中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

團隊合作獎

080409

西蒙思對戰遊戲攻略

學校名稱：新竹市東區關東國民小學

作者：	指導老師：
小六 涂善玫 小六 黃彥慈 小六 王浩羽 小六 羅宥霓	傅秀蘭

關鍵詞：對戰策略、等價圖形、點的奇偶性

摘要

西蒙思對戰遊戲是兩人輪流在凸多邊形頂點畫一條線連接兩點，當某一方自己畫的線形成三角形時就輸了。本研究主要探討在不同點數遊戲中，雙方適用的致勝策略。發現到：

1. n 點時，雙方最多可畫直線總數為 $n\times(n-1)\div 2$。
2. 4 點時，若先者成功使用同點連線法則必勝；後者須阻擋先者同點連線法才能平手。
3. 5 點的適用策略為沙漏法和梯形法；6 點(含)以上適用的策略為沙漏法、梯形法、無限法和外圍連線法。這些策略為等價圖形，可互相轉化，均具有「畫出偶數頂點的封閉圖形」和「連接異奇偶點」等共同特徵。本研究並討論了上述策略的適用理由。
4. 找出 N 點以「連接異奇偶點」策略可連出供玩家選擇的直線數計算公式。
5. 建議雙方對戰時的最佳策略與互動調整原則。

壹、研究動機

我們在「趣味數學-遊戲篇」這本書中，發現了關於「西蒙思」的資料，書中簡略的介紹了規則，兩個策略和遊戲延伸。我們都覺得這個遊戲很有趣，但是書中介紹的策略太過模糊且簡略，我們覺得書上介紹的兩種策略，未必在每種點的數量時都適用。所以我們想進一步探討在不同點數的情況下，要如何贏得勝利？想試看看，能不能在找出其他的策略？便開始了這個主題的研究。

貳、研究目的

本研究的主要目的是研究在不同點量的西蒙思遊戲中，先者與後者應使用的最佳策略，以及本遊戲是哪一方較容易成為贏家，找出可供玩家參考的最佳策略來進行布陣。

1.找出不同點數時先者與後者的最佳對戰策略。

2.比較不同點數時的優勢方分別為先者或後者，或是平手。

3.瞭解西蒙思不同狀況時，使用何種策略能使己方獲勝。

4.探討各種適用策略能使玩家獲勝的原因。

5.找出各種適用策略的共通數學性質，與對戰時如何彈性應用。

參、研究設備及器材

1.研究與記錄：紙張、直尺、鉛筆、紅筆與藍筆。

2.分析等價圖形：方形洞洞置物籃、橡皮筋、竹籤、紙片。

3.整理研究成果：電腦、文書處理軟體(Word)、截圖軟體、幾何繪圖軟體(GeoGebra)。

肆、研究過程、結果與討論

一、遊戲規則與對戰條件

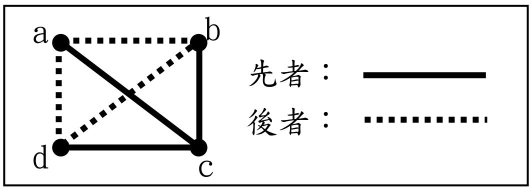
(一)對戰方式與輸贏判定

西蒙思遊戲是適合兩人進行的對戰遊戲。需要準備紙張和不同顏色的筆，兩人使用

不同顏色或實線虛線，來區別出自己連出來的直線。

遊戲一開始先決定要玩的點量，將這些點畫在白紙上，排成類似環狀或是可形成凸多邊形的頂點（後面會說明為何要如此排列的理由）。兩位玩家輪流在任兩點之間畫上屬於自己的直線。直到有一方的三條線在三個點上相連，形成三角形時，則遊戲結束，連成三角形的玩家為輸家。如果已經畫滿所有可以相連的直線時，仍沒有一方形成三角形，稱為平手狀態。

如圖一所示，兩位玩家在 4 個點間輪流畫線，因為後者最後在 a、b、c 三點連出一個三角形了，所以後者就輸了。

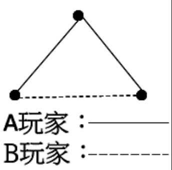


（圖一）4 點的西蒙思對戰情形示例

（二)最少對戰點數

我們先考慮要從幾點開始進行研究，也就是：至少要有幾個點，才能夠玩兩人對戰遊戲呢？便試著從 1 點開始逐漸增加點數，思考不同點數、可連接的直線數目，以及對戰情形之間的關係。結果見（表一）。

（表一）3 點（含）以下對戰條件分析表

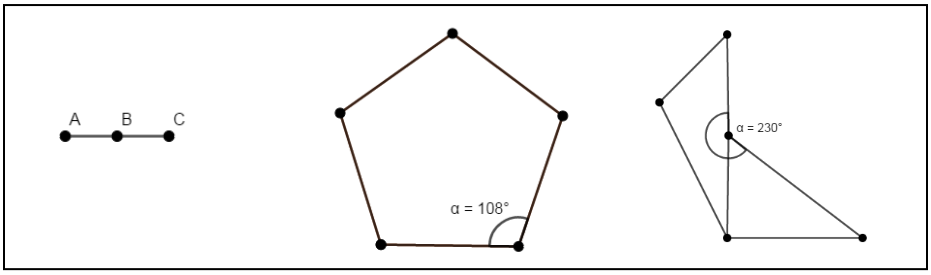
點數	可畫的直線數	說明	圖例	是否可對戰
1	0	1 個完整三角形需有 3 個點相連 3 條線。1 條線需相連 2 點。1 點無法連成線，及三角形。		否
2	1	1 個完整三角形需有 3 點相連 3 條線。2 點最多連成 1 條線，所以無法連成三角形。		否
3	3	圖形為三點時，一點最多連兩條，扣除重複，所以總線數為 3×2÷2=3。兩方玩家輪流連線，3÷2=1…1 表示第一個玩家連兩條，第二個玩家連一條，1 個完整三角形需有 3 點相連 3 條線，一條線或兩條線並無法自行連成完整三角形。		否

所以，要能對戰的點數，至少要 4 點以上。

（三)點的排列方式

當點的排列出現共線的情形時，會減少可連直線數。以圖二左為例，如果先連了 $\overline{AC}$，就無法連 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$；反之如果先連了 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$，就無法連 $\overline{AC}$。

所以點的排列，要排成凸多邊形的頂點。凸多邊形是指多邊形的每個內角，都要小於 180°，這樣的圖形，任兩點的連線，就都會在形體內且不會有共線的情況發生。如果內角大於 180°，則此內角的頂點會位於其相鄰兩頂點的連線之內，此頂點會容易落在其他兩點連線的中間，而可能會形成共線的情形。



(圖二)點的排列方式（左：共線、中：內角小於 180˚、右：內角大於 180˚）

(四)點數與可連直線數之間的關係

不同的點數（A_1～A_n點），兩人可以連出的直線總數，可用下列兩種公式算出來：

第一種公式：n×(n−1)÷ 2

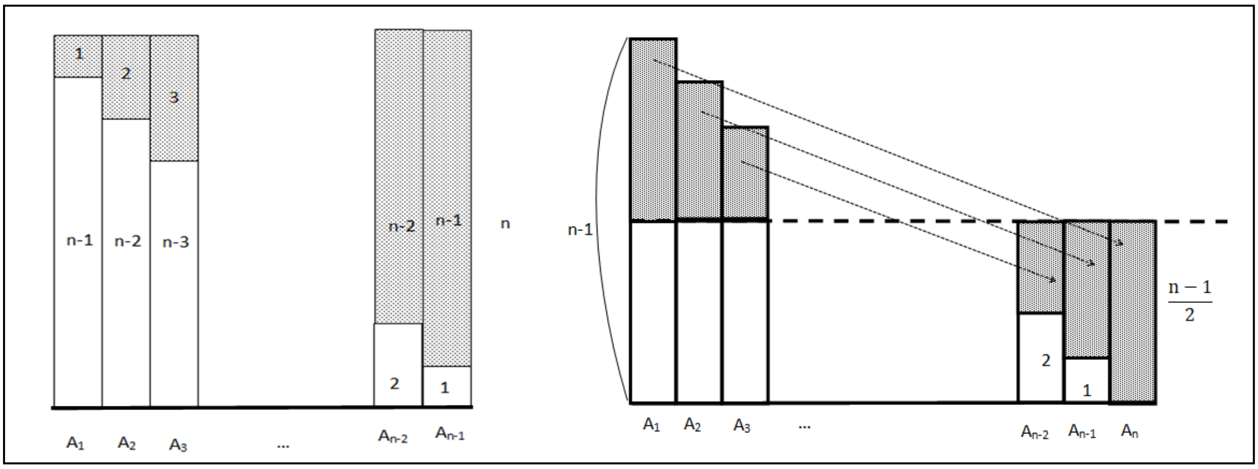
【想法 1】由任一點 A_i 可以連出去的線段有 n−1 條，$\overline{A_iA_j}$但是 i≠ j。

n 個點，可連直線總數為：$n\times(n-1)$。

但是 $\overline{A_iA_j}=\overline{A_jA_i}$，所以實際的可連直線總數要再÷ 2。

【想法 2】依序累計每個點可畫的直線總數，在不重複畫線的情形下，每增加一個點，會減少連到前面各點的直線。計算到最後一個點時，就沒有其他可以和其相連的直線了。

用代號表示：A_1可以連出 n-1 條線，A_2可以連出 n-2 條線，A_3可以連出 n-3 條線…，A_{n-1}可以連出 1 條線，A_n連出 0 條線。



(圖三)計算可連直線總數的兩種計算方式示意圖

參照圖三左圖所示，可以得到下列等式：

(A_1 可連線數+A_{n-1} 可連線數)＝(A_2 可連線數+A_{n-2} 可連線數)＝…

＝(A_{n-1} 可連線數+A_1 可連線數)

將以上所有等式相加，便可得出可連線總數的兩倍：(A_1 的可連線數+A_{n-1} 可連線數)×(n-1)＝$n\times(n-1)$，再除以 2，就得到可連直線總數。

第二種公式：(n−1)÷2×n

參照上頁圖三右圖所示：A_1 連出 n-1 條線，各點可連線數會依序減少，到第 A_n 時，沒有可連的線。把 A_1 可連直線數的一半補到 A_n 的可連直線數。A_2

比 A_1 少一條線，而 A_{n-1} 會比 A_n 多一條線。所以把 A_2 可連直線數－(n-1)÷2 條線後，剩餘部份補到 A_{n-2} 的可連直線數，依序這樣把全部的點的可連直線都補到一樣多，此時每個點的可連直線數都會是 A_1 可連直線數的一半。共有 n 個點，所以全部的可連線總數＝$(n-1)\div 2\times n$

(五)點數與每人最多可連直線數的關係

因為西蒙思是兩人對戰遊戲，當總線數是偶數時，每個人最多能連的直線數是總直線數的一半，能連完全部可連直線的最後一步是後者；當總線數是奇數時，先者會比後者多連 1 條線，能連完全部可連直線的最後一步是先者。請見表二的分析。

(表二)可連直線總數與每人最多可連線數的關係

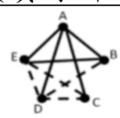
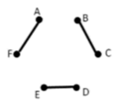
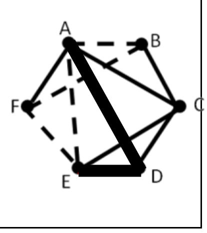
可連線總數奇偶性	每人可連的線數	連完全部可連直線時的最後一方
總線數為偶數	總直線數的一半	後者
總線數為奇數	平分時會餘 1，先者多一條線	先者
解析：可連線總數÷2 為一玩家可連的最多線數。 當可連線總數為偶數時可平分，全部連完時，後者會輪到畫最後一條線。 當可連線總數為奇數時，可連線總數÷2 會餘 1，表示兩玩家平分到最後，還會剩下一條線，所以先者會比後者多一條可連的線，也就是最後一條線會輪到先者。		

(六)發展各種對戰策略

我們便從 4 點開始對戰，除了記錄對戰過程，也嘗試著發展出可能會讓自己贏的對戰策略。當想到有某個特定的策略時，便鎖定一個策略，在整個對戰過程中都以此策略為原則來畫線，看看會導致怎樣的輸贏結果。

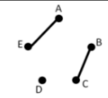
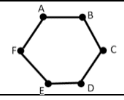
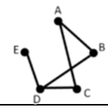
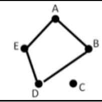
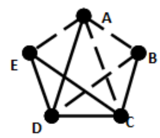
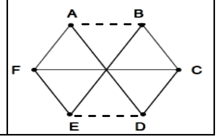
隨著點數逐漸增加，能畫的直線數目變化越多，我們發展出越來越多的對戰策略。在我們研究中，所使用到的對戰策略，整理說明見表三。

（表三）各種對戰策略說明對照表

序號	策略名稱	定義	圖例（實線所示）
1	同點連線法	在同一點上(中心點)，連線到其他各點。	
2	避同點連線法	連線時盡量不要與自己其他的線碰到(避免在同一個點重複連自己的線)。	
3	讓位法	對方連線，假設對方的線為三角形中的一條，避免連到對方可能形成三角形的其他假設線，增加對方形成三角形的機率。 圖例中後者(虛線)使用讓位法，讓先者最後一條線只剩下粗黑線標註的直線，因此會使先者連成三角形。	

(下頁續)

（表三）各種對戰策略說明對照表(續)

序號	策略名稱	定義	圖例（實線所示）
4	對稱法	自己連的線盡量與對方連的線，在各點組成的凸多邊形中心軸上形成線對稱。	
5	外圍連線法	連的線為全部畫滿後圖形最外圍的線(四點連出來為四邊形；五點為五邊形)。	
6	沙漏法	自己的線用 4 個點連成一個沙漏形狀，沙漏外面的點，可連接到沙漏上的 1～2 個點。	
7	梯形法	自己的線用 4 個點連成類似梯形（或四邊形）的形狀。	
8	叉叉法	連成兩條外圍的線(相連)，加上一個叉叉，並逼迫對方連成三條外圍的線(相連)，加上一個叉叉。只能用於五點後者。圖例中的實線代表要逼迫對方連的線(先者)，虛線代表自己要連成的線(後者)。	
9	無限法	只要有在 6 個點連出一個像無限符號的圖案，就是無限法。中間也可以再多加 1～3 條橫線。此策略要六點以上才可使用，因為少於六點無法連出此圖案。	

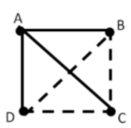
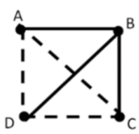
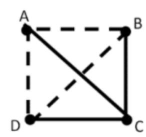
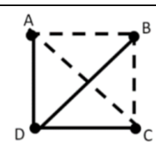
二、探究各種點數的最佳對戰策略

(一)四點的最佳對戰策略

1. 雙方均採用「同點連線法」對戰

因為四個點所能連成的直線數最多只有 6 條，每個人最多只能連出 3 條線，所以能使用的策略有限。我們發現只能使用「同點連線法」這個策略，便試玩看看這個策略對先者或後者會較為有利。摘記幾個對戰結果的記錄於表四。

（表四）四點時採用「同點連線法」的對戰記錄表

先者策略	同點連線法							
後者策略	同點連線法							
圖例								
對戰過程	先者	後者	先者	後者	先者	後者	先者	後者
	AD AC AB	*BD* *BC* *DC*	BA BD BC	*DA* *DC* *AC*	CB CA CD	*AB* *AD* *BD*	DA DB DB	*BC* *BA* *AC*
贏方	先者		先者		先者		先者	

【研究發現】

(1)先者使用「同點連線法」會贏。

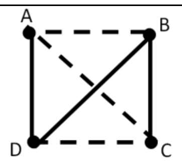
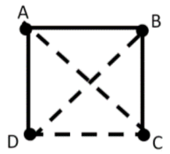
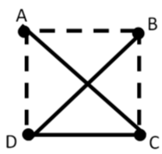
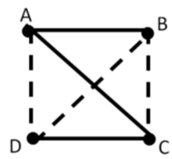
(2)後者無法完成「同點連線法」，會被先者阻礙到。

(3)四點時，自己的直線都須由同一個點所畫出去的直線，也就是走成「同點連線法」才會贏。

2.後者阻擋先者的「同點連線法」

因為在四點時，先者使用「同點連線法」會贏。所以接下來我們便研究後者阻擋先者去使用「同點連線法」的話，結果會如何？幾個對戰過程與結果記錄見表五。

（表五）四點時後者阻擋先者的「同點連線法」對戰記錄表

先者策略	同點連線法							
後者策略	阻擋先者同點連線法							
圖例								
對戰過程	先者	後者	先者	後者	先者	後者	先者	後者
	BC BD ***DC***	***BA*** DA ***AC***	AB AD BC	***AC*** ***DB*** ***DC***	CD CA DB	***CB*** ***AB*** ***AD***	AB AC CD	***AD*** ***CB*** ***DB***
贏方	平手		平手		平手		平手	

【研究發現】

(1)當雙方都採用「同點連線法」時，先者會贏。

(2)後者阻擋先者完成「同點連線法」，可使先者不能贏而獲得平手的結果。

【討論】

(1)當對戰雙方都採用「同點連線法」的話，先者與後者要搶著完成「同點連線法」時，最晚在連第 5 條線時，會是輪到先者，剩下唯一能連的一條線，並無法讓後者在同一個點連出去。所以後者最後會無法確保成功執行完「同點連線法」。

(2)四點時，如果先者使用「同點連線法」，則後者沒有贏的機會。但是後者若能阻擋先者使用「同點連線法」的話，至少可以確保自己不會輸。

(3)四點時的西蒙思遊戲，如果先者使用策略正確的話（用「同點連線法」），會出現先者贏或是平手的結果。所以 4 點是對先者優勢的遊戲。

(4)從雙方可以連的直線數來思考：四點的可連線總數為 $4\times3\div2=6$，兩方玩家最多能連的直線為 $6\div2=3$ 條。而四點時，一個點最多能連出 3 條直線，所以只要有一方在同一個點連滿 3 條線，就連完自己能連的直線，也就不會連成三角形。在四點時，當一方連完任一點所能連的全部直線(3 條線)，剩下的 3 條線剛好會形成三角形。因為先者可以先連完 3 條線，若先者使用「同點連線法」，後者便是最後唯一有可能會連成三角形的一方，因而會輸掉。

【結論】

(1)由上述知道四點時，要贏的方法就只有「同點連線法」，且先者才有機會贏。因為後者比先者晚連線，如果兩人都要連「同點連線法」，先者會先占去兩人有重

覆到的線，後者就沒有機會連成「同點連線」，也就沒有贏的機會了。

(2)後者達到對自己最有利的結果是平手狀態，後者只要阻擋先者連成「同點連線法」，就可以平手。

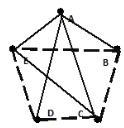
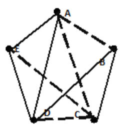
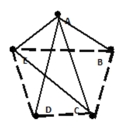
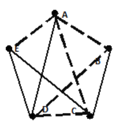
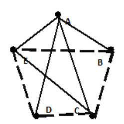
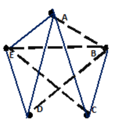
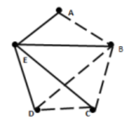
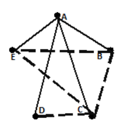
(二)五點的最佳對戰策略

1. 同點連線法

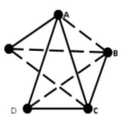
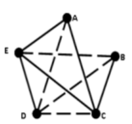
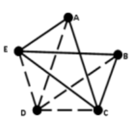
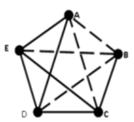
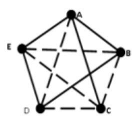
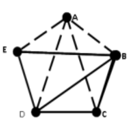
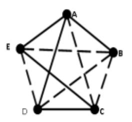
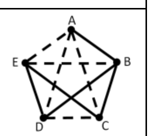
在四點時，使用「同點連線法」讓先者或後者都可以至少不會輸，所以五點時，我們先繼續探究「同點連線法」是否對先者或後者仍然適用，至少可以保持不輸。

我們試驗先者或後者在不理會對方使用的策略下，採用「同點連線法」來畫自己的直線。此時對方採用任一策略，兩方對戰情形會是如何。表六是先者採用「同點連線法」的對戰情形，表七則是後者採用「同點連線法」的對戰情形。

（表六）五點時先者使用「同點連線法」來對戰(先者實線、後者虛線)

後者策略	避同點連線法		讓位法		外圍連線法		叉叉法		梯形法		沙漏法		對稱法		同點連線法	
圖例																
對戰過程	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後
	AE AD AC AB EC	ED BC EB DC	DE DA DB BC AE	AB DC AC EC	AE AD AC AB EC	ED DC BC EB	DE DA DC BC EC	AE BD AC AB	AE AD AC AB EC	EB ED DC BC	AE AD AC BC ED	EB AB BD EC	EA ED EB EC	AB BC DC BD	AE AD AC AB	CD CE CB EB
贏方	後者		後者		後者		後者		後者		後者		先者		先者	

（表七）五點時後者使用「同點連線法」來對戰(先者實線、後者虛線)

先者策略	同點連線法		避同點連線法		對稱法		外圍連線法		叉叉法		梯形法		讓位法		沙漏法	
圖例																
對戰過程	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後
	AE AD AC BC DC	BA BE BD EC	AE BE AC ED EC	CD DB AD EB	AE EB EC AC EC	CE DB DA DE	AE ED DC BC EC	BA BE BD AC	AE AB AC BD ED	DC EC BC AD	EB ED DC BC BD	AE AD AC AB	AE AD EC AB DC	BC BD BE AC ED	AB EC BD BC ED	AE AD AC EB DC
贏方	後者		後者		後者		後者		後者		後者		先者		先者	

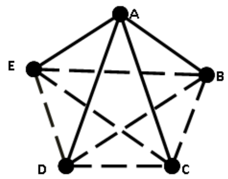
【研究發現】

在不管對方使用何種策略下，先者若使用「同點連線法」的策略時，只有在後者

使用「對稱法」或「同點連線法」，先者才會贏。當後者使用「同點連線法」的策略時，則是只有在先者使用「讓位法」或「沙漏法」時才會輸，其他時候都是後者贏的機會較高。所以在五點時，先者並不適合使用「同點連線法」。

【討論】為何在五點時，先者用「同點連線法」比較容易輸呢？

從每人可以連接的直線數來思考：五點可連接的直線總數是 10 條、每人最多連可 5 條直線。當先者使用「同點連線法」時，同一個點最多可以畫出 4 條線(如圖四)，先者最後剩下要連的 1 條直線，都是會和自己前面的任兩條直線連接而形成三角形，所以先者會輸。但是若後者阻擋了先者畫出 4 條同點連線法的路徑，反而就給了先者一條逃生之道。



實線: 同點連線法
虛線: 剩下待連的直線

(圖四)在同 1 點用「同點連線法」連完最多直線時的情形

2. 避同點連線法

雖然五點時，先者使用「同點連線法」容易輸，後者使用「同點連線法」有很大的機會能贏，後者使用「避同點連線法」也會贏。但是使用「避同點連線法」的後者，不一定了解先者在五點時使用「同點連線法」會自取滅亡。加上彼此都有可能會去猜想對方所使用的策略，而想去阻擋對方使用的策略。所以，我們特別針對先者使用「同點連線法」vs. 後者使用「避同點連線法」，進一步的研究：在有阻擋對方使用策略的情況下，會對輸贏的局面會產生變化嗎?

