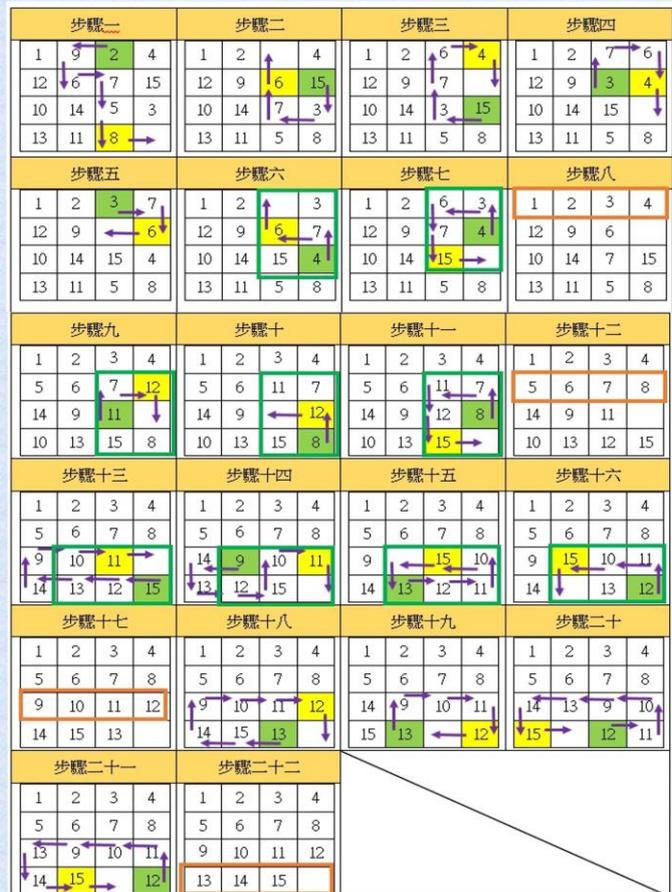


例題一：17526348



▲ 使用六格解法解決3x3的題型

例題二：192412671510145313118



▲ 使用六格解法解決4x4的題型

研究發現

- 六格解法的解題順序建立在由小到大、由上而下的解題條件之下，不但能將3x3的第一、二列最後數字滑塊的排列至正確位置，在4x4更可以解決第一、二、三列最後數字滑塊的排列，但是也必須參考四格解法中B、C的位置關係，才能將目標數字滑塊移動至正確位置。
- 3x3題目倒數第二列，4、5若以移動至正確位置，數字滑塊6必定會出現在第二列X格下面，順勢移動就能完成。
- 我們發現在4x4的數字華容道中，將前三列排依序移動至正確位置後，最後一列並不會像3x3的題目一樣自動排列至正確位置，反而呈現數字顛倒的情況，但是在不改變數序的方式進行解題，卻能夠解出來，我們猜想是否跟數字顛倒是否有極大的相關。
- 在滑動的過程中，發現六格解法主要目的是使一對相反的數序滑塊，有正確的排序，但同時也會讓另一對數序相反。

研究目的四：探討數字華容道的目標列中，數序相反的對數數量對有無解的關係

(一)研究方法說明：先將3x3的題型嘗試將一對數字顛倒去探討有無解，再將兩對數字顛倒有解，推測數序顛倒的對數與數字華容道題目的有、無解有關，因此持續嘗試將題目改變為三、四、五、六對數字相反，驗證奇數對數相反就無解，偶數對數相反就有解。

(二)數序對數計算方式：每列數字由左而右的排列，應為小到大，只由左側開始檢視，數字大於右側的數字，兩兩配對，算一算有幾對。範例數列如下計算：
數列一：3、2、1

此數列可以左側開始兩兩配對成：第一對：(3、2)、第二對：(3、1)、第三對：(2、1)，且符合大數在前、小數在後的條件，以上三對皆符合條件，故此計算為3對數序相反的數列。

數列二：2、1、3

此數列可以左側開始由大數配小數，兩兩配對成：(2、1)、(2、3)、(1、3)，且符合大數在前、小數在後的條件，只有(2、1)，故此計算為1對數序相反的數列。

(三)研究過程：

4-1初探一對數字無解

發現一

在玩3x3的題目過程當中，若先將前兩列排到正確位置，7、8數字滑塊就會呈現正確的數字排列，嘗試將題目只變化第三列一對數字相反，將題目數字滑塊依序排列成12345687，進行解題。發現無法將7、8兩個數字滑塊排列出正確位置，經過多次解題，即使成功將7、8數字滑塊完成正確的數字排列，也會產生跨列有一對數字滑塊相反的情況。

<p>步驟一</p>	<p>步驟二</p>	<p>步驟三</p>	<p>步驟四</p>
<p>步驟五</p>	<p>步驟六</p>		

發現二

從之前的研究，發現六格解法在將目標列的最後數字滑塊移動至正確位置時，會導致另一對數字滑塊相反，因此由3x3的題目進行推測，若將第三列變化為8、7的數字滑塊排列，再運用有效的六格解法進行解題，必定會導致另一列的數字滑塊相反。發現無法解出題，經過多次解題，也會產生跨列數字相反的情況，但是依舊是一對數字相反。

