中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080402

圓圓不絕

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者：	指導老師：
小六 葉鎮宇 小五 羅子郡 小五 王瀚庭 小四 葉璦綺	陳志平

關鍵詞：圓形、交點、正多邊形外接圓

摘要

一、本研究探討在一個基圓[註一]的圓周上任取一點當作圓心，以不同半徑畫出旋轉圓[註二]，旋轉不同角度，旋轉角度θ[註三]$=360^{\circ}\div n$，$n\in N$，且$n\geq 3$，探討旋轉圓之間的交點數、交點連線所產生的圖形及規律。

二、我們發現旋轉圓產生的交點數、交點連線所產生正多邊形數與旋轉圓的半徑 R 有關，詳見本作品說明書第 23 頁之研究結果一。

三、將和基圓圓心等距的交點連接起來會產生正多邊形，正多邊形的外接圓半徑公式有著對稱的關係。

四、利用簡單的道具可分別以平面和立體呈現圓與圓之間交點的情形，如下圖：

註一：請參閱專有名詞定義(一)

註二：請參閱專有名詞定義(二)

註三：請參閱專有名詞定義(三)

壹、研究動機

學校校門口內的廣場由抿石子組成，每天經過的時候地上總會發出亮晶晶光芒，非常漂亮，有天午后，從學校的三樓往廣場一看，發現學校的廣場上有許多圓形所圍成的圖形，如圖一，圓與圓之間有許多交會的地方，呈現美麗的圖案，這景象引發我們的研究興趣。

圖一

另外在台北火車站大廳地板、台中陽明市政大樓 5 樓地板以及台中市街道看到的廣告商標，如圖二，似乎都是由圓形的交點和圓心所構成的圖形，我們發覺由圓與圓之間的重疊交會可以繪製出許多特別的圖形，經過討論後，決定展開我們「圓圓不絕」的研究。

圖二-1 台北火車站大廳方位指示地標

圖二-2 台中陽明市政大樓地標

圖二-3 台中廣告商標

貳、研究目的

基於以上的研究動機，本研究的研究目的有二：

一、將發現的地標和商標利用圓形的交點和圓心畫出來。

二、將圓旋轉固定角度，找出交點的規律及產生的圖形。

參、研究設備及器材

紙、筆、動態幾何系統 the geometer's sketchpad、計算機、彩色卡典西德紙、強力磁鐵、塑膠瓦楞板、雙腳釘、透明圓形壓克力片 、塑膠圓環、橡皮筋。

肆、研究過程

一、專有名詞定義

(一)基圓：以 1 單位長為半徑所畫出來的圓，使旋轉圓的圓心在基圓圓周上以固定角度旋轉，基圓的圓心即為旋轉圓的旋轉中心。

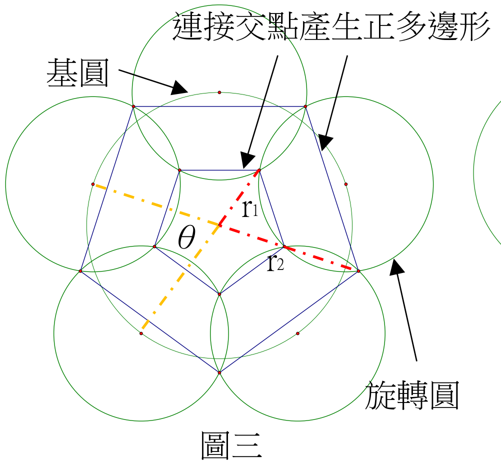
(二)旋轉圓：圓心在基圓的圓周上所畫出來的圓形，以固定角度繞著基圓的圓心旋轉，旋轉圓的半徑以 R 表示。

(三)旋轉角度：旋轉圓的圓心在基圓上每次繞著基圓圓心所旋轉的角度，以 θ 表示之。

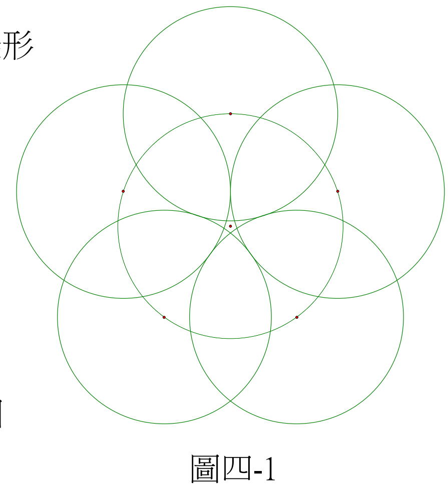
(四)連接交點產生正多邊形：旋轉圓與旋轉圓會產生交點，將和基圓圓心等距的交點連接起來，所產生的正多邊形，由內而外正多邊形的外接圓半徑分別以 r_1、r_2、r_3…表示，以此類推；各項專有名詞說明如圖三。

(五)間隔旋轉圓之間的交點數：隨著旋轉圓半徑 R 的變大，每個旋轉圓和其他旋轉圓的交點數會增加，在 R<1 的範圍內，以 W_g表示兩旋轉圓之間相隔 g 個圓的交點數，g 的範圍為 $0\sim[\frac{n}{2}]-2$，其中[]為取頂符號，n 為旋轉圓個數；W_0表示相鄰兩旋轉圓的交點數，W_1 表示中間間隔一個旋轉圓的兩旋轉圓交點數，以此類推，如 n=5，則 $\theta=360^{\circ}\div5=72^{\circ}$，$g=[\frac{5}{2}]-2=1$，$W_1=1$ 之圖形如圖四-1，$W_1=2$ 之圖形如圖四-2，且 n＝5 沒有 W_2的圖形，因為間隔 2 個圓已經和另一個方向間隔 1 個圓重複。

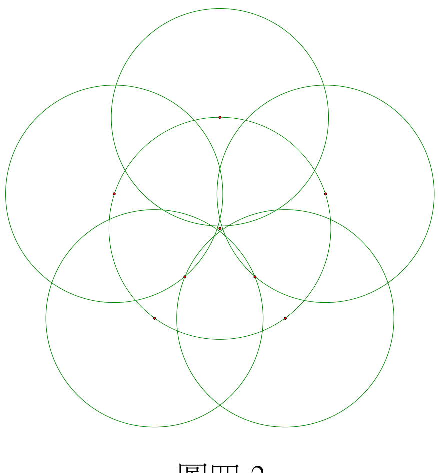
(六)取頂符號：以[ ]表示，[x]為大於等於 x 的整數中最小的一個，如[3.4]＝4，$[\frac{5}{2}]=3$，[2]＝2。



圖三



圖四-1



圖四-2

二、文獻探討：

本研究發想來自我們在生活中發現圓與圓交會的情形，因而自行發展出來的問題，歷屆科展中並無類似的研究，另外利用 google 搜索引擎以圓形、交點、正多邊形外接圓等關鍵字進行搜尋也無相關內容，為了使用一些數學原理，我們參閱「史上最強圖解數學」[1]，另外全國第 56 屆中小學科學展覽會作品「正 n 邊形上等弧交點所圍圖形之探討」[2]也提供我們研究的方向，分述如下：

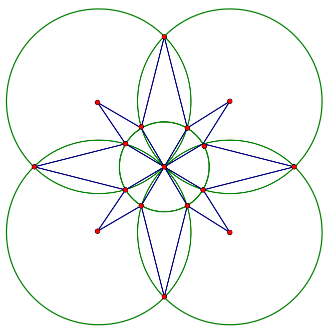
史上最強圖解數學（數學能力開發研究會，2017）	
書籍內容概述	對本研究的啟發
將國小、國中、高中數學概念加以視覺化，以圖解的方式進行說明。	本書提到三角形的全等(p98、p99)以及直角三角比(簡易三角函數，p120)，透過圖文的說明，可加以運用在本研究中。

正 n 邊形上等弧交點所圍圖形之探討（歐劭祺，2016）	
研究摘要與探討	對本研究的啟發
探討在正 n 邊形每邊的中垂線上取一點，以定長為半徑畫圓，得出的圓弧彼此間的交點所衍生出的圖形與原圖形間的關連。	(一) 該研究探討圓弧的交點連接起來的圖形，啟發我們也把圓與圓的交點連接起來進行研究。 (二) 該研究對於正 n 邊形的研究，先以正三角形、正方形…等較易理解的圖形先研究，最後再進行一般化的證明，啟發我們在一開始著手研究時也先以這樣的脈絡進行。

三、利用圓形作圖將研究動機中的三個圖形畫出來

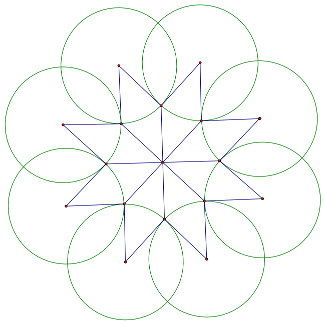
將發現的地標和商標利用圓形畫出來，如圖五~圖七。

圖五 台北火車站大廳方位指示地標



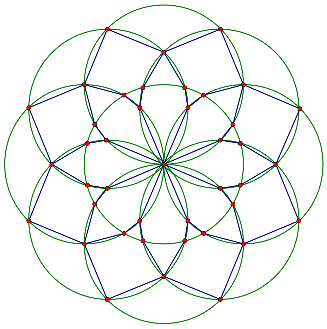
以 5 個圓的圓心和交點畫出來的圖形

圖六 台中陽明市政大樓地標



以 8 個圓的圓心和交點畫出來的圖形

圖七 台中廣告商標



以 9 個圓的圓心和交點畫出來的圖形

四、改變旋轉角度 θ ，探討對圖形產生的變化

在以圓形繪製地標以及商標時，我們發現將固定大小的圓形繞著一個中心點以相同角度旋轉所產生的交點和圓心，選擇其中一些交點連接起來時即會產生這些圖形，我們試著在一個基圓的圓周上任取一點當作圓心以不同的半徑畫圓，旋轉不同角度，來找出交點數、交點連線產生的圖形來進行研究。

(一)R<1，W_0＝1

1. θ ＝360°÷3＝120°

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}$＝1，

旋轉圓每次旋轉 120°，

連接旋轉圓圓心所產生圖形為正△ABC。

兩相鄰旋轉圓之間剛好相切於 1 點，如圖八，

其中圓 A 與圓 B 相切於點 I，

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

∴$\overline{OA}$＝$\overline{OB}$＝1，且∠OAI＝∠OBI，

且$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑，$\overline{AI}$＝$\overline{BI}$

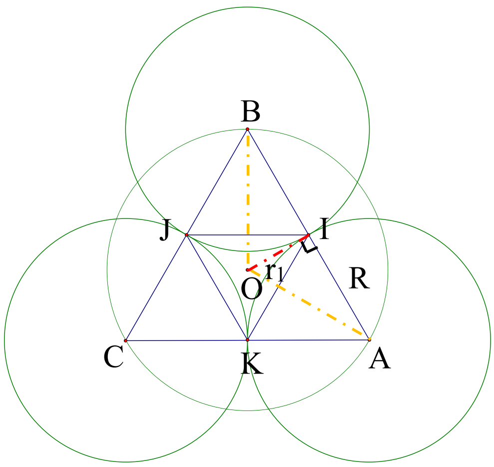
∴△OAI≅△OBI(SAS)，且$\overline{OI}\perp\overline{AI}$。

旋轉圓半徑 R＝sin60°＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$

每一圓有 2 個交點，3 個圓共有 2x3÷2＝3 個交點，

連接交點產生 1 個正△IJK 在正△ABC 內部。

$\overline{OI}$為正△IJK 的外接圓半徑 r_1＝cos60°＝$\frac{1}{2}$



圖八

2. $\theta=360^\circ\div4=90^\circ$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 90°，

連接旋轉圓圓心產生圖形為正方形 ABCD。

兩相鄰旋轉圓之間剛好相切於 1 點，如圖九，

其中圓 A 與圓 B 相切於點 I，

$\because\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\therefore\overline{OA}=\overline{OB}=1$，且$\angle OAI=\angle OBI$，

且$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑，$\overline{AI}=\overline{BI}$

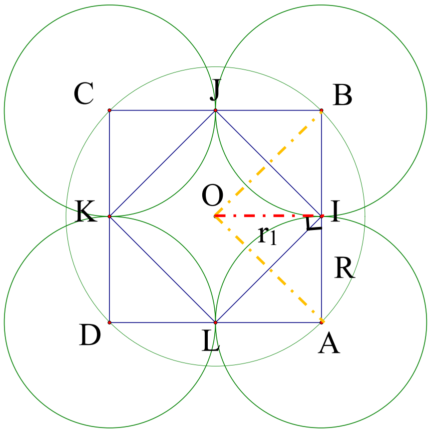
$\therefore\triangle OAI\cong\triangle OBI(SAS)$，且$\overline{OI}\perp\overline{AI}$。

旋轉圓半徑 $R=\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

每一圓有 2 個交點，4 個圓共有 $2\times4\div2=4$ 個交點，

連接交點產生 1 個正方形 IJKL 在正方形 ABCD 內部。

$\overline{OI}$為正方形 IJKL 的外接圓半徑 $r_1=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$



圖九

3. $\theta=360^\circ\div5=72^\circ$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 72°，

連接旋轉圓圓心產生圖形為正五邊形 ABCDE。

兩相鄰旋轉圓之間剛好相切於 1 點，如圖十，

其中圓 A 與圓 B 相切於點 I，

$\because\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\therefore\overline{OA}=\overline{OB}=1$，且$\angle OAI=\angle OBI$，

且$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑，$\overline{AI}=\overline{BI}$，

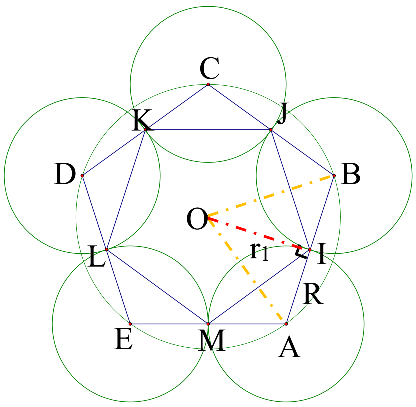
$\therefore\triangle OAI\cong\triangle OBI(SAS)$，且$\overline{OI}\perp\overline{AI}$。

旋轉圓半徑 $R=\sin36^\circ$

每一圓有 2 個交點，5 個圓共有 $2\times5\div2=5$ 個交點，

連接交點產生 1 個正五邊形 IJKLM 在正五邊形 ABCDE 內部。

$\overline{OI}$為正五邊形 IJKLM 的外接圓半徑 $r_1=\cos36^\circ$



圖十

4. $\theta=360^\circ\div6=60^\circ$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 60°，

連接旋轉圓圓心所產生圖形為正六邊形 ABCDEF。

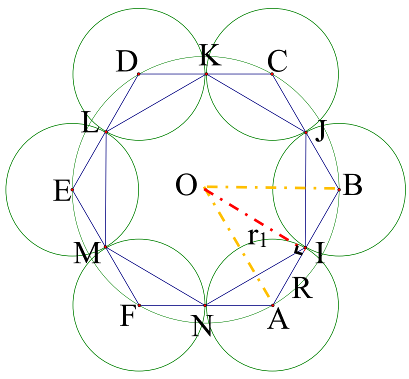
兩相鄰旋轉圓之間剛好相切於 1 點，如圖十一，

其中圓 A 與圓 B 相切於點 I，

$\because\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\therefore\overline{OA}=\overline{OB}=1$，且$\angle OAI=\angle OBI$，

且$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑，$\overline{AI}=\overline{BI}$



圖十一

$\therefore \triangle OAI \cong \triangle OBI(SAS)$，且$\overline{OI} \perp \overline{AI}$。

旋轉圓半徑 $R = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

每一圓有 2 個交點，6 個圓共有 $2 \times 6 \div 2 = 6$ 個交點，

連接交點產生 1 個正六邊形 IJKLMN 在正六邊形 ABCDEF 內部。

$\overline{OI}$為正六邊形 IJKLMN 的外接圓半徑 $r_1 = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5.一般化：

$\theta = 360^\circ \div n = \frac{360^\circ}{n}$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA} = 1$，

旋轉圓每次旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，

連接旋轉圓圓心所產生圖形為正 n 邊形。

兩相鄰旋轉圓之間剛好相切於 1 點，如圖十二，

其中圓 A 與圓 B 相切於點 I，

$\because \overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = 1$，且$\angle OAI = \angle OBI$，

且$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑，$\overline{AI} = \overline{BI}$

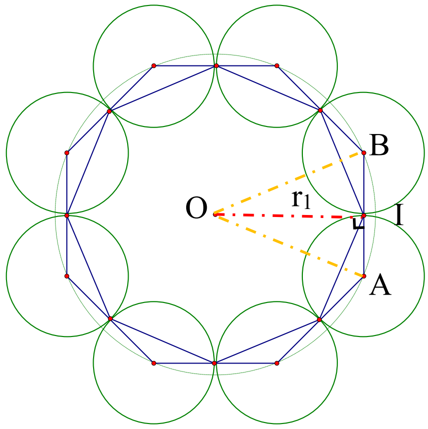
$\therefore \triangle OAI \cong \triangle OBI(SAS)$，且$\overline{OI} \perp \overline{AI}$。

旋轉圓半徑 $R = \sin\frac{360^\circ}{2n} = \sin\frac{180^\circ}{n}$

每一圓有 2 個交點，n 個圓共有 $2 \times n \div 2 = n$ 個交點，

連接交點產生 1 個正 n 邊形在由旋轉圓圓心相連產生的正 n 邊形內部。

$\overline{OI}$為連接交點產生的正 n 邊形的外接圓半徑 $r_1 = \cos\frac{360^\circ}{2n} = \cos\frac{180^\circ}{n}$



圖十二

兩相鄰旋轉圓相交於 1 點，$\theta = \frac{360^\circ}{n}$ 時，旋轉圓半徑 R、旋轉圓產生的交點數、連接交點所產生正 n 邊形外接圓的半徑 r_1，如下表：

邊數	旋轉角度 θ	旋轉圓半徑 R	交點數	交點連線圖形 外接圓半徑 r_1
3	$\theta = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$	$\sin\frac{180^\circ}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3	$\cos\frac{180^\circ}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
4	$\theta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$	$\sin\frac{180^\circ}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	4	$\cos\frac{180^\circ}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5	$\theta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$	$\sin\frac{180^\circ}{5} = \sin 36^\circ$	5	$\cos\frac{180^\circ}{5} = \cos 36^\circ$
6	$\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$	$\sin\frac{180^\circ}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	6	$\cos\frac{180^\circ}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
n	$\theta = \frac{360^\circ}{n}$	$\sin\frac{180^\circ}{n}$	n	$\cos\frac{180^\circ}{n}$

(二) $R<1$，$W_0=2$

1. $\theta=360^\circ\div 3=120^\circ$

∵兩相鄰旋轉圓相交於一點時，$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$；且 $R=1$ 時旋轉圓相交於旋轉中心點 O，

∴旋轉圓半徑 R，須符合$\frac{\sqrt{3}}{2}<R<1$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 120°，

