

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

080410

六方連塊之矩形大拼排

學校名稱：雲林縣大埤鄉大埤國民小學

作者： 小六 劉峻永 小六 鄭富鴻	指導老師： 唐寬恩
-------------------------	--------------

關鍵詞：六方連塊、矩形、拼排和重組

摘要

「多方塊」(Polyminoes)是指一些將數個同樣單位數量之正方塊以面與面相連接而成，並扣除圖形變換（旋轉、鏡射、翻轉）下，所有形成之不同形狀的幾何平面圖形。

曾經風靡一時的「俄羅斯方塊」遊戲就是將5種四方連塊加以旋轉使其緊密堆疊，若無法形成一整列，則使空間愈來愈小，最後將塞滿整個空間而宣告Game Over；而六方連塊共有35種組合，透過「拼排和重組」，可加強對矩形圖形之認識，並對六方連塊之矩形拼圖遊戲的組合變化作等積變換初探。運用切割重組，可深入理解矩形的面積公式。

壹、 研究動機：

數學課上到「正立方體展開圖」單元，老師用六個正方形排出不同的六方連塊，共有 35 種組合，其中只 11 種可以組成正立方體。另外，老師用這 35 種六方連塊拼出許多面積相同的矩形圖形，小小的六連塊竟然可以拼出這麼多種矩形，而且不只一種拼法，引起我們的興趣：究竟有多少種拼法呢？

「多方塊」(Polyminoes)是指一些將數個同樣單位數量之正方塊以面與面相連接而成，並扣除圖形變換（旋轉、鏡射、翻轉）下，所有形成之不同形狀的幾何平面圖形。在 1954 年南加州大學數學教授葛羅布(Solomon W. Golomb)用五塊大小相同的正方形，於平面上任意相互連接，在扣除旋轉、鏡射、翻轉之情況下，組合出 12 種不同形狀，稱為「等積異形五方連塊」，這是「方連塊」的起源。由於等積變換，所以這五方連塊可拼成許多矩形圖形（千種以上），於是我們想進一步研究看看六方連塊究竟能拼出多少種矩形圖形？

貳、 研究目的：

- 一、透過「拼排和重組」，加強對矩形圖形之認識，並對等積變換之組成作初探。
- 二、透過矩形面積公式、全等圖形替換、排列組合等具體拼排操作，加深對六方連塊的認識與理解。
- 三、運用切割重組，可深入理解矩形的面積公式。

參、 研究設備及器材：

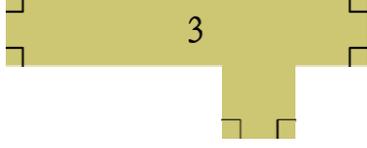
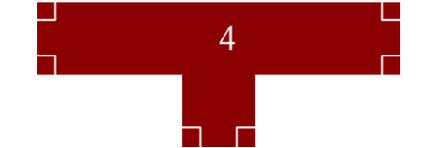
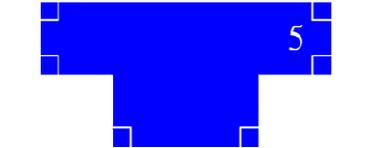
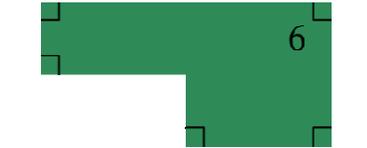
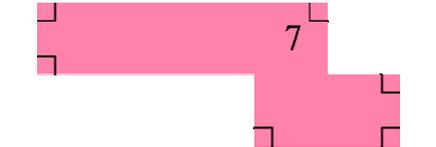
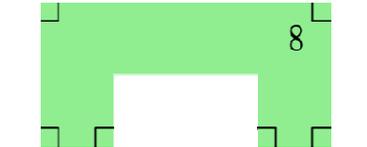
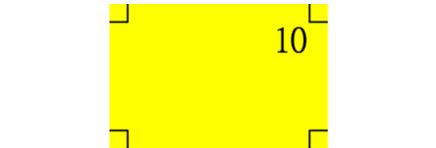
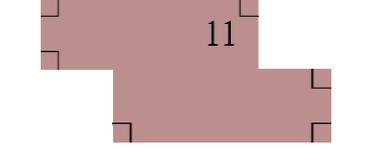
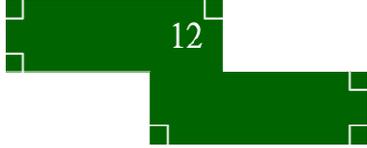
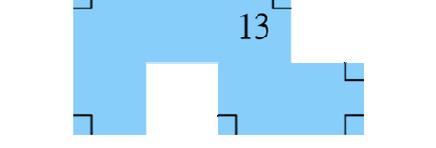
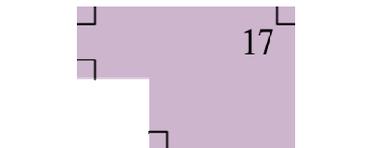
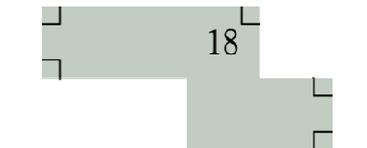
- 一、六方連塊。
- 二、「六方連塊大拼排」紀錄表。

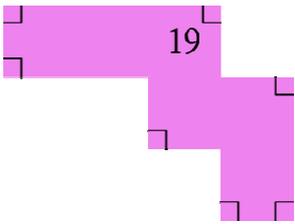
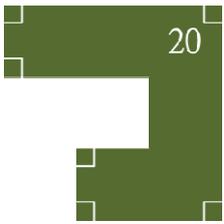
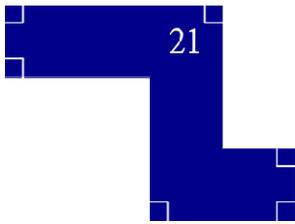
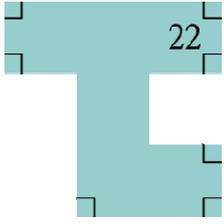
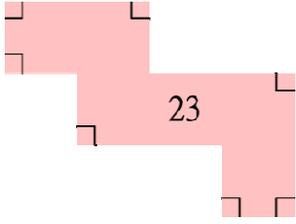
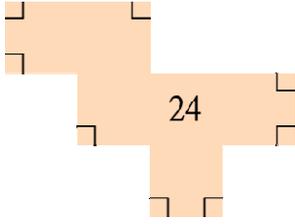
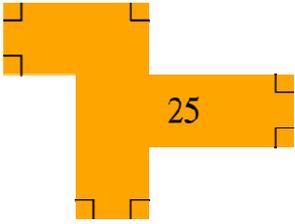
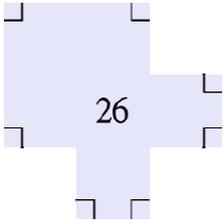
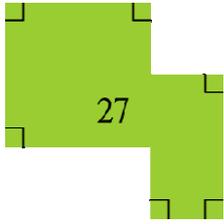
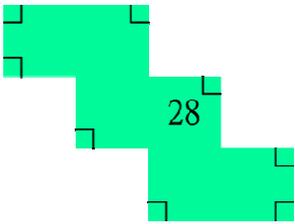
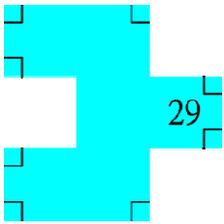
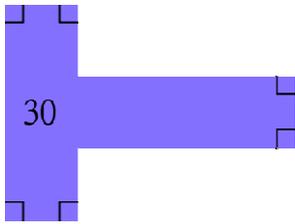
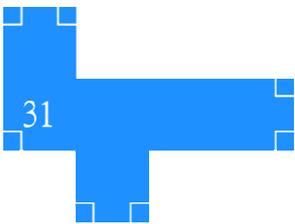
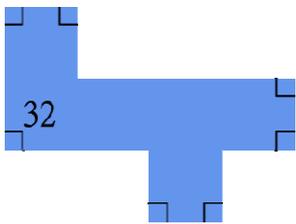
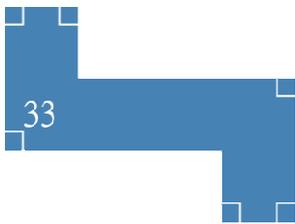
肆、 研究過程或方法：

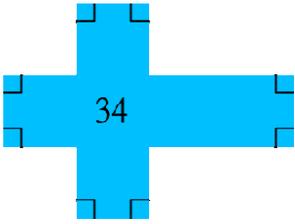
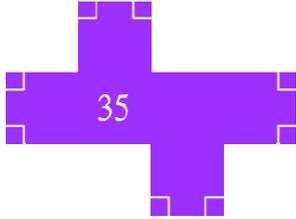
- 一、六方連塊拼排矩形共有多少種拼法？老師讓我們上網搜集相關資料，由參考資料得知五方連塊 12 片拼排組合總共有上千種不同解法（註 1：詳見 <http://www.xs4all.nl/%7Egpp/PolyominoSolver/Polyomino.html>）；至於六方連塊 35 片拼排組合則尚未有定論，於是我們決定從 2~6 片拼排組合著手研究。
- 二、先將六方連塊加以分類並編號：