我們將先者使用「同點連線法」vs. 後者使用「避同點連線法」、阻擋或不阻擋對方策略的每一種狀況都玩十次，看看較容易出現怎樣的輸贏情形。測試結果見表八。

(表八) 先者使用同點連線法 vs. 後者使用避同點連線法獲勝次數(以玩十次計)

贏的次數 / 是否阻擋	同點連線法（先者）	避同點連線法(後者)	平手
不阻擋(不理會對方)	0	10	0
後者阻擋對方策略	1	9	0
先者阻擋對方策略	6	2	2
互相阻擋對方策略	1	0	9

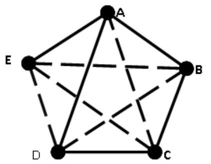
【研究發現】

(1)在先者採用同點連線法，後者採用避同點連線法，且雙方都不阻擋的情況下，先者贏：後者贏 = 0 次：10 次，先者沒有贏的機會(參見圖四）。

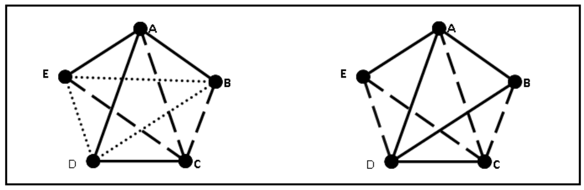
(2)後者阻擋先者的同點連線法時，先者贏：後者贏 =1 次：9 次。當後者阻擋了先者時，讓局面變得混亂，先者可能抓住時機，而讓後者輸(圖五)。所以後者在剩下三條線時，更要謹慎去觀察該怎樣才能阻擋到先者。

以圖六為例，後者在剩下最後三條線時（圖六左），謹慎思考下選擇連 $\overline{ED}$，剩下 $\overline{BD}$ 和 $\overline{BE}$ 這兩條線，讓先者接下來不管是連哪一條，都會形成三角形，而把握了後者獲勝的機會。後者若阻擋先者「同點連線法」的其中一條(圖六右的 $\overline{AC}$)，先者就只能連「同點連線法」的另外三條(圖六右的 $\overline{AE}$、$\overline{AD}$、$\overline{AB}$)，先者剩下的 2 條，1 條(先者的第 4 條直線)可以連後者所給的不會輸的路(圖六右的 $\overline{CD}$)，另 1 條(先者的第 5 條直線)就只能連成三角形而輸了(圖六右的 $\overline{BD}$)。

圖六的例子是後者在剩下三條時，把握住獲勝的機會；但是如果在剩下三條線前，就已經畫得不可挽救，那剩下三條線也無法幫忙扭轉後者輸的局勢了。



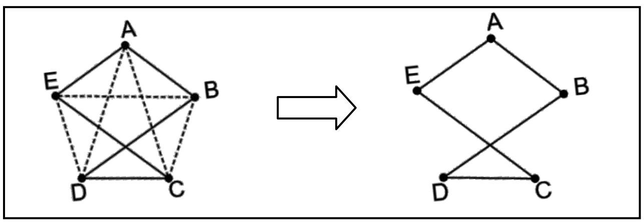
（圖五）後者(虛線)阻擋而輸掉的情形



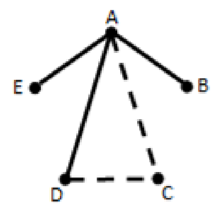
（圖六）後者(虛線)阻擋到剩三條線的局面

(3)先者使用「同點連線法」來阻擋後者使用避同點連線法時，先者贏：後者贏：平手 =3 次：1 次：1 次，所以先者有阻擋時獲勝的機率較高，比不阻擋贏的次數較多，證明先者是需要阻擋對方的策略。

(4)先者使用同點連線法，後者使用避同點連線法，且互相阻擋對方策略時，先者贏：平手 = 1 次：9 次，平手的機率高。當都不阻擋的時候，很容易走成圖五的圖形，這個圖形和「沙漏法」很像，但其志不在贏，而是平手。我們稱這個圖形為「魚形」（見圖七）。



（圖七）連成「魚形」的圖案



（圖八）後者阻擋先者同點連線法

【討論】

雖然對手使用「同點連線法」容易自取滅亡，但是萬一後者或先者在不知道的情況下，阻擋對手會自取滅亡的「同點連線法」時，可能會導致下列的結果：

(1)當後者阻擋的情況下：

在不知對方使用策略的情況下，假設先者連了圖六的 $\overline{AE}$，後者固然無法單從一條線中看出先者使用的策略，所以也先隨意連一條線(圖八的 $\overline{DC}$)，先者按照「同點連線法」策略連線(圖八的 $\overline{AD}$)，後者也可能猜到先者使用「同點連線法」，所以阻擋了先者(圖八的 $\overline{AC}$)，先者依舊按照「同點連線法」策略連線，便會形成圖八的圖形。接著，只要後者不粗心大意，先者的下一步不管是連 $\overline{BC}$ 或是連 $\overline{CE}$，最後一定都會連出三角形，先者必輸無疑。

所以當後者有阻擋先者使用「同點連線法」時，和雙方都不阻擋的情況會有些微不同。後者若不阻擋先者使用「同點連線法」，先者必輸；但是後者若有阻

擋的話，雖然小心應對仍有可能會贏先者，但也可能會錯失贏的機會。所以五點時，如果發現先者採用了「同點連線法」，後者應該不要阻擋先者的策略。

(2)當先者阻擋的情況下：

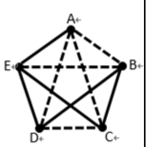
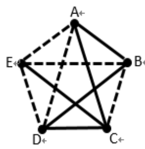
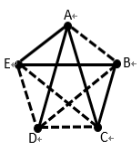
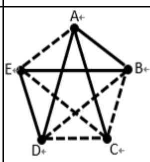
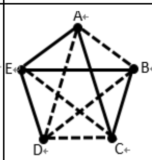
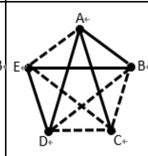
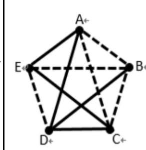
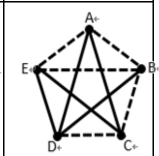
因為對方若採用「避同點連線法」，比較難以預測下一條線會從哪一個點連出去，較難以捉摸。使用「同點連線法」的先者，可能從開始到結束都猜不出對手所使用的策略，所以只要後者仔細一點，就很容易可以贏先者。

3.先者使用「沙漏法」

在前面的研究（表六、表七），不論是哪一方使用「讓位法」或「沙漏法」都會贏。因為「讓位法」是連線時要避開讓對方可以連成三角形的線（留下來給對方畫），會牽涉到觀察對方的策略,比較複雜些。所以我們便進一步鎖定只要專注連出自己形狀的「沙漏法」，來和其他策略對戰看看，是否都能讓使用「沙漏法」的一方獲勝。

首先鎖定先者使用「沙漏法」與後者來對戰，看看結果會如何。（見表九）

（表九）五點時先者使用「沙漏法」來對戰(先者實線、後者虛線)

後者策略	同點連線法		外圍連線法		對稱法		讓位法		避同點連線法		沙漏法		叉叉法		梯形法	
圖例																
對戰過程	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後
	ED	CA	AC	AE	AE	DC	AD	BC	AE	BD	AB	DC	AD	DC	AE	BC
	BC	AB	DC	ED	BC	AB	AB	AE	AC	EC	AC	BD	DE	BC	AD	BE
	BD	AD	AB	BC	AC	BD	BE	CE	BE	AD	BE	AE	CE	AB	EC	ED
	AE	EB	CE	EB	AD	DE	AC	BD	ED	DC	AD	EC	BD	BE	DC	AB
	CE	DC	BD	AD	EB	EC	ED	DC	BC	AB	ED	BC	AC	AE	BD	AC
贏方	先者		先者		先者		先者		先者		先者		先者		先者	

【研究發現】

(1)先者使用「沙漏法」時，都會贏。

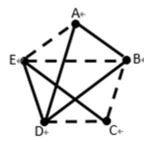
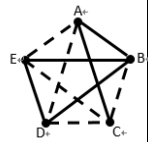
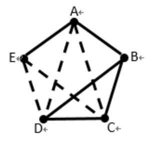
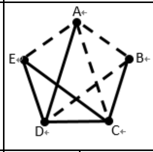
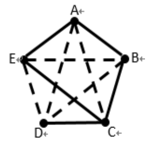
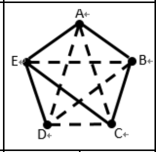
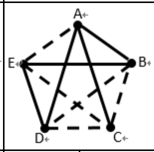
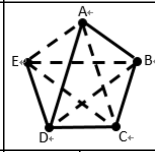
(2)如果先者和後者都使用「沙漏法」時，仍是先者獲勝。

4.後者使用沙漏法

雖然五點時先者使用「沙漏法」對戰後者的其他策略都會贏，不過前面也有一次是後者也使用「沙漏法」而輸給先者使用「沙漏法」的情況。

我們便想再繼續研究看看，如果先者不知道要使用「沙漏法」，改成換後者使用「沙漏法」的話，是否也提高後者獲勝的機會。所以接下來便讓後者使用「沙漏法」，和先者使用其他策略來對戰看看。結果見表十。

（表十）五點時後者使用「沙漏法」來對戰(先者實線、後者虛線)

先者策略	同點連線法		避同點連線法		對稱法		叉叉法		外圍連線法		讓位法		沙漏法		梯形法	
圖例																
對戰過程	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後
	AD ED EC AB BD	***BC*** ***EB*** ***DC*** ***AE***	ED AB BD AC BE	***AE*** ***BC*** ***EC*** ***DC***	AE AB BC DC BD	***ED*** ***AD*** ***EC*** ***AC***	DE DA BC EC DC	***AB*** ***EA*** ***AC*** ***DB***	BC AE AB EC DC	***AD*** ***AC*** ***ED*** ***BD*** ***EB***	AE CE DE AB BC	***BD*** ***CD*** ***BE*** ***AC*** ***AD***	AD DE CE BD AC	***DC*** ***BC*** ***AB*** ***BE*** ***AE***	AD BC AB DE DC	***AE*** ***AC*** ***BE*** ***BD*** ***CE***
贏方	***後者***		***後者***		***後者***		***後者***		先者		先者		先者		先者	

【研究發現】

(1) 五點時，先者使用「沙漏法」都能獲勝，如果是後者使用「沙漏法」的話，則要在先者使用「同點連線法」、「避同點連線法」、「對稱法」或是「叉叉法」時，才有獲勝的機會。

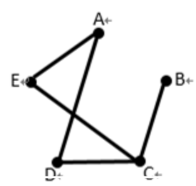
(2) 所以，在五點時，對先者和後者來說，「沙漏法」是最適合用來對戰的策略，尤其是對先者更為有利。

【討論】在五點時，為何使用沙漏法的一方會容易贏？

五點的總線數為(4+1)×4÷2=10，或是$\frac{5\times4}{2}=10$條直線。平分給兩個玩家，每個玩家能連的直線數最多為 10÷ 2=5 條。

「沙漏法」（參見圖九示例）的前面 4 條直線，是在 4 個點之間連出沙漏形狀的封閉圖形，每個點分別都與另外兩點相連。剩下最後 1 條直線，是從第 5 點連到封閉圖形的任何一個點，並不會和封閉圖形任意兩點形成三角形。所以如果可以成功走完「沙漏法」，就可以確保不會輸。

若先者和後者都同時採用「沙漏法」，就算後者走完 4 條線都還是採用「沙漏法」，當最後一輪剩下最後兩條線時，先者有優先選擇的機會，容易把握機會逼死後者的最後一條線。所以，雙方都使用「沙漏法」時，先者還是比後者更有機會能獲勝。



(圖九)一種沙漏法的圖形

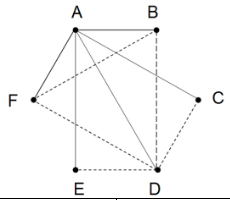
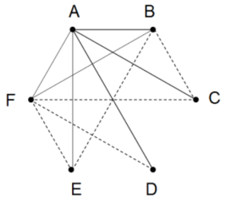
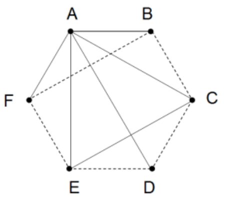
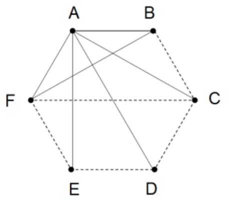
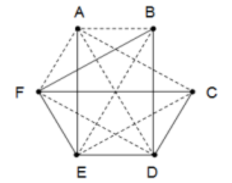
(三)六點的最佳對戰策略

1. 同點連線法

在四點時，使用「同點連線法」的一方就會贏；在五點時，使用「同點連線法」的一方就會輸。所以就我們先繼續探究在六點時，「同點連線法」是否對使用者會有好處。

我們試驗先者或後者在不理會對方使用的策略下，先者採用「同點連線法」來畫自己的直線，而後者採用任一策略，對戰結果會如何。對戰結果紀錄見下頁表十一。

（表十一）六時先者使用「同點連線法」來對戰(先者實線、後者虛線)

後者策略	同點連線法		沙漏法		外圍法		梯形法		梯形法	
圖例										
對戰歷程	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後
	AB AC AD AE AF	***DC*** ***DB*** ***DF*** ***DE*** ***BF***	AB AC AD AE AF BF	***BC*** ***CF*** ***EF*** ***BE*** ***DF***	AB AC AD AE AF CE	***BC*** ***CD*** ***DE*** ***EF*** ***BF***	AB AC AD AE AF BF	***CD*** ***DE*** ***EF*** ***FC*** ***BC***	AF AE AD AC AB BE	***CF*** ***DE*** ***CD*** ***EF*** ***BC***
贏方	先者		***後者***		***後者***		***後者***		***後者***	

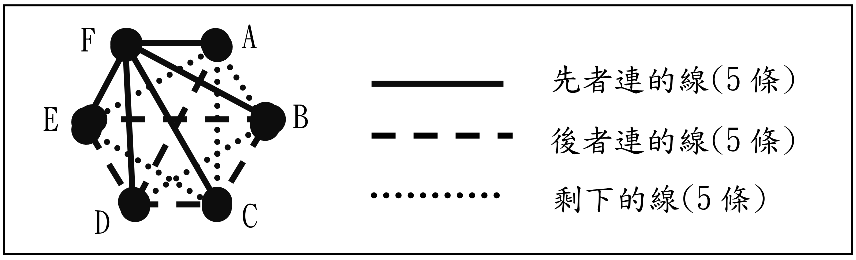
【研究發現】

結果跟五點先者使用「同點連線法」相似，一樣都是後者贏的機率較高。只有在後者也是和先者同樣使用「同點連線法」的時候，才有先者會贏的時候。所以，六點時，不管是先者或後者，都不適合使用「同點連線法」。

【討論】六點時，為何不管是先者或後者都不適合使用「同點連線法」？

在六點時，不適合使用「同點連線法」的原因，我們認為跟五點一樣，可以從可以連的直線總數上來思考：六點可連的直線總數為：$6\times5\div2=15$ 條；每人可最多連的直線數為：$15\div2=7\cdots1$，先者 8 條、後者 7 條。

而六點時，每一點可連出 5 條直線。當先者連完同一個點的 5 條線，再輪到先者要連第 6 條線時，後者也已經連滿 5 條線，此時剩下$15-(5+5)=5$條線。而剩下的這 5 條線，不論是連哪一條，都會使先者和自己前面的任兩條線連成三角形，而會使先者輸。（見圖十）如果是後者使用「同點連線法」，也會同樣面臨第 6 條線不管怎麼連，都會讓自己連出三角形而輸掉的情形。



(圖十)六點時先者使用「同點連線法」連完同一點全部直線的情形

在點數更多(＞5 點)的情形下，如果任一方使用「同點連線法」，讓某一點都是由自己連完和其他點相通的直線，後面再連任何一條直線時，都會形成三角形而讓自己輸掉。所以，在五點（含）以上的西蒙思遊戲，不管是先者或後者，都要避免使用

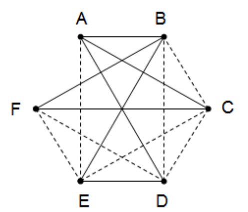
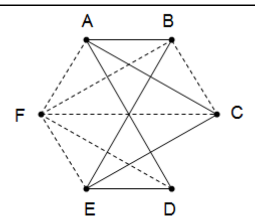
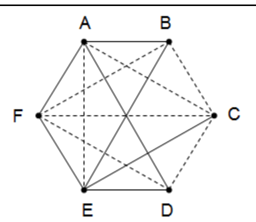
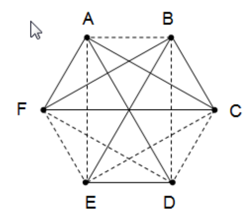
「同點連線法」。

2.沙漏法

在五點時，先者使用「沙漏法」都會贏，後者使用「沙漏法」也有機會能獲勝。所以我們就繼續探究在六點時，「沙漏法」是否會讓使用者容易獲勝。

首先測試先者或後者在不理會對方使用的策略下，先者採用「沙漏法」來畫自己的直線，而後者採用其他策略的對戰結果如何，結果見表十二。

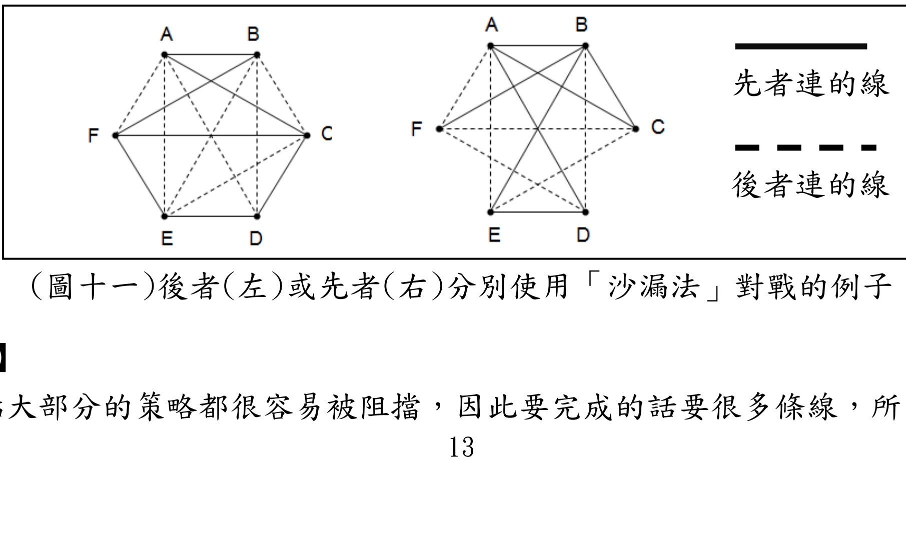
（表十二）六點時先者使用「沙漏法」來對戰(先者實線、後者虛線)

後者策略	沙漏法		同點連線法		梯形法		沙漏法	
圖例								
對戰歷程	先	後	先	後	先	後	先	後
	AB BE DE AD AC BF CF	*CD* *DF* *EF* *CE* *BC* *AE* *BD*	AB BE DE AD AC CE	*AF* *BF* *CF* *DF* *EF* *BC*	AB BE DE AD AF CE EF	*BC* *CD* *DF* *BF* *AE* *AC* *CF*	AC BF AF BC BE AD ED CF	*DF* *CE* *EF* *CD* *AB* *AE* *BD*
贏方	先者		先者		先者		***後者***	

【研究發現】

先者如果採用「沙漏法」，除了後者使用「沙漏法」策略時，讓後者有贏的結果之外，其他都是先者會贏的結果。但是經過我們繼續研究，有出現當後者使用「沙漏法」和先者使用「梯形法」對戰時，先者獲勝的情形（見圖十一左）。所以在六點時，「沙漏法」對先者和後者，都可以使用。但是雙方都使用「沙漏法」時，不一定對哪一方較為有利。