兩相鄰旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖十三，

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及點 I′，

$\overline{OI'}$相交$\overline{AB}$於點 P

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI'}$、$\overline{BI'}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

∴$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AI'}=\overline{BI'}=R$

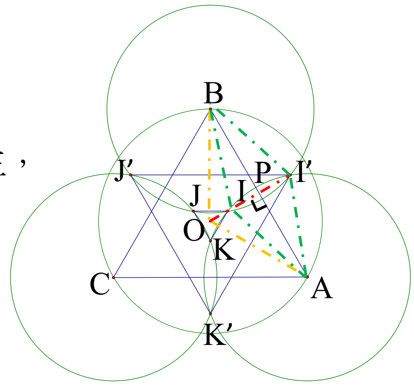
故$\overline{OP}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\overline{AP}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵$\overline{AI}=\overline{AI'}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API=\angle API'=90^\circ$

∴$\triangle API\cong\triangle API'$(RHS)，故$\overline{PI}=\overline{PI'}$

$\overline{PI}=\overline{PI'}=\sqrt{\overline{AI}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2 60^\circ}=\sqrt{R^2-\frac{3}{4}}$



圖十三

每一圓有 4 個交點，3 個圓共有 4x3÷2＝6 個交點，

連接交點產生 2 個正三角形，分別為正△IJK、正△I′J′K′

$\overline{OI}$為正△IJK 的外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}-\overline{PI}=\cos 60^\circ-\sqrt{R^2-\sin^2 60^\circ}$

$=\frac{1}{2}-\sqrt{R^2-\frac{3}{4}}$

$\overline{OI'}$為正△I′J′K′的外接圓半徑 $r_2=\overline{OP}+\overline{PI'}=\cos 60^\circ+\sqrt{R^2-\sin^2 60^\circ}$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{R^2-\frac{3}{4}}$

2. $\theta=360^\circ\div 4=90^\circ$

∵兩相鄰旋轉圓相交於一點時，$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$；且 $R=1$ 時旋轉圓相交於旋轉中心點 O，

∴旋轉圓半徑 R，須符合$\frac{\sqrt{2}}{2}<R<1$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 90°，

兩相鄰旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖十四，

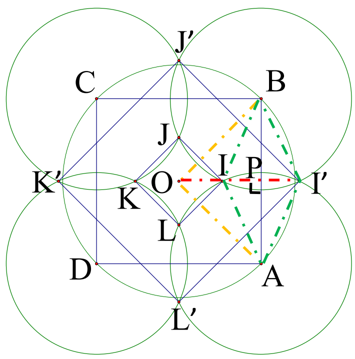
其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及點 I′，

$\overline{OI'}$相交$\overline{AB}$於點 P

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI'}$、$\overline{BI'}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

∴$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AI'}=\overline{BI'}=R$



圖十四

故$\overline{OP}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\overline{AP}=\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵$\overline{AI}=\overline{AI'}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API=\angle API'=90^\circ$

∴$\triangle API\cong\triangle API'$(RHS)，故$\overline{PI}=\overline{PI'}$

$\overline{PI}=\overline{PI'}=\sqrt{\overline{AI}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2 45^\circ}=\sqrt{R^2-\frac{1}{2}}$

每一圓有 4 個交點，4 個圓共有 4×4÷2＝8 個交點，

連接交點產生 2 個正方形，分別為正方形 IJKL、正方形 I′J′K′L′

$\overline{OI}$為正方形 IJKL 的外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}-\overline{PI}=\cos45^\circ-\sqrt{R^2-\sin^2 45^\circ}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{R^2-\frac{1}{2}}$

$\overline{OI'}$為正方形 I′J′K′L′的外接圓半徑 $r_2=\overline{OP}+\overline{PI'}=\cos45^\circ+\sqrt{R^2-\sin^2 45^\circ}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{R^2-\frac{1}{2}}$

3. $\theta=360^\circ\div5=72^\circ$

∵兩相鄰旋轉圓相交於一點時，$R=\sin36^\circ$；且 $R=\sin72^\circ$時，$W_1=1$，交點數增加(詳見第 11 頁(三)$W_g=1$ 說明)

∴旋轉圓半徑 R，須符合 $\sin36^\circ<R<\sin72^\circ$

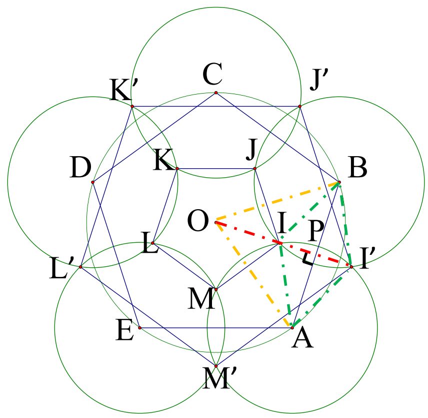
O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 72°，

兩相鄰旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖十五，

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及點 I′，

$\overline{OI'}$相交$\overline{AB}$於點 P



圖十五

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI'}$、$\overline{BI'}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

∴$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AI'}=\overline{BI'}=R$

故$\overline{OP}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos36^\circ$，$\overline{AP}=\sin36^\circ$

∵$\overline{AI}=\overline{AI'}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API=\angle API'=90^\circ$

∴$\triangle API\cong\triangle API'$(RHS)，故$\overline{PI}=\overline{PI'}$

$\overline{PI}=\overline{PI'}=\sqrt{\overline{AI}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2 36^\circ}$

每一圓有 4 個交點，5 個圓共有 4×5÷2＝10 個交點，

連接交點產生 2 個正五邊形，分別為正五邊形 IJKLM、

正五邊形 I′J′K′L′M′

$\overline{OI}$為正五邊形 IJKLM 的外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}-\overline{PI}=\cos36^\circ-\sqrt{R^2-\sin^2 36^\circ}$

$\overline{OI'}$為正五邊形 I′J′K′L′M′的外接圓半徑 $r_2=\overline{OP}+\overline{PI'}=\cos36^\circ+\sqrt{R^2-\sin^2 36^\circ}$

4. $\theta=360^\circ\div6=60^\circ$

∵兩相鄰旋轉圓相交於一點時，$R=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$；且 $R=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$時，$W_1=1$，交點數增加(詳見第 11 頁(三)$W_g=1$ 說明)

∴旋轉圓半徑 R，須符合$\frac{1}{2}$<R<$\frac{\sqrt{3}}{2}$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}$＝1，

旋轉圓每次旋轉 60°，

兩相鄰旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖十六，

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及點 I′，

$\overline{OI'}$相交$\overline{AB}$於點 P

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI'}$、$\overline{BI'}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

∴$\overline{OA}$＝$\overline{OB}$＝1，$\overline{AI'}$＝$\overline{BI'}$＝R

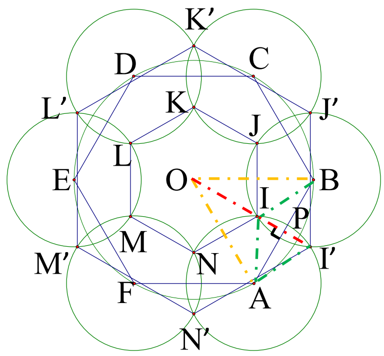
故$\overline{OP}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}$＝$\overline{BP}$

$\overline{OP}$＝cos30°＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\overline{AP}$＝sin30°＝$\frac{1}{2}$

∵$\overline{AI}$＝$\overline{AI'}$＝R，$\overline{AP}$＝$\overline{AP}$，∠API＝∠API′＝90°

∴△API≅△API′(RHS)，故$\overline{PI}$＝$\overline{PI'}$

$\overline{PI}$＝$\overline{PI'}$＝ $\sqrt{\overline{AI}^2-\overline{AP}^2}$ ＝ $\sqrt{R^2-\sin^2 30°}$ ＝ $\sqrt{R^2-\frac{1}{4}}$



圖十六

每一圓有 4 個交點，6 個圓共有 4×6÷2＝12 個交點，

連接交點產生 2 個正六邊形，分別為正六邊形 IJKLMN、

正六邊形 I′J′K′L′M′N′

$\overline{OI}$為正六邊形 IJKLMN 的外接圓半徑 r_1＝$\overline{OP}$-$\overline{PI}$

$= \cos 30° - \sqrt{R^2-\sin^2 30°}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2-\frac{1}{4}}$

$\overline{OI'}$為正六邊形 I′J′K′L′M′N′的外接圓半徑 r_2＝$\overline{OP}$+$\overline{PI'}$

$= \cos 30° + \sqrt{R^2-\sin^2 30°}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{R^2-\frac{1}{4}}$

5.一般化：

∵兩相鄰旋轉圓相交於一點時，R＝ $\sin\frac{180°}{n}$ ；且 n≥5，R＝ $\sin\frac{360°}{n}$ ，會產生 W_1＝1，交點數增加(詳見第 11 頁(三)W_g＝1 說明)

∴兩相鄰旋轉圓相交於兩點，旋轉圓半徑為 R，須符合 $\sin\frac{180°}{n}$<R<$\sin\frac{360°}{n}$

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}$＝1，

旋轉圓每次旋轉 $\frac{360°}{n}$ ，

兩相鄰旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖十七，

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及點 I′，

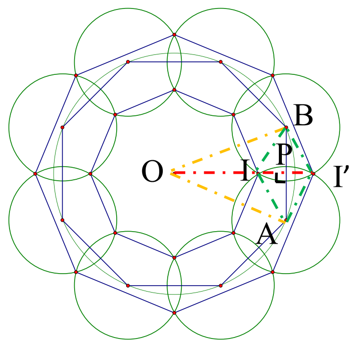
$\overline{OI'}$相交$\overline{AB}$於點 P

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI'}$、$\overline{BI'}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

∴$\overline{OA}$＝$\overline{OB}$＝1，$\overline{AI'}$＝$\overline{BI'}$＝R

故$\overline{OP}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}$＝$\overline{BP}$



圖十七

$\overline{OP}=\cos\frac{360°}{2n}=\cos\frac{180°}{n}$，$\overline{AP}=\sin\frac{360°}{2n}=\sin\frac{180°}{n}$

$\because\overline{AI}=\overline{AI'}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API=\angle API'=90°$

$\therefore\triangle API\cong\triangle API'(RHS)$，故$\overline{PI}=\overline{PI'}$

$\overline{PI}=\overline{PI'}=\sqrt{\overline{AI}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

每一圓有 4 個交點，n 個圓共有 4×n÷2＝2n 個交點，

連接交點產生 2 個正 n 邊形，

$\overline{OI}$為較小正 n 邊形的外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}-\overline{PI}=\cos\frac{180°}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

$\overline{OI'}$為較大正 n 邊形的外接圓半徑 $r_2=\overline{OP}+\overline{PI'}=\cos\frac{180°}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

兩旋轉圓相交於 2 點，$\theta=\frac{360°}{n}$時，旋轉圓半徑 R、旋轉圓產生的交點數、連接交點所產生正 n 邊形外接圓的半徑，如下表：

邊數	旋轉角度θ	旋轉圓半徑 R	交點數	交點連線圖形外接圓半徑 r_1	交點連線圖形外接圓半徑 r_2
3	$\theta=\frac{360°}{3}$ $=120°$	$\sin\frac{180°}{3}<R<1$ $=\sin60°<R<1$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}<R<1$	6	$\cos60°-\sqrt{R^2-\sin^2 60°}$ $=\frac{1}{2}-\sqrt{R^2-\frac{3}{4}}$	$\cos60°+\sqrt{R^2-\sin^2 60°}$ $=\frac{1}{2}+\sqrt{R^2-\frac{3}{4}}$
4	$\theta=\frac{360°}{4}$ $=90°$	$\sin\frac{180°}{4}<R<1$ $=\sin45°<R<1$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}<R<1$	8	$\cos45°-\sqrt{R^2-\sin^2 45°}$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{R^2-\frac{1}{2}}$	$\cos45°+\sqrt{R^2-\sin^2 45°}$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{R^2-\frac{1}{2}}$
5	$\theta=\frac{360°}{5}$ $=72°$	$\sin\frac{180°}{5}<R<\sin\frac{360°}{5}$ $=\sin36°<R<\sin72°$	10	$\cos36°-\sqrt{R^2-\sin^2 36°}$	$\cos36°+\sqrt{R^2-\sin^2 36°}$
6	$\theta=\frac{360°}{6}$ $=60°$	$\sin\frac{180°}{6}<R<\sin\frac{360°}{6}$ $=\sin30°<R<\sin60°$ $=\frac{1}{2}<R<\frac{\sqrt{3}}{2}$	12	$\cos30°-\sqrt{R^2-\sin^2 30°}$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}}$	$\cos30°+\sqrt{R^2-\sin^2 30°}$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{R^2-\frac{1}{4}}$
n	$\theta=\frac{360°}{n}$	$\sin\frac{180°}{n}<R<\sin\frac{360°}{n}$，當 $n\geq5$	2n	$\cos\frac{180°}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$	$\cos\frac{180°}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

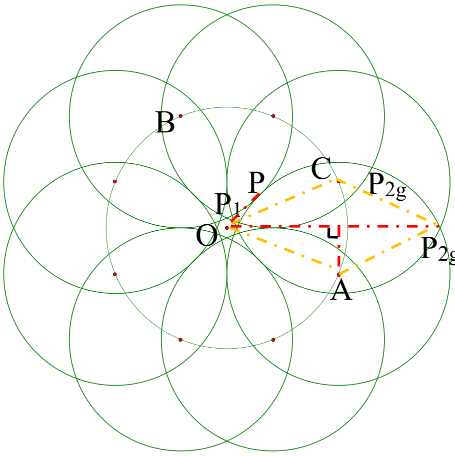
(三)$R<1$，$W_g=1$，且 $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中 $g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$

1.$n\geq5$ 時，會產生相間隔一個以上的旋轉圓相切於一點的情形，如圖十八，n 個旋轉圓，要保持 $R<1$，則必須符合 $W_g=1$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$，其理由如下：當 n 是偶數時，若 $g=[\frac{n}{2}]-1$，則圓 A 會與圓 A 旋轉 180°的圓相切於一點，則 $R=1$，故要使得 $R<1$ 必須符合 $W_g=1$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$；當 n 是奇數，從圓 A 順時針方向 $g=[\frac{n}{2}]-1$ 和逆時針方向的 $g=[\frac{n}{2}]-2$ 是同一個旋轉圓，故 $W_g=1$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$。

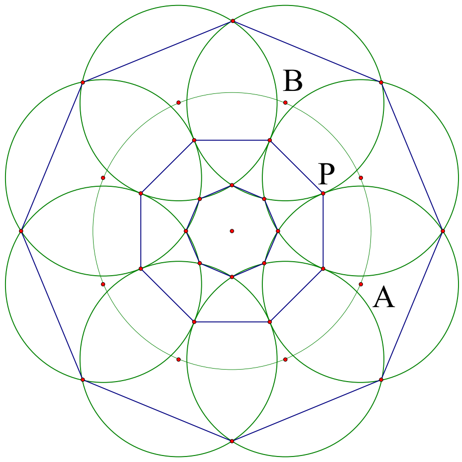
2.$W_g=1$，表示相間隔 g 個圓的兩個旋轉圓相切於 1 點，令和圓 A 相隔 g 個圓相切於 1 點的為旋轉圓圓 B，且圓 A 和圓 B 相切於 P 點。

當 g＝1 時，如圖十九，圓 A 會與其左右相鄰的 2 個圓各相交於 2 點，與另外 2 個圓相切於 1 點，共產生 6 個交點，n 個圓共有 6n÷2＝3n 個交點，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可得一正 n 邊形，共可產生 3 個大小不同的正 n 邊形。

當 g>1 時，圓 A 會與 2g 個圓相交於 2 點，與 2 個圓相切於 1 點，共會產生 4g+2 個交點，n 個圓共有(4g+2)xn÷2＝(2g+1)xn 個交點，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可得一正 n 邊形，共可產生(2g+1)個大小不同的正 n 邊形。



圖十八



圖十九

3.圓 A 上的交點即為每一個正 n 邊形的頂點，圓 A 上的交點會有兩兩對稱的情形，如圖十八，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點 O 由近而遠分別設為點 P_1、$P_2\cdots P_{2g+1}$，圓 A 與相鄰的圓 C 形成的交點為點 P_1 和點 P_{2g+1}，圓 A 與相隔一個圓形成的交點為點 P_2 和點 $P_{2g}\cdots$，以此類推，旋轉圓每次旋轉 $\frac{360°}{n}$，

$\therefore \angle AOC=\frac{360°}{n}$，

$\because \overline{AO}=\overline{CO}=1$，$\overline{AP}_{2g+1}=\overline{CP}_{2g+1}=R$，$\overline{OP}_{2g+1}=\overline{OP}_{2g+1}$

$\therefore \triangle AOP_{2g+1}\cong\triangle COP_{2g+1}(SSS)$，故 $\angle AOP_{2g+1}=\angle COP_{2g+1}=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{180°}{n}$，

同理可證 $\angle AOP_1=\angle AOP_{2g+1}=\frac{180°}{n}$、$\angle AOP_2=\angle AOP_{2g}=\frac{180°\times 2}{n}$、…，

4.為了方便表示，我們將圖十八局部放大，如圖二十，圓 A 與相鄰的旋轉圓 C 相交於點 P_1 及點 P_{2g+1}，與旋轉圓 B 相切於點 P，

$\because$ 圓 A 與圓 B 相切於點 P，

$\therefore \overline{OP}\perp\overline{AP}$，

$\because W_g=1$，

$\therefore$ 圓 B 為圓 A 旁的第 g+1 個圓，且 $\angle AOP=\frac{180°\times(g+1)}{n}$

$R=\overline{AP}=\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}$

連接所有圓切點所形成的正 n 邊形外接圓半徑為 $\overline{OP}=r_{g+1}=\cos\frac{180°\times(g+1)}{n}$

$=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{1-R^2}$，

由點 A 向 $\overline{OP}_{2g+1}$ 作垂直線，交於點 F，

$\because \overline{AP_1}=\overline{AP_{2g+1}}=R$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle AFP_1=\angle AFP_{2g+1}=90^\circ$，

$\therefore \triangle AFP_1 \cong \triangle AFP_{2g+1}$(RHS)，故$\overline{FP_1}=\overline{FP_{2g+1}}$

$\because$圓 C 為圓 A 相鄰的圓，且點 P_1 及點 P_{2g+1} 為圓 A 和圓 C 的 2 個交點，

$\therefore \angle AOP_1=\angle AOP_{2g+1}=\frac{180^\circ}{n}$

$\overline{OF}=\cos\frac{180^\circ}{n}$ ，$\overline{AF}=\sin\frac{180^\circ}{n}$

$\overline{FP_1}=\overline{FP_{2g+1}}=\sqrt{\overline{AP_1}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$

通過交點 P_{2g+1} 的最大正 n 邊形外接圓半徑$\overline{OP_{2g+1}}=\overline{OF}+\overline{FP_{2g+1}}$