類型	數量	
6	1	
5-1	3	
4-2	5	
3-3	4	
4-1-1	2	
3-2-1	4	
3-1-2	3	
2-3-1	5	
2-2-2	2	
1-4-1	6	

三、將六方連塊分析其組成：(凸代表內角 90°)

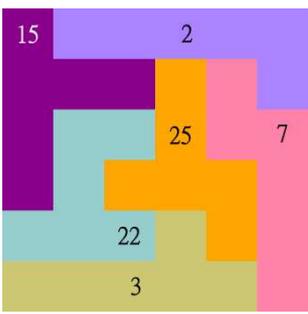
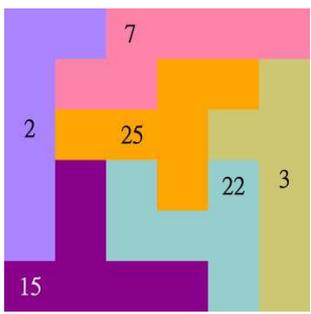
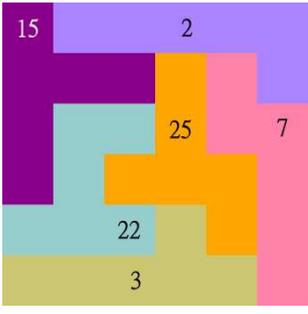
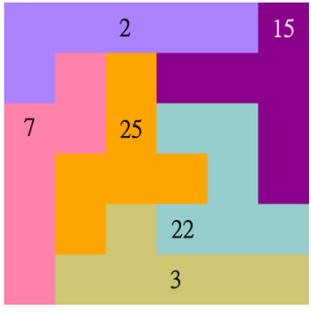
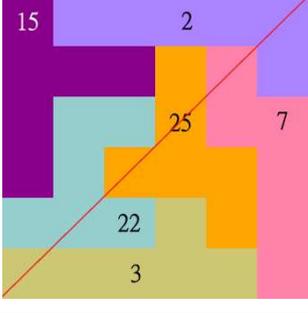
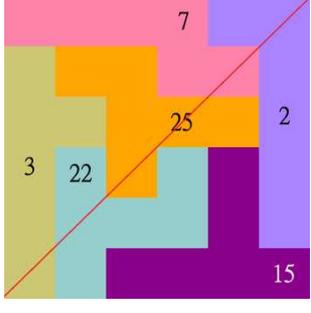
					
型號：1	組成：4 凸	型號：2	組成：5 凸	型號：3	組成：6 凸
					
型號：4	組成：6 凸	型號：5	組成：6 凸	型號：6	組成：5 凸
					
型號：7	組成：6 凸	型號：8	組成：6 凸	型號：9	組成：7 凸
					
型號：10	組成：4 凸	型號：11	組成：6 凸	型號：12	組成：6 凸
					
型號：13	組成：6 凸	型號：14	組成：5 凸	型號：15	組成：6 凸
					
型號：16	組成：6 凸	型號：17	組成：6 凸	型號：18	組成：7 凸

					
型號：19	組成：7 凸	型號：20	組成：6 凸	型號：21	組成：6 凸
					
型號：22	組成：7 凸	型號：23	組成：7 凸	型號：24	組成：8 凸
					
型號：25	組成：7 凸	型號：26	組成：7 凸	型號：27	組成：6 凸
					
型號：28	組成：8 凸	型號：29	組成：8 凸	型號：30	組成：6 凸
					
型號：31	組成：7 凸	型號：32	組成：7 凸	型號：33	組成：6 凸

					
型號：34	組成：8 凸	型號：35	組成：8 凸	型號：	組成：

四、制訂拼排規則，釐清觀念：

- (一)、 初步排除 1 片(僅 2 種組合)，僅採用 2~6 片六方連塊拼排矩形。
- (二)、 在同一組合中：拼排好的矩形經由旋轉、鏡射、翻轉後，在同一組合中皆視為相同。例如：

組合	圖示		判定
(2,3,7,15,22,25)			相同 (逆時針 旋轉 90°)
(2,3,7,15,22,25)			相同 (鏡射)
(2,3,7,15,22,25)			相同 (翻轉)

(三)、 在同一組合中：拼排好的矩形內部如有對稱圖形，可經由翻轉拼成不同圖形，則視為不同。例如：

組合	圖示		判定
(2,3,7,10,22)			不同 (3,7,10,22) 對稱圖形 可翻轉
(2,3,10,11,14)			不同 (10,14)對稱圖 形 可翻轉

(四)、 運用面積公式，找出各種矩形可能拼排的組合：

片數	面積	可能拼排成功的組合 (長 x 寬)	結果
2	12	2X6	X
		3X4	○
3	18	2X9	○
		3X4+3X2	○
		3X6	○
4	24	2X12	○
		3X4+2X6	X
		3X4+3X2+1X6	○
		3X4+3X4	○
		3X6+1X6	○
		3X6+3X2	○
		3X8	○
		4X3+4X3	○
		4X6	○
5	30	2X15	○
		2X9+2X6	X
		3X8+1X6	X
		3X4+2X9	X

		3X4+2X6+1X6	X
		3X4+3X2+2X6	X
		4X3+4X3+1X6	○
		3X4+3X4+3X2	○
		3X6+2X6	X
		3X6+3X4	○
		3X6+3X2+1X6	X
		3X10	○
		5X6	○
6	36	2X18	○
		3X10+1X6	X
		3X8+2X6	X
		3X8+3X4	○
		3X6+3X6	○
		3X6+3X4+1X6	X
		3X6+3X4+3X2	○
		3X4+2X12	X
		3X4+3X4+2X6	X
		3X12	○
		4X6+4X3	○
		4X9	○
		6X3+6X3	○
		6X6	○

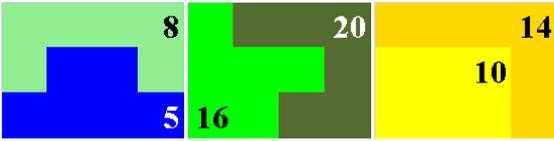
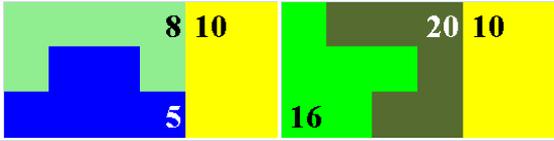
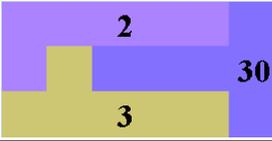
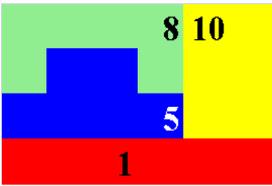
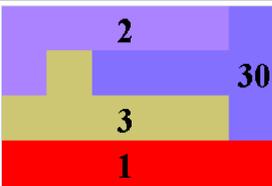
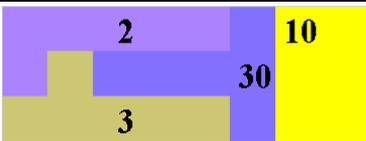
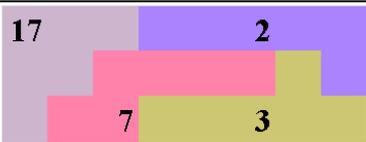
(五)、 分析 35 種六方連塊在可能拼排組合中的出現率，並統計拼排成功比率。

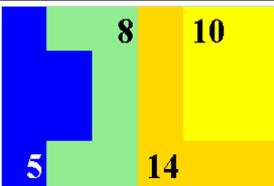
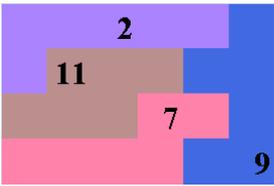
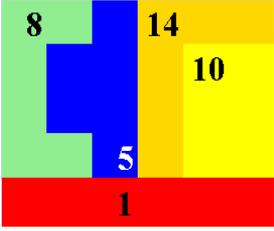
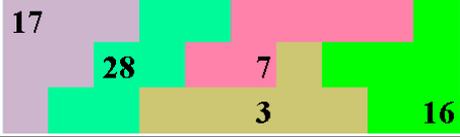
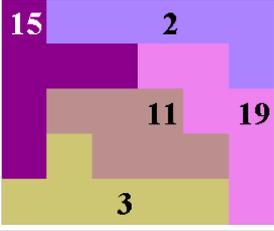
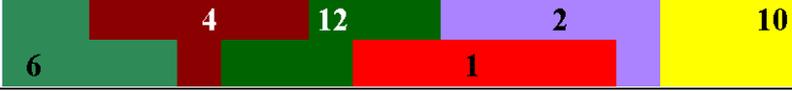
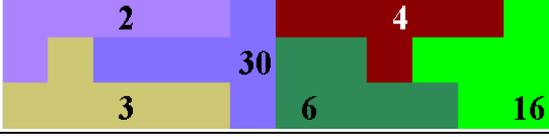
伍、 研究結果：