圖十一右是先者使用「沙漏法」輸給後者的例子。所以使用「沙漏法」的一方不一定會贏，還是要注意觀察對方的連線方式，適當來調整自己的連線，才能決定輸贏！



(圖十一)後者(左)或先者(右)分別使用「沙漏法」對戰的例子

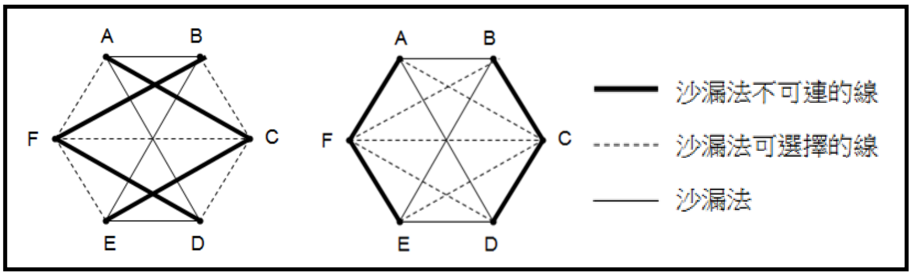
【討論】

(1)六點大部分的策略都很容易被阻擋，因此要完成的話要很多條線，所以不易完成。

雖然使用「沙漏法」的一方，不一定會贏，但是如果可以在使用「沙漏法」的同時，阻擋對方使用「沙漏法」，甚至逼迫對方的直線都是「同點連線」，這樣或許可以提高自己獲勝的機會。

(2)為什麼六點時使用「沙漏法」可以提供獲勝的機會？

使用「沙漏法」，在不考慮對手的連線下，連出沙漏形狀時，要先在 4 個點之間，以兩兩相連的方式連出 4 條線。如圖十二所示：在沙漏形狀之外，還有 2 個點(C、F)。連第 5 條線時，沙漏外面的 2 點，各自都可以和沙漏形狀 4 點（A、B、D、E）中的其中 2 點相連而不會形成三角形，加上沙漏外的 2 點還可以畫一條相連的直線，所以沙漏形狀之外，還有 5 條直線可以選擇。而六點時，先者最多可連 8 條線、後者最多可連 7 條線。如果用前 4 條線連出沙漏形狀時，要連後面剩下的 3～4 條直線時，有 5 條可以避開形成三角形的直線可供選擇，便有很大的獲勝機會。



（圖十二)六點時「沙漏法」的兩種連線方式分析圖

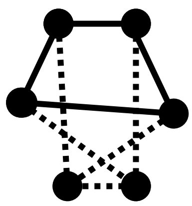
實際上，就算是先者最先連完前 4 條的沙漏形狀，要連沙漏外的第 5 條線時，後者也已經連出 4 條線，總線數剩下 15-8＝7 條線可讓先者選擇。先者玩到最後如果不輸的話，最多還要再連 4 條線。在沙漏外面的點還可畫出 5 條不會連出三角形的直線，只要被後者先佔用掉至少 2 條線的話，先者就沒有辦法避免連出三角形的命運了。

所以六點時，在對手不知道自己使用何種策略、而無法阻擋的情形下，使用「沙漏法」來對戰，可以提高獲勝的機會。如果要阻擋對方使用「沙漏法」時，則要將對方沙漏形狀外面的 2 點之間的連線，以及沙漏外 2 點與沙漏形狀相連而不會形成三角形的那些直線先佔用掉，就有很大的機會可以逼迫對方連出三角形了。

3. 梯形法

依據上面六點時針對「沙漏法」策略的討論，得知：如果前面 4 條線連成封閉的沙漏形狀，沙漏外面的 2 點，就有很大的機會不會和前面 4 條線連成三角形。

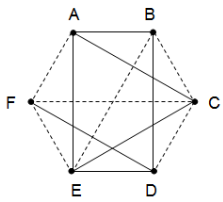
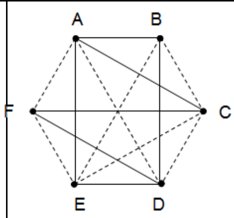
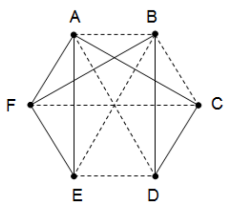
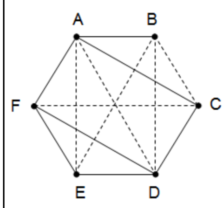
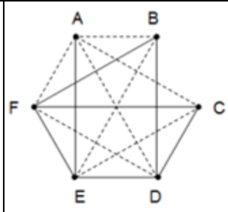
「梯形法」也是前面 4 條線連成一個封閉的四邊形，四邊形外面同樣是剩下 2 個點。所以，「梯形法」或許也能讓使用者容易獲勝。（見圖十三）



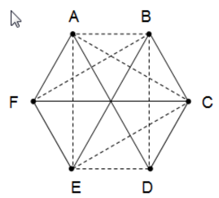
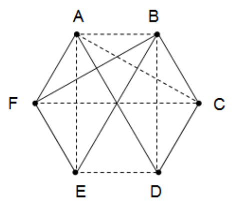
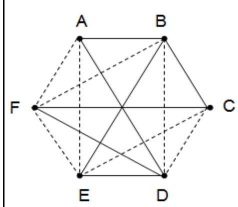
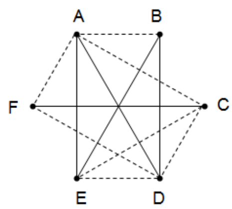
(圖十三)六點時「梯形法」的連線分析圖

我們接下來便測試先者或後者在不理會對方使用的策略下，採用「梯形法」來和對方的其他策略對戰，看看結果會如何（表十三、表十四）。

（表十三）六點時先者使用「梯形法」來對戰(先者實線、後者虛線)

後者策略	無限法		無限法		沙漏法		沙漏法		沙漏法	
圖例										
對戰歷程	先	後	先	後	先	後	先	後	先	後
	AB	***AF***	AB	***EF***	AC	***AB***	AB	***AD***	BD	***CE***
	BD	***EF***	BD	***AF***	AE	***BE***	AC	***AE***	BF	***BE***
	AC	***BE***	AC	***AD***	AF	***DE***	AF	***BC***	CD	***AC***
	DE	***BC***	DE	***CD***	BD	***AD***	CD	***CF***	CF	***AB***
	AE	***CD***	AE	***BC***	BF	***BC***	DE	***BE***	EF	***AF***
	DF	***CF***	DF	***BE***	CD	***CF***	DF	***BD***	DE	***AD***
	CE		CF	***CE***	EF		EF		AE	***DF***
贏方	***後者***		先者		***後者***		***後者***		先者	

（表十四）六點時後者使用「梯形法」來對戰(先者實線、後者虛線)

先者策略	無限法		無限法		沙漏法		沙漏法	
圖例								
對戰歷程	先	後	先	後	先	後	先	後
	AD	***AB***	AD	***CF***	CF	***AE***	CF	***AF***
	BE	***BD***	BE	***AB***	AB	***BD***	AE	***AC***
	CF	***DE***	BC	***DE***	DE	***CE***	BD	***CE***
	BC	***EA***	AF	***BD***	AD	***CD***	AD	***DF***
	CD	***AC***	CD	***AE***	BE	***EF***	BE	***AB***
	EF	***BF***	EF	***AC***	BC	***BF***	BC	***DE***
	AF	***CF***	BF		DF	***AF***	EF	***CD***
贏方	先者		***後者***		先者		***後者***	

【研究發現】

從表十三和表十四的結果，可以發現：六點時，不管是先者或後者使用「沙漏法」、「梯形法」、或「無限法」，都沒有絕對的輸贏。

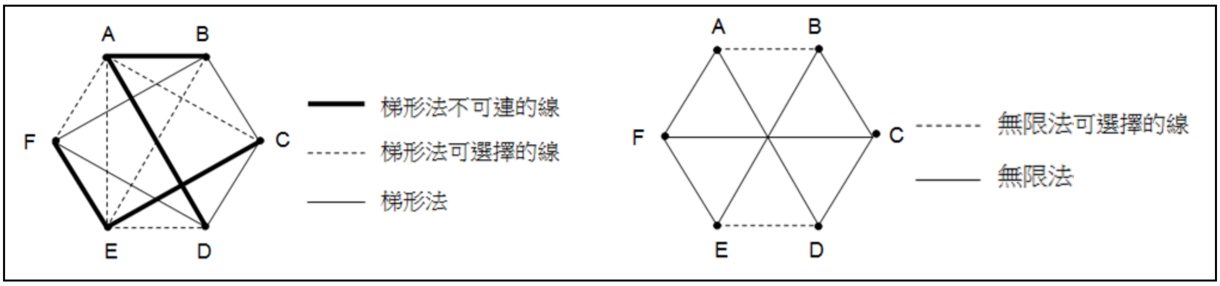
【討論】

(1)使用「梯形法」要如何才能確保獲勝？

如圖十四左的分析圖：假設先不考慮對手的連線，一方若使用「梯形法」，前 4 條線連出梯形之後，在梯形之外會還有 2 個點。構成梯形的 4 個點之間，不能再連線，

因為這樣會形成三角形。所以能額外再連的直線，都是由梯形外面 2 個點所連出來的線。因為梯形外面的 2 個點，共可以連出 10 條直線，其中有 5 條是不會輸的線，會被對方剛好佔用掉的機會是一半，5 條不會輸的線，最多只需要再連 4 條就好，所以還是有很大的機會可以獲勝！

所以使用「梯形法」時，在梯形之外，還要確保在梯形外面的 2 個點，各自只能和梯形裡的 2 個點相連，並用一條線把梯形外面的 2 個點連起來，這樣就有很機會可以贏對方了。



(圖十四)六點時「梯形法」與「無限法」的連線分析圖

(2)使用「無限法」要如何才能確保獲勝？

「無限法」的封閉圖形，是由 2 個沙漏所組成，封閉圖案占了 6 個點、6 條線，除了連中間一條(第 7 條)之外，還有 2 條不會輸的路，總共有 9 條不會輸的線。而每個人最多能畫 8 條線，無限的封閉形狀之外，3 條可以連的線，最多只要再連 2 條就好。所以使用「無限法」也有很大的機會可以獲勝。當然前提還是：可以選擇的 3 條路，沒有被對手先佔用掉。

(3)「沙漏法」、「梯形法」或「無限法」是否可以延伸到點數更多的遊戲中？

觀察比較「沙漏法」、「梯形法」或「無限法」這三種策略，我們發現：這三種方法都具有一個封閉圖形。

「沙漏法」和「梯形法」是用 4 個點連出來的 4 條線來形成封閉圖形。在此封閉圖形之外的點，都可以和封閉圖形 4 個點中的 2 個點相連 2 條不會形成三角形的線。且封閉圖形之外的點如果在 2 點（含）以上時，彼此之間還存在有可以互相連接而不會形成三角形的直線。所以 N 點使用「沙漏法」和「梯形法」可供玩家選擇的直線數，可用下面的公式算出來：4+（N-4）× 2+（N-4-1）；其中（N-4）是封閉圖形外面的點數，(N-4-1)是封閉圖形外的點彼此間可以相連的直線數。

而「無限法」的封閉圖形是用 6 個點連出來 6 條線來形成封閉圖形。此封閉圖形中還可以再連出 3 條不會形成三角形的線。當點數大於 6 點時，封閉圖形之外的點，都可以和此封閉圖形中的 3 個點相連而不會形成三角形。如果在封閉圖形之外還有 2 點（含）以上時，彼此之間還存在有可以互相連接而不會形成三角形的直線。所以 N 點使用「無限法」至少可以連出供玩家選擇的直線數，可用下面的公式算出來：6+（N-6）× 3 +（N-6-1）。其中（N-6）是封閉圖形外面的點數，(N-6-1)是封閉圖形外的點彼此間至少可以相連的直線數。

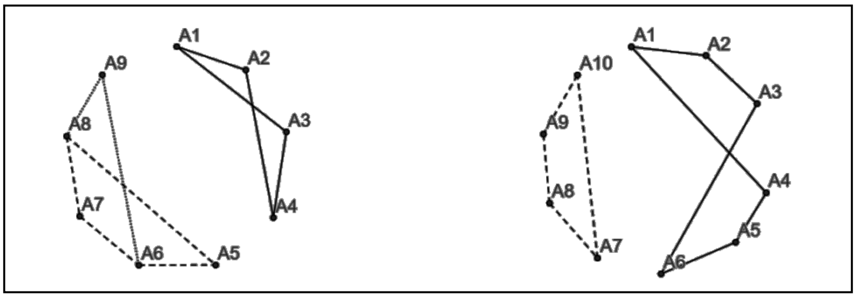
依照上面得到的公式，我們可以算出六點以上使用「沙漏法」、「梯形法」或「無限法」等策略，至少可連出幾條不會形成三角形的直線數。（見表十五）

（表十五）三種策略至少可連出供玩家選擇的直線數

策略名稱	公式	六點	七點	八點	九點	十點
沙漏法、梯形法	封閉圖形直線數+(點數-封閉圖形點數)×2+(點數-封閉圖形點數-1) ＝4+（N-4）× 2+（N-4-1）	9 條	12 條	15 條	18 條	21 條
無限法	封閉圖形直線數+3+(點數-封閉圖形點數)×3+(點數-封閉圖形點數-1) ＝9+（N-6）× 3 +（N-6-1）	9 條	12 條	16 條	20 條	24 條
每人最多可連直線數	＊N 點時兩人可連總直線數最多為：N ×(N-1)÷ 2。 ＊當總直線數為奇數時，先者最多可連直線數為：[N ×(N-1)÷ 2+1]÷ 2，後者少 1 條 ＊當總直線數為偶數時，每人最多可連直線數為：N ×(N-1)÷ 2 ÷ 2＝N ×(N-1)÷ 4	8 條	11 條	14 條	18 條	23 條

從表十五可以發現到：依照我們推得的公式來計算，不管是「沙漏法」、「梯形法」或「無限法」，在不超過八點的情形下，至少都可有大於每個人最多可連的直線數來供玩家選擇。代表這三種策略在點數不超過八點時，都可以讓玩家有很大的機會不形成三角形而獲勝。

在九點時，「沙漏法」和「梯形法」至少可以連出不形成三角形的直線總數，等於每人最多可連直線數，看似很容易輸；當十點時，「沙漏法」、或「梯形法」可供選擇的直線數，看似少於每人最多可連直線數。其實並非如此，而是我們原本的公式所推算的直線數是「至少」的可供選擇直線數，沒有算出真正的可供選擇直線數。



(圖十五)九點沙漏法（左）和十點無限法（右）外面的點彼此可以相連的直線（虛線）

「沙漏法」和「梯形法」在(N-4) ＞3 時，也就是 N＞＝8 點時，封閉圖形外的(N-4)個點，除了每個點都可以和封閉圖形各連兩條線之外，封閉圖形外的(N-4)個點，彼此可以相連出不形成三角形的直線數，不只是（N-4-1）條而已。如圖十五左所示：除了可以把這些點用外圍連線法連成一圈、連出(N-4)條線之外，還可以跟相隔 2 點以上的點相連，也不會形成三角形。之後每再增加一個剩餘的點，就至少可再多增加 2 條線：跟前一點相連一條線，以及跟相隔 2 點以上的點多連一條線。十點的情況亦是如此。所以，並非「沙漏法」和「梯形法」不適用於九點以上，而是我們的公式還需要修改。

同理，如圖十五右所示，「無限法」的可連線總數計算公式，當 N-6＞＝4，也就是 N＞＝10 點時，無限形狀封閉圖形外面的(N-6)個點，一樣可以再相連出(N-6)條線、形成一個不會形成三角形的封閉圖形。之後每再增加一個剩餘的點，就至少可再多增加 2 條連接無限圖形外面各點的線：跟前一點相連一條線，以及跟相隔 2 點以上的點多連一條線。所以無限法在十點以上，計算公式也應該要再做調整。

綜合以上，可以得出：當點數不超過十點時，「沙漏法」、「梯形法」和「無限法」，都可以讓玩家有很大的機會不形成三角形而獲勝。不過上面可供選擇的連線數計算公式，隨著點數的增加，不能計算到最接近真正可供選擇的直線數，我們決定再繼續研究，看看找到更適合的計算公式，並更簡化這些適用策略。

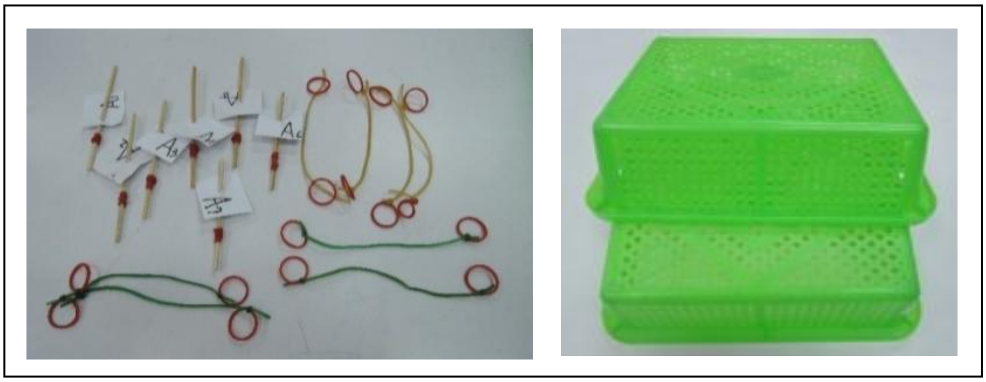
三、探究各種最佳對戰策略的共通性

雖然我們已經找到可以 4～6 點的最佳對戰策略，並計算出至少可連出幾條不形成三角形的直線來供玩家選擇。但是為了繼續探尋這幾種最佳對戰策略背後，有什麼共同的數學性質，簡化對戰時所要掌握的要領和計算連線數公式，所以我們請數學教授來提供建議，指導我們進一步研究的方向。

教授教導我們認識「等價圖形」的概念：「原本看似不同的圖形，在不改變各點相連的直線下，僅是改變點的排列方式，就可以變成一樣的圖形，這些圖形就是『等價圖形』，會具有相同的性質。」我們接下來便展開進一步的研究，將各種適用策略轉化成「等價圖形」。

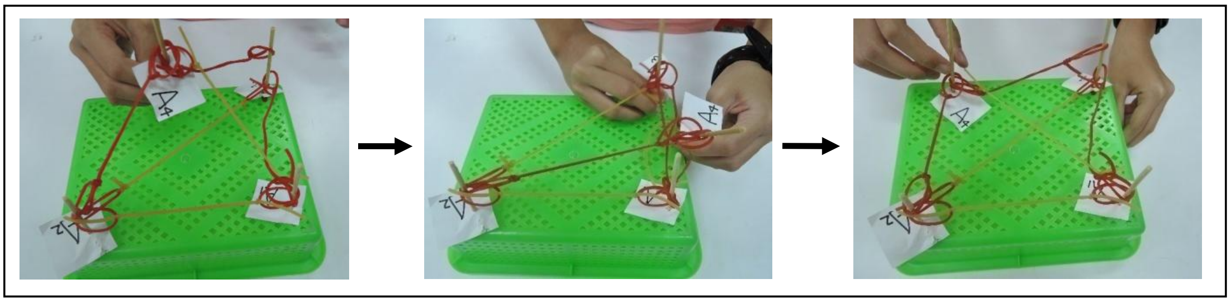
(一)利用模型操作找出等價圖形

為了更容易看到將點的位置變換之後，原本連接的直線會變化出怎樣的圖形，我們利用竹籤來代表點、橡皮筋來代表兩點之間的連線，剪一些小紙片，在上面寫上 A_1、A_2、A_3…，再將紙片穿在竹籤上，標示竹籤所代表的點（參見圖十六左）。再用兩個底部有許多小洞的置物籃疊在一起當作固定竹籤的底座，讓竹籤能更穩固的插入置物籃底部的孔洞（參見圖十六右）。



(圖十六)研究等價圖形的模型用具

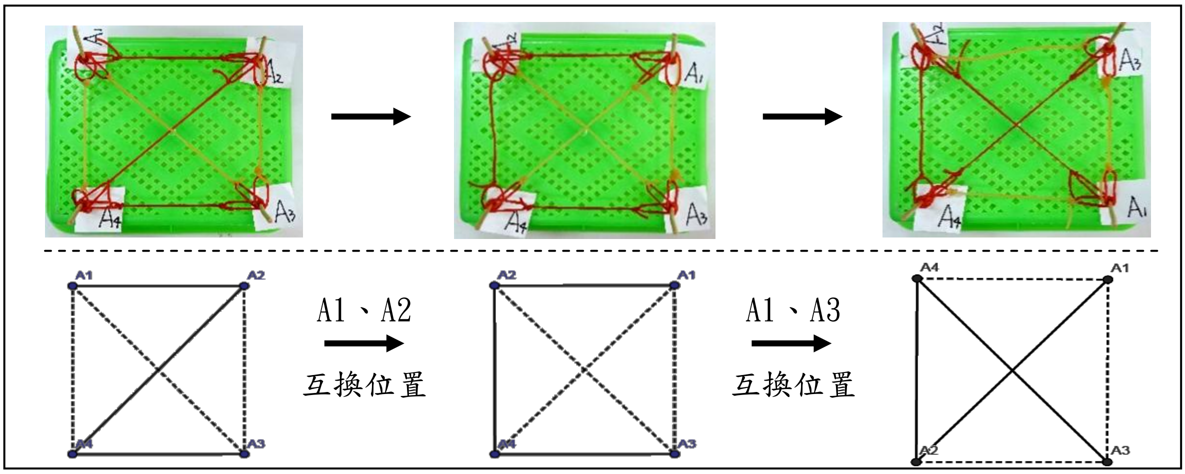
進行連線圖形的「等價圖形」研究時，把置物籃底部朝上，將竹籤當作凸多邊形的頂點、連同紙片插入籃子底部的孔洞中，用兩種不同顏色的橡皮筋當雙方對戰的直線，套在竹籤上，排成雙方對戰結果或是要研究的策略圖形。當要變化點的排列順序、觀察連線圖形的變化時，只要把點(竹籤)以及套著的橡皮筋一起移動位置，可以輕鬆尋找這些對戰結果或策略圖形的等價圖形。（參見圖十七）