$=\cos\frac{180^\circ}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$

通過交點 P_1 的最小正 n 邊形外接圓半徑$\overline{OP_1}=\overline{OF}-\overline{FP_1}$

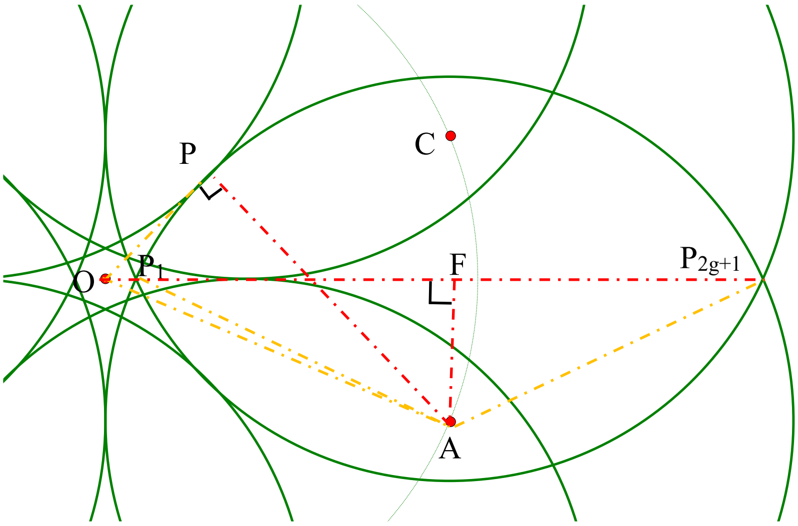
$=\cos\frac{180^\circ}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$

同理可得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_i=\cos\frac{180^\circ\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ\times i}{n}}$ ，其中 $1\leq i\leq g$

$r_{g+1}=\cos\frac{180^\circ\times(g+1)}{n}=\sqrt{1-R^2}$

$r_{2g+2-i}=\cos\frac{180^\circ\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ\times i}{n}}$ ，其中 $1\leq i\leq g$



圖二十

(四)$R<1$，$W_g=2$，且 $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中 $g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$

1.$n\geq5$ 時，會產生相間隔一個以上的旋轉圓相交於 2 點的情形，如圖二十一，n 個旋轉圓，要保持 $R<1$，則必須符合 $W_g=2$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$，其理由如下：當 n 是偶數時，若 $g=[\frac{n}{2}]-1$，則圓 A 會與圓 A 旋轉 180°的圓相交於 2 點，則 $R>1$，故要使得 $R<1$ 必須符合 $W_g=2$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$；當 n 是奇數，從圓 A 順時針方向 $g=[\frac{n}{2}]-1$ 和逆時針方向的 $g=[\frac{n}{2}]-2$ 是同一個旋轉圓，故 $W_g=2$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$。

2.$W_g=2$，表示相間隔 g 個圓的兩個旋轉圓相交於 2 點，
產生相交於 2 點的圖形會介於兩個相切於一點的圖形之間，
亦即旋轉圓半徑 R 的圖形會介於 $W_g=1$ 和 $W_{g+1}=1$ 的圖形之間，由第 12 頁

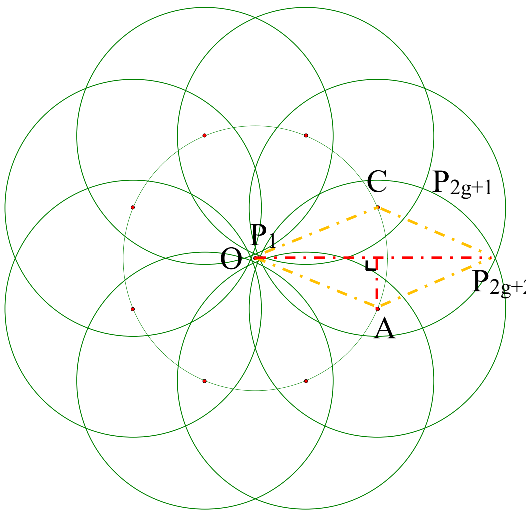
(三)-4 說明可知當 $W_g=1$ 時 $R=\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}$

故介於 $W_g=1$ 和 $W_{g+1}=1$ 的圖形的 R 範圍為：

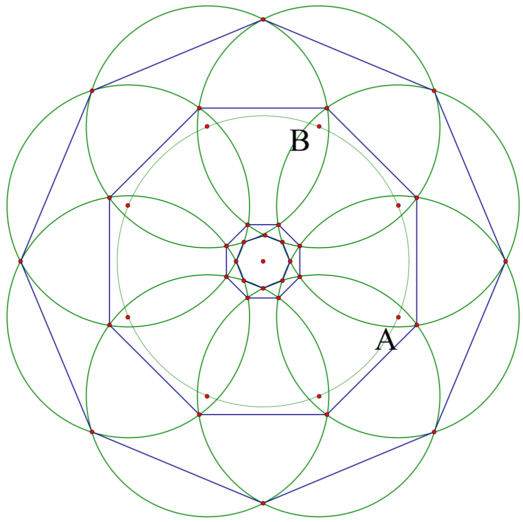
$\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}<R<\sin\frac{180°\times(g+2)}{n}$

當 $g=1$ 時，如圖二十二，圓 A 會與其左右共 4 個圓各相交於 2 點，共產生 8 個交點，n 個圓共有 $8n\div2=4n$ 個交點，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可得一正 n 邊形，共可產生 4 個正 n 邊形。

當 $g>1$ 時，圓 A 會與 $2g+2$ 個圓相交於 2 點，共會產生 $4g+4$ 個交點，n 個圓共有 $(4g+4)\times n\div2=(2g+2)\times n$ 個交點，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可得一正 n 邊形，共可產生 $(2g+2)$ 個正 n 邊形。



圖二十一



圖二十二

3.圓 A 上的交點即為每一個正 n 邊形的頂點，圓 A 上的交點會有兩兩對稱的情形，如圖二十一，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點 O 由近而遠分別設為點 P_1、$P_2\cdots P_{2g+2}$，圓 A 與相鄰的圓 C 形成的交點為點 P_1 和點 P_{2g+2}，圓 A 與相隔一個圓形成的交點為點 P_2 和點 $P_{2g+1}\cdots$，以此類推，旋轉圓每次旋轉 $\frac{360°}{n}$，

$\therefore \angle AOC=\frac{360°}{n}$，

$\because \overline{AO}=\overline{CO}=1$，$\overline{AP}_{2g+2}=\overline{CP}_{2g+2}=R$，$\overline{OP}_{2g+2}=\overline{OP}_{2g+2}$

$\therefore \triangle AOP_{2g+2}\cong\triangle COP_{2g+2}$(SSS)，故 $\angle AOP_{2g+2}=\angle COP_{2g+2}=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{180°}{n}$，

同理可證 $\angle AOP_1=\angle AOP_{2g+2}=\frac{180°}{n}$，$\angle AOP_2=\angle AOP_{2g+1}=\frac{180°\times2}{n}\cdots\cdots$

4.為了方便表示，我們將圖二十一局部放大，如圖二十三，圓 A 與相鄰的旋轉圓 C 相交於點 P_1 及點 P_{2g+2}，

由點 A 向 $\overline{OP}_{2g+2}$ 作垂直線，交於點 F，

$\because \overline{AP}_1=\overline{AP}_{2g+2}=R$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle AFP_1=\angle AFP_{2g+2}=90°$，

$\therefore \triangle AFP_1\cong\triangle AFP_{2g+2}$(RHS)，故 $\overline{FP}_1=\overline{FP}_{2g+2}$

$\because$ 圓 C 為圓 A 相鄰的圓，且點 P_1 及點 P_{2g+2} 為圓 A 和圓 C 的 2 個交點，

$\therefore \angle AOP_1=\angle AOP_{2g+2}=\frac{180°}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180°}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180°}{n}$

$\overline{FP}_1=\overline{FP}_{2g+2}=\sqrt{\overline{AP_1}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

通過交點 P_{2g+2} 的最大正 n 邊形外接圓半徑 $\overline{OP}_{2g+2}=\overline{OF}+\overline{FP}_{2g+2}$

$= \cos\frac{180°}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

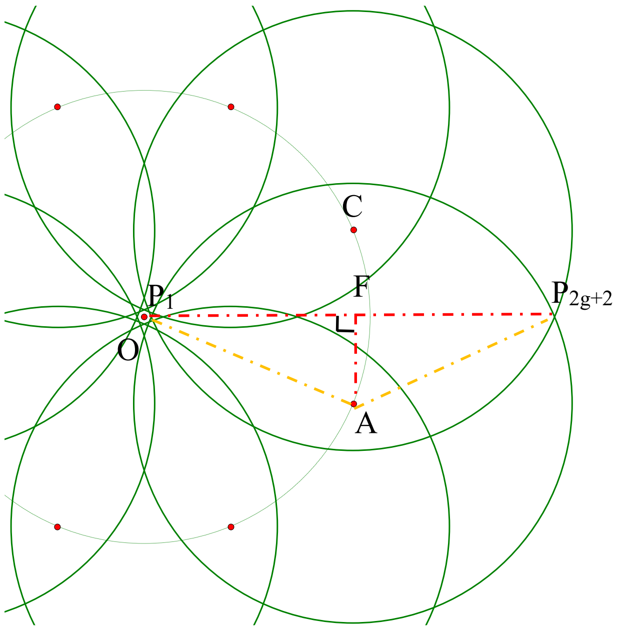
通過交點 P_1 的最小正 n 邊形外接圓半徑 $\overline{OP_1}=\overline{OF}-\overline{FP_1}$

$= \cos\frac{180°}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

同理可得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_i= \cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，其中 $1\le i\le g+1$

$r_{2g+3-i}= \cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，其中 $1\le i\le g+1$



圖二十三

整理上述 $W_0=1$、$W_0=2$、$W_g=1$、$W_g=2$，結果如下表：

<table>
<tr><th>W_g</th><th>旋轉圓半徑 R</th><th>交點數</th><th colspan="2">交點連線圖形
外接圓半徑</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$W_g=1$，
but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$
其中 $g=0$、1、…
$[\frac{n}{2}]-2$
當 $g=0$，無 W_{g-1}</td><td rowspan="2">$R= \sin\frac{180°\times(g+1)}{n}$</td><td rowspan="2">$n(2g+1)$</td><td>$g=0$</td><td>$r_1= \cos\frac{180°}{n}$</td></tr>
<tr><td>$g>0$</td><td>$r_i= \cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，
其中 $1\le i\le g$
$r_{g+1}= \cos\frac{180°\times(g+1)}{n} = \sqrt{1-R^2}$
$r_{2g+2-i}= \cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，
其中 $1\le i\le g$</td></tr>
<tr><td>$W_g=2$，
but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$
其中 $g=0$、1、…
$[\frac{n}{2}]-2$
當 $g=0$，無 W_{g-1}</td><td>$\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}<R<\sin\frac{180°\times(g+2)}{n}$
，當 $g<[\frac{n}{2}]-2$
$\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}<R<1$
，當 $g=[\frac{n}{2}]-2$</td><td>$n(2g+2)$</td><td colspan="2">$r_i= \cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，
其中 $1\le i\le g+1$
$r_{2g+3-i}= \cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，
其中 $1\le i\le g+1$</td></tr>
</table>

(五)R=1

1. $\theta=360^\circ\div3=120^\circ$

旋轉圓半徑為 R，且 R＝1

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 120˚，

兩旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖二十四，

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及基圓圓心 O，

$\overline{OI}$相交$\overline{AB}$於點 P

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

∴$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AI}=\overline{BI}=R=1$

故$\overline{OI}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，$\overline{AP}=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

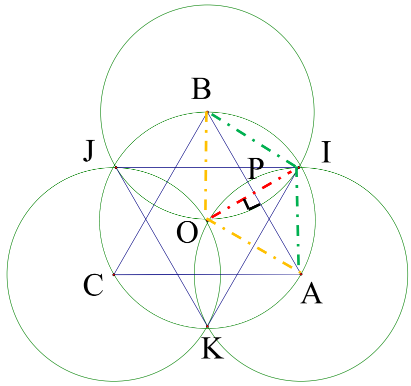
∵$\overline{AI}=\overline{AO}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API=\angle APO=90^\circ$

∴$\triangle API\cong\triangle APO$(RHS)，故$\overline{PI}=\overline{OP}=\frac{1}{2}$

除基圓圓心外，每一圓有 2 個交點，3 個圓共有 2x3÷2+1＝4 個交點，

扣除基圓圓心，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可產生 1 個正三角形，為正△IJK，

$\overline{OI}$為正△IJK 的外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}+\overline{PI}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$



圖二十四

2. $\theta=360^\circ\div4=90^\circ$

旋轉圓半徑為 R，且 R＝1

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 90˚，

兩旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖二十五，

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及基圓圓心 O，

$\overline{OI}$相交$\overline{AB}$於點 P

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

∴$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AI}=\overline{BI}=R=1$

故$\overline{OI}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\overline{AP}=\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

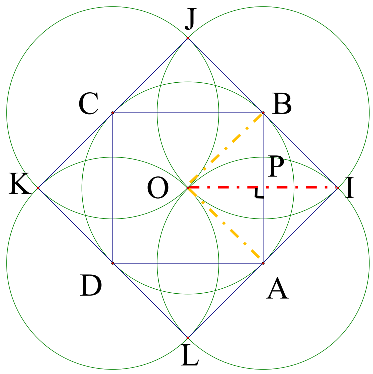
∵$\overline{AI}=\overline{AO}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API=\angle APO=90^\circ$

∴$\triangle API\cong\triangle APO$(RHS)，故$\overline{PI}=\overline{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

除基圓圓心外，每一圓有 2 個交點，4 個圓共有 2x4÷2+1＝5 個交點，

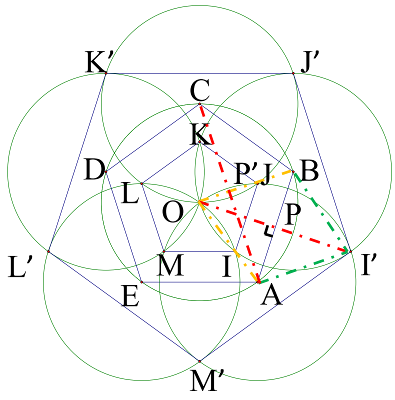
扣除基圓圓心，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可產生 1 個正方形，為正方形 IJKL，

$\overline{OI}$為正方形 IJKL 的外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}+\overline{PI}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$



圖二十五

3. $\theta=360^\circ\div5=72^\circ$



圖二十六

旋轉圓半徑為 R，且 R＝1

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 72°，

兩旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖二十六，

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I′及基圓圓心 O，

圓 A 與圓 C 相交於點 J 及基圓圓心 O，

$\overline{OI'}$相交$\overline{AB}$於點 P

$\because\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI'}$、$\overline{BI'}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

$\therefore\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AI'}=\overline{BI'}=R=1$

故$\overline{OI'}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos36^\circ$，$\overline{AP}=\sin36^\circ$

$\because\overline{AI'}=\overline{AO}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API'=\angle APO=90^\circ$

$\therefore\triangle API'\cong\triangle APO$(RHS)，故$\overline{PI'}=\overline{OP}=\cos36^\circ$

除基圓圓心外，每一圓有 4 個交點，5 個圓共有 $4\times5\div2+1=11$ 個交點，

扣除基圓圓心，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可產生 2 個正五邊形，

為正五邊形 IJKLM 和正五邊形 I′J′K′L′M′

$\overline{OI'}$為正五邊形 I′J′K′L′M′的外接圓半徑 $r_2=\overline{OP}+\overline{PI'}=\cos36^\circ+\cos36^\circ$

$=2\cos36^\circ$

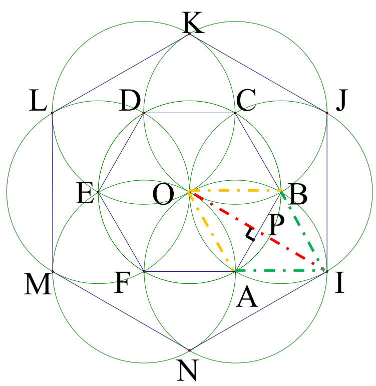
令$\overline{OJ}$交$\overline{AC}$於 P′，

同理可證

$\overline{OJ}$為正五邊形 IJKLM 的外接圓半徑 $r_1=\overline{OP'}+\overline{P'J}=\cos72^\circ+\cos72^\circ$

$=2\cos72^\circ$

4. $\theta=360^\circ\div6=60^\circ$



圖二十七

旋轉圓半徑為 R，且 R＝1

O 為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}=1$，

旋轉圓每次旋轉 60°，

兩旋轉圓之間剛好相交於 2 點，如圖二十七

其中圓 A 與圓 B 相交於點 I 及基圓圓心 O，

$\overline{OI}$相交$\overline{AB}$於點 P

$\because\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓 O 的半徑，

$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓 A、圓 B 的半徑

$\therefore\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AI}=\overline{BI}=R=1$

故$\overline{OI}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\overline{AP}=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$

$\because\overline{AI}=\overline{AO}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，$\angle API=\angle APO=90^\circ$

$\therefore\triangle API\cong\triangle APO$(RHS)，故$\overline{PI}=\overline{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

除基圓圓心外，每一圓有 4 個交點，6 個圓共有 $4\times6\div2+1=13$ 個交點，
扣除基圓圓心，將和基圓圓心 O 等距的交點連接起來可產生 2 個正六邊形，為正六邊形 IJKLMN 和旋轉圓圓心 ABCDEF

$\overline{OI}$為正六邊形 IJKLMN 的外接圓半徑 $r_2=\overline{OP}+\overline{PI}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{OA}$為正六邊形 ABCDEF 的外接圓半徑 $r_1=1$

5.一般化：R＝1 分為兩種情形

(1) $\theta=360^\circ\div n$，當 $n=2k+2$，$k\in N$

共會產生 n 個旋轉圓，如圖二十八，令其中一個為圓 A，圓 A 會與其旋轉 180°的圓 B 相切於旋轉中心點 O，圓 A 會與另外(n-2)個圓相交於兩點，其中一個交點為旋轉中心點 O，故圓 A 會有(n-2)+1 個交點，n 個旋轉圓會產生 n(n-2)÷2+1 個交點，共有(n-2)÷2 個正 n 邊形。圓 A 上的交點扣除旋轉中心點 O 即為每一個正 n 邊形的頂點，圓 A 上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點 O 由近而遠分別設為點 P_1、$P_2\cdots P_{n\div2-1}$，圓 A 與相鄰的圓 C 形成的交點為點 O 和點 $P_{n\div2-1}$，圓 A 與相隔一個圓形成的交點為點 O 和點 $P_{n\div2-2}\cdots$，以此類推，旋轉圓每次旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$，

$\therefore\angle AOC=\frac{360^\circ}{n}$，

$\because\overline{AO}=\overline{CO}=1$，$\overline{AP_{n\div2-1}}=\overline{CP_{n\div2-1}}=R$，$\overline{OP_{n\div2-1}}=\overline{OP_{n\div2-1}}$