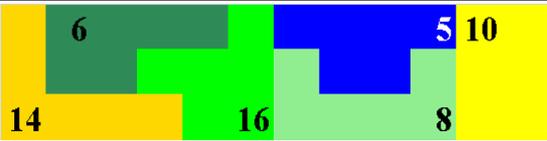
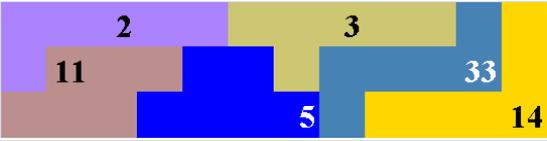
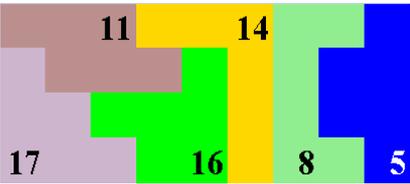
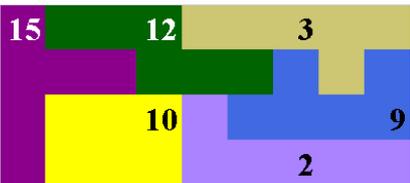
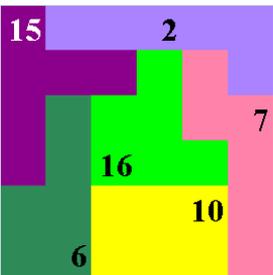
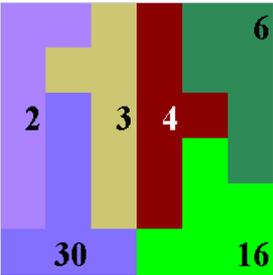
- 一、任意選取2個六方連塊(面積=12平方單位)：可拼成(3X4)共3種矩形。(附件一)
- 二、任意選取3個六方連塊(面積=18平方單位)：可拼成(2x9)1種；(3X4+3X2)2種；(3x6)17種。共可拼成20種矩形。
- 三、任意選取4個六方連塊(面積=24平方單位)：可拼成(2X12)4種；(3X4+3X2+1X6)6種；(3X4+3X4)12種；(3X6+1X6)34種；(3X6+3X2)28種；(3X8)74種；(4X3+4X3)12種；以及(4X6)255種。共可拼成425種矩形。
- 四、任意選取5個六方連塊(面積=30平方單位)：可拼成(2X15)6種；(4X3+4X3+1X6)24種；(3X4+3X4+3X2)12種；(3X6+3X4)128種；(3X10)128種；以及(5X6)1531種。共可拼成1829種矩形。

五、任意選取6個六方連塊(面積=36平方單位)：可拼成(2X18)4種；(3X8+3X4)548種；(3X6+3X6)252種；(3X6+3X4+3X2)216種；(3X12)156種；(4X6+4X3)1454種；(4X9)1778種；以及(6X6)3507種；(6X3+6X3)252種。共可拼成8167種矩形。

六、以六連方塊拼排矩形，2~6片拼排組合統計表：

片數	組合		拼排方式	合計
2	3X4		3	3
3	2X9		1	20
	3X4+3X2		2	
	3X6		17	
4	2X12		4	425
	3X4+3X2+1X6		6	
	3X4+3X4		12	
	3X6+1X6		34	
	3X6+3X2		28	
	3X8		74	

	4X3+4X3		12	
	4X6		255	
5	2X15		6	
	4X3+4X3+1X6		24	
	3X4+3X4+3X2		12	
	3X6+3X4		128	1829
	3X10		128	
	5X6		1531	
6	2X18		4	
	3X8+3X4		548	8167
	3X6+3X6		252	

3X6+3X4+3X2		216
3X12		156
4X6+4X3		1454
4X9		1778
6X6		3507
6X3+6X3		252
		10444

七、以2~6片六連方塊拼排矩形，個別六連方塊出現率：

(一)、2片：只能拼出3種，分別為型號(5,8)、(10,14)、(16,20)，型號5、8、10、14、16、20的出現率為33.3%，其餘為0。

型號	5	8	10	14	16	20	1,2,3,4,6,7,9,11,12,13, 15,17,18,19,21,22,23, 24,25,26,27,28,29,30, 31,32,33,34,35
次數	1	1	1	1	1	1	0
出現率	33.3%	33.3%	33.3%	33.3%	33.3%	33.3%	0%

(二)、3片：型號20出現率最高，40%；型號15,18,19,21,22,23,25,26,27,28,29,31,32,33,34,35的出現率為0。

型號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	1	7	4	1	2	6	2	1	2	5	2	1
出現率	5%	35%	20%	5%	10%	30%	10%	5%	10%	25%	10%	5%

型號	13	14	16	17	20	24	30	15,18,19,21,22,23,25,26, 27,28,29,31,32,33,34,35
次數	1	4	5	6	8	1	1	0
出現率	5%	20%	25%	30%	40%	5%	5%	0%

(三)、4片：型號6出現率最高，35%，型號34的出現率最低，0.5%。

型號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	59	113	90	37	79	144	38	54	97	133	44	19
出現率	14%	27%	22%	9%	19%	35%	9%	13%	23%	32%	11%	5%

型號	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
次數	30	120	32	115	106	10	12	126	12	29	12	21
出現率	7%	29%	8%	28%	26%	2%	3%	31%	3%	7%	3%	5%

型號	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
次數	3	26	37	10	5	12	6	7	7	2	5
出現率	1%	6%	9%	2%	1%	3%	1%	2%	2%	0.5%	1%

(四)、5片：型號2出現率最高，56%，型號35的出現率最低，1%。

型號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	35	1025	806	341	468	579	195	310	379	466	362	32
出現率	2%	56%	44%	19%	26%	32%	11%	17%	21%	25%	20%	2%

型號	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
次數	197	520	231	506	445	82	139	468	94	188	77	93
出現率	11%	28%	13%	28%	24%	4%	8%	26%	5%	10%	4%	5%

型號	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
次數	50	153	279	99	51	132	102	88	84	26	19	
出現率	3%	8%	15%	5%	3%	7%	6%	5%	5%	1.4%	1%	

(五)、6片：型號2出現率最高，33%，型號34的出現率最低，0.9%。

型號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	1092	2533	2141	975	2056	2396	728	1077	1534	1988	1311	347
出現率	14%	33%	28%	13%	27%	31%	9%	14%	20%	26%	17%	4%

型號	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
次數	660	1950	1349	2073	1730	477	567	1614	463	720	500	547
出現率	9%	25%	17%	27%	22%	6%	7%	21%	6%	9%	6%	7%

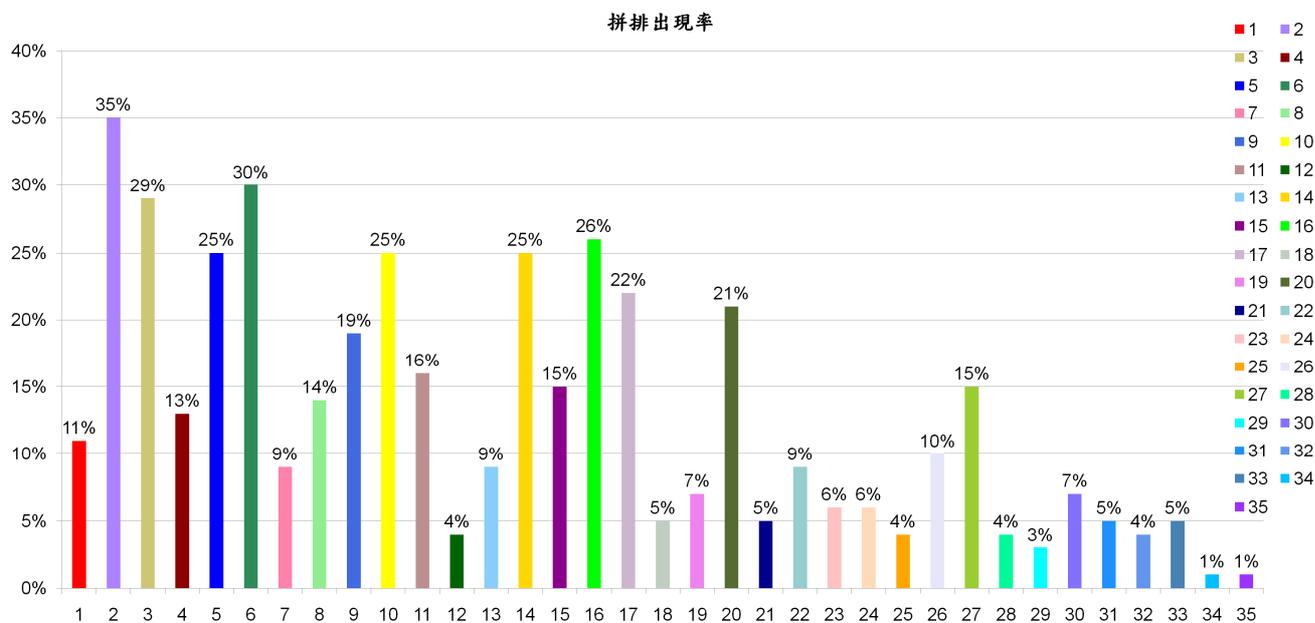
型號	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
次數	333	908	1216	333	248	552	431	373	478	69	75	
出現率	4%	12%	16%	4%	3%	7%	6%	5%	6%	0.9%	1%	