（圖十七)研究等價圖形的模型操作方式

1.四點適用策略的等價圖形

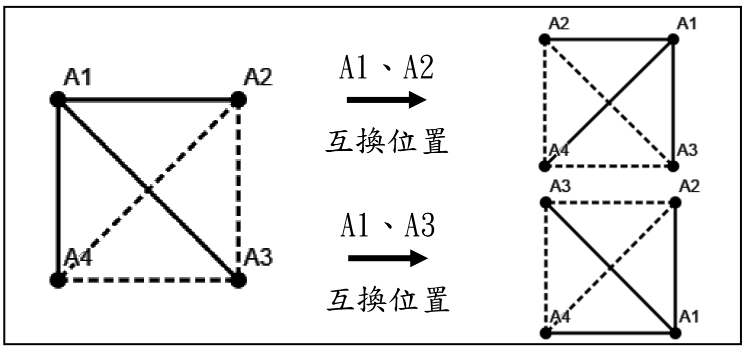
我們發現在四點平手時，雙方的連線圖形，共有三種類型：Z 字形、U 字形、及ㄡ字形。我們便利用模形來模擬其中一種圖形，再把其中兩個點的排列位置互相交換，觀察這些圖形是否是等價圖形（如圖十八上半所示）。結果發現：Z 字形、U 字形、ㄡ字形，都可以互相變化（如圖十八下半所示），是本質相同的等價圖形。



（圖十八)四點平手圖形可互相變換（左：Z 字形、中和右：U 字形和ㄡ字形）

仔細觀察這三種可以互相變化的圖形，都具有下面共通特性：它們都可變成如圖十八下半中圖實線所顯示的「外圍連線法」（因為每人只能連三條而少一條線），三條線、一筆畫經過 4 個點。所以當原本打算使用其中一種策略遭到阻擋的時候，就可以變化成另一種會經過其他還沒有連到的點的一筆畫圖形，而保持不會輸掉。

而四點時的最佳對戰策略——「同點連線法」，以及所導致輸掉的三角形連線，不管怎樣變換點的排列方式，都不會改變連線圖形（如圖十九所示）。



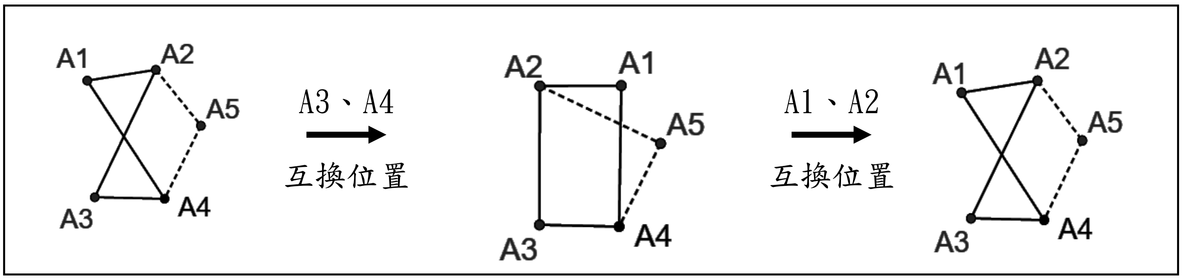
（圖十九)先者獲勝與後者輸掉時的連線情形

仔細觀察圖十九，獲勝的「同點連線法」不管怎樣變換點的排列方式，雖然和平手的「同點連線法」一樣，都是用 3 條線、連接 4 個點，但是卻無法一筆畫畫完。而連成三角形的必輸圖形，所具有的特性為：一筆畫路線經過 3 個點、連出 3 條線、形成一個三角形的封閉圖形。

所以，如果先者要贏的話，就要將三條線都從同一個點畫出去、連到另外 3 個點，形成不能一筆畫畫完的圖形。而後者要達到不會輸的情況的話，就必須遵守以下條件：1. 畫出一筆畫路線的圖形；2. 三條線要經過四個點；3. 可畫出「外圍連線法」的等價圖形（如圖十八所示）：Z 字形、U 字形、ㄡ字形。雙方要避免輸掉的話，則是要避免在 3 個點之間畫出 3 條線、形成一個三角形的封閉圖形。

2. 五點適用策略的等價圖形

我們將五點的最佳策略「沙漏法」和「梯形法」，運用等價圖形的操作模型連出來，將其中兩點的位置交換後，觀察是否是等價圖形。結果發現（參見圖二十）：連成「沙漏法」的四個點中，不管將哪兩個點互相交換，都會變成「梯形法」；反之，連成「梯形法」的四個點中，不管將哪兩個點交換，也都會變成「沙漏法」。所以，「沙漏法」和「梯形法」為等價圖形，會具有相同的性質。



(圖二十)梯形法和沙漏法可以互相變化

仔細觀察兩種圖形都具有下列的共通性質：(1)都是一筆畫路線；(2)都是異奇偶點相連：奇數點與偶數點相連、偶數點與奇數點相連；(3)都有一個由 4 條線、連接 4 個點所構成的封閉圖形；(4)封閉圖形外的 1 個點，都運用跳點的方式來與封閉圖形上的點相連。所以在封閉圖形上被連到的兩點，是同奇偶性的點。

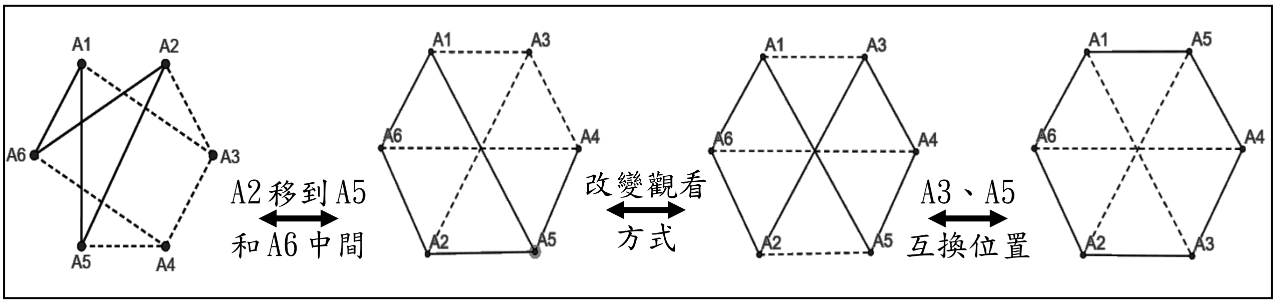
所以，當使用其中一種策略遭到對方阻擋時，可依據上面的共通性質，去轉換成另一種策略來把握住容易獲勝的機會。。

2. 六點適用策略的等價圖形

在六點適用的策略共有三種類型：「沙漏法」、「梯形法」、及「無限法」。我們先使用模型排出「沙漏法」連出最多條線的情形，再試著把其中的兩點互相交換看看能否變化出其他策略的圖形。結果如下頁圖二十一所示：「沙漏法」、「梯形法」、「無限法」以及「外圍連線法」，都可以互相變化，代表這些策略連出來的圖形都是本質相同的等價圖形。

仔細觀察圖二十一的「梯形法」、「沙漏法」、「無限法」和「外圍連線法」，可以發現到，這些圖形都具有下列共通的性質：(1)一筆畫路線；(2)異奇偶性的點相連；(3)用 6 條線連接 6 個點、連出一個封閉圖形。所以當使用其中一種策略遭到阻擋時，可

以依據上述這些共通特性，來變換成另一種策略來把握住容易獲勝的機會。



(圖二十一)六點時的沙漏法(左)、梯形法(中)、無限法(右)和外圍連線法可以互相變化

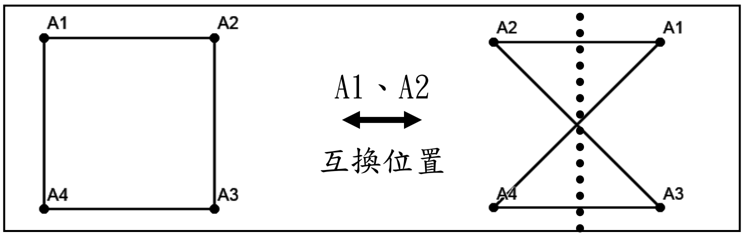
(二)從點的奇偶性分析最佳對戰策略

我們在前面所發展出來的最佳對戰策略：「沙漏法」、「梯形法」、「無限法」和「外圍連線法」，都具有一個封閉圖形。而這些封閉圖形都可以由一筆畫路線，來一一連接構成封閉圖形的所有頂點。我們可以依照一筆畫所經過的路線，將封閉圖形的各點，依序加以編號而分成兩類：奇數點和偶數點。當總點是偶數時，和奇數點相鄰的兩點一定都是偶數點，和偶數點相鄰的兩點一定是奇數點。

接下來，我們便用奇數點和偶數點的觀點來，分析各種點數適用策略不會形成三角形的連線方式，具有什麼共通性。

1. 四點構成的封閉圖形

由四點所構成的策略圖形有「梯形」（圖二十二左）與「沙漏形」（圖二十二右）這兩種封閉圖形，都等價於「外圍連線法」。沿著凸多邊形的外圍，任意選擇一個點當作起始點，依序將每個點編號成 A1～A4，共有 2 個奇數點、2 個偶數點。再依照編號的奇偶性來調整各點的排列位置，分為奇數區與偶數區、排成兩列（見圖二十二右）。此時可以發現到：奇數點都只和偶數點相連、偶數點也都只和奇數點相連。



(圖二十二)四點構成的封閉圖形改變點的排列位置變化情形

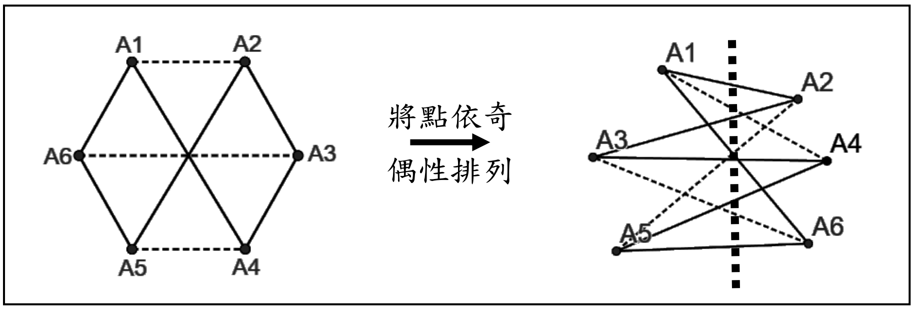
因為奇數點有 2 點，偶數點有 2 點，以奇數點只能和偶數點互相連接的方式，所能連出的直線總數為：2×2＝4。所以四點構成的封閉圖形，最多可連出 4 條不形成三角形的直線，來供玩家選擇。

不過，在四點的遊戲中，每位玩家最多只能畫出 3 條線，所以只要把握「將點區分奇偶性，只能連接異奇偶性的點」這個原則，也就是「連接異奇偶點」的方式，就可以確保自己不會畫出連成三角形的線了！

2. 六點構成的封閉圖形

因為六點時的最佳策略，不管是「沙漏法」、「梯形法」和「無限法」，都是「外圍連線法」的等價圖形。我們就用由六點所構成的封閉圖形—「無限法」來分析連線方式和點的奇偶性有什麼關係。

沿著無限法封閉圖形的外圍，任意選擇一個點當作起始點，依序將每個點編號 A1～A6（見圖二十三左）。再把各點依照編號的奇偶性來調整排列位置，分為奇數區與偶數區、排成兩列，則奇數區與偶數區各有三點（見圖二十三右）。此時可以發現到：奇數點都只和偶數點相連、偶數點也都只和奇數點相連，這種連法並不會形成三角形。



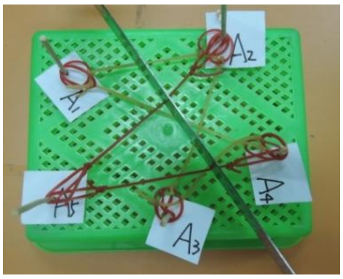
(圖二十三)將六點的無限法（左）依照各點奇偶性重新排列

如果在六點時，使用「連接異奇偶性的點」來畫線的話，因為奇數區的點只能連到偶數區的點，所以從奇數區任一點的角度來看可連直線數，則任一個奇數點最多能連的直線數是偶數區的點數。所以把「奇數區的點數」乘以「偶數區的點數」，就會是可供一方玩家選擇不會輸的直線數。依照上述計算方式，我們可推算出六點時一方玩家最多可選擇連線的線數量是 3×3＝9 條直線。而在六點時每人最多可連 8 條線，所以使用「連接異奇偶性的點」來畫線，可以提高玩家不連成三角形而獲勝的機會。

3. 封閉圖形外的點的奇偶性

五點的最佳策略「沙漏法」和「梯形法」，會有一點出現在封閉圖形之外。前面我們已經發現這兩種策略是等價圖形，我們便只用模型排出「沙漏法」，來研究相連各點的奇偶性。

如圖二十四所示：先將封閉圖形的 4 點，依照一筆畫路線的順序加以編號，在封閉圖形外的點則列為最後 1 點，這樣可將各點分為兩類：奇數點和偶數點。仔細觀察連線方式，可以發現到同樣會符合「奇數點都只和偶數點相連、偶數點也都只和奇數點相連」的原則。



(圖二十四)五點沙漏法奇偶點的排列與連線方式

因為五點時，可以把點分成 3 個奇數點、2 個偶數點，依據「連接異奇偶點」的原則，共可連出 3× 2＝6 條不形成三角形的線供玩家選擇。而每人最多只能連出 5 條

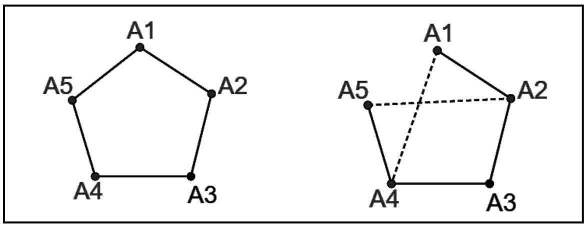
線，只要能符合「連接異奇偶點」的原則來連線，就能讓玩家有獲勝的優勢。

4.為何最佳策略沒有奇數點所構成的封閉圖形？

我們所發現具有封閉圖形的適用策略，都是4點或6點來構成封閉圖形，也都等價於「外圍連線法」。當五點時，最佳策略還是以4點構成的封閉圖形為基礎，保留一個點留在封閉圖形之外，而不是由5個點所形成的「外圍連線法」。這讓我們好奇：五點時，如果採用「外圍連線法」來將全部的點連成一個封閉圖形，最多可以連出幾條線？

我們發現：五點時，以一筆畫路線來構成封閉圖形（如圖二十五左），依序將經過的點加以編號，則奇數點有3點，偶數點有2點，且 A_1 和 A_5 會是同奇偶點相連。當 A_1 和 A_5 相連之後，接下來不管連哪一條線都會形成三角形而輸掉，此時只能連出5條不連成三角形的線。如果 A_1 不和 A_5 相連的話（如圖二十五右），就可以將所有異奇偶性的點互相連接，而連出6條不會形成三角形的線。

所以，對戰時若要形成封閉圖形，最好要用偶數點來形成封閉圖形，且依據「異奇偶性的點才可以相連」的方式來連線。

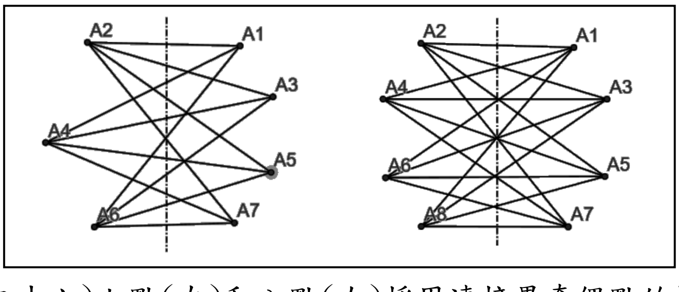


(圖二十五)五點用外圍連線法（左）與異奇偶點連線(右)的連線情形

5.延伸應用到更多點數的連線策略並計算最多可連直線數

從前面的研究，我們發現六點（含）以內的要連出最多不形成三角形的最佳對戰策略，都符合「連接異奇偶性的點」的原則，所以我們可以將這個原則當成最佳連線策略，延伸到更多的點數，並計算是否能讓玩家具備獲勝的優勢。

七點時（如圖二十六左所示）：七點為奇數，將各點加以編號後，可分成4個奇數點與3個偶數點。因為必須連接異奇偶性的點，所以奇數區的任一點最多可連3條線到偶數區的3個點。所有的奇數區總共有4個點，乘以各點可連3條線，就可以知道七點時，採用「連接異奇偶性的點」的最佳策略，最多共能連出4（奇數點數）×3（偶數點數）＝12條不會形成三角形的直線。而七點時，一個玩家最多可連的直線數為11條，所以採用「連接異奇偶性的點」的策略，可以提高玩家獲勝的機會。



(圖二十六)七點(左)和八點(右)採用連接異奇偶點的情形

八點時（如上頁圖二十六右所示）：八點總點數為偶數，將各點編號，可以分成4

個奇數點與 4 個偶數區。採用「連接異奇偶性的點」的最佳策略，可從奇數點的角度來看，任一奇數點最多可連的直線數，剛好是等於偶數點的數量。所以採用「連接異奇偶性的點」的連線策略，最多共能連出 4（奇數點數）×4（偶數點數）＝16 條不會形成三角形的直線。而八點時，一個玩家最多可連的直線數為 14 條，所以採用「連接異奇偶性的點」的策略，可以提高玩家獲勝的機會。

將上面的計算方法，可延伸至 N 點時採用「連接異奇偶性的點」的策略，可以連出供玩家選擇的直線數，計算公式如下：

(1)總點數 N 為奇數時，可供選擇的連線數：$(N+1)\div 2\times(N+1)\div 2=(N+1)\times(N+1)\div 4$，

(2)總點數 N 為偶數時，可供選擇的連線數：$N\times N\div 4$

依據表十五得到的計算每人最多可連直線數公式：

(3)當 N 點總連線數 $N\times(N-1)\div 2$ 為奇數時，先者最多可連直線數＝$[N\times(N-1)\div 2+1]\div 2=N\times(N-1)\div 4+0.5$

(4)當 N 點總連線數 $N\times(N-1)\div 2$ 為偶數時，每人最多可連直線數＝$N\times(N-1)\div 4$

比較「連接異奇偶性的點」連出供玩家選擇的直線數(1)和(2)的值，都大於每人最多可連直線數(3)和(4)的值，所以「連接異奇偶性的點」的連線策略可以適用於 N 點的對戰遊戲。

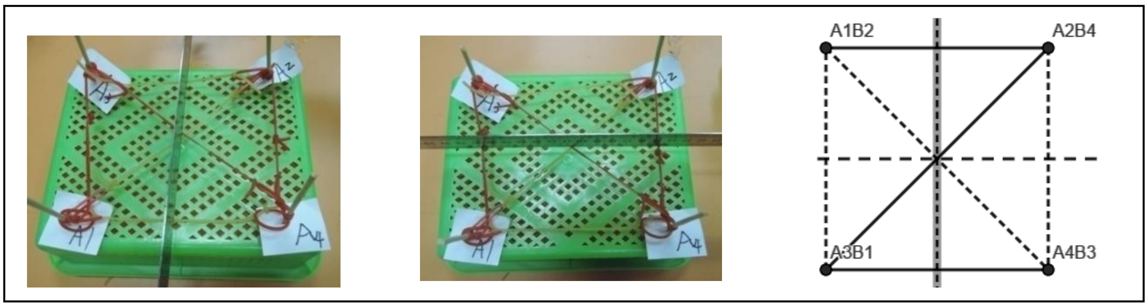
四、雙方對戰時的策略運用與調整

雖然在前面的研究，我們找到四點到六點的適用策略，以及可以延伸到 N 點的最佳對戰策略—「連接異奇偶點」。但是在實際的對戰中，有可能遇到對手的阻擋或佔用掉自己原本可以連的直線，而無法順利執行各自選定的策略。在對戰過程中要如何因應對方的連線，而做適當的調整？要如何避免會讓自己輸掉？我們接下來便去回顧前面的對戰實例，找出雙方對戰歷程中，到底是如何思考、分析情勢的？找出決定雙方輸贏的重要關鍵，以作為實際對戰時雙方互動調整的參考。

(一)四點時雙方互動的最佳對戰策略

四點時會平手的圖形有：Z 字形、U 字形、和ㄡ字形，都是等價圖形。我們便利用 Z 字形的對戰結果，來分析雙方在對戰時是否有利用到「連接異奇偶點」的連線原則。

如圖二十七左與中的模型為例，雙方均是採用 Z 字形。對照圖二十七右來分析雙方的連線方式：其中 A 玩家的各點排列順序為：A1～A4，B 玩家的各點排列順序：為 B1～B4。