<p>步驟一</p>	<p>步驟二</p>	<p>步驟三</p>	<p>步驟四</p>
<p>步驟五</p>	<p>步驟六</p>	<p>步驟七</p>	

4-2探討2x2數字華容道數序相反對數與有無解的關係

先將2x2的所有解組合列出，觀察數序相反對數的翻轉次數與對數變化之規律性，進一步探究有解與無解的差異

組合	數列變化	數序對數變化(對)	有解
231	231→123	2→0	V
312	312→231→123	2→2→0	V
123	123	0	V
132	132→213→321→132	1→1→3→1	
213	213→321→132→213	1→3→1→1	
321	321→132→213→321	3→1→1→3	

●研究小結：

1. 偶數對數相反對數有解，奇數對數相反對數無解。
2. 只要是奇數對數相反作為題目，經過數序的循環後，每次的數序對數皆為奇數，又會回到原本的題目；只要是偶數對數相反作為題目，經過數序的循環後，解出題目的數序對數必定為0對。
3. 依據此發現數序相反對數的奇偶證明，決定嘗試設計3x3與4x4的數字華容道題目，來驗證我們的發現。

4-3探討3x3數字華容道數序相反對數與有無解的關係

在3x3的題目中兩對數字相反有解，不管是同一列或不同列只要是兩對數字相反都有解。在其他數字滑塊不更動正確位置的情況下，將數字滑塊做數序對數為兩對的變動調整進行解題，發現兩對數字相反有解，跨列數字相反並不會改變解題的結果。

4-4探討4x4數字華容道數序相反對數與有無解的關係

由3x3發現數序跨列，並不會影響解題結果，故隨意設計數序相反的數量，來觀察4x4數序對數相反與有無解的關係，並依據正確4x4的數字華容道題目(如下圖)，進行數序調整與驗證，最後無解的局勢有兩種：

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
5 6 7 8	5 6 7 8	5 6 7 8
9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12
13 14 15	13 15 14	14 13 15

▲4x4有解的正確排列

▲4x4無解題目的最後局勢▲

題目						
第一列	第二列	第三列	第四列	數序相反對數	是否跨列	有解
123	456	87	1	1	否	V
231	456	78	2	2	否	V
123	564	78	2	2	否	V
312	456	78	2	2	否	V
123	546	78	2	2	否	V
213	546	78	2	2	是	V
213	456	87	2	2	是	V
123	546	87	2	2	是	V
321	456	78	3	3	否	V
123	654	78	3	3	否	V
231	456	87	3	3	是	V
231	465	78	3	3	是	V
123	564	87	3	3	是	V
321	546	78	4	4	是	V
213	645	78	4	4	是	V
321	456	87	4	4	是	V
321	645	78	5	5	是	V
312	654	78	5	5	是	V
312	645	87	5	5	是	V
321	654	78	6	6	是	V
321	654	87	6	6	是	V

▲3x3一到六對題目數序相反有無解列表

題目						
第一列	第二列	第三列	第四列	數序相反對數	是否跨列	有解
1234	5678	9 10 11 12	13 15 14	1	否	V
1234	5867	9 10 11 12	13 14 15	2	否	V
1234	5678	9 10 11 12	15 14 13	3	否	V
1243	5687	10 9 11 12	14 13 15	4	是	V
2134	6578	10 9 12 11	14 13 15	5	是	V
4321	5678	9 10 11 12	13 14 15	6	否	V

▲4x4一到六對題目數序相反有無解列表

捌、研究結論

- 一、玩家大都是無法完成目標數字列中的最後一個數字滑塊或一些數字顛倒的數字滑塊，像是4、5或是2、3。
- 二、2x2數字華容道的所有組合，非所有組合都有解，從有解的組合分析共同條件，若正確數序為A、B、C，將數字華容道分為左半邊、右半邊，左半邊為C、B，右半邊為B、C，故發想四格解法的策略，在解題時，只要能將目標數字滑塊，在四格範圍內，移動成這兩種位置關係，就能順利解題。
- 三、四格解法的位置關係，將3x3分為四個顏色範圍，每一個範圍都能解出四個數字的正確數序排列，但是要以四格解法依序紅色、藍色、黃色與綠色進行解題，會面臨到共用的數字滑塊，除了範圍內目標數字滑塊，必須將相鄰的數字滑塊在不打亂的數序情況下，進行範圍以外的移動，才會便於移動範圍內的數字滑塊，對於初次使用四格解法策略的玩家，較不建議。
- 四、六格解法比較適合在3x3題目的第一、二列、4x4題目的第一、二、三列完成每排最後一個數字的正確排序，並不適用在3x3、4x4的最後一排，因為最後一排的格子不夠用六格，且如果要用六格解法的話，會容易打亂其他排好的數字。
- 五、3x3與4x4剩下最後一排的局勢不同：3x3的題目在完成前面兩列時，第三列會自動使數字滑塊移動到正確位置；4x4的題目在完成前三列時，最後一列會呈現兩對數字相反的局勢。
- 六、3x3題目只變動最後一列的數字相反是無解、4x4題目最後一列為偶數對數相反，推論一對數字相反無解，以六格解法的特性驗證，六格解法在變更目標數字滑塊位置時，同時也會導致另一對相鄰數字相反，由此推論一對數字無解、兩對數字有解，進一步探究對數相反的對數有無規律關係。
- 七、以2x2所有題目組合驗證：奇數對數相反無解，偶數對數相反有解。
- 八、由3x3設計一對到六對數字相反的題目，不論對數相反的數量是在同一列或是不同列，總和的數序相反對數只要相同，奇數對數的數字相反就無解，雙數對數的數字相反就有解。
- 九、由4x4設計一對到六對數字相反的題目，不論對數相反的數量是在同一列或是不同列，總和的數序相反對數只要相同，奇數對數的數字相反就無解，雙數對數的數字相反就有解。