(六)、總計2~6片10444種排列組合中，型號2出現率最高，35%，型號34的出現率最低，0.9%。

型號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	1187	3678	3041	1354	2606	3125	963	1443	2012	2593	1719	399
出現率	11%	35%	29%	13%	25%	30%	9%	14%	19%	25%	16%	4%

型號	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
次數	888	2595	1612	2700	2287	569	718	2217	569	937	589	662
出現率	9%	25%	15%	26%	22%	5%	7%	21%	5%	9%	6%	6%

型號	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
次數	386	1087	1532	442	304	697	539	468	569	97	99	
出現率	4%	10%	15%	4%	3%	7%	5%	4%	5%	0.9%	1%	



陸、 討論：

- 一、剛開始以固定片數拼排多邊形，但不知道到底有多少種拼排方式，容易有疏漏；後來以相同面積求出可能的組合再進行拼排，較能掌握拼排的組合，不易遺漏。
- 二、一開始未設定排除經由旋轉、鏡射、翻轉後形成的全等圖形，同一種組合可能有多種排列方式，容易造成混淆；後來把完全重疊圖形視為同一種，將排列方式簡化，才能掌握拼排的組合。
- 三、運用矩形面積公式時遇到因數分解，必須先理解數學因數的定義，才能與面積公式連結。
- 四、拼排過程中發現可以用全等圖形來替換，於是嘗試找出基本圖形(附件一)，讓拼排組合更多樣化，也因此發現更多拼排方式。
- 五、拼排過程中遇到圖形排列組合問題，兩個矩形，其中一個矩形只能左右翻轉，如果兩個都上下左右翻轉，組合後經由旋轉、翻轉會有重複；如果是一個正方形(6x6)和

一個矩形排列組合，則正方形只能旋轉，而矩形只能左右翻轉，否則也會有重複。

六、型號 2 六方連塊有 5 個凸起(90°內角)，拼排成功率較高；型號 34、型號 35 六方連塊有 8 個凸起，拼排成功率較低。

七、凸起(90°內角)較少，拼排成功率較高，例如：型號 2、型號 10、型號 14；凸起(90°內角)越多，拼排成功率越低，例如：型號 28、型號 29、型號 34、型號 35，可能是受形狀限制，彼此無法有效搭配拼排成功。

柒、 結論：

一、用六方連塊拼排矩形有多種變化，2~6 片的可能拼排組合，我們一共找到 10444 種，相信還有許多我們尚未發現的拼排組合。

二、在可能拼排成功的組合中，型號 2 六方連塊有 5 個凸起(90°內角)，拼排成功率較高；型號 34 六方連塊有 8 個凸起，拼排成功率較低。

三、同一種組合可能有不同拼排方式，例如：(6,10,14,21)有 4 種不同圖形拼法；(1,10,11,14,16,17)有 8 種不同圖形拼法(註 2)。

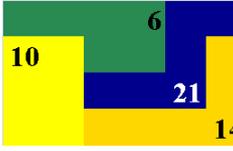
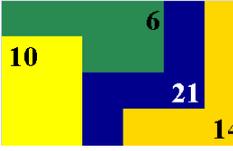
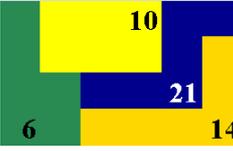
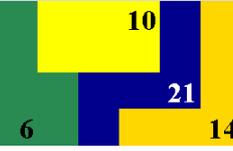
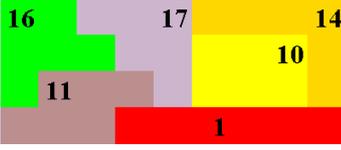
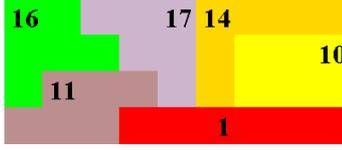
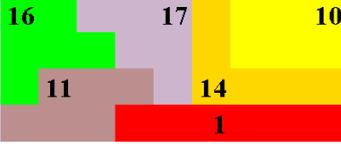
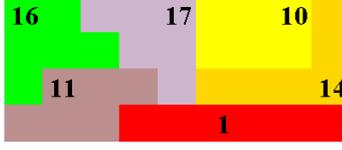
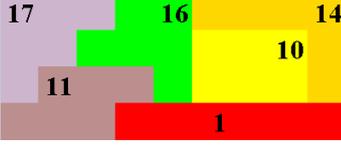
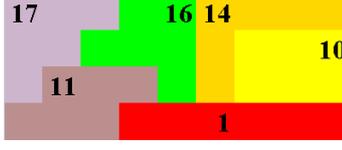
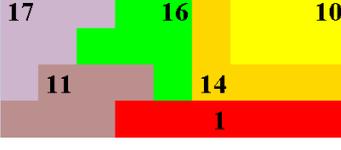
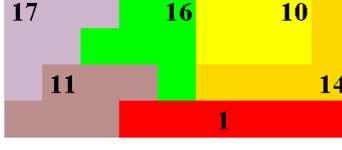
四、片數越多，可能組合數也較多，例如：2 片組合只有 3 種；3 片組合只有 20 種；4 片組合有 425 種；5 片組合有 1829 種；6 片組合有 8167 種，。

五、運用六方連塊拼排矩形，透過矩形面積公式、全等圖形替換、排列組合等具體拼排操作，可加深對六方連塊的認識與理解。

捌、 備註：

一、註 1：五方連塊拼排矩形：3×20 之大矩形拼圖解法，共 2 種；4×15 大矩形拼圖解法，共 368 種；5×12 大矩形拼圖解法，共 1010 種；6×10 大矩形拼圖解法，共 2339 種。詳見：<http://www.xs4all.nl/%7Egpp/PolyominoSolver/Polyomino.html>。

二、註 2：

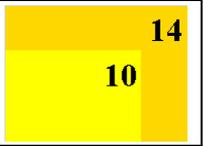
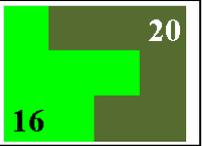
組合	拼排方法	圖示							
(6,10,14,21)	4								
(1,10,11,14,16,17)	8								

玖、 參考資料及其他：

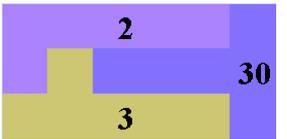
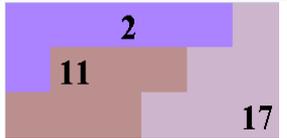
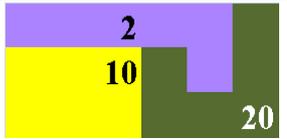
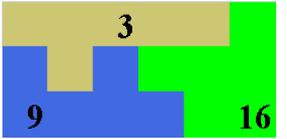
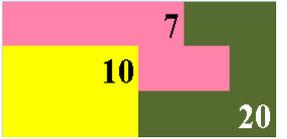
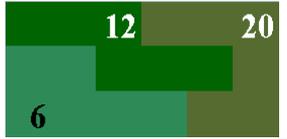
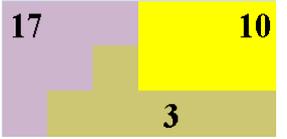
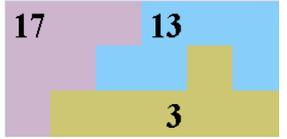
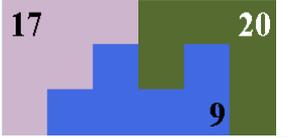
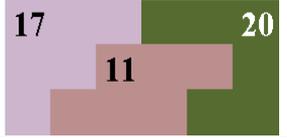
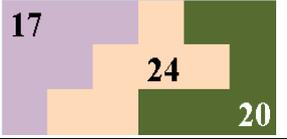
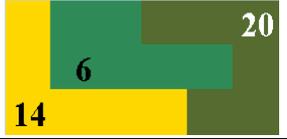
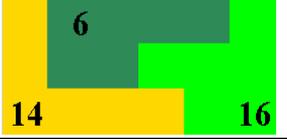
- 一、 台北市龍安國民小學(2005)・正立方體的變裝秀---五連塊 (Pentominoes) 拼拼樂
・ 中華民國第四十五屆中小學科學展覽會數學科國小組作品。
- 二、 高雄市楠梓國民小學(2012)・天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊・中華民國第五十二屆中小學科學展覽會數學科國小組作品。
- 三、 張煥泉(2015)・國立臺灣師範大學數學教育中心數學奠基模組_七巧板大拼排・臺北：國立臺灣師範大學。