(圖二十七)四點平手時雙方的奇偶點切分方式

圖二十七左顯示出 A 玩家的奇偶點切分法（左邊是奇數點、右邊是偶數點）；圖二

十七中間的照片則顯示出 B 玩家的奇偶點切分法（上面是偶數點、下面是奇數點）。可發現到兩位玩家都有符合「連接異奇偶點」的連線原則、都未形成三角形，而導致平手的結果。

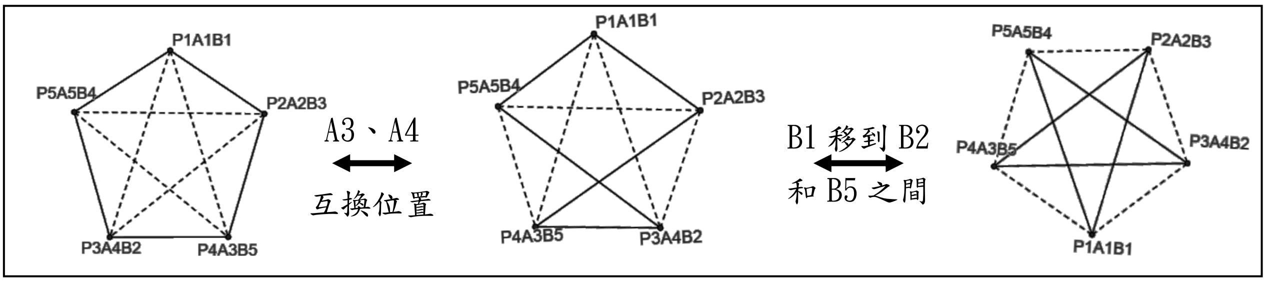
在前面已經討論（見圖十九）得知先者要贏的話，就要將三條線都從同一個點畫出去、連到另外 3 個點，形成不能一筆畫畫完的圖形，並不完全符合「連接異奇偶點」的原則。後者輸的時候，3 條線連接 3 個點，也是不完全符合「連接異奇偶點」的原則。

所以四點對戰時，先者要贏的話，就不用去管「連接異奇偶點」的原則，只要都從一個點連到其餘的點即可。但是後者因為無法獲勝、想要確保自己不輸而平手的話，一開始的兩條線，就必須先占到四個點（2 奇、2 偶），才能確保不會輸。

經過我們實際對戰、測試雙方的互動調整結果，發現到：後者只要在前兩步能和先者的第一條線相連接，阻擋掉先者使用同點連線法，並達成兩條線經過 4 個點的原則，就一定會是平手的結果。

(二)五點時雙方互動的最佳對戰策略

我們發現在五點對戰時，出現圖七的「魚形」會導致雙方平手的結果。所以進一步分析這種平手的局面(如圖二十八)，觀察雙方的連線圖形可以轉化成怎樣的等價圖形。



(圖二十八)五點平手時雙方連線圖形都可變成外圍連線法

結果發現：會導致平手的魚形，以及另一位玩家所連出的虛線圖形（出現一個山形的尖峰），兩者都是「外圍連線法」的等價圖形。仔細觀察這些圖形的連線特性，都是一筆畫經過五點的封閉圖形，且都具有互不阻擋對手連出「外圍連線法」的特性。當一方連完外圍連線法時，剩下的直線剛好會連成五角星形，這也是「外圍連線法」的等價圖形。所以在五點時，雙方都使用「外圍連線法」，可以形成平手的局面。

這種連線方式，雖然有一條線會不符合「異奇偶數才能互相連接」的原則，而不能連出五點最多可連接的 6 條不形成三角形的線，但是在五點時，每人最多只能連 5 條線，所以實際上並不會對每個人最多可連的直線數造成影響。不過這樣只能確保自己不會輸，並讓對手也會連出「外圍連線法」而得到平手的結果。

在雙方對戰的時候，如果想要求勝的話，最好還是採用「連接異奇偶點」的策略，依序連接 4 點、用 4 條線形成封閉圖形，這樣子每條線會均是連接異奇偶性的點。再將封閉圖形外的第 5 點，運用跳點的方式連接到封閉圖形上同奇偶性的兩點，形成「沙漏法」或「梯形法」的策略圖形，這樣會有 6 條不形成三角形的線可供選擇。連接其中的 5 條時，如果能兼顧阻擋對方外圍連線法的話，就可以得到獲勝的機會。

(三)六點時雙方互動的最佳對戰策略

我們找出前面對戰例子，原本應該佔有優勢的先者最後卻輸掉的例子，來分析在

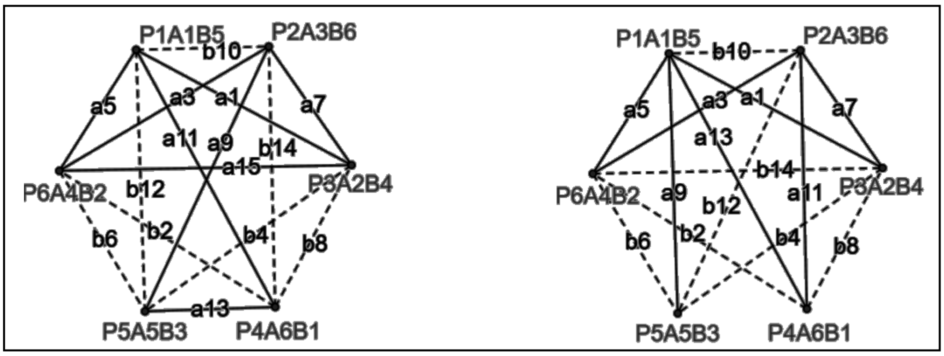
雙方對戰歷程中，是否因為在哪一步出錯才輸掉？有沒有可能翻轉局面？以便找出雙方實際在對戰時有沒有絕對的優勢方，以及最佳互動策略。

1. 先者「沙漏法」輸掉後者「沙漏法」（見表十二第 4 例）

經過我們逐步分析（見表十六）表十二第 4 例的對戰歷程，發現先者（實線）是因為在第 9 步連錯線，才會連出三角形而輸掉（見圖二十九左）。經過修正第 9 步的走法，接下來沒有再走錯，結果就變成先者會獲勝了（見圖二十九右，後者是虛線）。

（表十六）先者「沙漏法」對戰後者「沙漏法」反敗為勝的走法

先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A1:P1、A2:P3	A1A2	2	指定 B1:P4、B2:P6	B1B2
3	指定 A3:P2、A4:P6	A3A4	4	指定 B3:P5、B4:P3	B3B4
5	連出沙漏	A1A4	6	連出沙漏	B3B2
7	連出沙漏	A3A2	8	連出沙漏	B4B1
9	為了阻擋後者、指定 A5:P5	A3A5	10	指定 B5:P1、B6:P2、沙漏外點互連	B5B6
11	外點連沙漏、指定 A6:P4	A1A6	12	和先者合作形成沙漏、外點連沙漏	B5B3
13	外點連沙漏	A5A6	14	外點連沙漏	B6B1
15	沒得選(剩下同奇偶性的點)	A2A4	解析：先者第 9 步走錯，連接同奇偶的點		
9	和後者合作形成沙漏	A1A5	10	指定 B5:P1、B6:P2、沙漏外點互連	B5B6
11	外點連沙漏	A3A6	12	外點連沙漏	B3B6
13	外點連沙漏	A1A6	14	沒得選(剩下同奇偶性的點)	B2B4



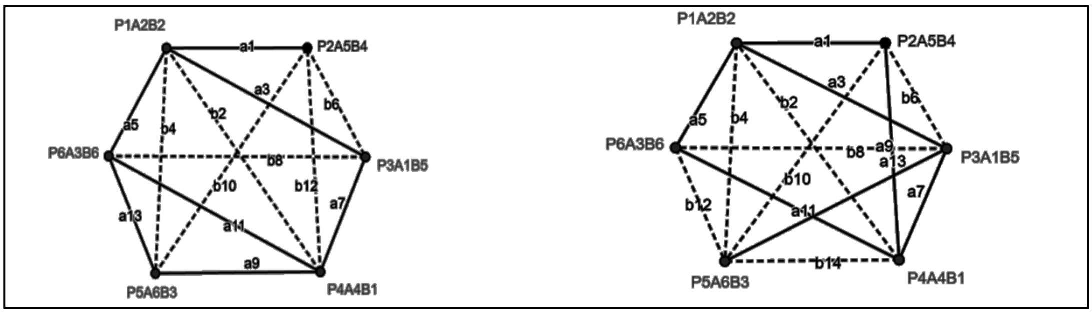
(圖二十九)雙方沙漏法對戰先者輸掉(左)修正錯誤走法變成先者獲勝(右)

2. 先者「梯形法」輸掉後者「沙漏法」（見表十三第 4 例）

從上面的例子，我們推測如果先者沒有走錯的話，後者或許根本就沒有贏的機會。所以我們再從雙方用不同策略對戰的表十三，找出是後者贏的第 4 例，分析雙方的對戰歷程，看看是否先者是否因為走錯才會輸掉。分析結果見表十七，發現到先者在第 9 步時連錯直線，把自己預設的兩個同奇偶數的點相連了，才會在第 13 步時，連任何一條線都會形成三角形而輸掉（參見圖三十左）。經過修正第 9 步的走法，先者接下來沒有再走錯，就會變成先者獲勝了（見圖三十右，後者是虛線）。

（表十七）先者「梯形法」對戰後者「沙漏法」反敗為勝的走法

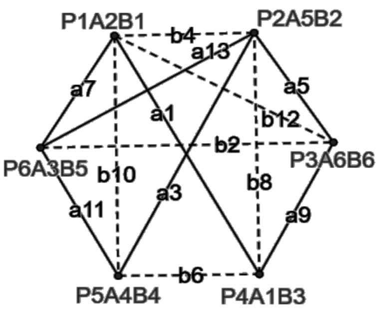
先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A5:P2，A2:P1，A5 是外點，連到梯形	A5A2	2	指定 B1:P4，B2:P1，連沙漏的線	B1B2
3	指定 A1:P3，連梯形的線	A1A2	4	指定 B3:P5，連沙漏的線	B2B3
5	指定 A3:P6，連梯形的線	A2A3	6	指定 B4:P2，B5:P3，連外點到沙漏	B4B5
7	指定 A4:P4，連梯形的線	A1A4	8	指定 B6:P6，互連外點	B5B6
9	連外點到梯形	A4A6	10	連沙漏的線	B3B4
11	連梯形的線	A3A4	12	連沙漏的線	B1B4
13	沒有不會輸的線，任意選擇一條來畫	A3A6	解析：先者第 9 步走錯，連到同奇偶性的點，其實還有幾條可連接異奇偶性點的直線，例如 A4A5、A1A6、和 A3A6。		
9	阻擋後者沙漏	A4A5	10	連沙漏的線	B3B4
11	連梯形的線	A3A4	12	外點連沙漏	B3B6
13	外點到梯形	A1A6 或 A4A6	14	連任何一條都會形成三角形而輸掉	B1B3



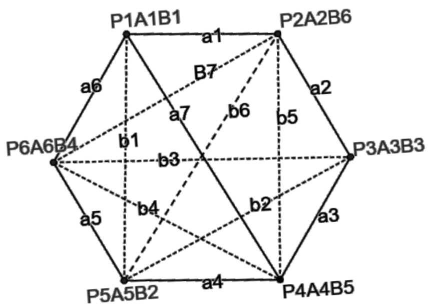
（圖三十）先者(實線)梯形法輸掉後者沙漏法(左)先者修正走法會獲勝(右)

3.先者「無限法」輸掉後者「梯形法」（見表十四第 2 例）

我們再找一個先者使用「無限法」輸給後者使用「梯形法」的例子，來觀察是否先者是因為走錯才會輸掉。經過我們逐步分析表十四第 2 例的對戰歷程(見圖三十一、下頁表十八），發現先者（圖三十一的實線）是因為太執著於要連出無限法，沒有注意到自己可以連的線已經被後者占去太多條，未能及時變化成其他較少點數的封閉圖形（例如：沙漏法），才會導致輸掉的結果。



（圖三十一)先者無限法對戰後者沙漏法



（圖三十二)雙方均採外圍連線法對戰歷程圖

（表十八）先者「無限法」輸掉後者「梯形法」的對戰歷程

先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A1:P4，A2:P1，連無限法	A1A2	2	指定 B5:P6，B6:P3，外點互連	B5B6
3	指定 A4:P5，A5:P2，連無限法	A4A5	4	指定 B1:P1，B2:P2，連梯形法	B1B2
5	指定 A6:P3，連無限法	A5A6	6	指定 B3:P4，B4:P5，連梯形法	B3B4
7	指定 A3:P6，連無限法	A2A3	8	連梯形法	B2B3
9	連無限法	A1A6	10	連梯形法	B1B4
11	連無限法	A3A4	12	外點連到梯形	B1B6
13	已經沒有不會輸的線了!	A3A5	解析：先者太固執，只顧著連完無限法，而沒有去做變換，無限法內的直線都被占走了。		

4.雙方均採「外圍連線法」及「連接異奇偶點」策略對戰結果

到目前為止的雙方對戰歷程分析，發現先者會輸都是因為連接到同奇偶性的點，或是連線時沒有觀察全盤，只注意自己一方，很容易讓對方把自己原本可以連的線給佔走了，才導致輸掉的結果。所以我們推測：如果先者沒有出錯，後者或許就沒有贏的會。

因為六點適用策略「梯形法」、「沙漏法」和「無限法」都是「外圍連線法」的等價圖形，我們接下來便讓雙方都使用「外圍連線法」，同時遵守「連接異奇偶點」原則來互相對戰，觀察是否仍會是先者較佔優勢。

經過我們逐步分析雙方的對戰歷程（見上頁圖三十二、表十九），發現到：先者可執行完外圍連線法，後者會比先者慢一步而無法連出外圍連線法，並且後者可連接異奇偶點的線也會被先者佔去，最後只剩下同奇偶性的點，因此而輸掉。

（表十九）雙方均採「外圍連線法」及「連接異奇偶點」策略的對戰歷程

先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A1:P1、A2:P2，連外圍	A1A2	2	指定 B1:P1、B2:P5，連外圍	B1B2
3	指定 A3:P3、A4:P4，連外圍	A3A4	4	指定 B3:P3、B4:P6，連外圍	B3B4
5	指定 A5:P5、A6:P6，連外圍	A5A6	6	指定 B5:P4、B6:P2，連外圍	B5B6
7	偶數點連奇數點	A2A3	8	偶數點連奇數點	B2B3
9	偶數點連奇數點	A4A5	10	偶數點連奇數點	B4B5
11	奇數點連偶數點	A1A6	12	和先者合作連成三角形	B2B6
13	奇數點連偶數點	A1A4	14	剩下的線，都會形成三角形	必輸

可見雙方若都採用「外圍連線法」、又不考慮去阻擋對方的連線時，先者會較佔獲勝的優勢。

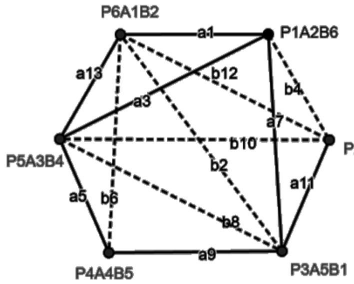
4.雙方自選策略彈性應戰

前面的對戰歷程分析結果，看起來若適當使用對戰策略，先者似乎都比後者較佔優勢。我們接著就試驗玩 6 點的對戰遊戲，雙方自由選擇對戰策略，並隨時根據對戰局面彈性調整連線策略，觀察是否先者仍會獲勝。

經過逐步記錄分析雙方的對戰歷程（見下頁圖三十三），發現到：先者原本選擇可連出最多選擇直線數的「沙漏法」，因為先者的策略太過於明顯，後者容易推測出先者

所要使用的策略，便一直阻擋先者的連線，先者便從「沙漏法」轉變為「梯形法」。但是梯形外點可以連到梯形的連線，都被後者所佔去了；同時因為猜不出對手是使用甚麼策略，所以無法阻擋對方，使得先者很快便居於劣勢。

而後者並沒有刻意選擇任一策略，也沒有刻意決定自己的奇偶數點，只是單純的阻擋先者可選擇的直線，以及選擇和先者合作會形成三角形的線，結果終於將先者逼到死路而獲勝。



(圖三十三)雙方自由變化對戰策略

由此可見，雙方在對戰時，除了注意「連接異奇偶點的原則」，選擇可以讓自己有最多不形成三角形的連線策略之外，還應該要仔細觀察對手的連線策略，小心調整自己的連線方式，最好能阻擋對手所使用的策略，優先搶占雙方都可以連接的直線。如果發現了對手佔用了會讓自己形成三角形的線，就選擇和對手接力完成三角形，這樣可避免讓自己連成三角形，因而提高自己獲勝的機會了。

(四)對先者和後者而言，各自適用哪些策略？

綜合我們的研究成果，先者與後者各自適用的對戰策略整理如表二十。

(表二十) 4 點～6 點先者與後者的適用策略及最多可供選擇的可連線數

點數	四點	五點	六點以上(含)
適用策略	1. 先者：同點連線法(會贏) 2. 後者(雙方)：外圍連線法(會平手)	1. 沙漏法(先者較優勢) 2. 外圍連線法(會平手) 3. 異奇偶點相連(提高獲勝機會)	1. 異奇偶數相連 2. 阻擋對方的可連直線 3. 與對手合作形成三角形
可供選擇的連線數	1. 同點連線法：3 條 2. 外圍連線法：4 條選 3 條	1. 沙漏法、異奇偶點相連：6 條選 5 條 2. 外圍連線法:5 條	異奇偶點相連的可供選擇直線數： →n×n÷4(當總點數為偶數) →(n+1)× (n+1)÷4(當總點數為奇數) 均大於每人最多可連線數： ▲當 N 點總連線數 N×(N-1)÷2 為偶數時，每人最多可連直線數＝N×(N-1)÷4 ▲當 N 點總連線數 N×(N-1)÷2 為奇數時，先者最多可連直線數＝N×(N-1)÷4+0.5

(五)和書籍裡介紹的策略做比較

在「趣味數學.遊戲篇」這本書中，有提到玩西蒙思遊戲有兩個技巧：「1.選擇連線

的點，盡量不要重複；2.避免從同一點連線到很多點。」書中的這兩個技巧，和我們的「避同點連線法」相同，也就是要避免使用「同點連線法」。而我們的研究發現，在4點時最好使用「同點連線法」，其他點數都不適合使用「同點連線法」。所以除了在4點的情形不同外，其他情形大致符合我們的發現。

不過，除了書中這兩個技巧（等於只是一個「避同點連線法」策略）以外，我們至少還找出了三種以上的適用策略，得到最多可以連出幾條不形成三角形的直線數計算公式，並發現到各種適用策略可以互相轉化成等價圖形，以供雙方對戰時可以彈性的互動調整變換最佳策略。

伍、結論

綜合本研究的發現，得到以下的結論：

1. 至少4點才可以玩西蒙思遊戲，各點必須排成凸多邊形的頂點，才能避免共線的情形。
2. N點時，雙方最多共可連出N×(N-1)÷2條直線。當N×(N-1)÷2為奇數時，先者最多可連N×(N-1)÷4+0.5條直線、比後者多連一條；當N×(N-1)÷2為偶數時，每人最多可連N×(N-1)÷4條直線。
3. 本研究共發展出9種對戰策略並探討其適用情形：在4點時先者使用「同點連線法」會贏，而後者使用「同點連線法」只能平手。但是在5點（含）以上並不適合使用「同點連線法」。
4. 在5點時，雙方都適合使用「沙漏法」，但是先者較為優勢。當雙方都使用「外圍連線法」時，會導致平手。
5. 各點數的適用策略，可以互相轉化成符合「連接異奇偶點」原則的等價圖形，計算可連出供玩家選擇的直線數公式：「奇數點×偶數點」條直線。
6. 適用於6點（含）以上的「沙漏法」、「梯形法」、「無限法」或是「連接異奇偶點」等最佳策略，可供玩家選擇的連線數，均大於每人最多可連直線數，可提高玩家獲勝機會。
7. 雙方對戰時，宜把握三個要領來調整最佳對戰策略：異奇偶點連線、阻擋對方的可連直線、與對方合作形成三角形。雖然先者可以比後者先走一步而較佔優勢，但是後者仍可注意觀察阻擋對手使用策略，彈性變化策略、小心布局，便能提高獲勝機會。

陸、心得

兩人的西蒙思對戰遊戲，依據我們研究出的「異奇偶點相連」原則，因為可以連出大於每人最多可連直線數、且不形成三角形的線來供玩家選擇，所以可提高玩家的勝率。我們也發展出幾種可以配合點數情況而變化的封閉圖形，這些圖形都是可互相變化的等價圖形，讓玩家能彈性變化連線方式。但是如何在對戰的情況下巧妙運用，使自己可以執行策略而不被對方發現，或是能阻擋對方連線，都是兩方玩家必須多方觀察、謹慎思考下，才能去巧妙布陣。就算我們已經熟知這些對戰策略，套用到對戰遊戲中，仍然會因為對手連線的不可確定性，而沒有絕對的優勢方，這便是西蒙思遊戲的好玩之處！

柒、參考資料

1.李國賢著、涂秀馨繪圖（2003）。趣味數學.遊戲篇。台北市：新潮社出版。

【評語】080409

西蒙思兩人對戰遊戲有好一段的歷史，已經累積不少相關研究。本遊戲的基本原型是 Ramsey Theory. 建議參賽同學不妨參考相關的文獻，並初步瞭解 Ramsey 的理論；這也是為何四個點與五個點會出現和局，而六個點以上就沒有和局的可能。本作品以多種策略來提供遊戲玩家進行對戰，但無法保證先手或後手的必勝策略，因此本研究探討還有更進一步改善的空間，雖然這部分通常非常難解。策略性對戰必然需要各種可能路徑之大筆資料的整理，本組四人的分工合作值得佳許。