玖、參考資料(略)

【評語】 080411

這個單人遊戲的正式名稱是“九宮格數字推盤遊戲”。如何解並不難，而且各種招式，但為何出現不能解初始設定？這就非常有趣。本研究做到了關於“不能解”的初步結果，然而有解與不能解的關係其實是已知的；所以這份研究的深度天生受限。

摘要

本次研究重點於探討數字華容道玩家的共同困境、兩種解題策略的適用性、數序相反對數與有無解的關係。綜合研究發現概要如下：
共同的困境在於每一列的最後一個數字排列。
四格解法適用性： 3×3 的數字華容道分為四個顏色的範圍，該範圍內的四格，只要使目標數字至特定位置(左半邊B、C，或右半邊C、B)，就能解。
六格解法適用性：在目標六格範圍內，每列最後的數字滑塊與相鄰的數字，在六格範圍內移動，即有解，適用 3×3 或 4×4 的題目類型。
不以策略進行 3×3 解題，最後一列的數字會剛好呈現正確數序，證明一對數序相反無解。
由 2×2 數字華容道題型進行奇偶數序對數與有無解之證明，進一步從 3×3 、 4×4 數字華容道題型，驗證一對至六對的數序相反對數，皆符合奇數相反對數無解，偶數對數相反有解。

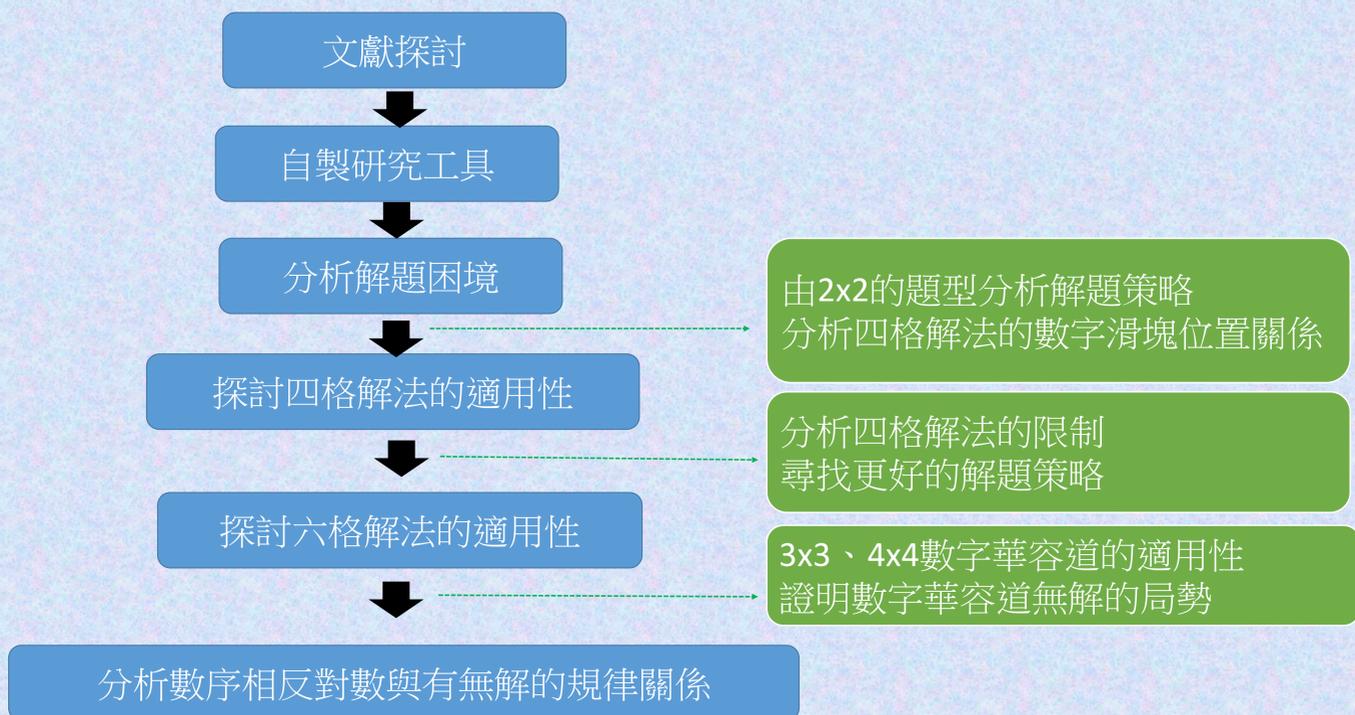
壹、研究動機

同學間瘋玩數字華容道遊戲，進一步發現一件有趣的事情，19世紀的Sam Loyd 曾懸賞1000美金，徵求能把14和15交換解題的方法，但從沒有人能順利解開，因此讓我們想找出解題策略，也推測數序相反可能跟有無解有極大的相關性，並從 2×2 、 3×3 、 4×4 數字華容道題型進行廣泛性的探究。