【附件一】

一、任意選取 2 個六方連塊：長 X 寬=3X4；面積=12 平方單位；共 3 種。

組合	拼排方法	圖示	組合	拼排方法	圖示	組合	拼排方法	圖示
(5,8)	1		(10,14)	1		(16,20)	1	

二、任意選取 3 個六方連塊：長 X 寬=3X6；面積=18 平方單位；共 17 種。

組合	拼排方法	圖示	組合	拼排方法	圖示
(2,3,30)	1		(2,5,16)	1	
(2,7,14)	1		(2,11,17)	1	
(2,6,14)	1		(2,10,20)	1	
(3,9,16)	1		(4,6,16)	1	
(7,10,20)	1		(6,12,20)	1	
(3,10,17)	1		(3,13,17)	1	
(9,17,20)	1		(11,17,20)	1	
(17,20,24)	1		(6,14,20)	1	
(6,14,16)	1				

三、任意選取 4 個六方連塊

1. 長 X 寬=2X12；面積=24 平方單位；共 4 種。

組合	拼排方法	圖示	
(1,2,6,12)	2		
(1,2,6,10)	2		

2. 長 X 寬=3X4+3X2+1X6；面積=24 平方單位；共 6 種。

組合	拼排方法	圖示			
(1, 5,8,10)	2				
(1, 10,16,20)	4				

3. 長 X 寬= 3X4+3X4；面積=24 平方單位；共 12 種。

組合	拼排方法	圖示	
(5,8,10,14)	4		
(5,8,16,20)	4		
(10,14,16,20)	4		

4. 長 X 寬= 3X6+1X6；面積=24 平方單位；共 34 種。

組合	拼排方法	圖示	
(1,2,3,30)	2		
(1,2,5,16)	2		
(1,2,7,14)	2		
(1,2,11,17)	2		
(1,2,6,14)	2		
(1,2,10,20)	2		
(1,3,9,16)	2		
(1,4,6,16)	2		
(1,7,10,20)	2		
(1,6,12,20)	2		

(1,3,10,17)	2		
(1,3,13,17)	2		
(1,9,17,20)	2		
(1,11,17,20)	2		
(1,17,20,24)	2		
(1,6,14,20)	2		
(1,6,14,16)	2		

5. 長 X 寬= $3 \times 6 + 3 \times 2$; 面積=24 平方單位 ; 共 28 種。

組合	拼排方法	圖示	
(10,2,3,30)	2		
(10,2,5,16)	2		
(10,2,7,14)	2		
(10,2,11,17)	2		
(10,2,6,14)	2		
(10,3,9,16)	2		
(10,4,6,16)	2		
(10,6,12,20)	2		
(10,3,13,17)	2		
(10,9,17,20)	2		
(10,11,17,20)	2		
(10,17,20,24)	2		

(10,6,14,20)	2		
(10,6,14,16)	2		

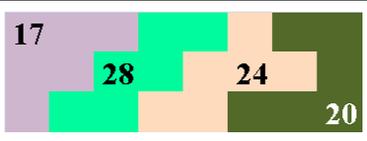
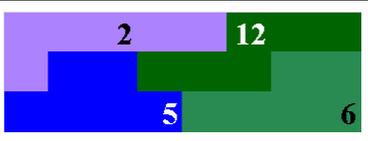
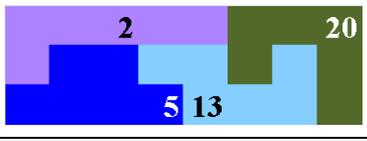
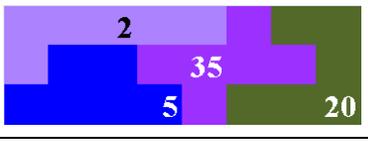
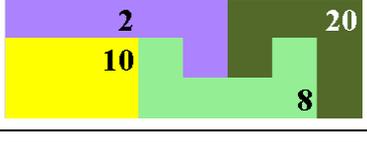
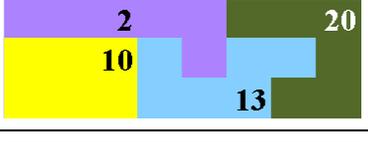
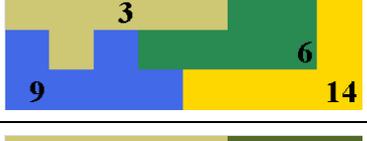
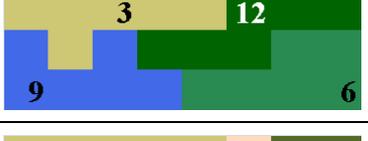
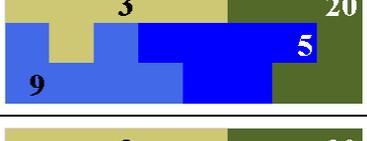
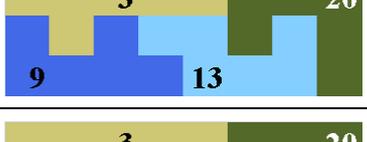
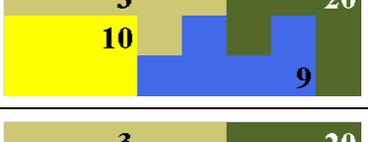
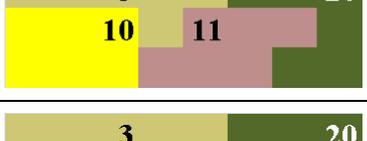
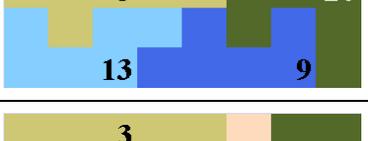
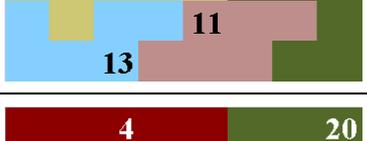
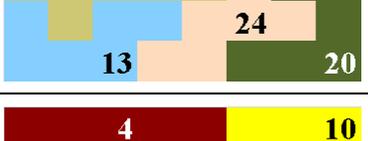
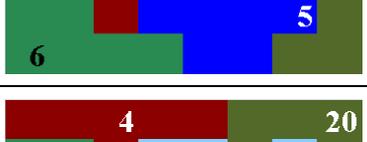
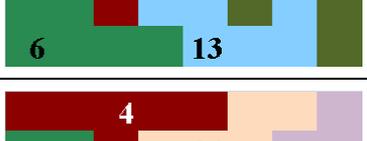
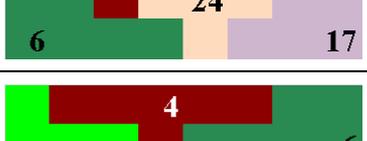
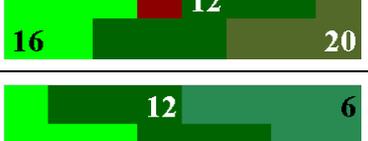
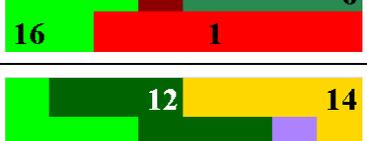
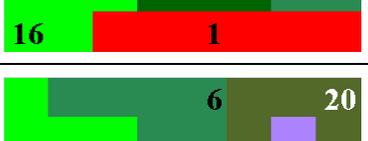
6. 長 X 寬= 3X8；面積=24 平方單位；共 74 種。

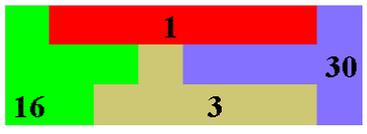
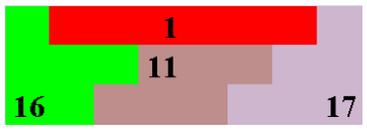
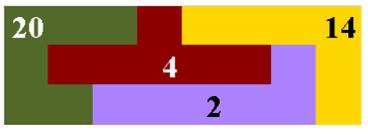
組合	拼排方法	圖示	
(2,5,11,17)	2		
(2,3,7,17)	2		

組合	拼排方法	圖示
(2,3,6,17)	1	
(6,11,14,17)	1	
(3,6,17,20)	1	
(1,7,17,30)	1	
(3,14,17,33)	1	
(8,9,17,20)	1	
(1,4,6,20)	1	