$\therefore\triangle AOP_{n\div2-1}\cong\triangle COP_{n\div2-1}$(SSS)，故$\angle AOP_{n\div2-1}=\angle COP_{n\div2-1}=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{180^\circ}{n}$，

同理可證$\angle AOP_{n\div2-1}=\frac{180^\circ}{n}$、$\angle AOP_{n\div2-2}=\frac{180^\circ\times2}{n}$、……、$\angle AOP_1=\frac{180^\circ\times(n\div2-1)}{n}$。

由點 A 向$\overline{OP_{n\div2-1}}$作垂直線，交於點 F，

$\because\overline{OA}=\overline{AP_{n\div2-1}}=R$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle AFO=\angle AFP_{n\div2-1}=90^\circ$，

$\therefore\triangle AFO\cong\triangle AFP_{n\div2-1}$(RHS)，故$\overline{OF}=\overline{FP_{n\div2-1}}$

$\angle AOP_{n\div2-1}=\frac{180^\circ}{n}$

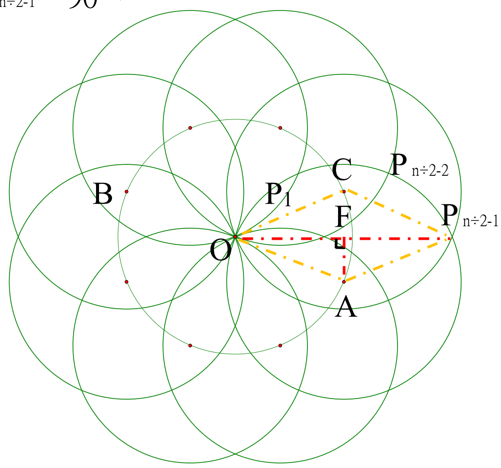
$\overline{OF}=\overline{FP_{n\div2-1}}=\cos\frac{180^\circ}{n}$

$\overline{OP_{n\div2-1}}=\overline{OF}+\overline{FP_{n\div2-1}}=2\cos\frac{180^\circ}{n}$

可得最大正 n 邊形外接圓半徑為 $2\cos\frac{180^\circ}{n}$，

同理可得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_i=2\cos\frac{180^\circ\times(n\div2-i)}{n}$，其中 $1\le i\le n\div2-1$



圖二十八

(2) $\theta=360^\circ\div n$，當 $n=2k+1$，$k\in N$

共會產生 n 個旋轉圓，如圖二十九，令其中一個為圓 A，圓 A 與其他 n-1 個旋轉圓各相交於兩點，且其中 1 點為旋轉中心點 O，故圓 A 有(n-1)+1 個交點，n 個旋轉圓會產生 n(n-1)÷2+1 個交點，共有(n-1)÷2 個正 n 邊形。圓 A 上的交點扣除旋轉中心點 O 即為每一個正 n 邊形的頂點，圓 A 上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點 O 由近而遠分別設為點 P_1、$P_2\cdots P_{(n-1)\div2}$，圓 A 與相鄰的圓 C 形成的交點為點 O 和點 $P_{(n-1)\div2}$，圓

A 與相隔一個圓形成的交點為點 O 和點 $P_{(n-1)\div2-1}$…，以此類推，旋轉圓每次旋轉 $\frac{360°}{n}$ ，∴∠AOC＝ $\frac{360°}{n}$ ，

∵$\overline{AO}=\overline{CO}=1$，$\overline{AP}_{(n-1)\div2}=\overline{CP}_{(n-1)\div2}=R$，$\overline{OP}_{(n-1)\div2}=\overline{OP}_{(n-1)\div2}$

∴$\triangle AOP_{(n-1)\div2}\cong\triangle COP_{(n-1)\div2}$(SSS)，故$\angle AOP_{(n-1)\div2}=\angle COP_{(n-1)\div2}=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{180°}{n}$ ，

同理可證$\angle AOP_{(n-1)\div2}=\frac{180°}{n}$ 、$\angle AOP_{(n-1)\div2-1}=\frac{180°\times2}{n}$ 、……、$\angle AOP_1=\frac{180°\times(n-1)\div2}{n}$ 。

由點 A 向$\overline{OP}_{(n-1)\div2}$作垂直線，交於點 F，

∵$\overline{OA}=\overline{AP}_{(n-1)\div2}=R$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle AFO=\angle AFP_{(n-1)\div2}=90°$，

∴$\triangle AFO\cong\triangle AFP_{(n-1)\div2}$(RHS)，故$\overline{OF}=\overline{FP}_{(n-1)\div2}$

$\angle AOP_{(n-1)\div2}=\frac{180°}{n}$

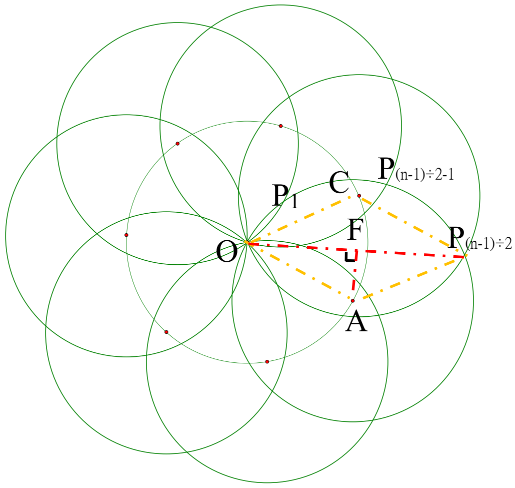
$\overline{OF}=\overline{FP}_{(n-1)\div2}=\cos\frac{180°}{n}$

$\overline{OP}_{(n-1)\div2}=\overline{OF}+\overline{FP}_{(n-1)\div2}=2\cos\frac{180°}{n}$

可得最大正 n 邊形外接圓半徑為 $2\cos\frac{180°}{n}$ ，

同理可得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_i=2\cos\frac{180°\times[(n-1)\div2-i+1]}{n}$ ，其中 $1\le i\le(n-1)\div2$



圖二十九

兩相鄰旋轉圓相交於 2 點，且其中 1 點為基圓圓心，$\theta=\frac{360°}{n}$時，旋轉圓產生的交點、連接交點所產生正 n 邊形外接圓的半徑，如下表：

邊數	旋轉角度 θ	旋轉圓半徑 R	交點數	交點連線圖形 外接圓半徑
3	$\theta=\frac{360°}{3}$ $=120°$	R＝1	4	$2\cos60°=1$
4	$\theta=\frac{360°}{4}$ $=90°$	R＝1	5	$2\cos45°=\sqrt{2}$
5	$\theta=\frac{360°}{5}$ $=72°$	R＝1	11	$r_1=2\cos72°$ $r_2=2\cos36°$
6	$\theta=\frac{360°}{6}$ $=60°$	R＝1	13	$r_1=2\cos60°=1$ $r_2=2\cos30°=\sqrt{3}$
n	$\theta=\frac{360°}{n}$	R＝1	n(n-1)÷2+1 當 n＝2k+1，k∈N	$r_i=2\cos\frac{180°\times[(n-1)\div2-i+1]}{n}$ ， 其中 $1\le i\le(n-1)\div2$
			n(n-2)÷2+1 當 n＝2k+2，k∈N	$r_i=2\cos\frac{180°\times(n\div2-i)}{n}$ ， 其中 $1\le i\le n\div2-1$

(六)R>1，分為兩種情形

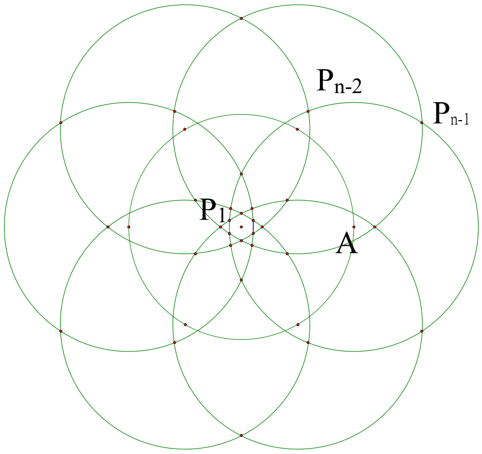
1. $\theta=360^\circ \div n$，當 $n=2k+2$，$k\in N$

共會產生 n 個旋轉圓，如圖三十，令其中一個為圓 A，圓 A 會與其他 n-1 個旋轉圓相交於 2 點，故圓 A 有(n-1)×2 個交點，n 個旋轉圓會產生(n-1)×2×n÷2＝n(n-1)個交點，共有(n-1)個正 n 邊形。圓 A 上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點 O 由近而遠分別設為點 P_1、$P_2\cdots P_{n-1}$，這些交點可分為三類：

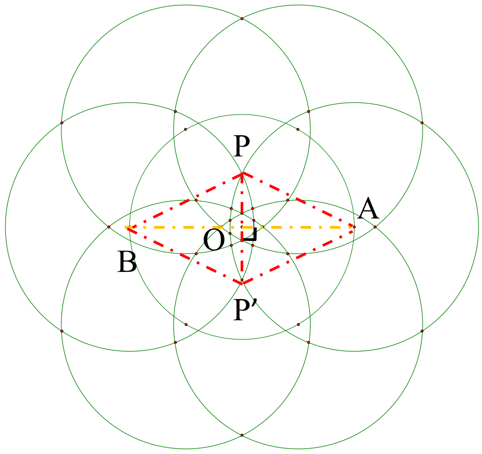
(1)$P_{n\div 2}$

令圓 A 旋轉 180°的旋轉圓為圓 B，如圖三十一，圓 A 與圓 B 相交於 2 點，分別為 P 及 P′，∵$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{AP'}=\overline{BP'}=R$，∴$\overline{PP'}$為$\overline{AB}$的中垂線，

故∠AOP＝90°，以點 P 為頂點的正 n 邊形外接圓半徑 $r_{n\div 2}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{R^2-1}$



圖三十



圖三十一

(2)$P_1\sim P_{n\div 2-1}$

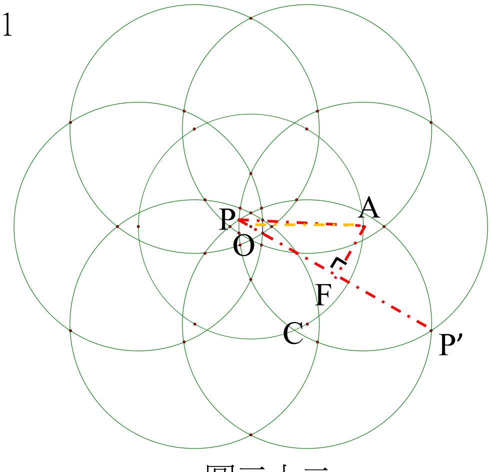
令圓 A 與相鄰旋轉圓圓 C 交於 2 點，分別為點 P 及點 P′，如圖三十二，由點 A 向$\overline{PP'}$作垂直線交於點 F，$\angle AOF=\frac{180^\circ}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180^\circ}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180^\circ}{n}$，

$\overline{AP}=R$

$\overline{PF}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$，以 P 為頂點的最小正 n 邊形外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}=\overline{PF}-\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}-\cos\frac{180^\circ}{n}$，

同理得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_i=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ\times i}{n}}-\cos\frac{180^\circ\times i}{n}$，其中 $1\le i\le n\div 2-1$



圖三十二

(3)$P_{n\div2+1}$~P_{n-1}

令圓 A 與相鄰旋轉圓圓 C 交於 2 點，分別為點 P 及點 P′，如圖三十三，由點 A 向$\overline{PP'}$作垂直線交於點 F，$\angle AOF=\frac{180^\circ}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180^\circ}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180^\circ}{n}$，

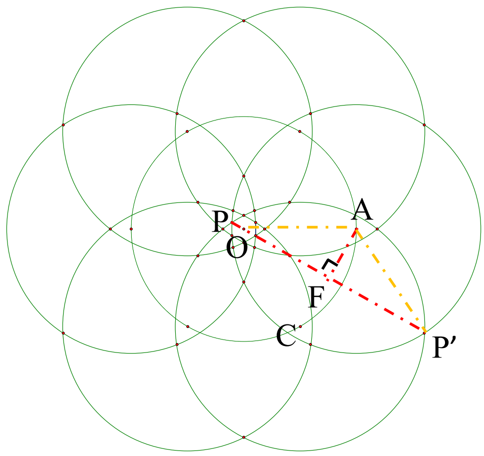
$\overline{AP'}=R$

$\overline{P'F}=\sqrt{\overline{AP'}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$，以 P′為頂點的最大正 n 邊形外接圓半徑 $r_{n-1}=\overline{OP'}$

$=\overline{P'F}+\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}+\cos\frac{180^\circ}{n}$，

同理得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_{n-i}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ\times i}{n}}+\cos\frac{180^\circ\times i}{n}$，其中 $1\leq i\leq n\div2-1$



圖三十三

2. $\theta=360^\circ\div n$，當 $n=2k+1$，$k\in N$

共會產生 n 個旋轉圓，如圖三十四，令其中一個為圓 A，圓 A 會與其他 n-1 個旋轉圓相交於 2 點，故圓 A 有(n-1)×2 個交點，n 個旋轉圓會產生(n-1)×2×n÷2＝n(n-1)個交點，共有(n-1)個正 n 邊形。圓 A 上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點 O 由近而遠分別設為點 P_1、P_2⋯P_{n-1}，這些交點可分為兩類：

(1)P_1~$P_{(n-1)\div2}$

令圓 A 與相鄰旋轉圓圓 C 交於 2 點，分別為點 P 及點 P′，如圖三十五，由點 A 向$\overline{PP'}$作垂直線交於點 F，$\angle AOF=\frac{180^\circ}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180^\circ}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180^\circ}{n}$，

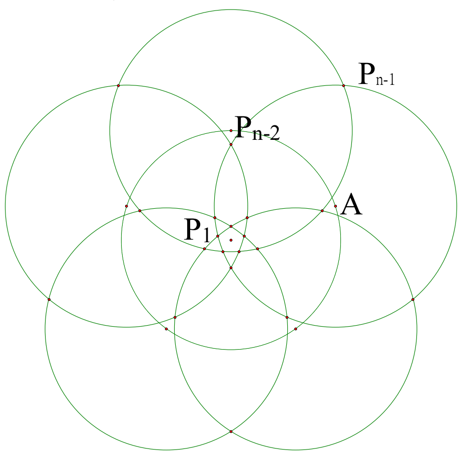
$\overline{AP}=R$

$\overline{PF}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$，以 P 為頂點的最小正 n 邊形外接圓半徑 $r_1=\overline{OP}=$

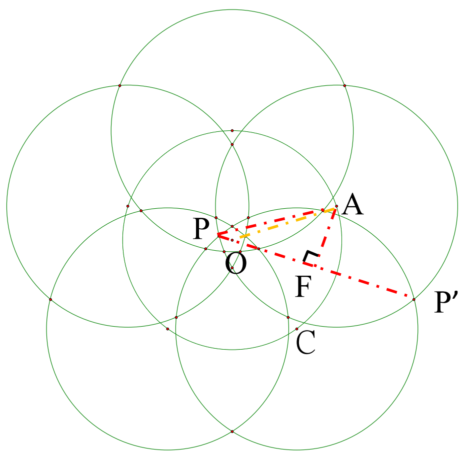
$\overline{PF}-\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}-\cos\frac{180^\circ}{n}$，

同理得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_i=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^\circ\times i}{n}}-\cos\frac{180^\circ\times i}{n}$，其中 $1\leq i\leq(n-1)\div2$



圖三十四



圖三十五

(2)$P_{(n-1)\div 2+1}$~P_{n-1}

令圓 A 與相鄰旋轉圓圓 C 交於 2 點，分別為點 P 及點 P′，如圖三十六，由點 A 向$\overline{PP'}$作垂直線交於點 F，$\angle AOF=\frac{180°}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180°}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180°}{n}$，

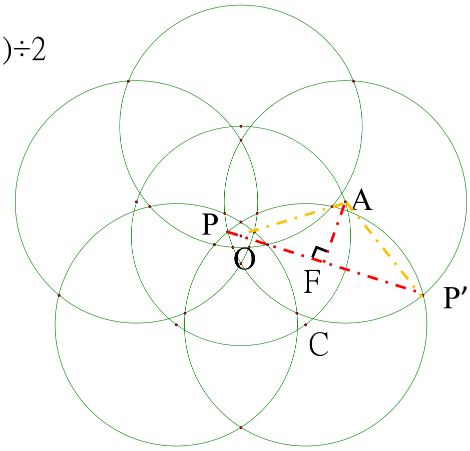
$\overline{AP'}=R$

$\overline{P'F}=\sqrt{\overline{AP'}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$，以 P′為頂點的最大正 n 邊形外接圓半徑 $r_{n-1}=\overline{OP'}$

$=\overline{P'F}+\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}+\cos\frac{180°}{n}$，

同理得出所有正 n 邊形的外接圓半徑：

$r_{n-i}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}+\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中 $1\le i\le (n-1)\div 2$



圖三十六

兩旋轉圓相交於 2 點，且 R>1，$\theta=\frac{360°}{n}$時，旋轉圓產生的交點、連接交點所產生正 n 邊形外接圓的半徑，如下表：

邊數	交點數	正多邊形數	交點連線圖形外接圓半徑
n＝2k+1，k∈ N	n(n-1)	n-1	$r_i=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}-\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中 $1\le i\le (n-1)\div 2$ $r_{n-i}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}+\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中 $1\le i\le (n-1)\div 2$
n＝2k+2，k∈ N			$r_i=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}-\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中 $1\le i\le n\div 2-1$ $r_{n\div 2}=\sqrt{R^2-1}$ $r_{n-i}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}+\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中 $1\le i\le n\div 2-1$

伍、研究結果

一、找出旋轉圓產生的交點數、交點產生正多邊形數的規律：

旋轉角度 $\theta=360^{\circ}\div n$，$n\in N$，且 $n\geq 3$

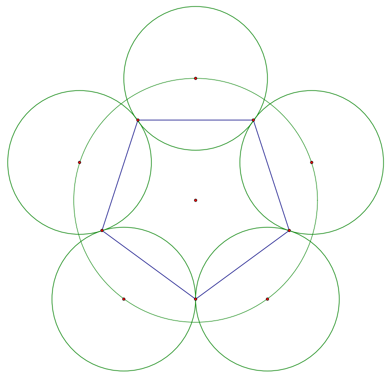
<table>
<tr><th colspan="2">分類</th><th>旋轉圓半徑 R</th><th>交點數</th><th>正多邊形數</th></tr>
<tr><td rowspan="2">R<1</td><td>$W_g=1$，
but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$
其中 $g=0$、1、$\cdots[\frac{n}{2}]-2$
當 $g=0$，無 W_{g-1}</td><td>$R=\sin\frac{180^{\circ}\times(g+1)}{n}$</td><td>n(2g+1)</td><td>2g+1</td></tr>
<tr><td>$W_g=2$，
but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$
其中 $g=0$、1、$\cdots[\frac{n}{2}]-2$
當 $g=0$，無 W_{g-1}</td><td>$\sin\frac{180^{\circ}\times(g+1)}{n}<R<\sin\frac{180^{\circ}\times(g+2)}{n}$
，當 $g<[\frac{n}{2}]-2$
$\sin\frac{180^{\circ}\times(g+1)}{n}<R<1$
，當 $g=[\frac{n}{2}]-2$</td><td>n(2g+2)</td><td>2g+2</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">R＝1</td><td rowspan="2">R＝1</td><td>n(n-1)÷2+1
當 n＝2k+1，k∈ N</td><td>(n-1)÷2</td></tr>
<tr><td>n(n-2)÷2+1
當 n＝2k+2，k∈ N</td><td>(n-2)÷2</td></tr>
<tr><td colspan="2">R>1</td><td>R>1</td><td>n(n-1)</td><td>n-1</td></tr>
</table>