貳、研究目的

- 一、分析華容道的解題困境
- 二、探討四格解法對 3×3 數字華容道的適用性
- 三、探討六格解法的數字華容道適用性
 - 3-1 探討六格解法對 3×3 數字華容道的適用性
 - 3-2 探討六格解法對 4×4 數字華容道的適用性
- 四、探討數字華容道的目標列中，數序相反的對數數量對有無解的關係
 - 4-1 初探一對數序無解
 - 4-2 探討 2×2 數字華容道數序相反對數與有無解的關係
 - 4-3 探討 3×3 數字華容道數序相反對數與有無解的關係
 - 4-4 探討 4×4 數字華容道數序相反對數與有無解的關係

參、研究架構



肆、研究器材

積木、紙籤、瓦楞紙、膠帶、A4白紙、白板



伍、遊戲規則

數字華容道的遊戲規則：

將亂掉的數字以不離開格子的方式滑動數字滑塊，將數字滑塊由左至右、由上到下、由小到大排列。數字華容道遊戲屬於滑塊類遊戲，就是在格子範圍內，按照一次移動一格的條件把數字滑塊移動到正確位置。

陸、文獻探討

作品名稱/作者	內容	省思
數學與智慧盤/李嘉齊、黃國寶	<ol style="list-style-type: none">1. 用數學排列解決智慧盤出現的問題2. 用算式證明智慧盤 1-15 數字的牌面有無解判定3. 排面有解是不是有甚麼算式可以證明4. 找出排面有解的條件	他們的作法太難了，對我來說有點困難，一些數學符號我第一次看到，但從他們研究過程的筆記來看，他們是先完成其他的剩下右下角的四塊，發現只有 3 種數序的情形有解，但這個研究只找出部分情形，而且跟我玩的遊戲介面不一樣，我除了玩 4×4 的還有完 3×3 ，我是用四格解法和六格解法。
智慧盤中的奧秘-智慧盤遊戲推移策略探討/陳星奎、胡登傑、張維方、藍寅璋	<ol style="list-style-type: none">1. 以小區塊、中區塊的方式來算出最大相減次數2. 用最大相減次數來算出 3×2 有解的組合3. 觀察奇數、偶數有無解的共通性	我覺得他們用算式來算有無解太過複雜，所以我用數幾對的方法來證明題目有無解，方法上相對容易。

研究目的二：找出共同的華容道困境

分析華容道的解題困境：找出數字華容道的規則用滑的把數字華塊由左至右、由上到下、由小到大排好，在給沒玩過數字華容道的人試玩。針對他們的解題困境來找解法

受試者編號	步數	照片	困境說明
1	59		3、6 無法到對的位置。
2	36		1、2 數相反，和 3 無法到正確位置。
3	62		2、3 排好，無法讓 1 也排進去。

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																				
<table border="1"><tr><td>1</td><td>7</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td></td></tr></table>	1	7	5	2	6	3	4	8		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>3</td></tr></table>	1	2	7	4	5		6	8	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>3</td></tr></table>	1		2	4	5	7	6	8	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>3</td></tr></table>	1	5		4	7	2	6	8	3
1	7	5																																					
2	6	3																																					
4	8																																						
1	2	7																																					
4	5																																						
6	8	3																																					
1		2																																					
4	5	7																																					
6	8	3																																					
1	5																																						
4	7	2																																					
6	8	3																																					
步驟五	步驟六	步驟七	步驟八																																				
<table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	1		2	4	5	3	6	7	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	1	2	3	4	5		6	7	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>8</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	1	2	3	5		8	4	6	7	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>6</td></tr></table>	1	2	3	5	8	7	4		6
1		2																																					
4	5	3																																					
6	7	8																																					
1	2	3																																					
4	5																																						
6	7	8																																					
1	2	3																																					
5		8																																					
4	6	7																																					
1	2	3																																					
5	8	7																																					
4		6																																					
步驟九	步驟十	步驟十一																																					
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td></td></tr></table>	1	2	3	5	7	6	4	8		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6		7	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8											
1	2	3																																					
5	7	6																																					
4	8																																						
1	2	3																																					
4	5	6																																					
	7	8																																					
1	2	3																																					
4	5	6																																					
7	8																																						