作品海報

摘要

西蒙思是兩人輪流在凸多邊形的兩個頂點畫一條線，當一方自己畫的線形成三角形時，該方就輸了。研究發現：

1.至少四點才能玩西蒙思對戰遊戲。

2.N 點時，最多可連線總數為 N×(N-1)÷2 條。

3.四點時，先者成功使用同點連線法則必勝，後者應阻擋先者的同點連線法，但只能平手。五點時，雙方都適合使用沙漏法，先者優勢；雙方若都使用外圍連線法則會平手。六點（含）以上適用沙漏法、梯形法、無限法、外圍連線法、與連接異奇偶點等策略，但須巧妙應戰、適當調整策略，先後者沒有絕對優勢方。

4.各點的適用策略，都互相等價。且五點以上最佳對戰策略，均符合連接異奇偶點的原則，可連出供玩家選擇不形成三角形的直線數為：奇數點個數x偶數點個數。

5.對戰的三要領：異奇偶點連線、阻擋對方的可連直線、與對方合作形成三角形。

研究動機

「趣味數學-遊戲篇」此書中介紹了西蒙思的玩法，我們都覺得此遊戲很有趣。但是書中只介紹兩個策略且過於簡略，我們覺得未必在不同點數對戰時都適用。於是便開始研究能不能找出其他策略？不同點數的優勢方？並探討背後的數學原理。

研究目的

1. 找出不同點數時先者與後者的最佳對戰策略。
2. 比較不同點數時的優勢方分別為先者或後者，或平手。
3. 瞭解西蒙思不同狀況時，使用何種策略能使己方獲勝。
4. 探討可使用的策略與應用時機。

研究過程與方法

一、討論研究內容、確認分工，定期追蹤進度。

二、依照指定策略互相對戰，將每一場對戰歷程記錄下來。

三、討論及分析對戰結果。

四、發現規律性，提出問題與猜測，重複對戰驗證。

五、操作模型，並利用 GeoGebra 軟體變化等價圖形、探究策略共通性。

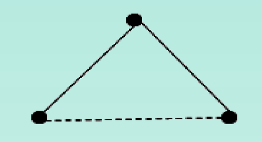
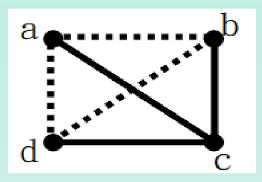
六、雙方彈性調整對戰策略，分析思路歷程。

七、做成結論，整理研究成果。

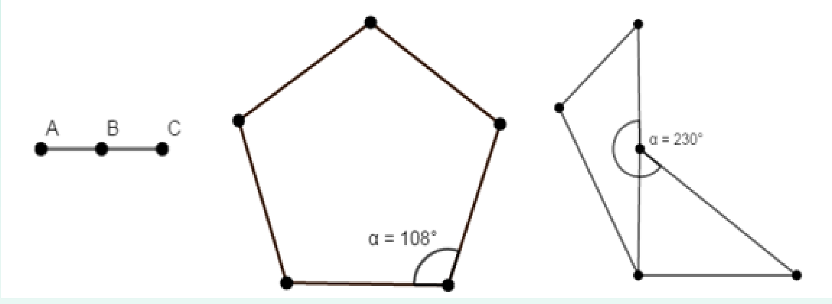
研究結果與討論

一、遊戲規則與對戰條件

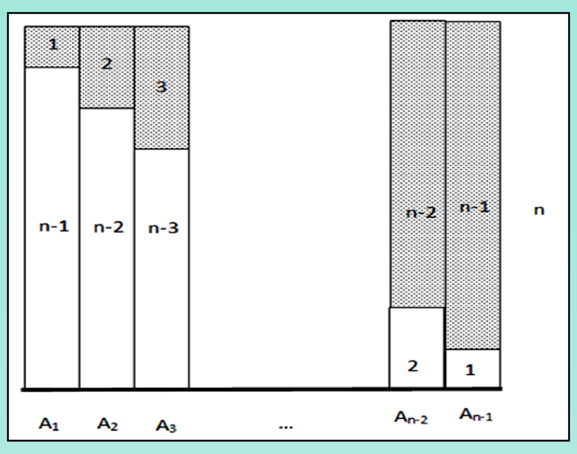
1.最少點數－4 點以上才能對戰。

點數	可連的直線數	圖例	是否可對戰
1	0		否
2	1		否
3	3		否
4	6		可

2.點的排列－成凸多邊形頂點以免共線。



3.計算頂點數（A_1～A_n點）的可連線總數：



第一種公式： n×(n-1)÷2

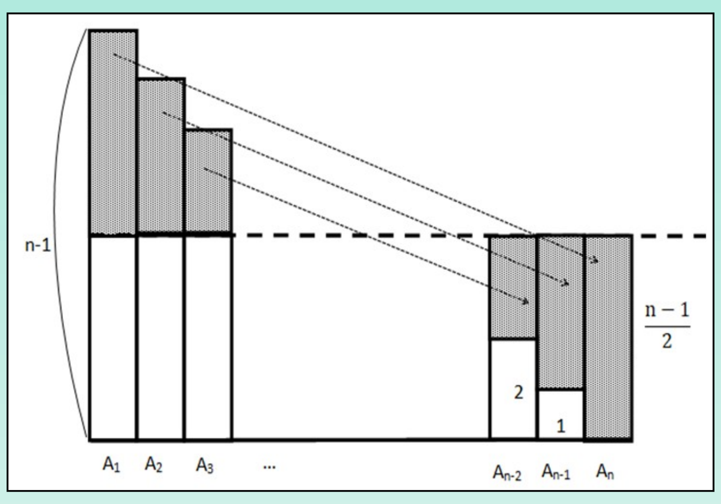
【想法 1】任一點 A_i 可以連出去的線段有 n-1 條 A_iA_j，i ≠ j。n 點共可連 n×(n-1)條直線，因為 A_iA_j=A_jA_i，所以可連線總數為 n×(n-1)÷2。

【想法 2】A_1 可以連出 n-1 條線，A_2 可以連出 n-2 條線，A_3 可以連出 n-3 條線…，A_{n-1} 可以連出 1 條線，A_n 連出 0 條線。

(A_1 可連線數+A_{n-1} 可連線數)=(A_2 可連線數+A_{n-2} 可連線數)

=…=(A_{n-1} 可連線數+A_1 可連線數)。將以上所有等式相加

= n×(n-1)，便可得出可連線總數的兩倍。



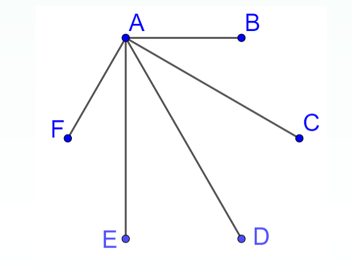
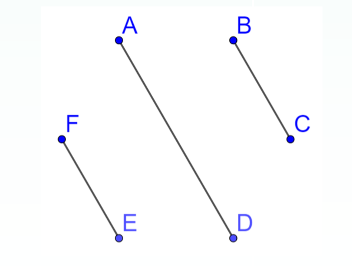
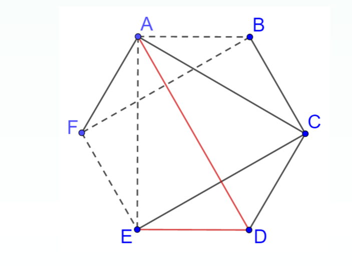
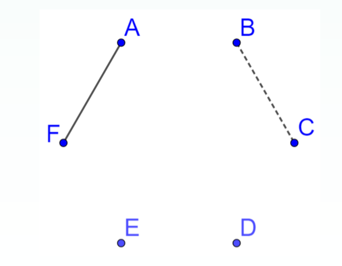
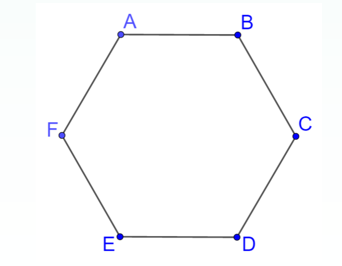
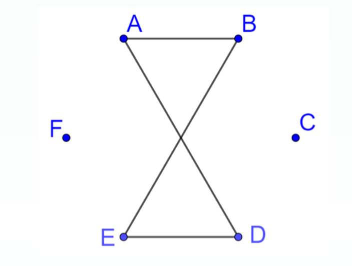
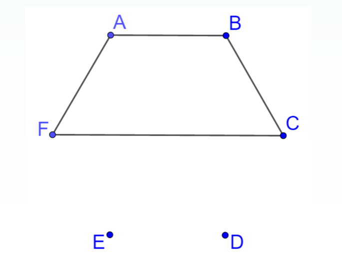
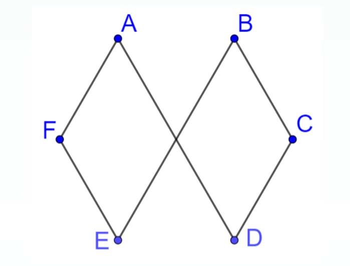
第二種公式： $\frac{(n-1)}{2}$ ×n 。

【想法】依序把全部點的可連直線都補到一樣多，此時每點的可連直線數都是 A_1 可連直線數(n-1)的一半，共有 n 個點。

4.每人最多可連直線數

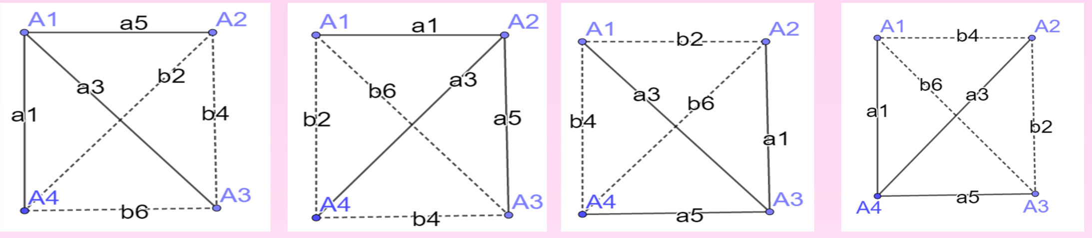
	可連線總數為偶數	可連線總數為奇數
每人最多可連直線	兩人平分 n×(n-1)÷4	平分時會餘 1，先者多一條線，先者可連[$\frac{n\times(n-1)}{2}$ +1]÷2 條直線
最後一方	後者	先者
解析	一玩家可連得最多線數為：可連線總數÷2，平分時最後一條連線為後者。	可連線總數為奇數時，總連線數÷2 會餘 1，表示兩玩家平分到最後，還會剩下一條線，所以在餘 1 時最後一條會是先者，先者最多會比後者多連一條線。

5.發展各種對戰策略

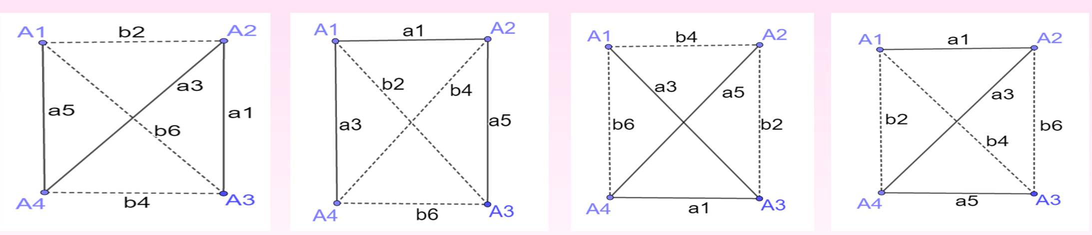
編號	1	2	3	4	5	6	7	8
策略名稱	同點連線法	避同點連線法	讓位法	對稱法	外圍連線法	沙漏法	梯形法	無限法
圖例								

二、探究各種點數的最佳對戰策略(先者實線、後者虛線)

(一)四點 **1.雙方均採同點連線法**



2.後者阻擋先者的同點連線法



發現

1.雙方均採同點連線法時，先者會贏。

2.後者阻擋先者使用同點連線法，雙方會平手。

討論

(1)從雙方可連的直線數來思考：四點的可連線總數為 6 條線，玩家各自能連 3 條線。而同一個點最多只能連 3 條線，只要一方在同一點連滿 3 條線，就不會連成三角形。此時剩下的 3 條線正好形成一個三角形。所以成功使用同點連線法的一方，必會使對手連成三角形而獲勝。

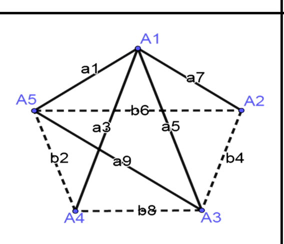
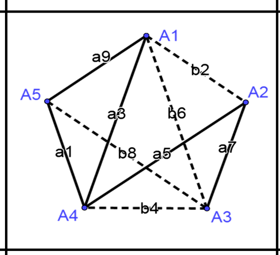
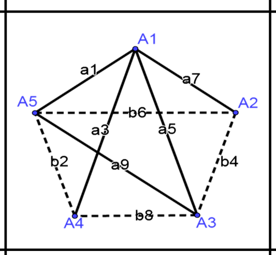
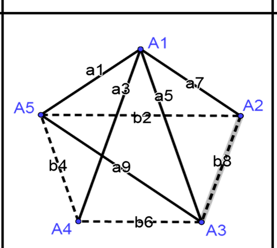
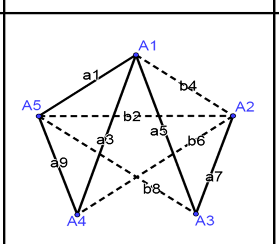
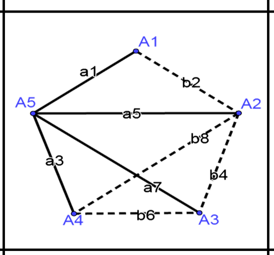
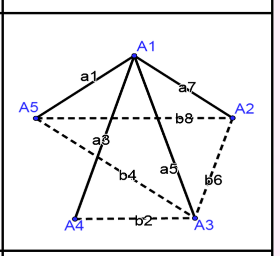
(2)雙方都使用同點連線法時，最晚在連第 5 條線時，先輪到先者，後者同一個點連出去線會被先者佔用掉。所以後者將無法完成同點連線法，而沒有贏的機會。

(3)先者若能確實使用同點連線法，可得到獲勝或平手的結果，所以四點時先者佔優勢。

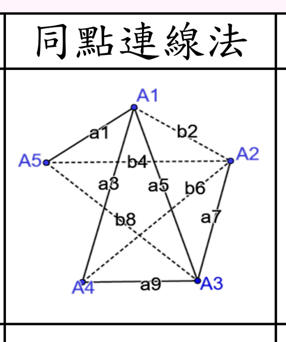
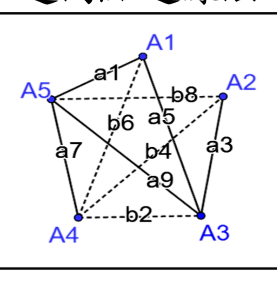
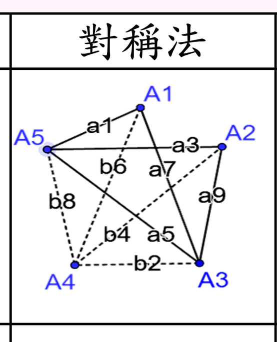
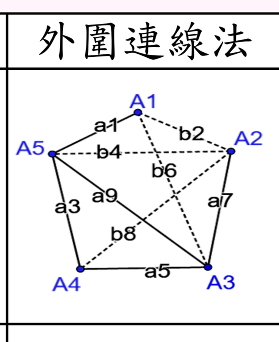
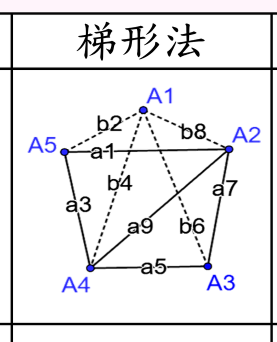
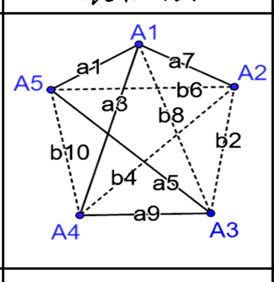
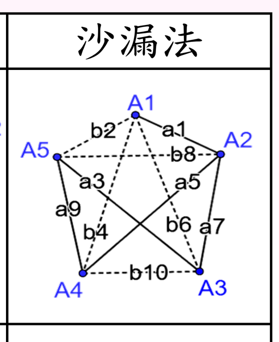
(4)後者若能阻止先者使用同點連線法，便能確保自己不會輸。

結論四點時，是先者優勢的遊戲，先者使用同點連線法可獲勝或平手，後者則要阻擋先者策略才能確保自己不會輸。

(二)五點 **1.同點連線法** **(1)先者使用同點連線法**

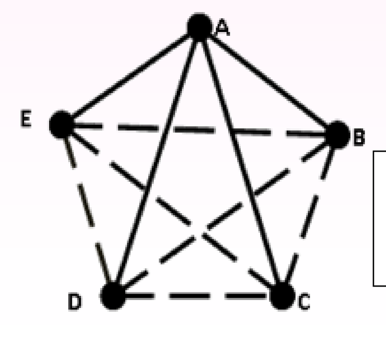
後者策略	避同點連線法	讓位法	外圍連線法	梯形法	沙漏法	對稱法	同點連線法
圖例							
贏方	***後者***	***後者***	***後者***	***後者***	***後者***	先者	先者

(2)後者使用同點連線法

先者策略	同點連線法	避同點連線法	對稱法	外圍連線法	梯形法	讓位法	沙漏法
圖例							
贏方	***後者***	***後者***	***後者***	***後者***	***後者***	先者	先者

發現同點連線法不適合先者使用，但後者使用的話可以提高獲勝機會。

討論為何 5 點時，「同點連線法」不利於先者？五點可連接的直線數是 10 條、每人最多連可 5 條線。當先者使用「同點連線法」時，同一個點最多可以畫出 4 條線，先者最後剩下要連的 1 條直線，都是會和先者前面的任兩條直線連接成三角形的線，所以先者會輸。

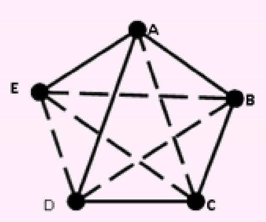


實線：同點連線法

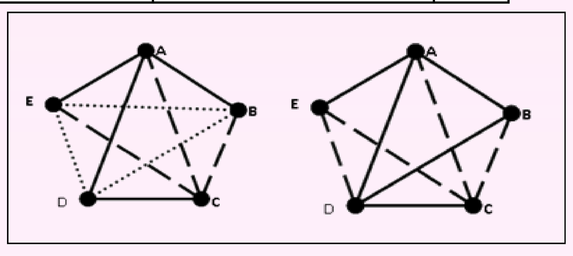
虛線：剩下可走路線

2.避同點連線法

贏的次數 / 是否阻擋	同點連線法（先者）	避同點連線法(後者)	平手
不阻擋	0	10	0
後者阻擋	1	9	0
先者阻擋	6	2	2
都阻擋	1	0	9

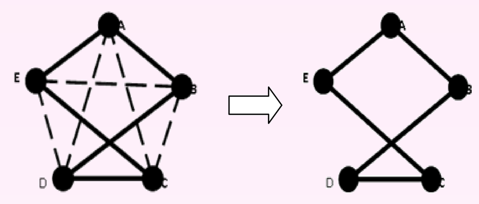


後者阻擋而輸掉

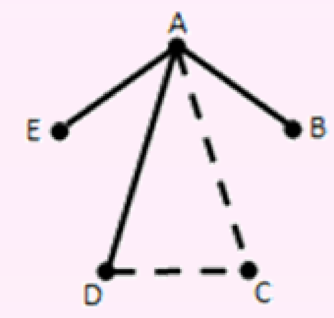


後者阻擋到最後 2 步的不同走法

發現 (1)雙方都不阻擋：先者沒有贏的機會。
(2)後者阻擋先者：後者阻擋了先者，會讓局面變得混亂，所以後者要更謹慎去觀察該怎樣才能阻擋到先者。
(3)先者阻擋後者：先者有阻擋比不阻擋獲勝機率高，所以先者應該要阻擋對方策略。
(4)先者和後者互相阻擋時平手機率高，容易走成魚形。當出現魚形時會平手。

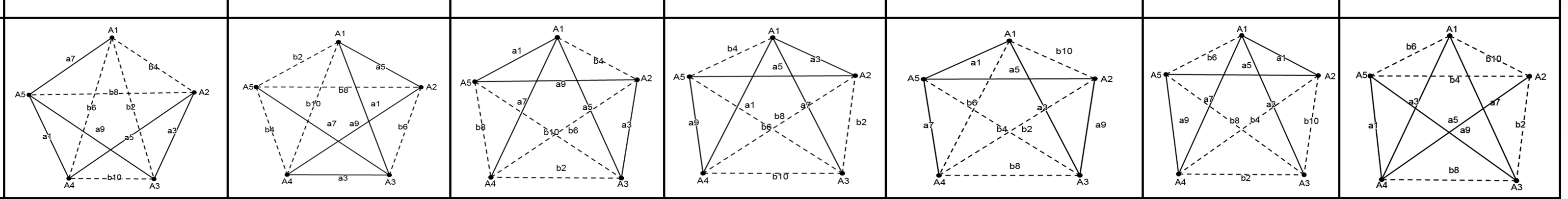


討論 若是不知道而阻擋了對手會自取滅亡的同點連線法時，可能會導致下列的結果：
(1)當後者阻擋時：假設後者一開始無法看出先者使用了同點連線法，而隨意連一條線；等到先者連第二條線後，後者可能猜到了先者使用同點連線法而加以阻擋。接著先者依舊按照「同點連線法」策略連線，有可能會形成如右圖的局面。之後只要後者不粗心大意，先者最後一定都會連出三角形。