二、連接交點所產生的正多邊形，這些正多邊形的外接圓半徑 r 計算公式有著對稱的關係，整理如下：

(一)R<1，$W_0=1$，連接交點會產生 1 個正多邊形

$r_1=\cos\frac{180^{\circ}}{n}$

例如 n＝5，$r_1=\cos 36^{\circ}$，其圖形如右：



(二)$W_0=2$，n＝3、4，$\sin\frac{180^{\circ}}{n}<R<1$ or

$W_0=2$，$n\geq 5$，$\sin\frac{180^{\circ}}{n}<R<\sin\frac{360^{\circ}}{n}$

連接交點會產生 2 個正多邊形

$r_1=\cos\frac{180^{\circ}}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^{\circ}}{n}}$

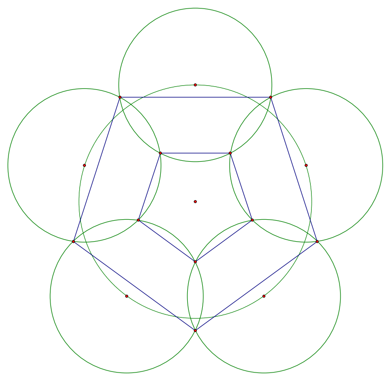
$r_2=\cos\frac{180^{\circ}}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180^{\circ}}{n}}$

例如 n＝5，

$r_1=\cos 36^{\circ}-\sqrt{R^2-\sin^2 36^{\circ}}$

$r_2=\cos 36^{\circ}+\sqrt{R^2-\sin^2 36^{\circ}}$

其圖形如右：



(三)R<1，W_g＝1，n≥5，且 W_{g+1}＝0，W_{g-1}＝2，其中 g＝1、2、…$[\frac{n}{2}]$-2，

連接交點會產生 2g+1 個正多邊形

r_i＝ $\cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，其中 1≤i≤g

r_{g+1}＝ $\cos\frac{180°\times(g+1)}{n}$ ＝ $\sqrt{1-R^2}$

r_{2g+2-i}＝ $\cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，其中 1≤i≤g

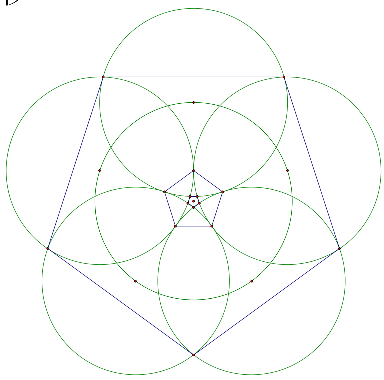
例如 n＝5，g＝$[\frac{5}{2}]$-2＝1，會產生 2g+1＝2+1＝3 個正多邊形

r_1＝ $\cos36°-\sqrt{R^2-\sin^2 36°}$ ，

r_2＝ $\sqrt{1-R^2}$

r_3＝ $\cos36°+\sqrt{R^2-\sin^2 36°}$

其圖形如右：



(四)R<1，W_g＝2，n≥5，且 W_{g+1}＝0，W_{g-1}＝2，其中 g＝1、2、…$[\frac{n}{2}]$-2，連接交點會產生 2g+2 個正多邊形

r_i＝ $\cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，其中 1≤i≤g+1

r_{2g+3-i}＝ $\cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$ ，其中 1≤i≤g+1

例如 n＝5，g＝$[\frac{5}{2}]$-2＝1，會產生 2g+2＝2+2＝4 個正多邊形

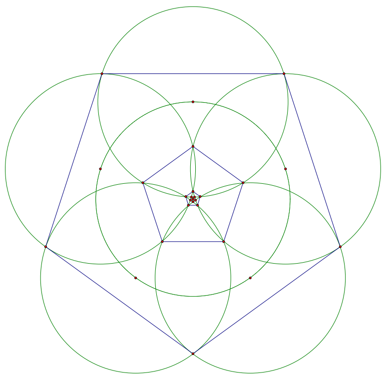
r_1＝ $\cos36°-\sqrt{R^2-\sin^2 36°}$ ，

r_2＝ $\cos72°-\sqrt{R^2-\sin^2 72°}$ ，

r_3＝ $\cos72°+\sqrt{R^2-\sin^2 72°}$ ，

r_4＝ $\cos36°+\sqrt{R^2-\sin^2 36°}$

其圖形如右：



(五)R=1 有兩種情形：

當 n＝2k+1，k∈ N，連接交點會產生(n-1)÷2 個正多邊形

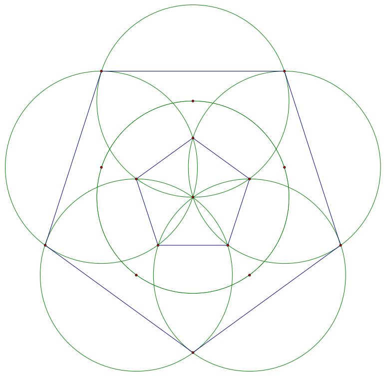
r_i＝ $2\cos\frac{180°\times[(n-1)\div2-i+1]}{n}$ ，其中 1≤i≤(n-1)÷2

例如 n＝5，k＝2，會產生(n-1)÷2＝2 個正多邊形，

r_1＝2cos72°

r_2＝2cos36°

其圖形如右：



當 n＝2k+2，k∈ N，連接交點會產生(n-2)÷2 個正多邊形

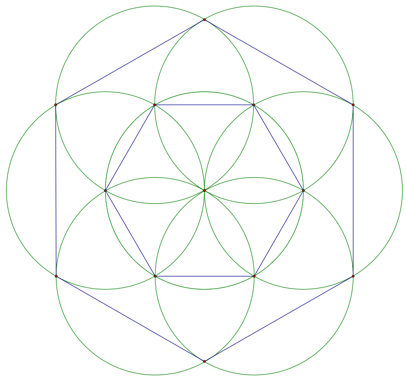
r_i＝$2\cos\frac{180°\times(n\div 2-i)}{n}$ ，其中 1≤i≤n÷2-1

例如 n＝6，k＝2，會產生(n-2)÷2＝2 個正多邊形，

r_1＝2cos60°，

r_2＝2cos30°

其圖形如右：



(六)R>1，連接交點會產生 n-1 個正多邊形，會有兩種情形：

當 n＝2k+1，k∈ N

r_i＝$\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}-\cos\frac{180°\times i}{n}$ ，其中 1≤i≤(n-1)÷2

r_{n-i}＝$\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}+\cos\frac{180°\times i}{n}$ ，其中 1≤i≤(n-1)÷2

例如 n＝5，k＝2，會產生 n-1＝4 個正多邊形，

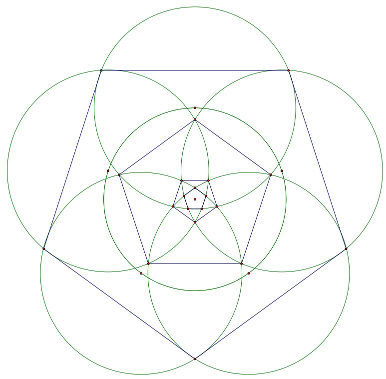
r_1＝$\sqrt{R^2-\sin^2 36°}-\cos 36°$ ，

r_2＝$\sqrt{R^2-\sin^2 72°}-\cos 72°$ ，

r_3＝$\sqrt{R^2-\sin^2 72°}+\cos 72°$ ，

r_4＝$\sqrt{R^2-\sin^2 36°}+\cos 36°$

其圖形如右：



當 n＝2k+2，k∈ N

r_i＝$\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}-\cos\frac{180°\times i}{n}$ ，其中 1≤i≤n÷2-1

$r_{n\div 2}$＝$\sqrt{R^2-1}$

r_{n-i}＝$\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}+\cos\frac{180°\times i}{n}$ ，其中 1≤i≤n÷2-1

例如 n＝6，k＝2，會產生 n-1＝5 個正多邊形，

r_1＝$\sqrt{R^2-\sin^2 30°}-\cos 30°$ ，

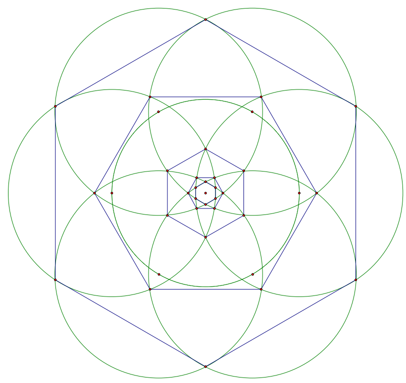
r_2＝$\sqrt{R^2-\sin^2 60°}-\cos 60°$ ，

r_3＝$\sqrt{R^2-1}$

r_4＝$\sqrt{R^2-\sin^2 60°}+\cos 60°$ ，

r_5＝$\sqrt{R^2-\sin^2 30°}+\cos 30°$

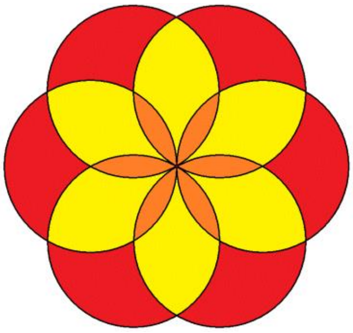
其圖形如右：



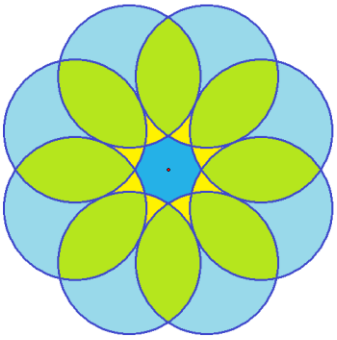
三、我們發現學校的廣場上是利用圓與圓的交會處，抿上不同顏色的石子，讓廣場展現許多花樣，如圖三十七、圖三十八，利用這個方式，我們也把研究出來的圖形上色，呈現出美麗的圖形，如圖三十九~四十二。

圖三十七

圖三十八

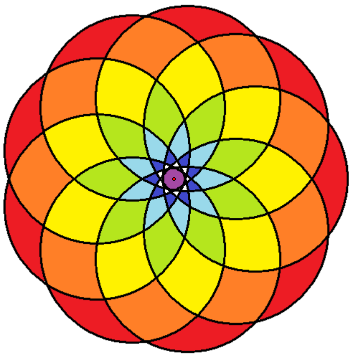


圖三十九 n=6，R=1



圖四十 n=8，W_1=1

圖四十一 n=9，W_2=2



圖四十二 n=9，R>1

四、為了方便觀察旋轉圓彼此之間交點數的變化，我們利用塑膠瓦楞板、彩色卡典西德紙、雙腳釘、強力磁鐵，透明圓形壓克力片做出可旋轉圓形盤，如圖四十三~圖四十六。

R=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，3 交點

$\frac{\sqrt{3}}{2}$<R<1，6 交點

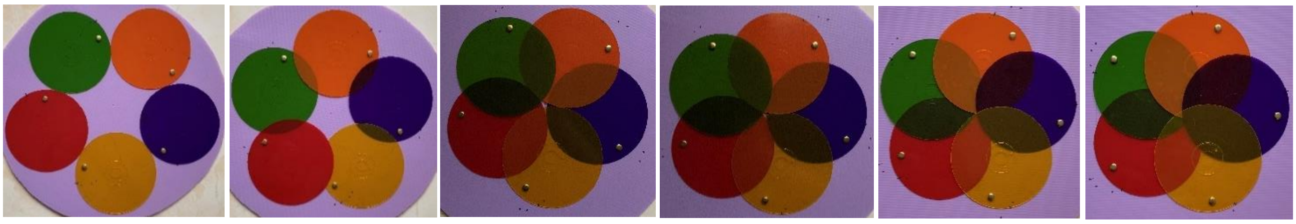
R=1，4 交點

R>1，6 交點

圖四十三 n=3

$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，4 交點　　$\frac{\sqrt{2}}{2}<R<1$，8 交點　　$R=1$，5 交點　　$R>1$，12 交點

圖四十四　n＝4



$R=\sin36^{\circ}$	$\sin36^{\circ}<R<\sin72^{\circ}$	$R=\sin72^{\circ}$	$\sin72^{\circ}<R<1$	$R=1$	$R>1$
5 交點	10 交點	15 交點	20 交點	11 交點	20 交點

圖四十五　n＝5

$R=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<R<\frac{\sqrt{3}}{2}$	$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}<R<1$	$R=1$	$R>1$
6 交點	12 交點	18 交點	24 交點	13 交點	30 交點

圖四十六　n＝6

陸、討論

一、探討旋轉圓半徑 R 與 W_g 的關係

(一)證明 $W_g=1$ 或 $W_g=2\Rightarrow R<1$

1.證明 $W_g=1$，but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中 $g=0、1、\cdots[\frac{n}{2}]-2\Rightarrow R<1$

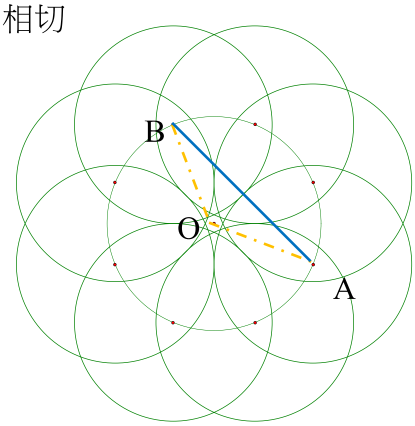
令 $W_g=1$ 如圖四十七，其中旋轉圓 A 與旋轉圓 B 相切

在△OAB 中$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\overline{AB}=2R$

∵在三角形中兩邊之和大於第三邊

∴$\overline{OA}+\overline{OB}>\overline{AB}$，$1+1>2R\Rightarrow 2>2R\Rightarrow 1>R$

故 $W_g=1$，$\Rightarrow R<1$



圖四十七

2.證明 $W_g=2$，but$W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中 $g=0$、1、$\cdots[\frac{n}{2}]-2 \Rightarrow R<1$

令 $W_g=2$ 如圖四十八，其中旋轉圓 A 與旋轉圓 B 相交於點 I 與點 I′，

其中$\overline{II'}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{II'}$與$\overline{AB}$相交於點 P，$\angle OPA=90^\circ$

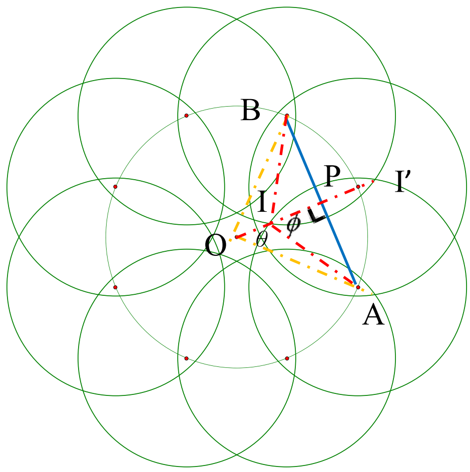
令$\angle AOP=\angle BOP=\theta$，$\angle AIP=\angle BIP=\phi$

∵三角形外角定理

∴$\angle AOP<\angle AIP$，$\theta<\phi$

則 $\sin\theta<\sin\phi \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{1}<\frac{\overline{AP}}{R}$，$\frac{1}{1}<\frac{1}{R}$，$R<1$

故 $W_g=2$，$\Rightarrow R<1$



圖四十八

(二)證明 $R<1 \Rightarrow W_g=1$ 或 $W_g=2$

本研究探討旋轉圓之間的交點，排除兩個相鄰旋轉圓完全沒有交點以及任意兩旋轉圓重合的情形，故必定符合 $W_g=1$ 或 $W_g=2$，but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中 $g=0$、1、$\cdots[\frac{n}{2}]-2$。

由以上討論可知 $W_g=1$ 或 $W_g=2 \Leftrightarrow R<1$。

二、不同的 g 值代表不同的圖形

$W_g=1$，且 $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中 $g=0$、1、$\cdots[\frac{n}{2}]-2$，每個 W_g代表不同的圖形，例

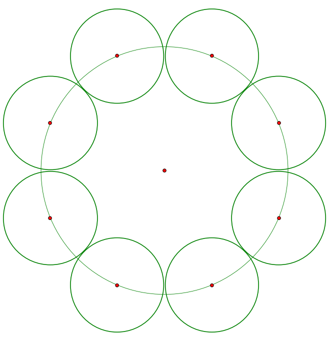
如 $n=8$，$[\frac{8}{2}]-2=2$，$g=0$、1、2

當 $g=0$，$W_0=1$ 且 $W_1=0$，其圖形如圖四十九。

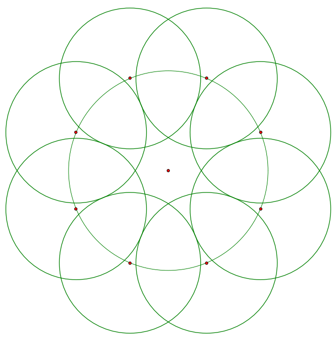
當 $g=1$，$W_1=1$ 且 $W_2=0$，$W_0=2$，其圖形如圖五十。

當 $g=2$，$W_2=1$ 且 $W_3=0$，$W_1=2$，其圖形如圖五十一。

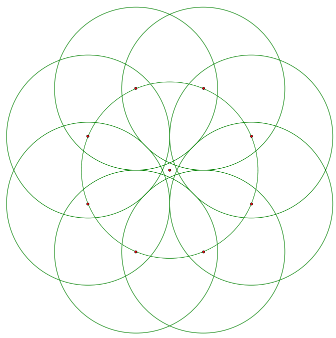
雖然 $g=0$、1、2 中都有 W_1，但所代表的是不同圖形中，間隔一個圓的旋轉圓相交的情形。



圖四十九



圖五十



圖五十一

三、利用立體呈現圓與圓之間的交點

我們使用塑膠圓環以及橡皮筋做成的形體來呈現圓與圓之間交點的關係：

(一)三個圓環：讓三個圓環直立並彼此間相切，即 R<1，W_0＝1，如圖五十二，以橡皮筋將相切處固定，用雙手翻轉圓環可以呈現 R<1，W_0＝2、R＝1 以及 R>1 的立體圖形，如圖五十二~圖五十五。