▲ 使用六格解法解決3x3的題型

例題二：1 9 2 4 12 6 7 15 10 14 5 3 13 11 8

研究目的二：探討四格解法對3x3數字華容道的適用性

四格解法初步定義：由2x2分析有解的條件，猜想這樣的方式或許可以成為數字華容道的解題策略，所以我想到了四格解法。

將3x3的格子分成紅色、藍色、綠色、黃色的格子，另外將空格定義為X格，每一個格子都圍住四塊，再一個一個去試玩，最後用四格解法完成數字滑塊的排列。如下圖：

1	2	3
4	5	6
7	8	

研究發現：

2、4雖然相鄰，但是數字顛倒，無法使數字滑塊1、2、4、X移動至其正確位置，我發現不是所有數字都只要相鄰、對角就可以解出來，B、C的位置在左右有不同的順序，而且B、C滑動之後，會呈現相對位置，就可以將範圍內的數字滑塊移動至正確的位置，如下圖：

左側 C、B	經逆時針滑動兩次之後	右側 B、C	B、C 位置關係圖																
<table border="1"><tr><td>C</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr></table>	C		B		<table border="1"><tr><td></td><td>C</td></tr><tr><td></td><td>B</td></tr></table>		C		B	<table border="1"><tr><td></td><td>B</td></tr><tr><td></td><td>C</td></tr></table>		B		C	<table border="1"><tr><td>C</td><td>B</td></tr><tr><td>B</td><td>C</td></tr></table>	C	B	B	C
C																			
B																			
	C																		
	B																		
	B																		
	C																		
C	B																		
B	C																		

我們列出所有2x2题目的排列組合，在分析有解組合共同的條件，找出解題策略我們對2x2有解組合共同條件的初步定義是(1)2、3一定都會相鄰的位置(2)2、3移動後是對角位置關係大後來發現是要左邊C、B或者右邊B、C就能將數字滑塊移動至正確位置，從這個規律我們發現了四格解法，並將它套用到3x3、4x4的題型使用發現它都適用。

相鄰	相鄰	相鄰	相鄰																
<table border="1"><tr><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	B	C			<table border="1"><tr><td></td><td>B</td></tr><tr><td></td><td>C</td></tr></table>		B		C	<table border="1"><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>B</td></tr></table>			C	B	<table border="1"><tr><td>C</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr></table>	C		B	
B	C																		
	B																		
	C																		
C	B																		
C																			
B																			
對角關係	對角關係	對角關係	對角關係																
<table border="1"><tr><td>C</td><td></td></tr><tr><td></td><td>B</td></tr></table>	C			B	<table border="1"><tr><td></td><td>B</td></tr><tr><td></td><td>C</td></tr></table>		B		C	<table border="1"><tr><td></td><td>B</td></tr><tr><td>C</td><td></td></tr></table>		B	C		<table border="1"><tr><td></td><td>C</td></tr><tr><td>B</td><td></td></tr></table>		C	B	
C																			
	B																		
	B																		
	C																		
	B																		
C																			
	C																		
B																			

研究目的三：探討六格解法對數字華容道的適用性

上網蒐集資料，發現別人分享一通用解法，可以解決最後數字排列的困境，於是我們決定要試看看，是否真的能解決數字排列的困境。六格解法是要讓每一列的最後一個數字滑塊排列至正確位置。在目標數字的六格範圍內，使每列最後一個目標數字滑塊Y與其相鄰的數字滑塊Y-1，在六格範圍內移動，依序移動，讓目標數字滑塊Y與相鄰數字滑塊Y-1之間有X格，接著再移動至正確位置。步驟解析如下：

<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>8</td></tr><tr><td>7</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	4	6	5	8	7	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>8</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr></table>	1	8	2	6	4		7	5	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1		2	6	8	3	7	4	5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	2	3	6	8		7	4	5
1	2	4																																					
6	5	8																																					
7	3																																						
1	8	2																																					
6	4																																						
7	5	3																																					
1		2																																					
6	8	3																																					
7	4	5																																					
1	2	3																																					
6	8																																						
7	4	5																																					