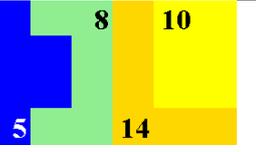
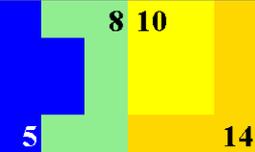
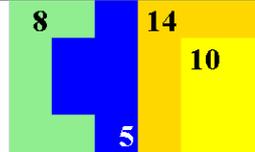
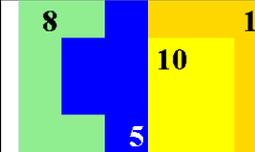
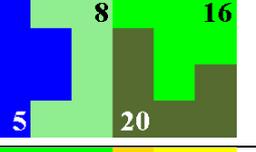
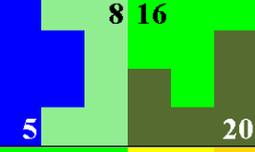
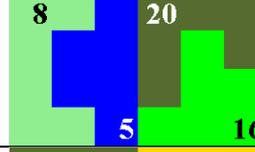
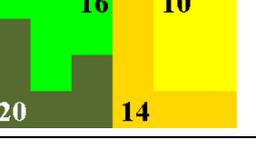
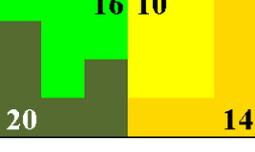
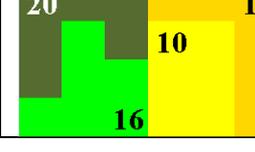
組合	拼排方法	圖示
(3,6,16,17)	1	
(3,9,11,17)	1	
(3,7,16,17)	1	
(1,6,12,20)	1	
(1,3,14,17)	1	
(1,11,16,17)	1	
(4,6,11,17)	1	

(2,9,10,17)	1		(9,13,17,20)	1	
(3,5,10,17)	1		(3,5,13,17)	1	
(5,9,17,20)	1		(5,11,17,20)	1	
(5,17,20,24)	1		(1,2,7,10)	1	
(1,10,14,33)	1		(1,2,6,10)	1	
(1,6,10,16)	1		(1,6,10,20)	1	
(2,6,16,20)	1		(2,14,20,33)	1	
(2,6,7,20)	1		(6,7,16,20)	1	
(7,14,20,33)	1		(3,10,17,28)	1	
(2,11,17,28)	1		(3,13,17,28)	1	
(9,17,20,28)	1		(11,17,20,28)	1	
(2,3,10,11)	1		(2,3,11,13)	1	
(2,9,11,20)	1		(2,11,20,24)	1	

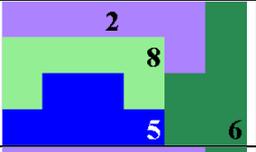
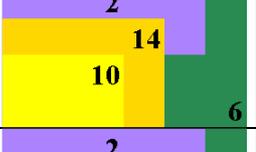
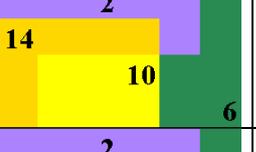
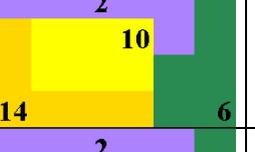
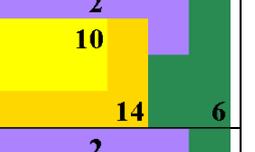
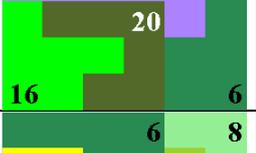
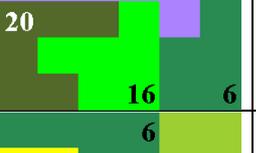
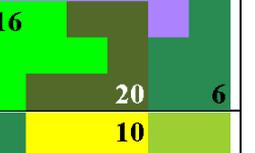
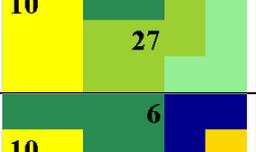
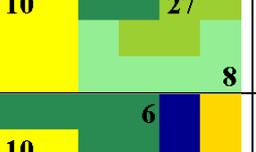
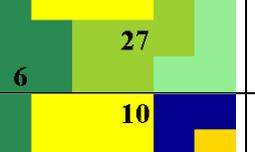
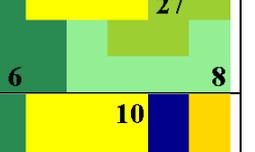
(17,20,24,28)	1		(2,5,6,12)	1	
(2,5,13,20)	1		(2,5,20,35)	1	
(2,8,10,20)	1		(2,10,13,20)	1	
(3,6,9,14)	1		(3,6,9,12)	1	
(3,5,9,20)	1		(3,10,20,24)	1	
(3,9,13,20)	1		(3,9,10,20)	1	
(3,10,11,20)	1		(3,9,13,20)	1	
(3,11,13,20)	1		(3,13,20,24)	1	
(4,5,6,20)	1		(4,6,7,10)	1	
(4,6,13,20)	1		(4,6,20,35)	1	
(4,6,17,24)	1		(4,12,16,20)	1	
(1,4,6,16)	1		(1,6,12,16)	1	
(2,12,14,16)	1		(2,6,16,20)	1	

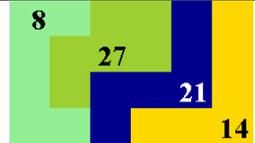
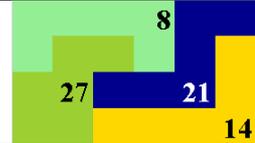
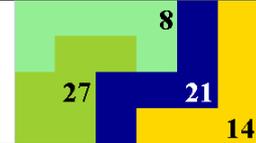
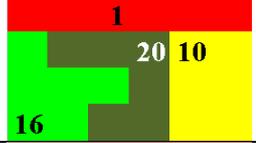
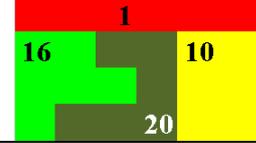
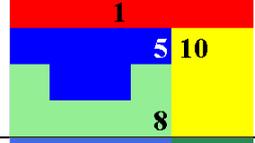
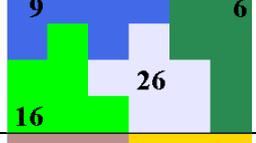
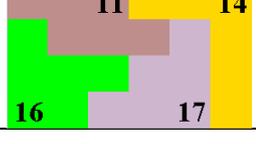
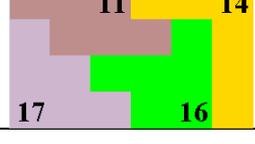
(1,3,16,30)	1		(1,7,14,16)	1	
(1,11,16,17)	1		(2,4,14,20)	1	

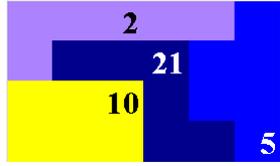
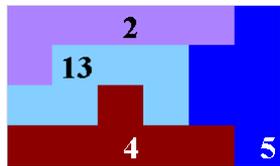
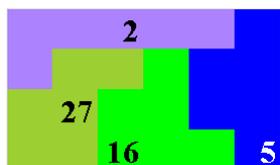
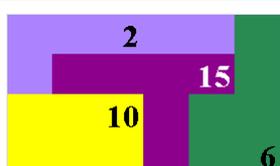
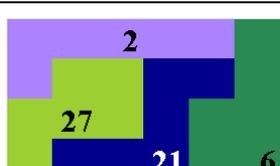
7. 長 X 寬= 4X3+4X3；面積=24 平方單位；共 12 種。

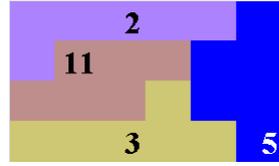
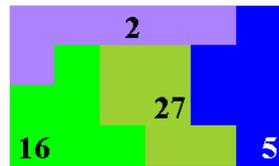
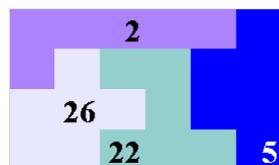
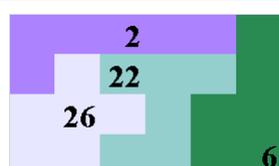
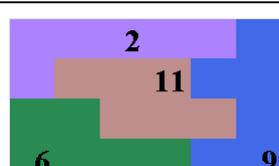
組合	拼排方法	圖示			
(5,8,10,14)	4				
(5,8,16,20)	4				
(10,14,16,20)	4				