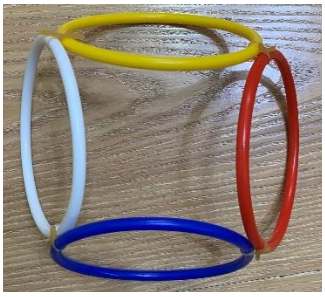
圖五十二 R<1，W_0＝1

圖五十三 R<1，W_0＝2

圖五十四 R＝1

圖五十五 R>1

(二)四個圓環：讓四個圓環由上而下向外傾斜並彼此間相切，即 R<1，W_0＝1，如圖五十六，以橡皮筋將相切處固定，用雙手翻轉圓環可以呈現 R<1，W_0＝2、R＝1 以及 R>1 的立體圖形，如圖五十六~圖五十九



圖五十六 R<1，W_0＝1

圖五十七 R<1，W_0＝2

圖五十八 R＝1

圖五十九 R>1

(三)五個圓環：讓五個圓環平放並彼此間相切，即 R<1，W_0＝1，如圖六十，以橡皮筋將相切處固定，用雙手翻轉圓環可以呈現 R<1，W_0＝2、R<1，W_1＝1、R＝1 以及 R>1 的立體圖形，如圖六十~圖六十四

圖六十 R<1，W_0＝1

圖六十一 R<1，W_0＝2

圖六十二 R<1，W_1＝1

圖六十三 R＝1

圖六十四 R>1

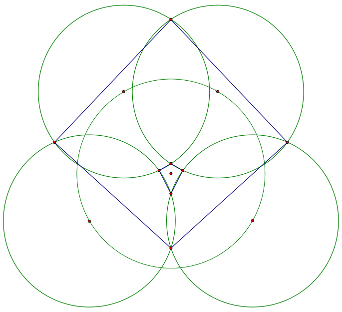
柒、結論

一、這次的研究，從我們學校的抿石子廣場的圓形造景開始，再加入台北火車站、台中陽明市政大樓地標以及街上的商標，引發我們研究的興趣，最後完成了這個研究，發現生活中處處充滿了數學的趣味。

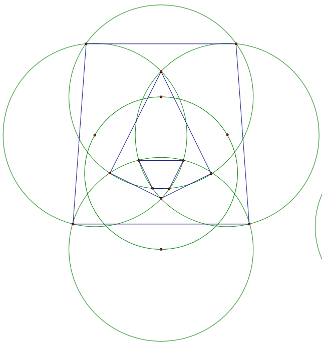
二、在研究過程中我們發現耐心與細心非常重要，圓與圓之間的交會關係，隨著圓形數量的增加也更加複雜。

三、未來發展方向：

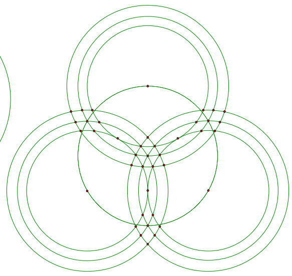
目前我們所研究的為旋轉圓旋轉固定角度所產生的交點，若以不同角度進行旋轉，如圖六十五、圖六十六，交點會產生什麼規律呢？另外，若將旋轉圓改為同心圓，如圖六十七、圖六十八，又會有什麼令人驚奇的結果？是未來可以研究的方向。



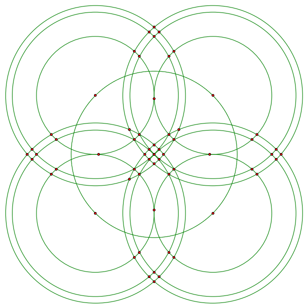
圖六十五



圖六十六



圖六十七



圖六十八

捌、參考資料

一、數學能力開發研究會（2017）・*史上最強圖解數學*・新北市：漢湘。

二、歐劭祺（2016）・*正 n 邊形上等弧交點所圍圖形之探討*・中華民國第 56 屆中小學科學展覽會作品說明書。

【評語】080402

從校園環境以及生活情境中的美麗圖形引發探究的靈感，本作品主要是在一個「基圓」的圓周上任取一點當作圓心，以不同半徑畫出「旋轉圓」，旋轉不同角度，探討旋轉圓之間的交點數、交點連線所產生的圖形及規律，並進一步探討連結前述交點所產生的正多邊形的相關性質；探究過程中，作者運用系統的手法，考慮了不同數目的旋轉圓與不同 R 的長度等條件下，並考慮相連的旋轉圓與不相連的旋轉圓的情況，會產生幾個交點以及交點連線所產生的正多邊形的性質，頗為完整；最後並利用簡單道具，分別以平面和立體的方式呈現圓與圓之間交點的情形，形成一幅幅美麗的圖案，令人感受到數學之美；研究成果可以與平面設計、藝術甚至 STEM 做連結，是一件兼具數學與美學的有趣作品。

作品海報

摘要

一、本研究探討在一個基圓[註一]的圓周上任取一點當作圓心，以不同半徑畫出旋轉圓[註二]，旋轉不同角度，旋轉角度θ[註三]＝360°÷n，n∈N，且n≥3，探討旋轉圓之間的交點數、交點連線所產生的圖形及規律。
二、我們發現旋轉圖產生的交點數、交點連線所產生正多邊形數與旋轉圓的半徑R有關，詳見作品說明書第23頁之研究結果一。
三、將和基圓圓心等距的交點連接起來會產生正多邊形，正多邊形的外接圓半徑公式有著對稱的關係。
四、利用簡單的道具可分別以平面和立體呈現圓與圓之間交點的情形。

註一：請參閱專有名詞定義(一)
註二：請參閱專有名詞定義(二)
註三：請參閱專有名詞定義(三)

壹、研究動機

學校校門口內的廣場由抿石子組成，每天經過的時候地上總會發出亮晶晶光芒，非常漂亮，有天午后，從學校的三樓往廣場一看，發現學校的廣場上有許多圓形所圍成的圖形，如圖一，圓與圓之間有許多交會的地方，呈現美麗的圖案，這景象引發我們的研究興趣。
另外在台北火車站大廳地板、台中陽明市政大樓5樓地板以及台中市街道看到的廣告商標，如圖二，似乎都是由圓形的交點和圓心所構成的圖形，我們發覺由圓與圓之間的重疊交會可以繪製出許多特別的圖形，經過討論後，決定展開我們「圓圓不絕」的研究。


圖一


圖二-1台北火車站大廳方位指示地標


圖二-2台中陽明市政大樓地標

圖二-3台中廣告商標

貳、研究目的

基於以上的研究動機，本研究的研究目的有二：
一、將發現的地標和商標利用圓形的交點和圓心畫出來。
二、將圓旋轉固定角度，找出交點的規律及產生的圖形。

參、研究器材

紙、筆、動態幾何系統the geometer's sketchpad、計算機、彩色卡典西德紙、強力磁鐵、塑膠瓦楞板、雙腳釘、透明圓形壓克力片、塑膠圓環、橡皮筋。

肆、研究過程

一、 專有名詞定義

(一)基圓：以1單位長為半徑所畫出來的圓，使旋轉圓的圓心在基圓圓周上以固定角度旋轉，基圓的圓心即為旋轉圓的旋轉中心。

(二)旋轉圓：圓心在基圓的圓周上所畫出來的圖形，以固定角度繞著基圓的圓心旋轉，旋轉圓的半徑以R表示。

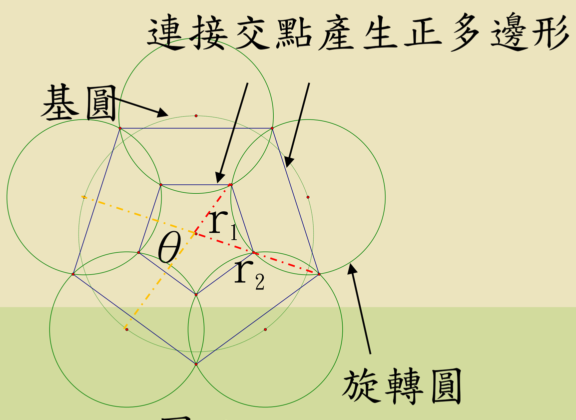
(三)旋轉角度：旋轉圓的圓心在基圓上每次繞著基圓圓心所旋轉的角度，以θ表示之。

(四)連接交點產生正多邊形：旋轉圓與旋轉圓會產生交點，將和基圓圓心等距的交點連接起來，所產生的正多邊形，由內而外正多邊形的外接圓半徑分別以r_1、r_2、r_3…表示，以此類推；各項專有名詞說明如圖三。

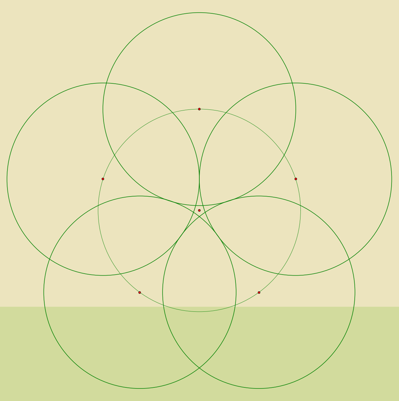
(五)間隔旋轉圓之間的交點數：隨著旋轉圓半徑R的變大，每個旋轉圓和其他旋轉圓的交點數會增加，在R<1的範圍內，以W_g表示兩旋轉圓之間相隔g個圓的交點數，g的範圍為0~$[\frac{n}{2}]-2$，其中[ ]為取頂符號，n為旋轉圓個數；W_0表示相鄰兩旋轉圓的交點數，W_1表示中間間隔一個旋轉圓的兩旋轉圓交點數，以此類推，如n=5，則$\theta=360°÷5=72°$，$g=[\frac{5}{2}]-2=1$，W_1=1之圖形如圖四-1，W_1＝2之圖形如圖四-2，且n＝5沒有W_2的圖形，因為間隔2個圓已經和另一個方向間隔1個圓重複。

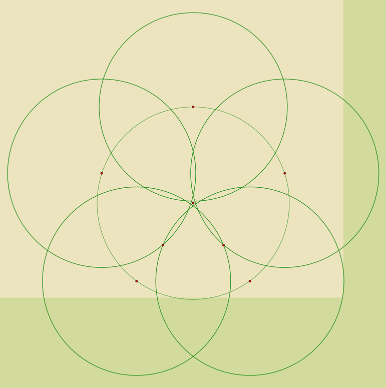
(六)取頂符號：以[ ]表示，[x]為大於等於x的整數中最小的一個，

如$[3.4]=4$，$[\frac{5}{2}]=3$，$[2]=2$。



圖三


圖四-1


圖四-2

二、文獻探討

本研究發想來自我們在生活中發現圓與圓交會的情形，因而自行發展出來的問題，歷屆科展中並無類似的研究，另外利用google搜索引擎以圓形、交點、正多邊形外接圓等關鍵字進行搜尋也無相關內容，為了使用一些數學原理，我們參閱「史上最強圖解數學」[1]，另外全國第56屆中小學科學展覽會作品「正n邊形上等弧交點所圍圖形之探討」[2]也提供我們研究的方向，分述如下：

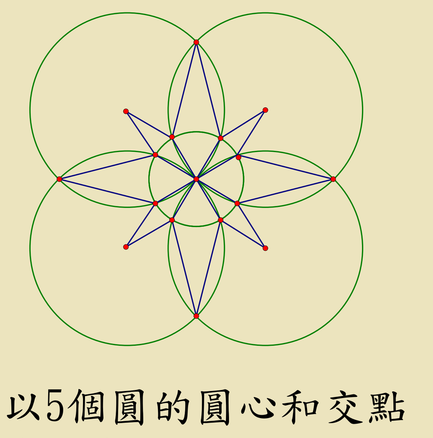
史上最強圖解數學（數學能力開發研究會，2017）	
書籍內容概述	對本研究的啟發
將國小、國中、高中數學概念加以視覺化，以圖解的方式進行說明。	本書提到三角形的全等(p98、p99)以及直角三角比(簡易三角函數，p120)，透過圖文的說明，可加以運用在本研究中。

正n邊形上等弧交點所圍圖形之探討（歐劭祺，2016）	
研究摘要與探討	對本研究的啟發
探討在正n邊形每邊的中垂線上取一點，以定長為半徑畫圓，得出的圓弧彼此間的交點所衍生出的圖形與原圖形間的關連。	一 該研究探討圓弧的交點連接起來的圖形，啟發我們也把圓與圓的交點連接起來進行研究。 二 該研究對於正n邊形的研究，先以正三角形、正方形…等較易理解的圖形先研究，最後再進行一般化的證明，啟發我們在一開始著手研究時也先以這樣的脈絡進行。

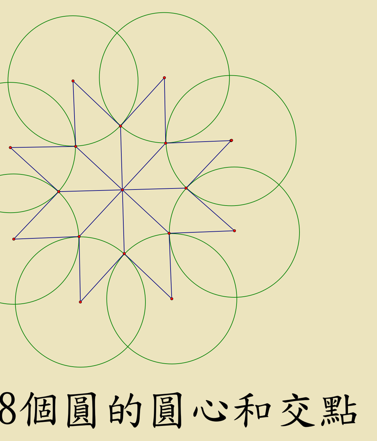
三、利用圓形作圖將研究動機中的三個圖形畫出來

將發現的地標和商標利用圖形畫出來，如圖五~圖七。

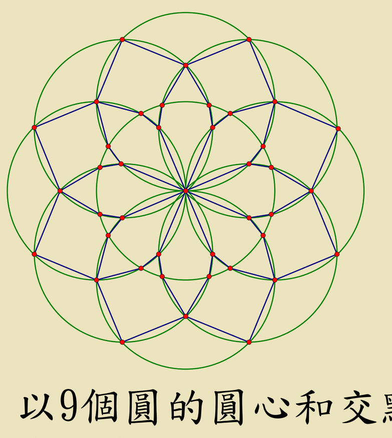

圖五 台北火車站大廳方位指示地標


以5個圓的圓心和交點畫出來的圖形


圖六 台中陽明市政大樓地標


以8個圓的圓心和交點畫出來的圖形

圖七 台中廣告商標


以9個圓的圓心和交點畫出來的圖形

四、 改變旋轉角度θ，探討對圖形產生的變化

在以圓形繪製地標以及商標時，我們發現將固定大小的圓形繞著一個中心點以相同角度旋轉所產生的交點和圓心，選擇其中一些交點連接起來時即會產生這些圖形，我們試著在一個基圓的圓周上任取一點當作圓心以不同的半徑畫圓，旋轉不同角度，來找出交點數、交點連線產生的圖形來進行研究。

(一)R<1，W_0＝1

一般化：

$\theta=360°÷n=\frac{360°}{n}$

O為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}$＝1，

旋轉圓每次旋轉$\frac{360°}{n}$，連接旋轉圓圓心所產生圖形為正n邊形。

兩旋轉圓之間剛好相切於1點，如圖八，

其中圓A與圓B相切於點I，

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓O的半徑，

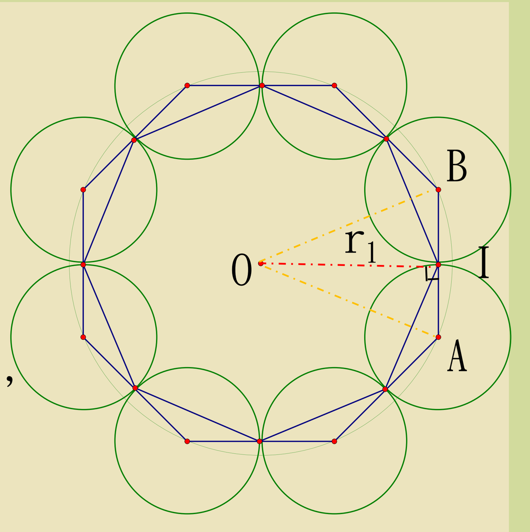
∴$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，且∠OAI＝∠OBI，且

$\overline{AI}$、$\overline{BI}$分別為圓A、圓B的半徑，$\overline{AI}=\overline{BI}$

∴△OAI≅△OBI(SAS)，且$\overline{OI}\perp\overline{AI}$。旋轉圓半徑R＝$\sin\frac{360°}{2n}$＝

每一圓有2個交點，n個圓共有2×n÷2＝n個交點，連接交點產生1個正n邊形在由旋轉圓圓心相連產生的正n邊形內部。

$\overline{OI}$為連接交點產生的正n邊形的外接圓半徑$r_1=\cos\frac{360°}{2n}=\cos\frac{180°}{n}$。



圖八

(二)R<1，W_0＝2

一般化：

∵兩旋轉圓相交於一點時，R＝$\sin\frac{180°}{n}$；且n≥5，R＝$\sin\frac{360°}{n}$，會產生W_1＝1，交點數增加(詳見3. W_g＝1說明)

∴兩旋轉圓相交於兩點，旋轉圓半徑為R，須符合$\sin\frac{180°}{n}<R<\sin\frac{360°}{n}$

O為基圓的圓心，半徑$\overline{OA}$＝1，旋轉圓每次旋轉$\frac{360°}{n}$，

兩旋轉圓之間剛好相交於2點，如圖九，

其中圓A與圓B相交於點I及點I′，$\overline{OI'}$相交$\overline{AB}$於點P

∵$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為圓O的半徑，$\overline{AI'}$、$\overline{BI'}$分別為圓A、圓B的半徑

∴$\overline{OA}=\overline{OB}=1$， $\overline{AI'}=\overline{BI'}=R$

故$\overline{OP}$為$\overline{AB}$的中垂線，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\cos\frac{360°}{2n}=\cos\frac{180°}{n}$，$\overline{AP}=\sin\frac{360°}{2n}=\sin\frac{180°}{n}$

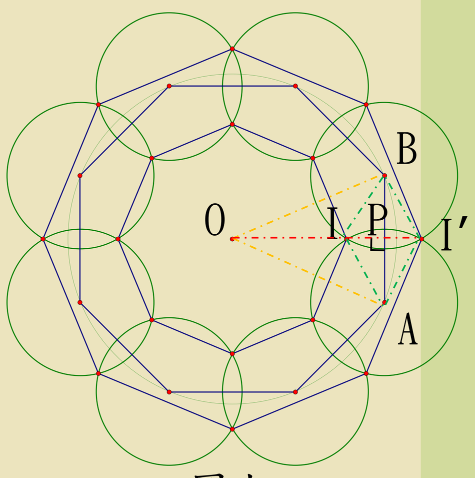
∵$\overline{AI}=\overline{AI'}=R$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，∠API＝∠API′＝90°

∴△API≅△API′(RHS)，故$\overline{PI}=\overline{PI'}$， $\overline{PI}=\overline{PI'}=\sqrt{\overline{AI}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

每一圓有4個交點，n個圓共有4×n÷2＝2n個交點，連接交點產生2個正n邊形，

$\overline{OI}$為較小正n邊形的外接圓半徑$r_1=\overline{OP}-\overline{PI}=\cos\frac{180°}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

$\overline{OI'}$為較大正n邊形的外接圓半徑$r_2=\overline{OP}+\overline{PI'}=\cos\frac{180°}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