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四																																																																
<table border="1"><tr><td>1</td><td>9</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>12</td><td>6</td><td>7</td><td>15</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>8</td><td></td></tr></table>	1	9	2	4	12	6	7	15	10	14	5	3	13	11	8		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td><td>6</td><td>15</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	2		4	12	9	6	15	10	14	7	3	13	11	5	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>3</td><td>15</td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	2	6	4	12	9	7		10	14	3	15	13	11	5	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>15</td><td></td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	2	7	6	12	9	3	4	10	14	15		13	11	5	8
1	9	2	4																																																																
12	6	7	15																																																																
10	14	5	3																																																																
13	11	8																																																																	
1	2		4																																																																
12	9	6	15																																																																
10	14	7	3																																																																
13	11	5	8																																																																
1	2	6	4																																																																
12	9	7																																																																	
10	14	3	15																																																																
13	11	5	8																																																																
1	2	7	6																																																																
12	9	3	4																																																																
10	14	15																																																																	
13	11	5	8																																																																
步驟五	步驟六	步驟七	步驟八																																																																
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>15</td><td>4</td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	2	3	7	12	9	6	7	10	14	15	4	13	11	5	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>15</td><td>4</td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	2		3	12	9	6	7	10	14	15	4	13	11	5	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td><td>7</td><td>4</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>15</td><td></td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	2	6	3	12	9	7	4	10	14	15		13	11	5	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>7</td><td>15</td></tr><tr><td>13</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	2	3	4	12	9	6		10	14	7	15	13	11	5	8
1	2	3	7																																																																
12	9	6	7																																																																
10	14	15	4																																																																
13	11	5	8																																																																
1	2		3																																																																
12	9	6	7																																																																
10	14	15	4																																																																
13	11	5	8																																																																
1	2	6	3																																																																
12	9	7	4																																																																
10	14	15																																																																	
13	11	5	8																																																																
1	2	3	4																																																																
12	9	6																																																																	
10	14	7	15																																																																
13	11	5	8																																																																
步驟九	步驟十	步驟十一	步驟十二																																																																
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>12</td></tr><tr><td>14</td><td>9</td><td>11</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td>13</td><td>15</td><td>8</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	12	14	9	11		10	13	15	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>11</td><td>7</td></tr><tr><td>14</td><td>9</td><td></td><td>12</td></tr><tr><td>10</td><td>13</td><td>15</td><td>8</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	11	7	14	9		12	10	13	15	8	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>11</td><td>7</td></tr><tr><td>14</td><td>9</td><td>12</td><td>8</td></tr><tr><td>10</td><td>13</td><td>15</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	11	7	14	9	12	8	10	13	15		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>14</td><td>9</td><td>11</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td>13</td><td>12</td><td>15</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	14	9	11		10	13	12	15
1	2	3	4																																																																
5	6	7	12																																																																
14	9	11																																																																	
10	13	15	8																																																																
1	2	3	4																																																																
5	6	11	7																																																																
14	9		12																																																																
10	13	15	8																																																																
1	2	3	4																																																																
5	6	11	7																																																																
14	9	12	8																																																																
10	13	15																																																																	
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
14	9	11																																																																	
10	13	12	15																																																																
步驟十三	步驟十四	步驟十五	步驟十六																																																																
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>14</td><td>13</td><td>12</td><td>15</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	13	12	15	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>14</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>13</td><td>12</td><td>15</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	14	9	10	11	13	12	15		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr><tr><td>14</td><td>13</td><td>12</td><td>11</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9		15	10	14	13	12	11	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>15</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>14</td><td></td><td>13</td><td>12</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	15	10	11	14		13	12
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
9	10	11	12																																																																
14	13	12	15																																																																
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
14	9	10	11																																																																
13	12	15																																																																	
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
9		15	10																																																																
14	13	12	11																																																																
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
9	15	10	11																																																																
14		13	12																																																																
步驟十七	步驟十八	步驟十九	步驟二十																																																																
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>14</td><td>15</td><td>13</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	13		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>14</td><td>15</td><td>13</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	13		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>14</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>15</td><td>13</td><td></td><td>12</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	14	9	10	11	15	13		12	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>14</td><td>13</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>15</td><td></td><td>12</td><td>11</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	14	13	9	10	15		12	11
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
9	10	11	12																																																																
14	15	13																																																																	
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
9	10	11	12																																																																
14	15	13																																																																	
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
14	9	10	11																																																																
15	13		12																																																																
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
14	13	9	10																																																																
15		12	11																																																																
步驟二十一	步驟二十二																																																																		
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>13</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>14</td><td>15</td><td></td><td>12</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	13	9	10	11	14	15		12	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15																																			
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
13	9	10	11																																																																
14	15		12																																																																
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
9	10	11	12																																																																
13	14	15																																																																	

▲ 使用六格解法解決4x4的題型

研究發現

- 六格解法的解題順序建立在由小到大、由上而下的解題條件之下，不但能將3x3的第一、二列最後數字滑塊的排列至正確位置，在4x4更可以解決第一、二、三列最後數字滑塊的排列，但是也必須參考四格解法中B、C的位置關係，才能將目標數字滑塊移動至正確位置。
- 3x3題目倒數第二列，4、5若以移動至正確位置，數字滑塊6必定會出現在第二列X格下面，順勢移動就能完成。
- 我們發現在4x4的數字華容道中，將前三列排依序移動至正確位置後，最後一列並不會像3x3的題目一樣自動排列至正確位置，反而呈現數字顛倒的情況，但是在不改變數序的方式進行解題，卻能夠解出來，我們猜想是否跟數字顛倒是否有極大的相關。
- 在滑動的過程中，發現六格解法主要目的是使一對相反的數字滑塊，有正確的排序，但同時也會讓另一對數字相反。

研究目的四：探討數字華容道的目標列中，數序相反的對數數量對有無解的關係

(一)研究方法說明：先將3x3的題型嘗試將一對數字顛倒去探討有無解，再來把兩對數字顛倒有解，推測數序顛倒的對數與數字華容道題目的有、無解有關，因此持續嘗試將題目改變為三、四、五、六對數字相反，驗證奇數對數相反就無解，偶數對數相反就有解。

(二)數序對數計算方式：每列數字由左而右的排列，應為小到大，只要由左側開始檢視，數字大於右側的數字，兩兩配對，算一算有幾對。範例數列如下計算：

數列一：3、2、1
此數列可以左側開始兩兩配對成：第一對：(3、2)、第二對：(3、1)、第三對：(2、1)，且符合大數在前、小數在後的條件，以上三對皆符合條件，故此計算為3對數字相反的數列。