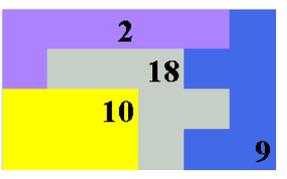
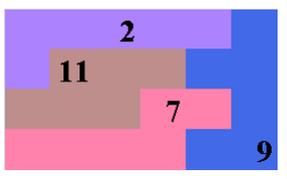
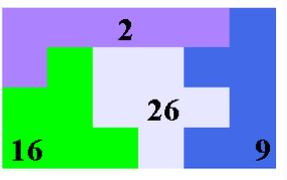
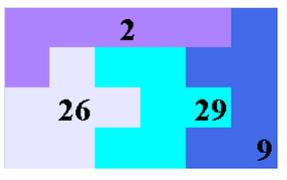
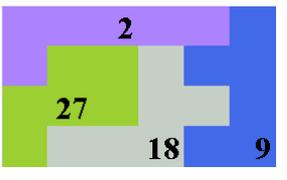
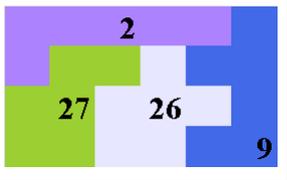
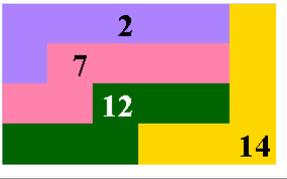
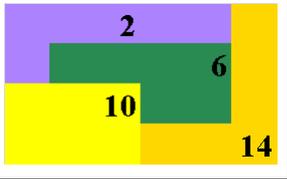
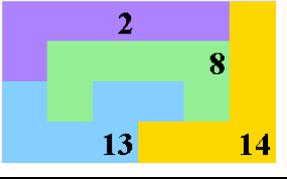
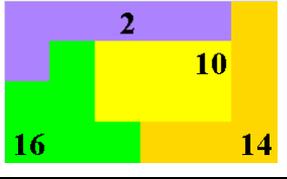
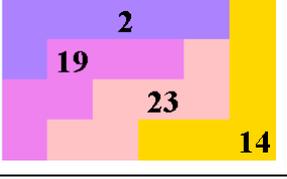
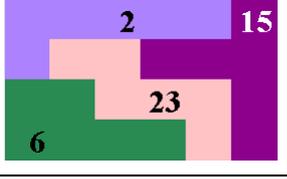
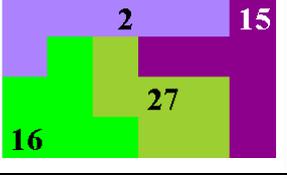
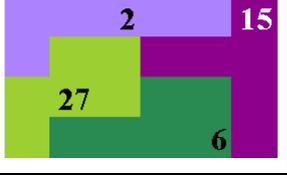
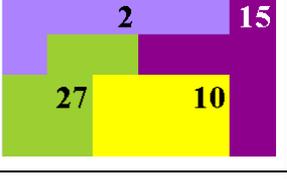
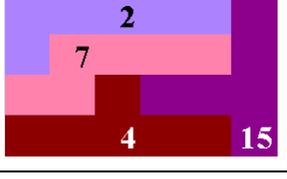
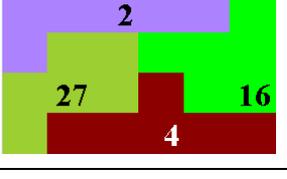
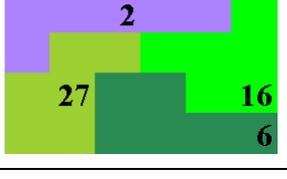
8. 長 X 寬= 4X6；面積=24 平方單位；共 255 種。

組合	拼排方法	圖示			
(2,5,6,8)	2				
(2,6,10,14)	4				
(2,6,16,20)	4				
(6,8,10,27)	4				
(6,10,14,21)	4				

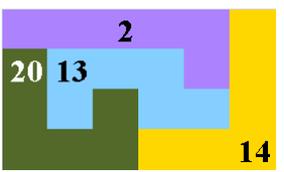
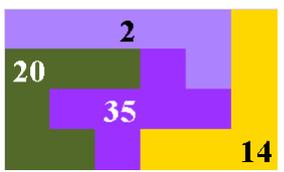
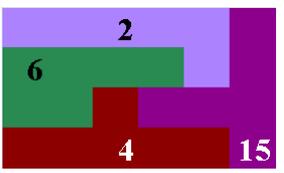
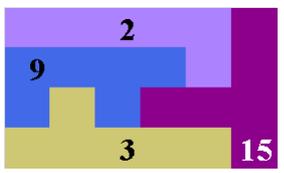
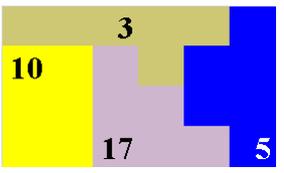
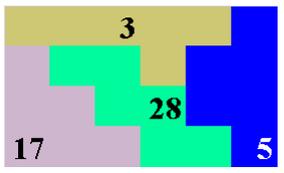
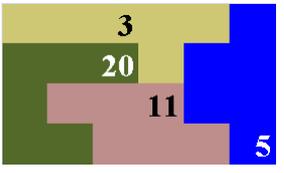
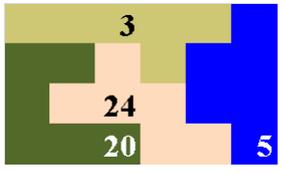
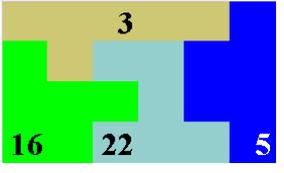
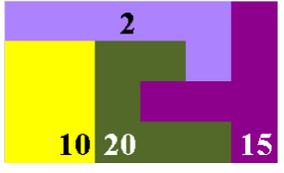
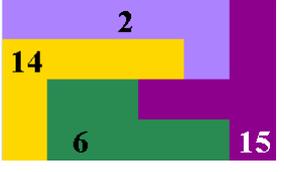
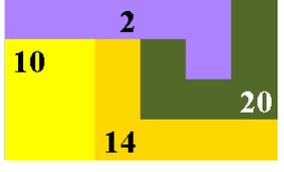
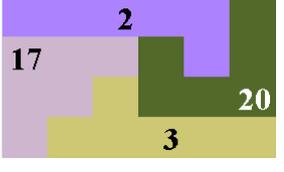
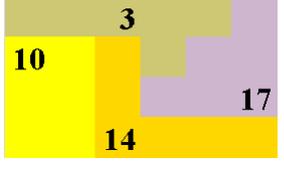
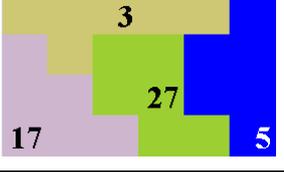
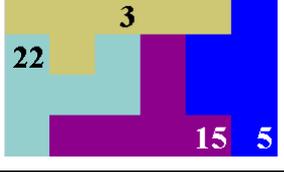
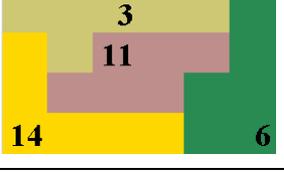
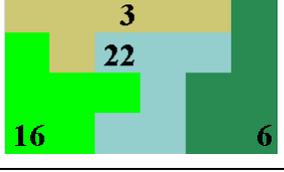
(8,14,21,27)	4				
(1,10,16,20)	4				
(1,5,8,10)	2				
(6,9,16,26)	2				
(11,14,16,17)	2				

組合	拼排方法	圖示
(2,5,10,21)	1	
(2,4,5,13)	1	
(2,5,16,27)	1	
(2,6,10,15)	1	
(2,6,21,27)	1	

組合	拼排方法	圖示
(2,3,5,11)	1	
(2,5,16,27)	1	
(2,5,22,26)	1	
(2,6,22,26)	1	
(2,6,9,11)	1	

(2,9,10,18)	1		(2,7,9,11)	1	
(2,9,16,26)	1		(2,9,26,29)	1	
(2,9,18,27)	1		(2,9,26,27)	1	
(2,7,12,14)	1		(2,6,10,14)	1	
(2,8,13,14)	1		(2,10,16,14)	1	
(2,14,19,23)	1		(2,6,15,23)	1	
(2,15,16,27)	1		(2,6,15,27)	1	
(2,10,15,27)	1		(2,4,7,15)	1	
(2,4,16,27)	1		(2,6,16,27)	1	

(2,3,17,19)	1		(2,3,22,27)	1	
(2,9,22,27)	1		(2,6,23,27)	1	
(2,11,16,30)	1		(2,5,26,30)	1	
(2,3,30,31)	1		(2,13,16,31)	1	
(2,9,26,31)	1		(2,6,26,32)	1	
(2,10,16,33)	1		(3,7,17,20)	1	
(2,6,12,14)	1		(2,7,10,14)	1	
(2,10,14,16)	1		(2,11,14,17)	1	
(2,14,17,24)	1		(2,5,14,20)	1	

(2,13,14,20)	1		(2,14,20,35)	1	
(2,4,6,15)	1		(2,3,9,15)	1	
(3,5,10,17)	1		(3,5,17,28)	1	
(3,5,11,20)	1		(3,5,20,24)	1	
(3,5,16,22)	1		(2,10,15,20)	1	
(2,6,14,15)	1		(2,10,14,20)	1	
(2,3,17,20)	1		(3,10,14,17)	1	
(3,5,17,27)	1		(3,5,15,22)	1	
(3,6,11,14)	1		(3,6,16,22)	1	

(3,6,16,17)	1		(3,6,21,22)	1	
(3,7,9,10)	1		(3,9,10,16)	1	
(3,6,9,12)	1		(3,6,9,14)	1	
(3,9,11,17)	1		(3,9,17,24)	1	
(3,5,9,20)	1		(3,9,20,35)	1	
(3,7,9,13)	1		(3,5,9,14)	1	
(3,9,16,29)	1		(3,9,17,26)	1	
(3,9,18,22)	1		(3,10,14,17)	1	
(3,10,14,22)	1		(3,13,14,17)	1	