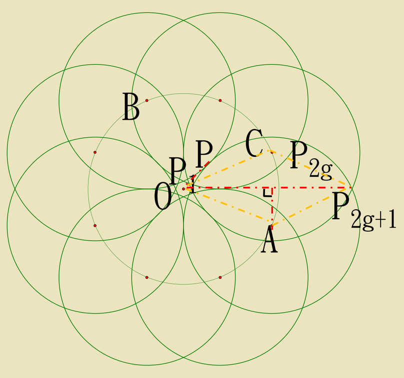


圖九

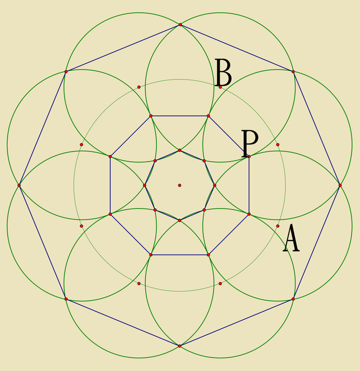
(三)$R<1$，$W_g=1$，且$W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$

1. $n\ge5$時，會產生相間隔一個以上的旋轉圓相切於一點的情形，如圖十，n個旋轉圓，要保持$R<1$，則必須符合$W_g=1$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$，其理由如下：當n是偶數時，若$g=[\frac{n}{2}]-1$，則圓A會與圓A旋轉180°的圓相切於一點，則$R=1$，故要使得$R<1$必須符合$W_g=1$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$；當n是奇數，從圓A順時針方向$g=[\frac{n}{2}]-1$和逆時針方向的$g=[\frac{n}{2}]-2$是同一個旋轉圓，故$W_g=1$，$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$。

2. $W_g=1$，表示相間隔g個圓的兩個旋轉圓相切於1點，令和圓A相隔g個圓相切於1點的為旋轉圓圓B，且圓A和圓B相切於P點。
當$g=1$時，如圖十一，圓A會與其左右相鄰的2個圓各相交於2點，與另外2個圓相切於1點，共產生6個交點，n個圓共有$6n\div2=3n$個交點，將和基圓圓心O等距的交點連接起來可得一正n邊形，共可產生3個大小不同的正n邊形。
當$g>1$時，圓A會與2g個圓相交於2點，與2個圓相切於1點，共會產生$4g+2$個交點，n個圓共有$(4g+2)\times n\div2=(2g+1)\times n$個交點，將和基圓圓心O等距的交點連接起來可得一正n邊形，共可產生$(2g+1)$個大小不同的正n邊形。



圖十



圖十一

3. 圓A上的交點即為每一個正n邊形的頂點，圓A上的交點會有兩兩對稱的情形，如圖十，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點O由近而遠分別設為點P_1、$P_2\cdots P_{2g+1}$，圓A與相鄰的圓C形成的交點為點P_1和點P_{2g+1}，圓A與相隔一個圓形成的交點為點P_2和點$P_{2g}\cdots$，以此類推，旋轉圓每次旋轉$\frac{360°}{n}$，

$\therefore\angle AOC=\frac{360°}{n}$，

$\because\overline{AO}=\overline{CO}=1$，$\overline{AP_{2g+1}}=\overline{CP_{2g+1}}=R$，$\overline{OP_{2g+1}}=\overline{OP_{2g+1}}$

$\therefore\triangle AOP_{2g+1}\cong\triangle COP_{2g+1}$(SSS)，故$\angle AOP_{2g+1}=\angle COP_{2g+1}=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{180°}{n}$

同理可證$\angle AOP_1=\angle AOP_{2g+1}=\frac{180°}{n}$、$\angle AOP_2=\angle AOP_{2g}=\frac{180°\times2}{n}$、…，

4. 為了方便表示，我們將圖十局部放大，如圖十二，圓A與相鄰的旋轉圓C相交於點P_1及點P_{2g+1}，與旋轉圓B相切於點P，

$\because$圓A與圓B相切於點P，

$\therefore\overline{OP}\perp\overline{AP}$，

$\because W_g=1$，

$\therefore$圓B為圓A旁的第g+1個圓，且$\angle AOP=\frac{180°\times(g+1)}{n}$

$R=\overline{AP}=\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}$

連接所有圓切點所形成的正n邊形外接圓半徑為$\overline{OP}=r_{g+1}=\cos\frac{180°\times(g+1)}{n}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{1-R^2}$，

由點A向$\overline{OP_{2g+1}}$作垂直線，交於點F，

$\because\overline{AP_1}=\overline{AP_{2g+1}}=R$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle AFP_1=\angle AFP_{2g+1}=90°$，

$\therefore\triangle AFP_1\cong\triangle AFP_{2g+1}$(RHS)，故$\overline{FP_1}=\overline{FP_{2g+1}}$

$\because$圓C為圓A相鄰的圓，且點P_1及點P_{2g+1}為圓A和圓C的2個交點，

$\therefore\angle AOP_1=\angle AOP_{2g+1}=\frac{180°}{n}$

$\overline{OF}=\cos\frac{180°}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180°}{n}$

$\overline{FP_1}=\overline{FP_{2g+1}}=\sqrt{\overline{AP_1}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

通過交點P_{2g+1}的最大正n邊形外接圓半徑$\overline{OP_{2g+1}}=\overline{OF}+\overline{FP_{2g+1}}=\cos\frac{180°}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

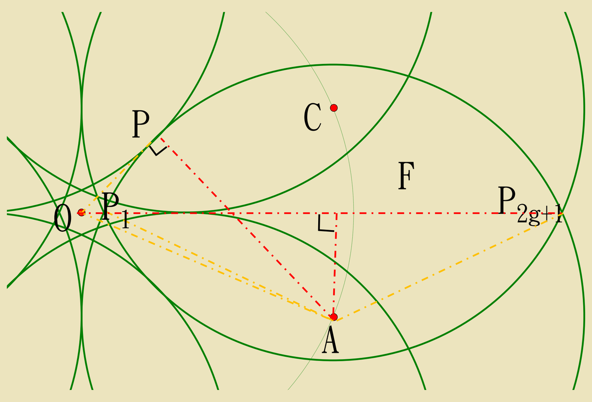
通過交點P_1的最小正n邊形外接圓半徑$\overline{OP_1}=\overline{OF}-\overline{FP_1}=\cos\frac{180°}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$

同理可得出所有正n邊形的外接圓半徑：

$r_i=\cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$，其中$1\le i\le g$

$r_{g+1}=\cos\frac{180°\times(g+1)}{n}=\sqrt{1-R^2}$

$r_{2g+2-i}=\cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$，其中$1\le i\le g$



圖十二

(四)$R<1$，$W_g=2$，且$W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$，其中$g=1、2、\cdots[\frac{n}{2}]-2$

利用類似的方法，找出了$R<1$，$W_g=2$的交點數、正n邊形數及所有正n邊形的外接圓半徑，詳見作品說明書第13頁~15頁。

整理上述$W_0=1$、$W_0=2$、$W_g=1$、$W_g=2$，結果如下表：

W_g	旋轉圓半徑R	交點數	交點連線圖形 外接圓半徑	
$W_g=1$， but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$ 其中$g=0、1、\cdots[\frac{n}{2}]-2$ 當$g=0$，無W_{g-1}	$R=\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}$	$n(2g+1)$	$g=0$	$r_1=\cos\frac{180°}{n}$
			$g>0$	$r_i=\cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$， 其中$1\le i\le g$ $r_{g+1}=\cos\frac{180°\times(g+1)}{n}=\sqrt{1-R^2}$ $r_{2g+2-i}=\cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$， 其中$1\le i\le g$
$W_g=2$， but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$ 其中$g=0、1、\cdots[\frac{n}{2}]-2$ 當$g=0$，無W_{g-1}	$\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}<R<\sin\frac{180°\times(g+2)}{n}$，當$g<[\frac{n}{2}]-2$ $\sin\frac{180°\times(g+1)}{n}<R<1$，當$g=[\frac{n}{2}]-2$	$n(2g+2)$	$r_i=\cos\frac{180°\times i}{n}-\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$， 其中$1\le i\le g+1$ $r_{2g+3-i}=\cos\frac{180°\times i}{n}+\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}$， 其中$1\le i\le g+1$	

(五)$R=1$

一般化，分為兩種情形

1. $\theta=360°\div n$，當$n=2k+2$，$k\in N$

共會產生n個旋轉圓，如圖十三，令其中一個為圓A，圓A會與其旋轉180°的圓B相切於旋轉中心點O，圓A會與另外$(n-2)$個圓相交於兩點，其中一個交點為旋轉中心點O，故圓A會有$(n-2)+1$個交點，n個旋轉圓會產生$n(n-2)\div2+1$個交點，共有$(n-2)\div2$個正n邊形。圓A上的交點扣除旋轉中心點O即為每一個正n邊形的頂點，圓A上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點O由近而遠分別設為點P_1、$P_2\cdots P_{n\div2-1}$，圓A與相鄰的圓C形成的交點為點O和點$P_{n\div2-1}$，圓A與相隔一個圓形成的交點為點O和點$P_{n\div2-2}\cdots$，以此類推，旋轉圓每次旋轉$\frac{360°}{n}$，$\therefore\angle AOC=\frac{360°}{n}$，

$\because\overline{AO}=\overline{CO}=1$，$\overline{AP_{n\div2-1}}=\overline{CP_{n\div2-1}}=R$，$\overline{OP_{n\div2-1}}=\overline{OP_{n\div2-1}}$

$\therefore\triangle AOP_{n\div2-1}\cong\triangle COP_{n\div2-1}$(SSS)，故$\angle AOP_{n\div2-1}=\angle COP_{n\div2-1}=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{180°}{n}$，

同理可證$\angle AOP_{n\div2-1}=\frac{180°}{n}$、$\angle AOP_{n\div2-2}=\frac{180°\times2}{n}$、……、$\angle AOP_1=\frac{180°\times(n\div2-1)}{n}$。

由點A向$\overline{OP_{n\div2-1}}$作垂直線，交於點F，

$\because\overline{OA}=\overline{AP_{n\div2-1}}=R$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle AFO=\angle AFP_{n\div2-1}=90°$，

$\therefore\triangle AFO\cong\triangle AFP_{n\div2-1}$(RHS)，故$\overline{OF}=\overline{FP_{n\div2-1}}$

$\angle AOP_{n\div2-1}=\frac{180°}{n}$

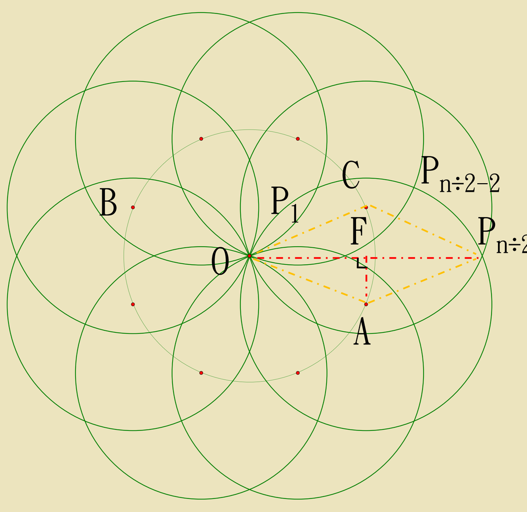
$\overline{OF}=\overline{FP_{n\div2-1}}=\cos\frac{180°}{n}$

$\overline{OP_{n\div2-1}}=\overline{OF}+\overline{FP_{n\div2-1}}=2\cos\frac{180°}{n}$

可得最大正n邊形外接圓半徑為$2\cos\frac{180°}{n}$，

同理可得出所有正n邊形的外接圓半徑：

$r_i=2\cos\frac{180°\times(n\div2-i)}{n}$，其中$1\le i\le n\div2-1$



圖十三

2. $\theta=360°\div n$，當$n=2k+1$，$k\in N$

共會產生n個旋轉圓，如圖十四，令其中一個為圓A，圓A與其他n-1個旋轉圓各相交於兩點，且其中1點為旋轉中心點O，故圓A有$(n-1)+1$個交點，n個旋轉圓會產生$n(n-1)\div2+1$個交點，共有$(n-1)\div2$個正n邊形。圓A上的交點扣除旋轉中心點O即為每一個正n邊形的頂點，圓A上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點O由近而遠分別設為點P_1、$P_2\cdots P_{(n-1)\div2}$，圓A與相鄰的圓C形成的交點為點O和點$P_{(n-1)\div2}$，圓A與相隔一個圓形成的交點為點O和點$P_{(n-1)\div2-1}\cdots$，以此類推，旋轉圓每次旋轉$\frac{360°}{n}$，$\therefore\angle AOC=\frac{360°}{n}$，

$\because\overline{AO}=\overline{CO}=1$，$\overline{AP_{(n-1)\div2}}=\overline{CP_{(n-1)\div2}}=R$，$\overline{OP_{(n-1)\div2}}=\overline{OP_{(n-1)\div2}}$

$\therefore\triangle AOP_{(n-1)\div2}\cong\triangle COP_{(n-1)\div2}$(SSS)，故$\angle AOP_{(n-1)\div2}=\angle COP_{(n-1)\div2}=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{180°}{n}$，

同理可證$\angle AOP_{(n-1)\div2}=\frac{180°}{n}$、$\angle AOP_{(n-1)\div2-1}=\frac{180°\times2}{n}$、……、$\angle AOP_1=\frac{180°\times(n-1)\div2}{n}$。

由點A向$\overline{OP_{(n-1)\div2}}$作垂直線，交於點F，

$\because\overline{OA}=\overline{AP_{(n-1)\div2}}=R$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle AFO=\angle AFP_{(n-1)\div2}=90°$，

$\therefore\triangle AFO\cong\triangle AFP_{(n-1)\div2}$(RHS)，故$\overline{OF}=\overline{FP_{(n-1)\div2}}$

$\angle AOP_{(n-1)\div2}=\frac{180°}{n}$

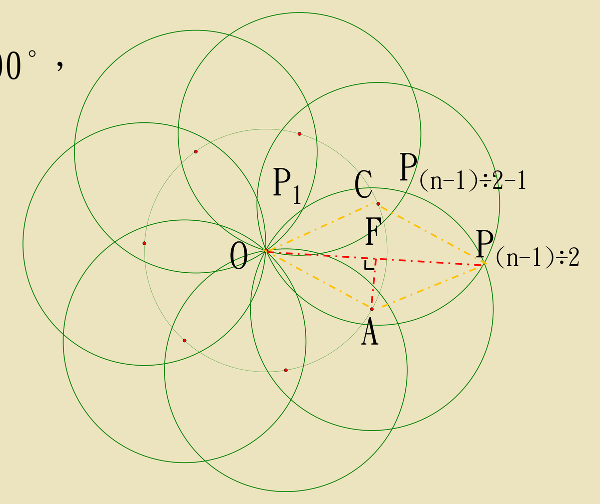
$\overline{OF}=\overline{FP_{(n-1)\div2}}=\cos\frac{180°}{n}$

$\overline{OP_{(n-1)\div2}}=\overline{OF}+\overline{FP_{(n-1)\div2}}=2\cos\frac{180°}{n}$

可得最大正n邊形外接圓半徑為$2\cos\frac{180°}{n}$，

同理可得出所有正n邊形的外接圓半徑：

$r_i=2\cos\frac{180°\times[(n-1)\div2-i+1]}{n}$，其中$1\le i\le(n-1)\div2$



圖十四

(六)$R>1$，分為兩種情形

1. $\theta=360°\div n$，當$n=2k+2$，$k\in N$

共會產生n個旋轉圓，如圖十五，令其中一個為圓A，圓A會與其他n-1個旋轉圓相交於2點，故圓A有$(n-1)\times2$個交點，n個旋轉圓會產生$(n-1)\times2\times n\div2=n(n-1)$個交點，共有$(n-1)$個正n邊形。圓A上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點O由近而遠分別設為點P_1、$P_2\cdots P_{n-1}$，這些交點可分為三類：

(1)$P_{n\div2}$

令圓A旋轉180°的旋轉圓為圓B，如圖十六，圓A與圓B相交於2點，分別為P及P′，

$\because\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{AP'}=\overline{BP'}=R$，$\therefore\overline{PP'}$為$\overline{AB}$的中垂線，

故$\angle AOP=90°$，以點P為頂點的正n邊形外接圓半徑$r_{n\div2}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{R^2-1}$

(2)P_1~$P_{n\div2-1}$

令圓A與相鄰旋轉圓圓C交於2點，分別為點P及點P′，如圖十七，由點A向$\overline{PP'}$作垂直線交於點F，$\angle AOF=\frac{180°}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180°}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180°}{n}$，

$\overline{AP}=R$

$\overline{PF}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$，以P為頂點的最小正n邊形外接圓半徑$r_1=\overline{OP}=$

$\overline{PF}-\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}-\cos\frac{180°}{n}$，

同理得出所有正n邊形的外接圓半徑：

$r_i=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}-\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中$1\le i\le n\div2-1$

(3)$P_{n\div2+1}$~P_{n-1}

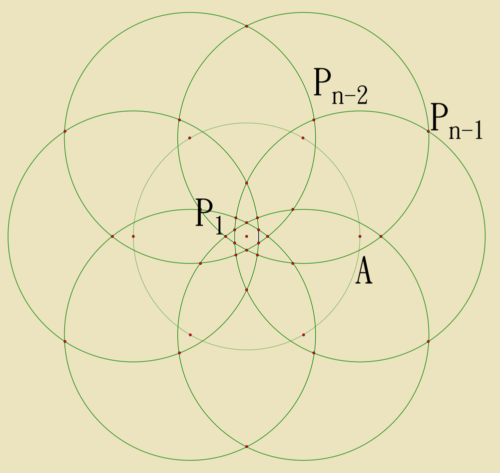
令圓A與相鄰旋轉圓圓C交於2點，分別為點P及點P′，如圖十八，由點A向$\overline{PP'}$作垂直線交於點F，$\angle AOF=\frac{180°}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180°}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180°}{n}$，$\overline{AP'}=R$

$\overline{P'F}=\sqrt{\overline{AP'}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$，以P′為頂點的最大正n邊形外接圓半徑$r_{n-1}=\overline{OP'}$

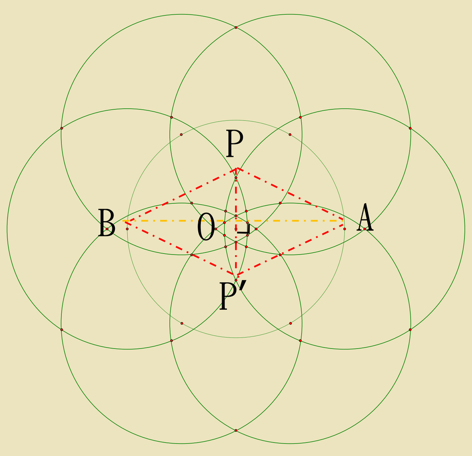
$=\overline{P'F}+\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}+\cos\frac{180°}{n}$，