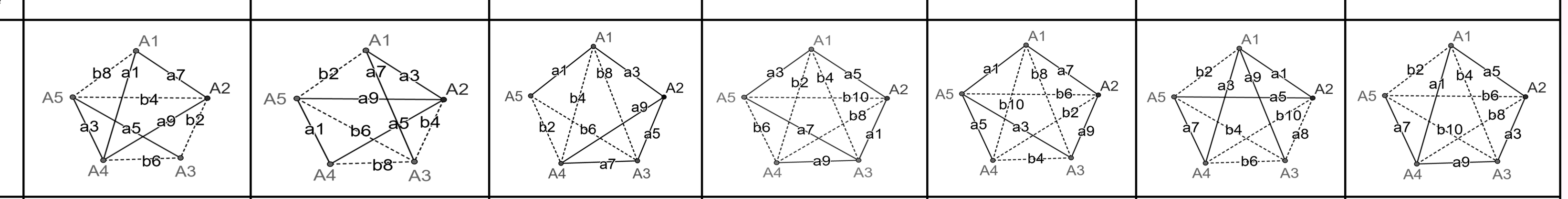


(2)當先者阻擋時：若後者採用避同點連線法，使用同點連線法的先者比較難以預測後者的下一條線。只要後者仔細一點，就可贏先者。

3.沙漏法 (1)先者使用沙漏法

後者策略	同點連線法	外圍連線法	對稱法	讓位法	避同點連線法	沙漏法	梯形法
圖例							
贏方	先者	先者	先者	先者	先者	先者	先者

(2)後者使用沙漏法

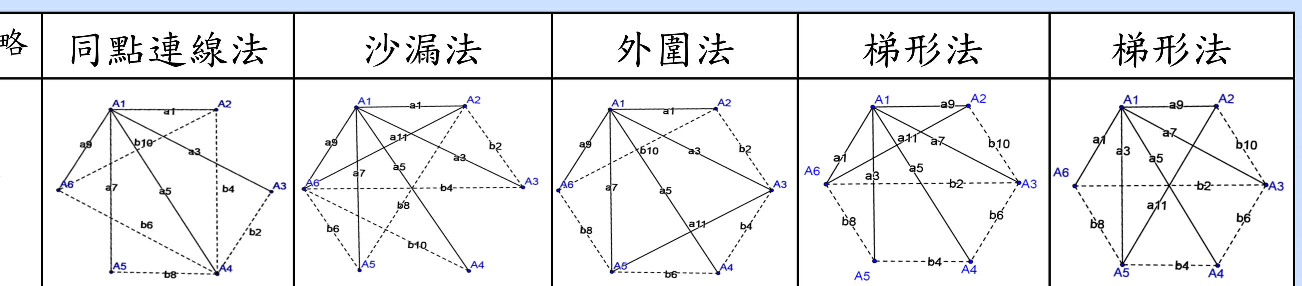
先者策略	同點連線法	避同點連線法	對稱法	外圍連線法	讓位法	沙漏法	梯形法
圖例							
贏方	***後者***	***後者***	***後者***	先者	先者	先者	先者

發現「沙漏法」是最適合先者和後者對戰的策略。

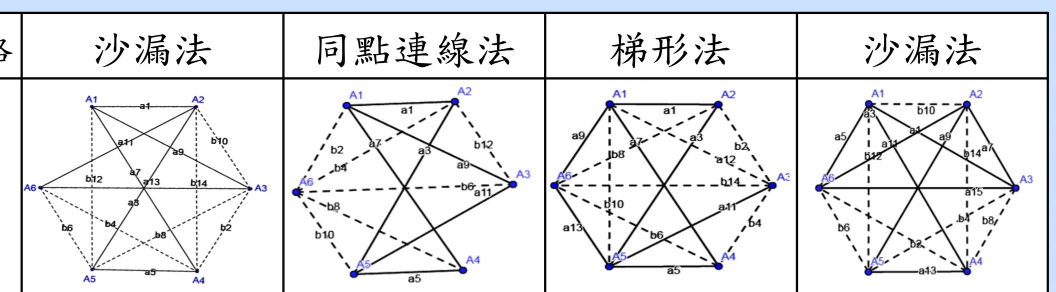
討論使用沙漏法的一方為什麼會容易贏？五點的總線數為 10 條線。平分給兩個玩家，每個玩家能連的直線數最多為 10÷2=5 條。「沙漏法」的 4 條直線，是在 4 個點之間連出封閉圖形，剩下最後 1 條線，是從第 5 點連到任何一個點，都不會形成三角形。所以成功走完「沙漏法」，就可以獲勝。當先者和後者都同時用「沙漏法」時，先者可以優先選擇，先者會較有獲勝優勢。

結論五點時，要避免用「同點連線法」，因為使用成功則必輸。使用「沙漏法」才有機會獲勝，對先者更為有利。

(三)六點 1.先者使用同點連線法

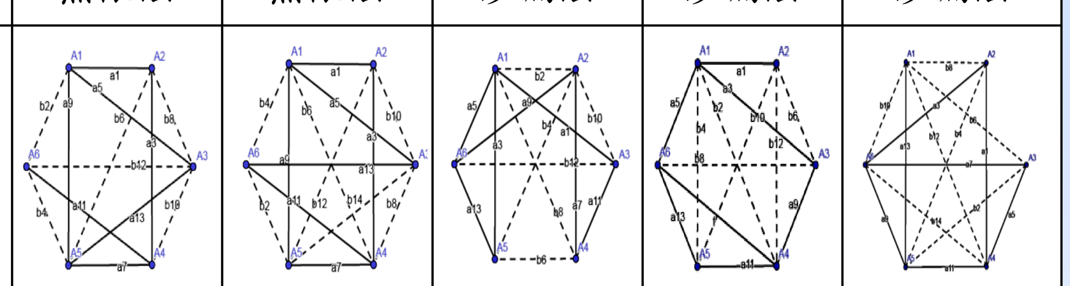
後者策略	同點連線法	沙漏法	外圍法	梯形法	梯形法
圖例					
贏方	先者	***後者***	***後者***	***後者***	***後者***

2. 先者使用沙漏法

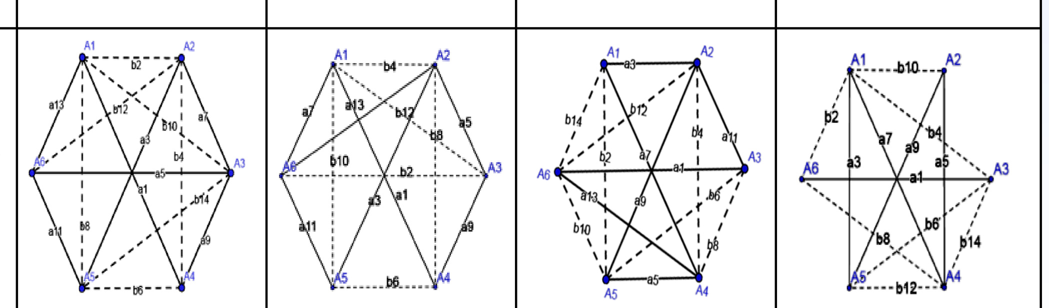
後者策略	沙漏法	同點連線法	梯形法	沙漏法
圖例				
贏方	先者	先者	先者	***後者***

發現 (1)先者不適合使用同點連線法，只有在後者同樣使用同點連線法時，先者才有贏的機會。
(2)先者使用沙漏法獲勝機會大，但是雙方都使用沙漏法時，不一定對哪一方較為有利。

3.梯形法 (1)先者使用梯形法

後者策略	無限法	無限法	沙漏法	沙漏法	沙漏法
圖例					
贏方	***後者***	先者	***後者***	***後者***	先者

(2)後者使用梯形法

先者策略	無限法	無限法	沙漏法	沙漏法
圖例				
贏方	先者	***後者***	先者	***後者***

發現不管先者或後者用沙漏法、梯形法或無限法，都沒有絕對的輸贏。

討論使用梯形法、無限法如何確保獲勝？

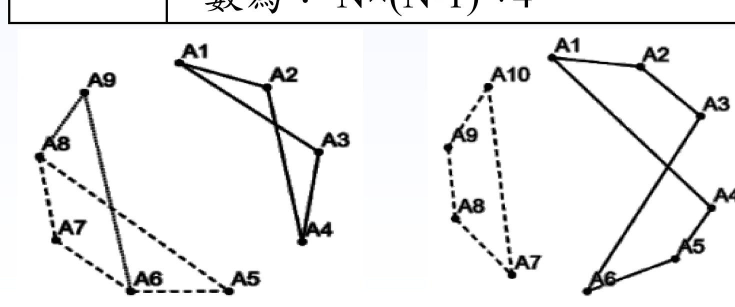
＊梯形法：要確保在梯形外面的 2 點，各自只能和梯形裡的 2 個點相連，並用一條線把梯形外面的 2 點連起來，這樣就有很大的機會贏對方了。

＊無限法：封閉圖形 6 條線，加其外的三條不輸的線，共 9 條線，而每人最多只有 8 條。所以用「無限法」獲勝機率高。但前提是：可供選擇的線，沒被對手佔掉。

結論不管先者或後者，都適用沙漏法、梯形法和無限法。雖非必勝，但可提高獲勝機會。

(四) 使用策略與可連直線總數之間的關係

策略名稱	可供玩家選擇的連線數計算公式(至少)	六點	七點	八點	九點	十點
沙漏法 梯形法	封閉圖形直線數+(點數-封閉圖形點數)× 2+(點數-封閉圖形點數-1)＝ 4+(N-4)x 2+(N-4-1)。當 N ＞＝ 8 改為 4+(N-4)x 2+(N-4)+(N-8)	9 條	12 條	16 條	20 條	24 條
無限法	封閉圖形直線數+3+(點數-封閉圖形點數) × 3+(點數-封閉圖形點數-1)＝ 9+(N-6)x 3+(N-6-1)。當 N ＞＝ 10 改為 9+(N-6)x 3+(N-6)+(N-10)	9 條	12 條	16 條	20 條	24 條
每人最多可連直線數	＊N 點時兩人可連總直線數最多為：N×(N-1)÷2。＊當總直線數為奇數時，先者最多可連直線數為： N×(N-1) ÷4+0.5，後者少 1 條 ＊當總直線數為偶數時，每人最多可連直線數為： N×(N-1) ÷4	8 條	11 條	14 條	18 條	23 條

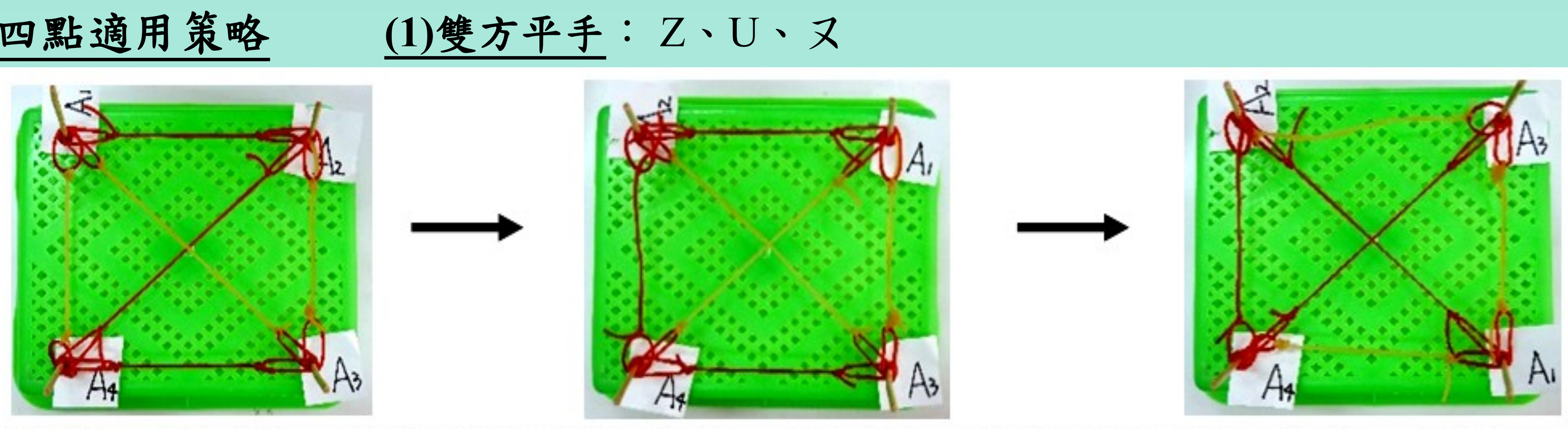


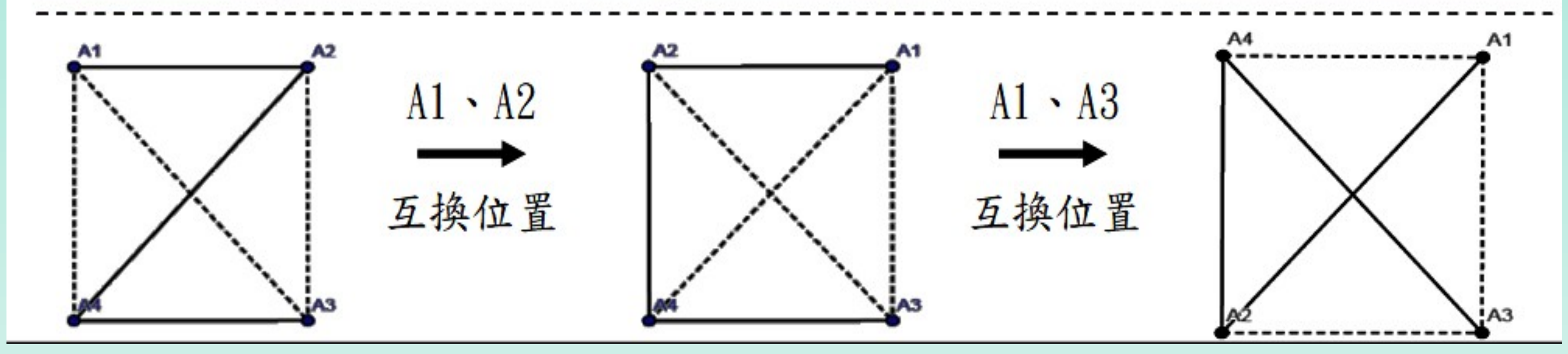
結論 點數超過 6 點時，適合使用沙漏法、梯形法或無限法。

三、探究各種最佳對戰策略的共通性

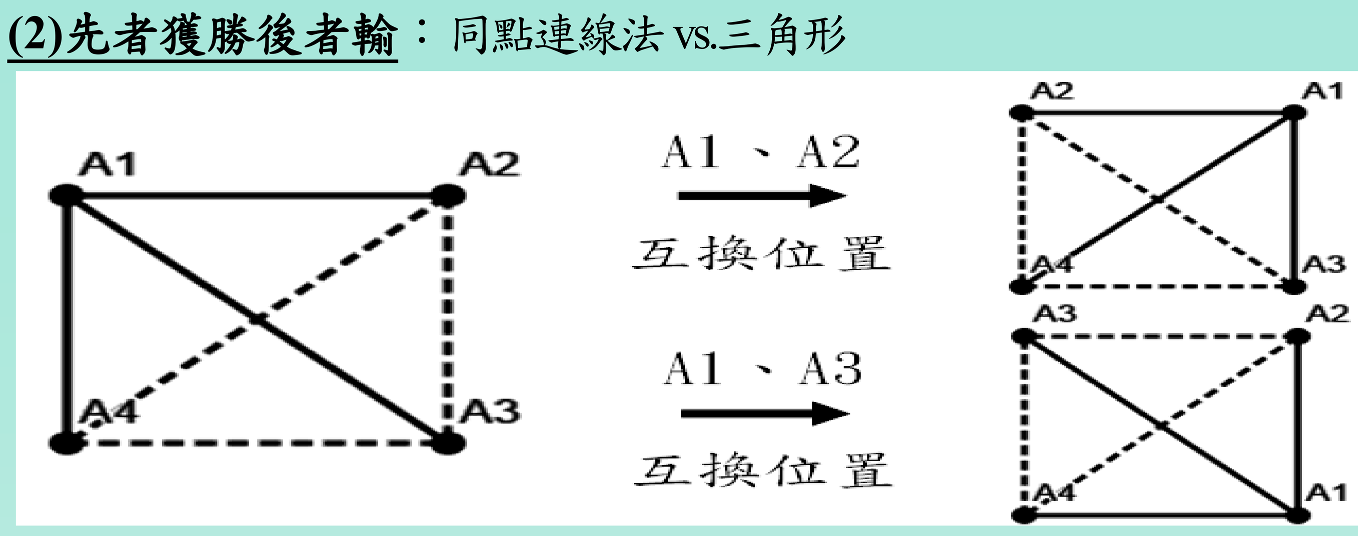
(一)找出各點適用策略的等價圖形

1.四點適用策略 (1)雙方平手：Z、U、ㄡ



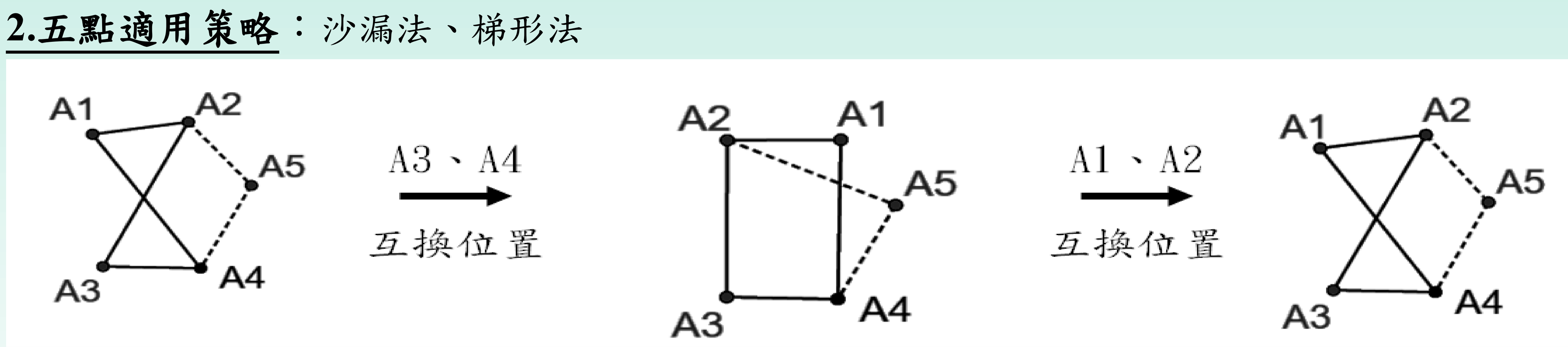


(2)先者獲勝後者輸：同點連線法 vs.三角形

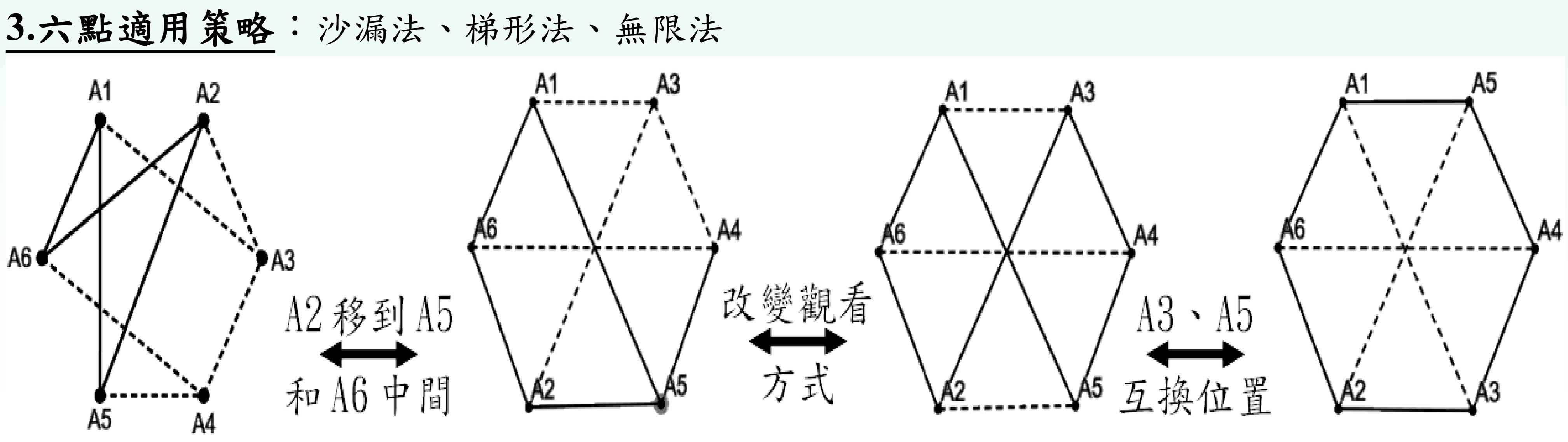


發現 1.平手圖形都可以轉化成連接 3 邊的外圍連線法，是等價圖形，具有下列共通性質：三條線、一筆畫、經過 4 個點。
2.會獲勝的同點連線法：三條線、經過 4 個點，但無法一筆畫畫完。
3.會輸掉的三角形：三條線、一筆畫、經過 3 個點，形成一個封閉的三角形。