【附件二】
基本圖形

片數	面積	圖示
2	12	
2	12	
2	12	
2	12	
2	12	
2	12	
3	18	
3	18	
3	18	

【評語】 080410

透過拼貼，探討用六方連塊拼出矩形的研究，特別是使用 Excel 來輔助。本作品嘗試了非常多種可能，然而和研究文獻所記載的上萬種可能相比(本研究的作者知道這個量)，只是非常少的數量，所以這個研究是一個初步嘗試。另外一個結果是對於 35 種型狀的六方連塊在嘗試成功的矩形的出現率，試圖解釋：哪些常用型的原因？哪些罕用型的原因？其中卻有幾分道理。



六方連塊之矩形大拼排

摘要



六方連塊共有35種類型，用六方連塊拼排矩形，透過排列組合，探究六方連塊之矩形拼圖的組合變化，可加強對矩形圖形之認識；運用切割重組，可深入理解矩形的面積公式。

壹、研究動機

數學課上到「面積及線對稱圖形時」單元，老師用不同的六方連塊拼出許多面積相同的矩形圖形，小小的六連塊竟然可以拼出這麼多種矩形，而且不只一種拼法，引起我們的興趣，於是我們想進一步研究看看六方連塊究竟能拼出多少種矩形圖形？

貳、研究目的

- 一、透過「排列組合」加強對矩形圖形之認識，並對等積變換之組成作初探。
- 二、透過矩形面積公式、全等圖形替換、排列組合等具體拼排操作，加深對六方連塊的認識與理解。
- 三、運用切割重組，可深入理解矩形的面積公式。

參、研究設備及器材

- 一、六方連塊積木。
- 二、「六方連塊之矩形大拼排」紀錄表。
- 三、電腦程式拼排矩形。

肆、研究過程及方法

- 一、六方連塊拼排矩形共有多少種拼法？上網搜集相關資料。
- 二、先將六方連塊加以命名並分析其組成。
- 三、制訂拼排規則，釐清觀念。
- 四、能否運用面積公式，找出各種矩形可能拼排的組合呢？
- 五、分析35種六方連塊在可能拼排組合中的出現率，並統計拼排成功比率。



拼排3x6矩形



拼排4x6矩形



用電腦程式拼排矩形



紀錄拼排結果



拼排更多矩形組合



拼排更多矩形組合



伍、研究結果

- (一)、任意選取2個六方連塊(面積=12平方單位):
可拼成(3X4)共3種矩形。

片數	組合	圖示	拼排方式
2	3x4		3

- (二)、任意選取3個六方連塊(面積=18平方單位):
共可拼成20種矩形。

片數	組合	圖示	拼排方式
3	2X9		1
	3X4+3X2		2
	3X6		17

- (三)、任意選取4個六方連塊(面積=24平方單位):
共可拼成425種矩形。

片數	組合	圖示	拼排方式
4	2X12		4
	3X4+3X2+1X6		6
	3X4+3X4		12
	3X6+1X6		34
	3X6+3X2		28
	3X8		74
	4X3+4X3		12
	4X6		255

- (四)、任意選取5個六方連塊(面積=30平方單位):
共可拼成1820種矩形。

片數	組合	圖示	拼排方式
5	2X15		6
	4X3+4X3+1X6		24
	3X4+3X4+3X2		12
	3X6+3X4		128
	3X10		128
5X6		1531	

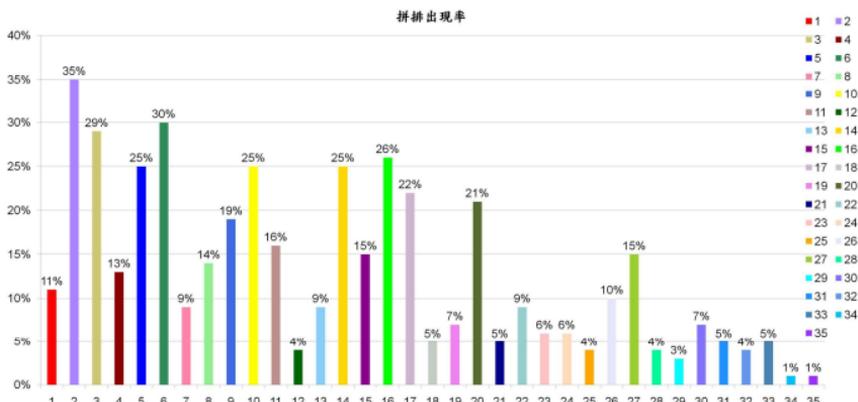
- (五)、任意選取6個六方連塊(面積=36平方單位):
共可拼成8167種矩形。

片數	組合	圖示	拼排方式
6	2X18		4
	3X8+3X4		548
	3X6+3X6		252
	3X6+3X4+3X2		216
	3X12		156
	4X6+4X3		1454
	4X9		1778
	6X6		3507
	6X3+6X3		252

- (六)、任意選取2~6片六連方塊拼排矩形, 個別六連方塊出現率:

- 任意選取2片六連方塊拼排矩形: 只能拼出3種, 分別為型號(5, 8)、(10, 14)、(16, 20), 型號5、8、10、14、16、20的出現率為33.3%, 其餘為0。
- 任意選取3片六連方塊拼排矩形: 型號20出現率最高, 40%; 型號15, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35的出現率為0。
- 任意選取4片六連方塊拼排矩形: 型號6出現率最高, 35%, 型號34的出現率最低, 0.5%。
- 任意選取5片六連方塊拼排矩形: 型號2出現率最高, 56%, 型號35的出現率最低, 1%。
- 任意選取6片六連方塊拼排矩形: 型號2出現率最高, 33%, 型號34的出現率最低, 0.9%。

- (七)、總計2-6片10446種排列組合中, 型號2出現率最高, 35%, 型號34的出現率最低, 0.9%。



陸、討論

- 一、剛開始以固定片數拼排多邊形，但不知道到底有多少種拼排方式，容易有疏漏；後來以相同面積求出可能的組合再進行拼排，較能掌握拼排的組合，不易遺漏。
- 二、一開始未設定排除經由旋轉、鏡射、翻轉後形成的全等圖形，同一種組合可能有多種排列方式，容易造成混淆；後來把完全重疊圖形視為同一種，將排列方式簡化，才能掌握拼排的組合。
- 三、運用矩形面積公式時遇到因數分解，必須先理解數學因數的定義，才能與面積公式連結。
- 四、拼排過程中發現可以用全等圖形來替換，於是嘗試找出基本圖形(附件一)，讓拼排組合更多樣化，也因此發現更多拼排方式。
- 五、拼排過程中遇到圖形排列組合問題，兩個矩形，其中一個矩形只能左右翻轉，如果兩個都上下左右翻轉，組合後經由旋轉、翻轉會有重複；如果是一個正方形(6x6)和一個矩形排列組合，則正方形只能旋轉，而矩形只能左右翻轉，否則也會有重複。
- 六、型號2六方連塊有5個凸起(90°內角)，拼排成功率較高；型號34、型號35六方連塊有8個凸起，拼排成功率較低。
- 七、凸起(90°內角)較少，拼排成功率較高，例如：型號2、型號10、型號14；凸起(90°內角)越多，拼排成功率越低，例如：型號28、型號29、型號34、型號35，可能是受形狀限制，彼此無法有效搭配拼排成功。

柒、結論

- 一、用六方連塊拼排矩形有多種變化，任意選取2~6片的可能拼排組合，我們一共找到10444種，相信還有許多我們尚未發現的拼排組合，有待後續的研究。
- 二、在可能拼排成功的組合中，型號2六方連塊有5個凸起(90°內角)，拼排成功率較高；型號34六方連塊有8個凸起，拼排成功率較低。
- 三、同一種組合可能有不同拼排方式，例如：(6, 10, 14, 21)有4種不同圖形拼法；(1, 10, 11, 14, 16, 17)有8種不同圖形拼法。
- 四、選取的片數越多，可能組合數也較多，例如：2片組合只有3種；3片組合只有20種；4片組合有427種；5片組合有1829種；6片組合有8167種。
- 五、運用六方連塊拼排矩形，透過矩形面積公式、全等圖形替換、排列組合等具體拼排操作，可加深對六方連塊的認識與理解。

捌、參考資料及其他

- 一、台北市龍安國民小學(2005)·*正立方體的變裝秀---五連塊(Pentominoes)拼拼樂*·中華民國第四十五屆中小學科學展覽會數學科國小組作品。
- 二、高雄市楠梓國民小學(2012)·*天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊*·中華民國第五十二屆中小學科學展覽會數學科國小組作品。
- 三、張煥泉(2015)·*國立臺灣師範大學數學教育中心數學奠基模組_七巧板大拼排*·臺北：國立臺灣師範大學。