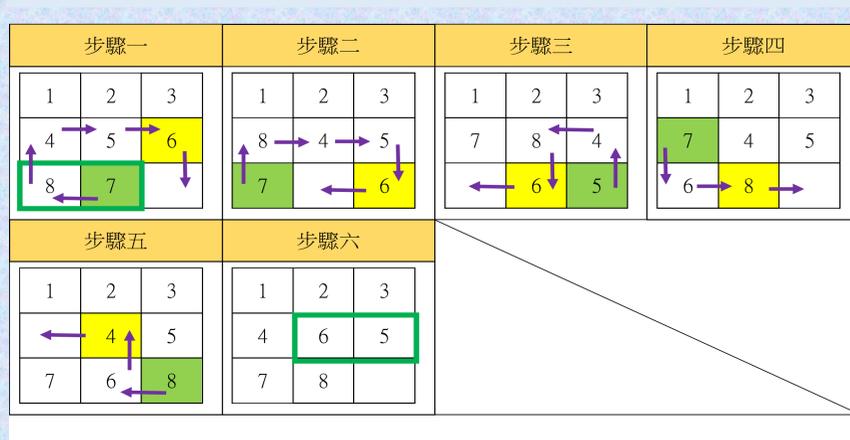
數列二：2、1、3
此數列可以左側開始由大數配小數，兩兩配對成：(2、1)、(2、3)、(1、3)，且符合大數在前、小數在後的條件，只有(2、1)，故此計算為1對數字相反的數列。

(三)研究過程：

4-1初探一對數字無解

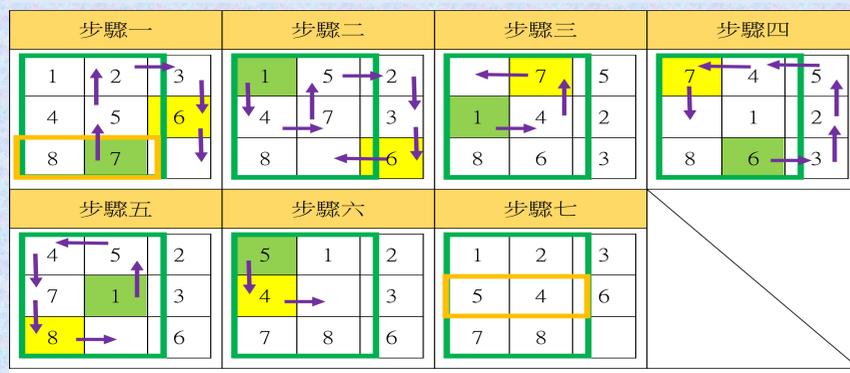
發現一

在玩3x3的題目過程當中，若先將前兩列排到正確位置，7、8數字滑塊就會呈現正確的數序排列，嘗試將題目只變化第三列一對數字相反，將題目數字滑塊依序排列成12345687，進行解題。發現無法將7、8兩個數字滑塊排列出正確位置，經過多次解題，即使成功將7、8數字滑塊完成正確的數序排列，也會產生跨列有一對數字滑塊相反的情況。



發現二

從之前的研究，發現六格解法在將目標列的最後數字滑塊移動至正確位置時，會導致另一對數字滑塊相反，因此由3x3的題目進行推測，若將第三列變化為8、7的數字滑塊排列，再運用有效的六格解法進行解題，必定會導致另一列的數字滑塊相反。發現無法解出題，經過多次解題，也會產生跨列數字相反的情況，但是依舊是一對數字相反。



4-2探討2x2數字華容道數序相反對數與有無解的關係

先將2x2的所有解組合列出，觀察數序相反對數的翻轉次數與對數變化之規律性，進一步探究有解與無解的差異

組合	數列變化	數序對數變化(對)	有解
231	231→123	2→0	V
312	312→231→123	2→2→0	V
123	123	0	V
132	132→213→321→132	1→1→3→1	
213	213→321→132→213	1→3→1→1	
321	321→132→213→321	3→1→1→3	

●研究小結：

- 偶數數序相反對數有解，奇數數序相反對數無解。
- 只要是奇數對數相反作為題目，經過數序的循環後，每次的數序對數皆為奇數，又會回到原本的題目；只要是偶數對數相反作為題目，經過數序的循環後，解出題目的數序對數必定為0對。
- 依據此發現數序相反對數的奇偶證明，決定嘗試設計3x3與4x4的數字華容道題目，來驗證我們的發現。

4-3探討3x3數字華容道數序相反對數與有無解的關係

在3x3的題目中兩對數字相反有解，不管是同一列或不同列只要是兩對數字相反都有解。在其他數字滑塊不更動正確位置的情況下，將數字滑塊做數序對數為兩對的變動調整進行解題，發現兩對數字相反有解，跨列數字相反並不會改變解題的結果。

4-4探討4x4數字華容道數序相反對數與有無解的關係

由3x3發現數序跨列，並不會影響解題結果，故隨意設計數序相反的數量，來觀察4x4數序對數相反與有無解的關係，並依據正確4x4的數字華容道題目(如下圖)，進行數序調整與驗證，最後無解的局勢有兩種：