2.五點適用策略：沙漏法、梯形法



3.六點適用策略：沙漏法、梯形法、無限法

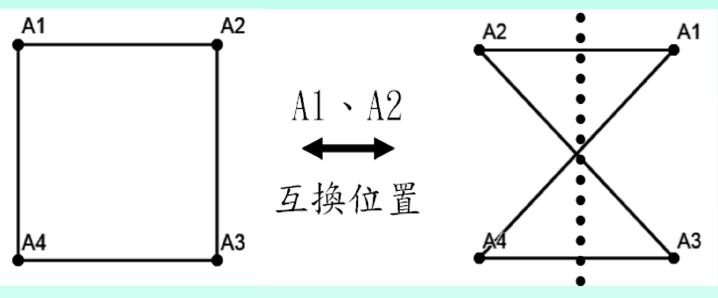


發現
1.五點適用策略可互相轉換，是等價圖形。具有下列共通性質：
(1)都是一筆畫路線。
(2)都有一個由 4 條線、連接 4 個點所構成的封閉圖形。
(3)封閉圖形外的 1 個點，都運用跳點的方式來與封閉圖形上的點相連。也就是在封閉圖形上被外面 1 點所連到的兩點，都是同奇偶性的點。
(4)都是異奇偶點相連：奇數點與偶數點相連、偶數點與奇數點相連。

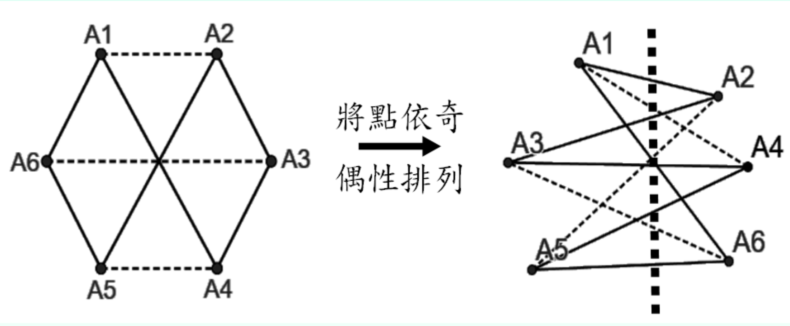
2.六點適用策略可互相轉換，等價於外圍連線法。具有下列共通性質：
(1)具有一個由 6 條線、連接 6 個點所構成的封閉圖形。
(2)每個點都連出 3 條直線，不是一筆畫路線。
(3)都是異奇偶點相連：奇數點與偶數點相連、偶數點與奇數點相連。

(二)從點的奇偶性分析最佳對戰策略

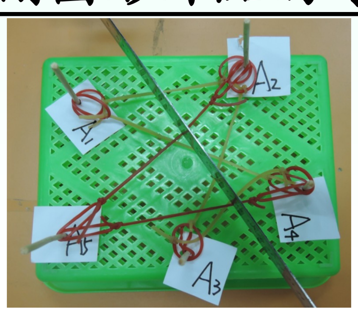
1.四點構成的封閉圖形



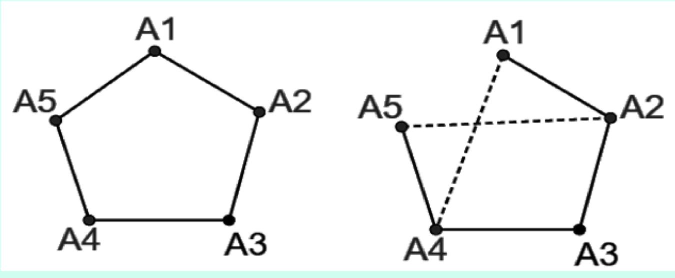
2.六點構成的封閉圖形



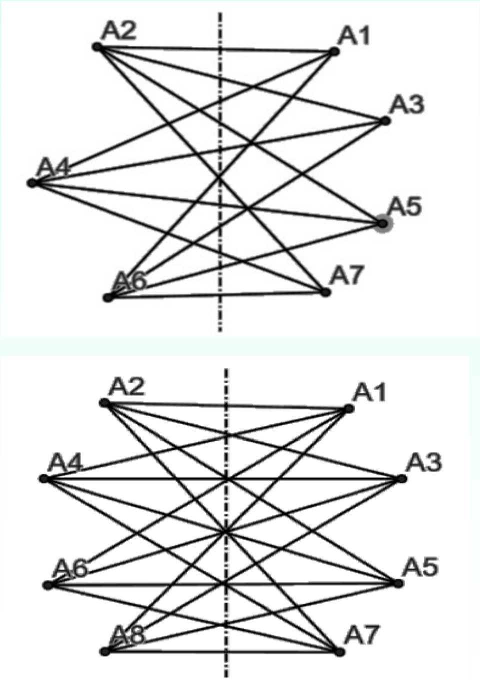
3.封閉圖形外點的奇偶性



4.最佳策略封閉圖形均為偶數點



5.七點、八點採用連接異奇偶點



發現

1.由偶數點構成的封閉圖形，所有連線都是異奇偶區的點相連：奇數區的點只連偶數區的點、偶數區的點只連奇數區的點。

2.封閉圖形外的點，連接到封閉圖形上的點是相同奇偶性的點。所有連線都符合「連接異奇偶性的點」的原則。

3.以奇數點來形成封閉圖形，會不符合「連接異奇偶性的點」的原則，可連出供玩家選擇的直線數較少。

4.以「連接異奇偶性的點」的原則，四點有 2×2 ＝ 4 條不形成三角形的直線來供玩家選擇其中 3 條，五點有 3×2 ＝ 6 條直線供玩家選擇其中 5 條，六點時有 3×3 ＝ 9 條直線供玩家選擇其中 8 條。故「連接異奇偶性的點」的原則可提高玩家獲勝的機會。

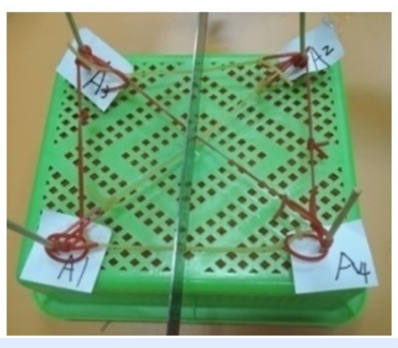
5.連接異奇偶點並不會形成三角形。可連接出供玩家選擇的連線數，等於奇數點數×偶數點數。七點可連出 4×3 ＝ 12 條、八點可連出 4×4 ＝ 16 條。延伸至 N 點：

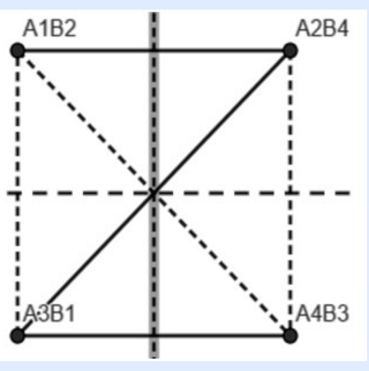
(1)總點數 N 為奇數時，可供玩家選擇的連線數：(N+1)×(N-1)÷4

(2)總點數 N 為偶數時，可供玩家選擇的連線數： N×N÷4

四、雙方對戰時的策略運用與調整

(一)四點雙方互動的最佳對戰策略－平手





發現

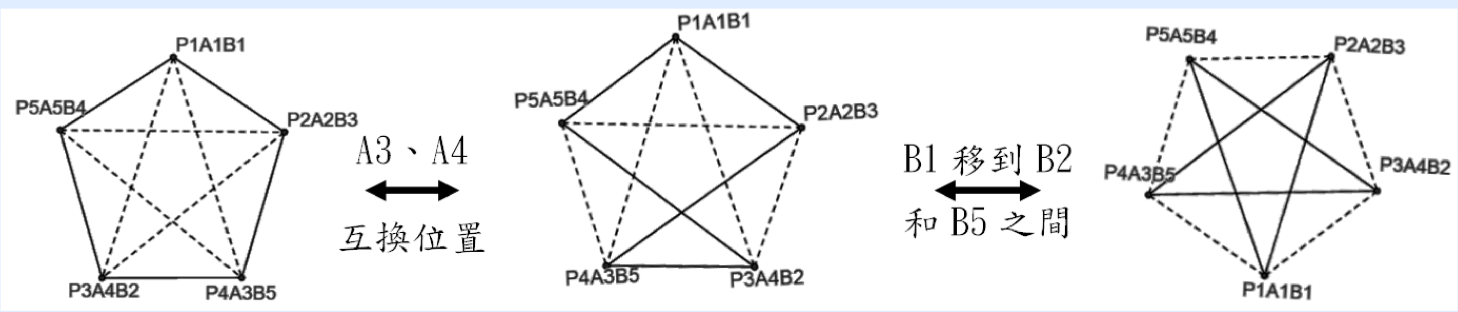
1.雙方均遵守「連接異奇偶性的點」的原則時，會導致平手。

2.先者要贏的話，要用同點連線法，不用管「連接異奇偶性的點」原則。

3.後者因為無法獲勝、想要確保自己不輸而平手的話，一開始的兩條線，就必須先占到四個點（2 奇、2 偶），才能確保不會輸。

4.後者只要在前兩步能和先者的第一條線相連接，阻擋掉先者使用同點連線法，並達成「兩條線經過 4 個點」的原則，就一定會是平手的結果。

(二)五點雙方互動的最佳對戰策略－平手



發現

1.平手局面時，雙方連的圖形都是「外圍連線法」的等價圖形，共通特性有：一筆畫路線、經過五點、封閉圖形。

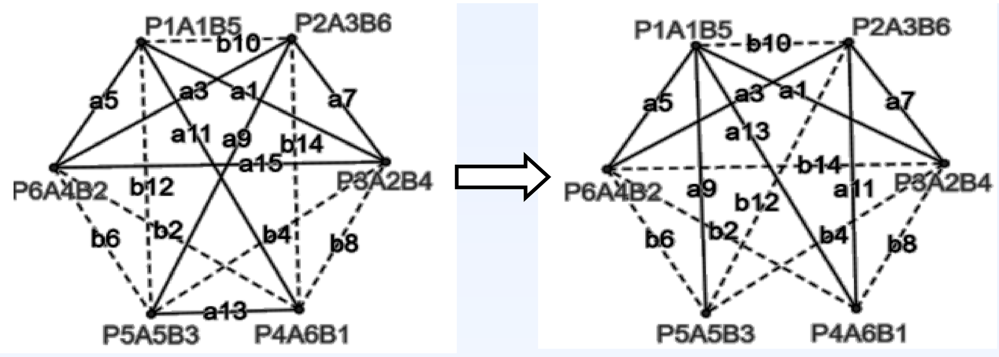
2.一方連完外圍連線法圖形時，剩下的線剛好形成五角星形，也是外圍連線法的等價圖形。所以雙方都使用外圍連線法會形成平手局面。

3.此連線方式不符合「連接異奇偶性的點」的原則，只能得到平手的對戰結果。想要獲勝的話，最好還是採用「連接異奇偶點」原則的策略。

(三)六點雙方互動的最佳對戰策略

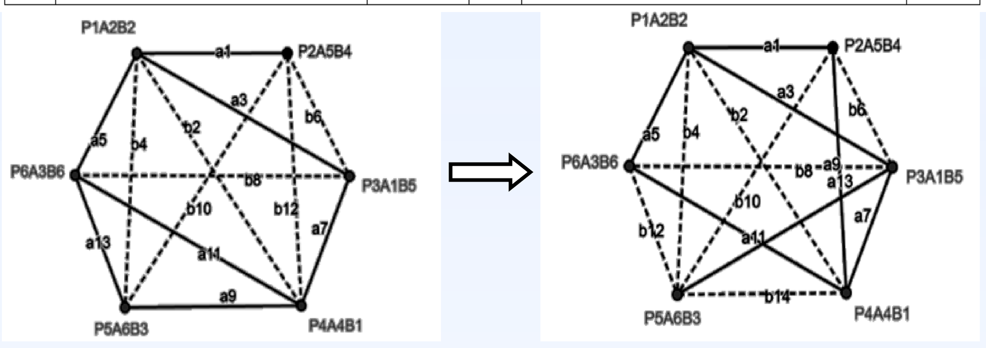
1.先者沙漏法 vs.後者沙漏法(先者輸轉勝)

先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A1:P1、A2:P3	A1A2	2	指定 B1:P4、B2:P6	B1B2
3	指定 A3:P2、A4:P6	A3A4	4	指定 B3:P5、B4:P3	B3B4
5	連出沙漏	A1A4	6	連出沙漏	B3B2
7	連出沙漏	A3A2	8	連出沙漏	B4B1
9	為了阻擋後者、指定 A5:P5	A3A5	10	指定 B5:P1、B6:P2、沙漏外點互連	B5B6
11	外點連沙漏、指定 A6:P4	A1A6	12	和先者合作形成沙漏、外點連沙漏	B5B3
13	外點連沙漏	A5A6	14	外點連沙漏	B6B1
15	沒得選(剩下同奇偶性的點)	A2A4	解析：先者第 9 步走錯，連接同奇偶的點		
先者修正錯誤走法，反敗為勝					
9	和後者合作形成沙漏	A1A5	10	指定 B5:P1、B6:P2、沙漏外點互連	B5B6
11	外點連沙漏	A3A6	12	外點連沙漏	B3B6
13	外點連沙漏	A1A6	14	沒得選(剩下同奇偶性的點)	B2B4



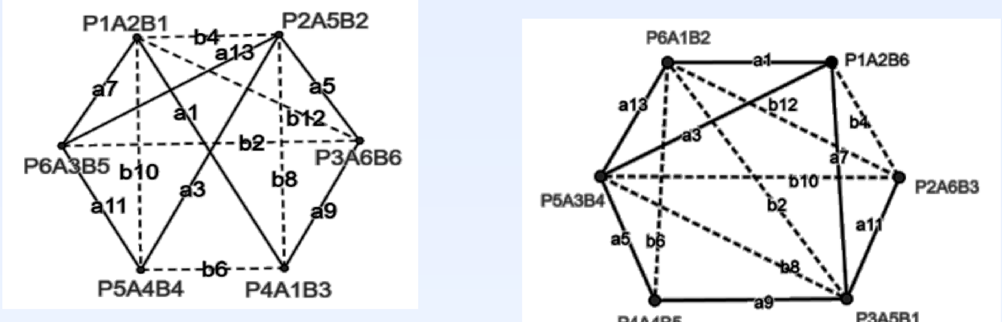
2.先者梯形法 vs.後者沙漏法(先者輸轉勝)

先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A5:P2，A2:P1，A5 是外點，連到梯形	A5A2	2	指定 B1:P4，B2:P1，連沙漏的線	B1B2
3	指定 A1:P3，連梯形的線	A1A2	4	指定 B3:P5，連沙漏的線	B2B3
5	指定 A3:P6，連梯形的線	A2A3	6	指定 B4:P2，B5:P3，連外點到沙漏	B4B5
7	指定 A4:P4，連梯形的線	A1A4	8	指定 B6:P6，互連外點	B5B6
9	連外點到梯形	A4A6	10	連沙漏的線	B3B4
11	連梯形的線	A3A4	12	連沙漏的線	B1B4
13	沒有不會輸的線，任意選擇一條來畫	A3A6	解析：先者第 9 步走錯，連到同奇偶性的點，其實還有幾條可連接異奇偶性點的直線，例如 A4A5、A1A6、和 A3A6。		
先者修正錯誤走法，反敗為勝					
9	阻擋後者沙漏	A4A5	10	連沙漏的線	B3B4
11	連梯形的線	A3A4	12	外點連沙漏	B3B6
13	外點到梯形	A1A6 或 A4A6	14	連任何一條都會形成三角形而輸掉	B1B3



3.先者無限法 vs.後者梯形法(後者贏)

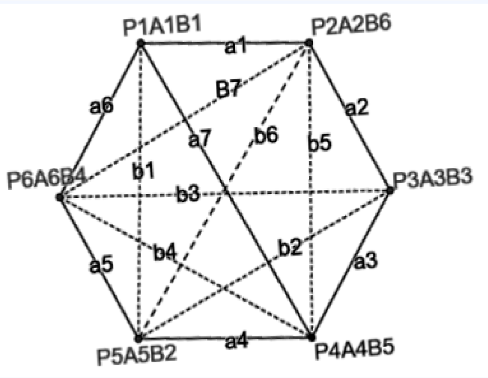
先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A1:P4，A2:P1，連無限法	A1A2	2	指定 B5:P6，B6:P3，外點互連	B5B6
3	指定 A4:P5，A5:P2，連無限法	A4A5	4	指定 B1:P1，B2:P2，連梯形法	B1B2
5	指定 A6:P3，連無限法	A5A6	6	指定 B3:P4，B4:P5，連梯形法	B3B4
7	指定 A3:P6，連無限法	A2A3	8	連梯形法	B2B3
9	連無限法	A1A6	10	連梯形法	B1B4
11	連無限法	A3A4	12	外點連到梯形	B1B6
13	已經沒有不會輸的線了！	A3A5	解析：先者太固執，只顧著連完無限法，而沒有去做變換，無限法內的直線都被占走了。		



4.雙方均採外圍連線法＋連接異奇偶點(先者贏)

先者			後者		
步數	思考方式	連線	步數	思考方式	連線
1	指定 A1:P1、A2:P2，連外圍	A1A2	2	指定 B1:P1、B2:P5，連外圍	B1B2
3	指定 A3:P3、A4:P4，連外圍	A3A4	4	指定 B3:P3、B4:P6，連外圍	B3B4
5	指定 A5:P5、A6:P6，連外圍	A5A6	6	指定 B5:P4、B6:P2，連外圍	B5B6
7	偶數點連奇數點	A2A3	8	偶數點連奇數點	B2B3
9	偶數點連奇數點	A4A5	10	偶數點連奇數點	B4B5
11	奇數點連偶數點	A1A6	12	和先者合作連成三角形	B2B6
13	奇數點連偶數點	A1A4	14	剩下的線，都會形成三角形	必輸

5.雙方自選策略彈性應戰(後者贏)



發現

1.先者或後者沒有絕對的優勢，也沒有一定會贏的策略。

2.導致玩家輸的主因有：連接同奇偶性的點，或太固執於原本選定的策略。

3.除了注意「連接異奇偶點的原則」，選擇適用策略之外，還應該要仔細觀察對手的連線策略，小心調整連線方式，最好能阻擋對手所用策略，優先搶占雙方都可以連接的直線。也可以選擇和對手接力完成三角形，這樣可避免讓自己連成三角形，而提高獲勝機會。

(四)雙方在不同點數時的適用策略與可供選擇的連線數

點數	四點	五點	六點(含)以上
適用策略	1.先者：同點連線法(會贏) 2.後者(雙方)：外圍連線法(會平手)	1.沙漏法、梯形法(先者優勢) 2.外圍連線法(會平手) 3.異奇偶點相連(提高獲勝率)	1.異奇偶數點相連 2.阻擋（佔用）對方的可連直線 3.與對手合作形成三角形
可供選擇的直線數	1.同點連線法： 3 條 2.外圍連線法： 4 條選 3 條	1.沙漏法、梯形法、異奇偶點相連： 6 條選 5 條 2.外圍連線法： 5 條	以異奇偶點相連，可供玩家選擇不形成三角形的直線數：當總點數 N 為奇數時，有(N+1)×(N-1)÷4 條，當 N 為偶數時，有 N×N÷4 條。可供玩家選擇的直線數，均大於每人最多可連直線數： ▲當總連線數 N×(N-1)÷2 為偶數時，每人最多可連直線數＝N×(N-1)÷4 ▲當總連線數 N×(N-1)÷2 為奇數時，先者最多可連直線數＝N×(N-1)÷4+0.5

結論

(一)至少四點才可玩西蒙思，點排成凸多邊形的頂點能避免共線。

(二)N 點最多可連 N×(N-1)÷2 條線。當 N×(N-1)÷2 為奇數，先者可連 N×(N-1)÷4+0.5 條線、比後者多一條；當 N×(N-1)÷2 為偶數時，每人最多連 N×(N-1)÷4 條線。

(三)我們共發展出 8 種對戰策略，並探討在不同點數的適用情形。

(四)同點連線法僅適用於四點，可使先者獲勝，但是後者使用同點連線法只能平手。五點（含）以上則不適用同點連線法。

(五)五點時，雙方都適用沙漏法、梯形法，先者較佔優勢；雙方都使用外圍連線法時會平手。六點（含）以上適用沙漏法、梯形法和無限法。

(六)四點和五點會平手的圖形，是可以變換成外圍連線法的等價圖形。

(七)各點的適用策略，都是可以互相變換的等價圖形，均符合連接異奇偶點的原則。可連出供玩家選擇、不形成三角形的直線數，計算公式為：奇數點數×偶數點條直線：當總點數 N 為奇數時，有(N+1)×(N-1)÷4 條，當 N 為偶數時，有 N×N÷4 條。均大於每人最多可連直線數。

(八)四點和五點時，雙方各自以最佳策略對戰，會導致平手的結果。但是六點(含)以上沒有絕對優勢方，也沒有一個絕對會贏的策略，要仔細觀察對手、依據下面 3 個原則來適當調整策略：連接異奇偶點、阻擋(佔用)對方的可連直線、與對手合作形成三角形，才能提高獲勝機會。

參考文獻

李國賢著、涂秀馨繪圖（2003）。趣味數學.遊戲篇。台北市：新潮社出版。