同理得出所有正n邊形的外接圓半徑：

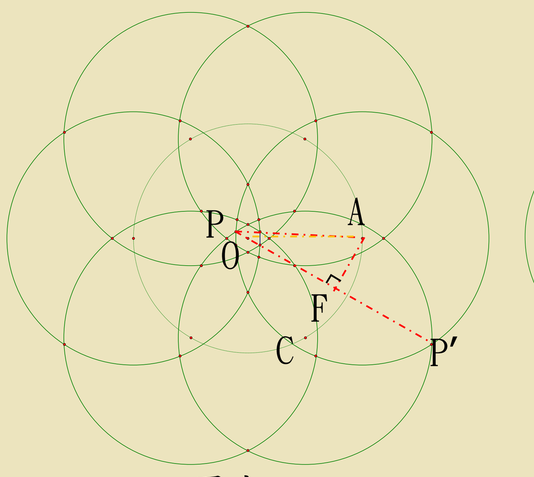
$r_{n-i}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}+\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中$1\le i\le n\div2-1$



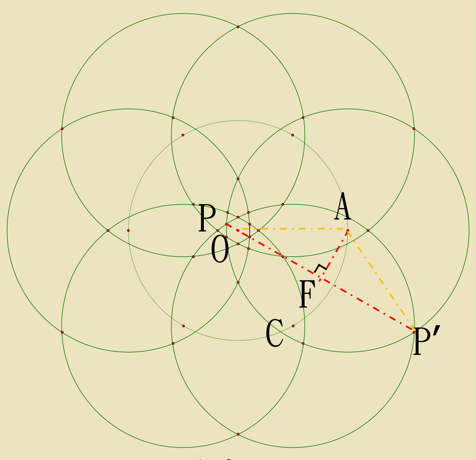
圖十五



圖十六



圖十七



圖十八

2. $\theta=360°\div n$，當$n=2k+1$，$k\in N$

共會產生n個旋轉圓，如圖十九，令其中一個為圓A，圓A會與其他n-1個旋轉圓相交於2點，故圓A有$(n-1)\times2$個交點，n個旋轉圓會產生$(n-1)\times2\times n\div2=n(n-1)$個交點，共有$(n-1)$個正n邊形。圓A上的交點會有兩兩對稱的情形，取上半部的交點，依照距離旋轉中心點O由近而遠分別設為點P_1、$P_2\cdots P_{n-1}$，這些交點可分為兩類：

(1)P_1~$P_{(n-1)\div2}$

令圓A與相鄰旋轉圓圓C交於2點，分別為點P及點P′，如圖二十，由點A向$\overline{PP'}$作垂直線交於點F，$\angle AOF=\frac{180°}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180°}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180°}{n}$，$\overline{AP}=R$

$\overline{PF}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$，以P為頂點的最小正n邊形外接圓半徑$r_1=\overline{OP}=$

$\overline{PF}-\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}-\cos\frac{180°}{n}$，

同理得出所有正n邊形的外接圓半徑：

$r_i=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}-\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中$1\le i\le(n-1)\div2$

(2)$P_{(n-1)\div2+1}$~P_{n-1}

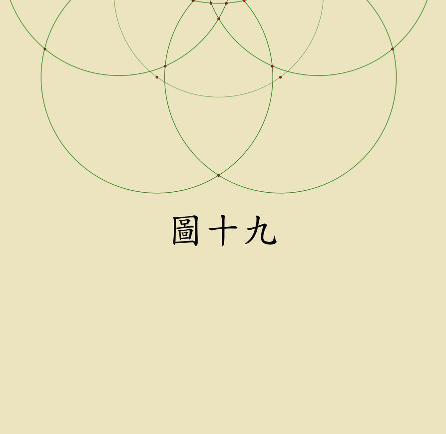
令圓A與相鄰旋轉圓圓C交於2點，分別為點P及點P′，如圖二十一，由點A向$\overline{PP'}$作垂直線交於點F，$\angle AOF=\frac{180°}{n}$，$\overline{AF}=\sin\frac{180°}{n}$，$\overline{OF}=\cos\frac{180°}{n}$，$\overline{AP'}=R$

$\overline{P'F}=\sqrt{\overline{AP'}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}$，以P′為頂點的最大正n邊形外接圓半徑$r_{n-1}=\overline{OP'}$

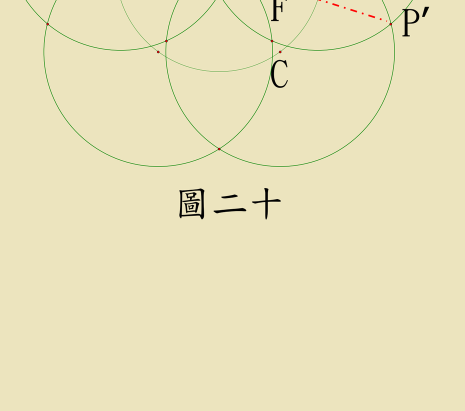
$=\overline{P'F}+\overline{OF}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°}{n}}+\cos\frac{180°}{n}$，

同理得出所有正n邊形的外接圓半徑：

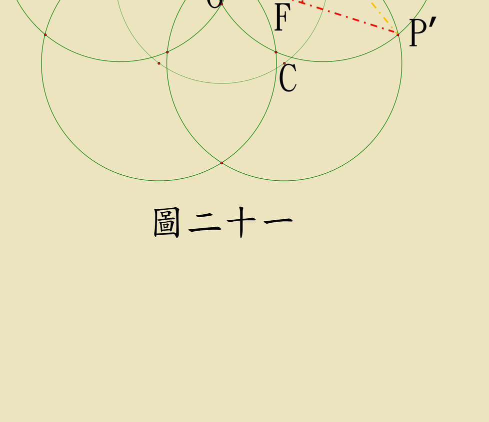
$r_{n-i}=\sqrt{R^2-\sin^2\frac{180°\times i}{n}}+\cos\frac{180°\times i}{n}$，其中$1\le i\le(n-1)\div2$



圖十九



圖二十



圖二十一

伍、研究結果

一、找出旋轉圓產生的交點數、交點產生正多邊形數的規律：旋轉角度$\theta=360^\circ\div n$，$n\in N$，且$n\geq3$

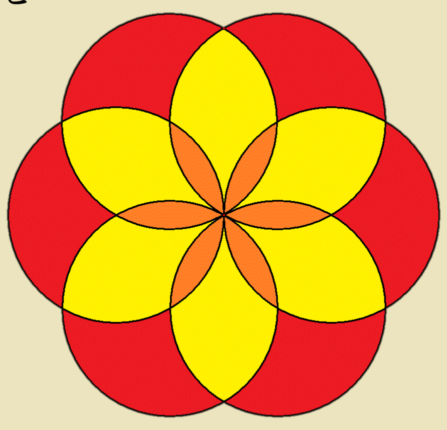
分類		旋轉圓半徑R	交點數	正多邊形數
R<1	$W_g=1$，but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$ 其中$g=0$、1、…$[\frac{n}{2}]-2$ 當$g=0$，無W_{g-1}	$R=\sin\frac{180^\circ\times(g+1)}{n}$	n(2g+1)	2g+1
	$W_g=2$，but $W_{g+1}=0$，$W_{g-1}=2$ 其中$g=0$、1、…$[\frac{n}{2}]-2$ 當$g=0$，無W_{g-1}	$\sin\frac{180^\circ\times(g+1)}{n}<R<\sin\frac{180^\circ\times(g+2)}{n}$，當$g<[\frac{n}{2}]-2$ $\sin\frac{180^\circ\times(g+1)}{n}<R<1$，當$g=[\frac{n}{2}]-2$	n(2g+2)	2g+2
R=1		R=1	n(n-1)÷2+1 當n=2k+1，k∈N	(n-1)÷2
			n(n-2)÷2+1 當n=2k+2，k∈N	(n-2)÷2
R>1		R>1	n(n-1)	n-1

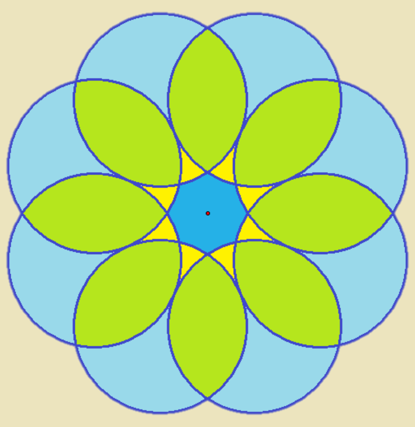
二、連接交點所產生的圓內接正多邊形，彼此之間的外接圓半徑r計算公式有著對稱的關係，詳見作品說明書第23頁~25頁。

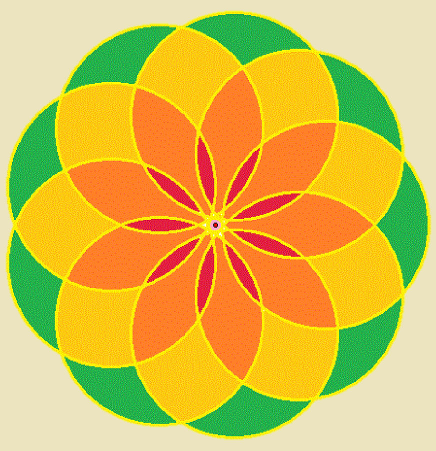
三、我們發現學校的廣場上是利用圓與圓的交會處，抿上不同顏色的石子，讓廣場展現許多花樣，如圖二十二、圖二十三，利用這個方式，我們也把研究出來的圖形上色，呈現出美麗的圖形，如圖二十四~二十七。

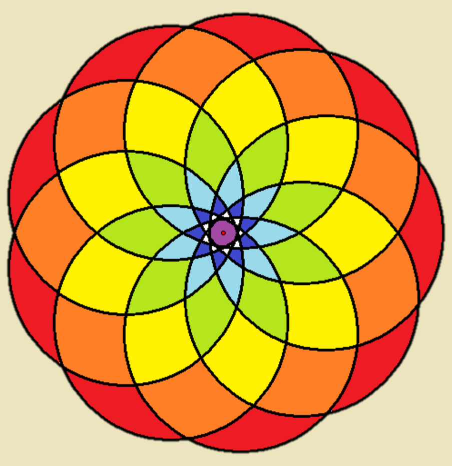

圖二十二


圖二十三


圖二十四 n=6，R=1


圖二十五 n=8，$W_1=1$


圖二十六 n=9，$W_2=2$


圖二十七 n=9，R>1

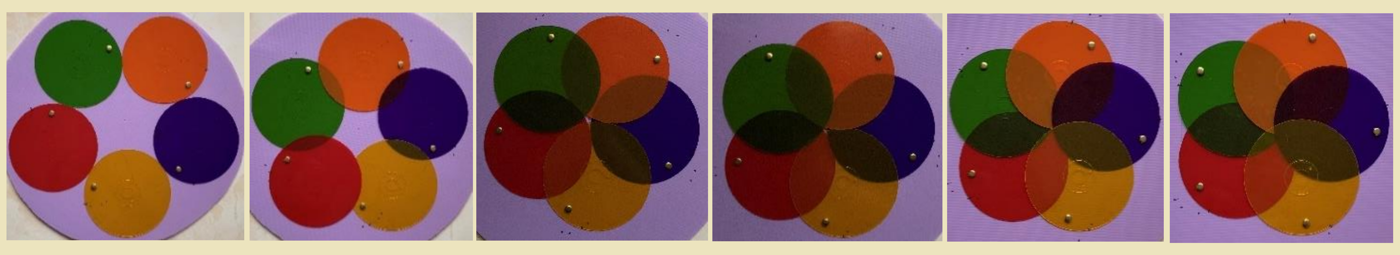
四、為了方便觀察旋轉圓彼此之間交點數的變化，我們利用塑膠瓦楞板、彩色卡典西德紙、雙腳釘、強力磁鐵，透明圓形壓克力片做出可旋轉圓形盤，如圖二十八~圖三十一。


$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，3交點　$\frac{\sqrt{3}}{2}<R<1$，6交點　R=1，4交點　R>1，6交點

圖二十八 n=3


$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，4交點　$\frac{\sqrt{2}}{2}<R<1$，8交點　R=1，5交點　R>1，12交點

圖二十九 n=4


R=sin36° 5交點　sin36°<R<sin72° 10交點　R=sin72° 15交點　sin72°<R<1 20交點　R=1 11交點　R>1 20交點

圖三十 n=5


$R=\frac{1}{2}$ 6交點　$\frac{1}{2}<R<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 12交點　$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 18交點　$\frac{\sqrt{3}}{2}<R<1$ 24交點　R=1 13交點　R>1 30交點

圖三十一 n=6

陸、討論

一、探討旋轉圓半徑R與W_g的關係，詳見作品說明書第27頁~28頁。

二、討論不同的g值代表不同的圖形，詳見作品說明書第28頁。

三、利用立體呈現圓與圓之間的交點

我們使用塑膠圓環以及橡皮筋做成的形體來呈現圓與圓之間交點的關係：

(一)三個圓環：讓三個圓環直立並彼此間相切，即R<1，$W_0=1$，如圖三十二，以橡皮筋將相切處固定，用雙手翻轉圓環可以呈現R<1，$W_0=2$、R=1以及R>1的立體圖形，如圖三十二~圖三十五。

(二)四個圓環：讓四個圓環由上而下向外傾斜並彼此間相切，即R<1，$W_0=1$，如圖三十六，以橡皮筋將相切處固定，用雙手翻轉圓環可以呈現R<1，$W_0=2$、R=1以及R>1的立體圖形，如圖三十六~圖三十九

(三)五個圓環：讓五個圓環平放並彼此間相切，即R<1，$W_0=1$，如圖四十，以橡皮筋將相切處固定，用雙手翻轉圓環可以呈現R<1，$W_0=2$、R<1，$W_1=1$、R=1以及R>1的立體圖形，如圖四十~圖四十四


圖三十二 R<1，$W_0=1$


圖三十三 R<1，$W_0=2$


圖三十四 R=1


圖三十五 R>1


圖三十六 R<1，$W_0=1$


圖三十七 R<1，$W_0=2$


圖三十八 R=1


圖三十九 R>1


圖四十 R<1，$W_0=1$


圖四十一 R<1，$W_0=2$


圖四十二 R<1，$W_1=1$


圖四十三 R=1


圖四十四 R>1

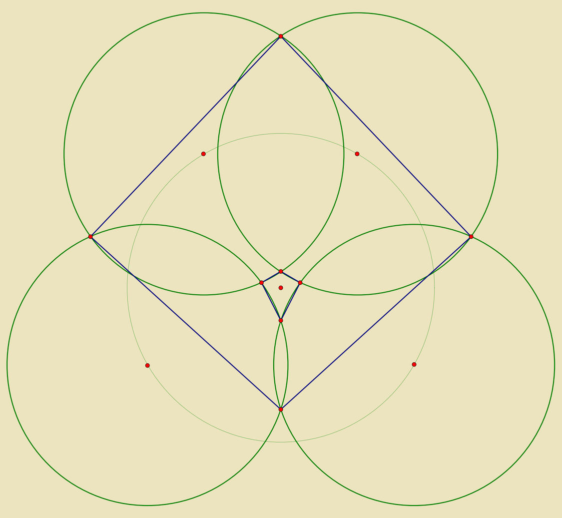
柒、結論

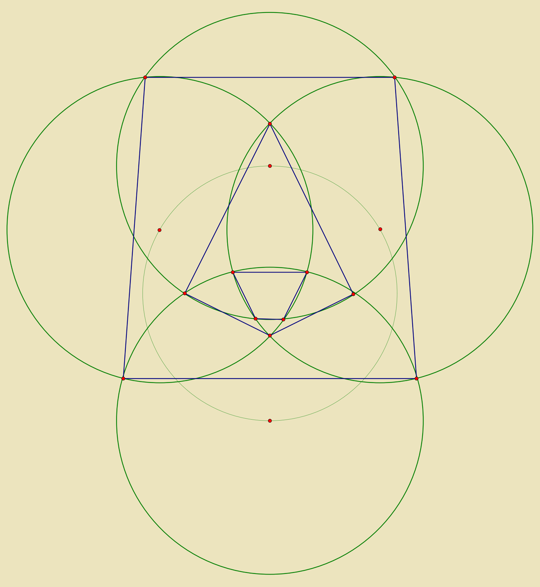
一、這次的研究，從我們學校的抿石子廣場的圖形造景開始，再加入台北火車站、台中陽明市政大樓地標以及街上的商標，引發我們研究的興趣，最後完成了這個研究，發現生活中處處充滿了數學的趣味。

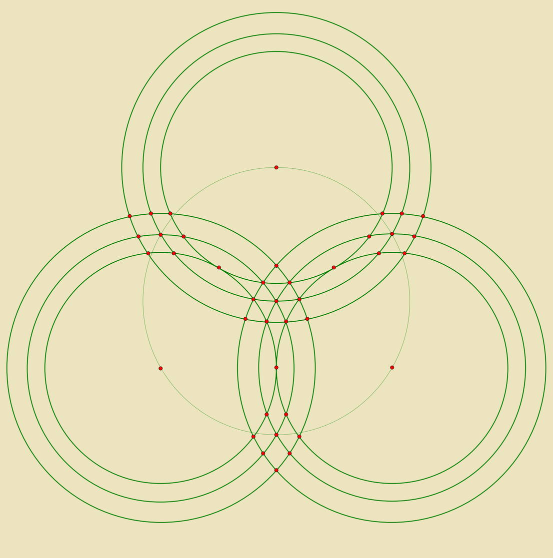
二、在研究過程中我們發現耐心與細心非常重要，圓與圓之間的交會關係，隨著圖形數量的增加也更加複雜。

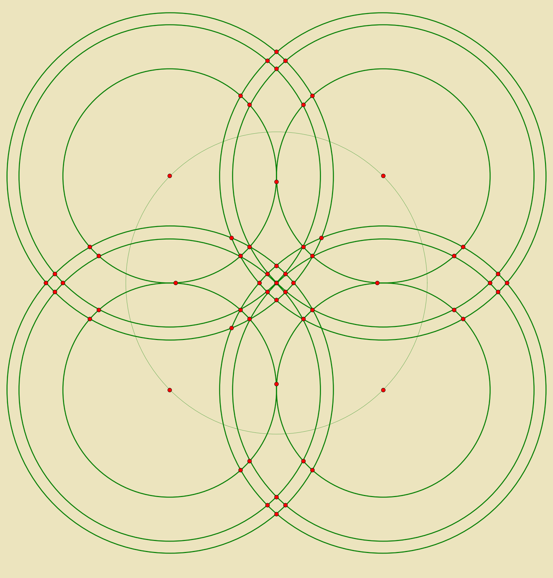
三、未來發展方向：

目前我們所研究的為旋轉圓旋轉固定角度所產生的交點，若以不同角度進行旋轉，如圖四十五、圖四十六，交點會產生什麼規律呢？另外，若將旋轉圓改為同心圓，如圖四十七、圖四十八，又會有什麼令人驚奇的結果？是未來可以研究的方向。


圖四十五


圖四十六


圖四十七


圖四十八

捌、參考資料

一、數學能力開發研究會（2017）。*史上最強圖解數學*。新北市：漢湘。

二、歐劭祺（2016）。*正n邊形上等弧交點所圍圖形之探討*。中華民國第56屆中小學科學展覽會作品說明書。