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
13	14	15		13	15	14	1	14	13	15	

▲ 4x4有解的正確排列 ▲ 4x4無解題目的最後局勢 ▲

題目							題目							
第一列	第二列	第三列	數序相反對數	是否跨列	有解	無解	第一列	第二列	第三列	第四列	數序相反對數	是否跨列	有解	無解
123	456	87	1	否		V	1234	5678	9 10 11 12	13 15 14	1	否		V
231	456	78	2	否	V		1234	5867	9 10 11 12	13 14 15	2	否	V	
123	564	78	2	否	V		1234	5678	9 10 11 12	15 14 13	3	否	V	
312	456	78	2	否	V		1243	5687	10 9 11 12	14 13 15	4	是	V	
123	546	78	2	否	V		2134	6578	10 9 12 11	14 13 15	5	是	V	
213	546	78	2	是	V		4321	5678	9 10 11 12	13 14 15	6	否	V	
213	456	87	2	是	V									
123	546	87	2	是	V									
321	456	78	3	否		V								
123	654	78	3	否		V								
231	456	87	3	是		V								
231	465	78	3	是		V								
123	564	87	3	是		V								
321	546	78	4	是	V									
213	645	78	4	是	V									
321	456	87	4	是	V									
321	645	78	5	是		V								
312	654	78	5	是		V								
312	645	87	5	是		V								
321	654	78	6	是	V									
321	654	87	6	是	V									

▲ 4x4一到六對題目數序相反有無解列表

題目							題目							
第一列	第二列	第三列	數序相反對數	是否跨列	有解	無解	第一列	第二列	第三列	第四列	數序相反對數	是否跨列	有解	無解
123	456	87	1	否		V	1234	5678	9 10 11 12	13 15 14	1	否		V
231	456	78	2	否	V		1234	5867	9 10 11 12	13 14 15	2	否	V	
123	564	78	2	否	V		1234	5678	9 10 11 12	15 14 13	3	否	V	
312	456	78	2	否	V		1243	5687	10 9 11 12	14 13 15	4	是	V	
213	456	87	2	是	V		2134	6578	10 9 12 11	14 13 15	5	是	V	
123	546	87	2	是	V		4321	5678	9 10 11 12	13 14 15	6	否	V	
321	456	78	3	否		V								
123	654	78	3	否		V								
231	456	87	3	是		V								
231	465	78	3	是		V								
123	564	87	3	是		V								
321	546	78	4	是	V									
213	645	78	4	是	V									
321	456	87	4	是	V									
321	645	78	5	是		V								
312	654	78	5	是		V								
312	645	87	5	是		V								
321	654	78	6	是	V									
321	654	87	6	是	V									

▲ 3x3一到六對題目數序相反有無解列表

捌、研究結論

- 一、玩家大都是無法完成目標數字列中的最後一個數字滑塊或一些數字顛倒的數字滑塊，像是4、5或是2、3。
- 二、2x2數字華容道的所有組合，非所有組合都有解，從有解的組合分析共同條件，若正確數序為A、B、C，將數字華容道分為左半邊、右半邊，左半邊為C、B，右半邊為B、C，故發想四格解法的策略，在解題時，只要能將目標數字滑塊，在四格範圍內，移動成這兩種位置關係，就能順利解題。
- 三、四格解法的位置關係，將3x3分為四個顏色範圍，每一個範圍都能解出四個數字的正確數序排列，但是要以四格解法依序紅色、藍色、黃色與綠色進行解題，會面臨到共用的數字滑塊，除了範圍內目標數字滑塊，必須將相鄰的數字滑塊在不打亂的數序情況下，進行範圍以外的移動，才會便於移動範圍內的數字滑塊，對於初次使用四格解法策略的玩家，較不建議。
- 四、六格解法比較適合在3x3題目的第一、二列、4x4題目的第一、二、三列完成每排最後一個數字的正確排序，並不適合用在3x3、4x4的最後一排，因為最後一排的格子不夠用六格，且如果要用六格解法的話，會容易打亂其他排好的數字。
- 五、3x3與4x4剩下最後一排的局勢不同：3x3的題目在完成前面兩列時，第三列會自動使數字滑塊移動到正確位置；4x4的題目在完成前三列時，最後一列會呈現兩對數字相反的局勢。
- 六、3x3題目只變動最後一列的數序相反是無解、4x4題目最後一列為偶數對數相反，推論一對數字相反無解，以六格解法的特性驗證，六格解法在變更目標數字滑塊位置時，同時也會導致另一對相鄰數字相反，由此推論一對數字無解、兩對數字有解，進一步探究對數相反的對數有無規律關係。
- 七、以2x2所有題目組合驗證：奇數數序相反無解，偶數數序相反有解。
- 八、由3x3設計一對到六對數字相反的題目，不論對數相反的數量是在同一列或是不同列，總和的數序相反對數只要相同，奇數對數的數序相反就無解，雙數對數的數序相反就有解。
- 九、由4x4設計一對到六對數字相反的題目，不論對數相反的數量是在同一列或是不同列，總和的數序相反對數只要相同，奇數對數的數序相反就無解，雙數對數的數序相反就有解。

玖、參考資料(略)