中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第二名

080401

Crazy knights

學校名稱：屏東縣屏東市仁愛國民小學

作者：	指導老師：
小六　黃楷宸	陳淑慧
小五　林子濠	林政霓
小五　方晨熙	
小五　李公云	

關鍵詞：節點圖、最少交換步數、同構圖

摘　要

據 Guarini 騎士交換難題，我們設計出 156 個瘋狂騎士棋盤，並以對應之節點圖形特徵決定騎士擺放位置、最多騎士對與最少交換步數規則。

一、騎士對交錯擺放有利於找到最少交換步數。

二、單一節點圖最多騎士對得到最少步數關係如下：

1. 「環圖」與騎士對關係為「騎士對數量」$\times 2+1$
2. 「非環圖」與騎士對關係為「騎士對數量」$\times 3$
3. 當$V_f=2$ 且$V_t=2$，則 $nP_{mm}=3n$
4. 當$V_f=1$ 且$V_t=2$，則 $nP_{mm}=2n+1$

三、臨時停駐點決定環上點數與騎士對的關係如下：

(一) 若點環上有臨時停駐點，則最大環點數與騎士對關係為 $2n$ 。

(二) 若點環上無臨時停駐點，則最大環點數與騎士對關係為 $2n+2$。

四、度序列可作為判斷同構圖的有效工具，但需參考節點圖特徵將分岔點與臨時停駐點的距離予以比對確認。

壹、 研究動機

這是一個源自於西洋棋衍生的古老棋盤遊戲，透過棋盤變形版本，我們觀察到騎士交換規律，並嘗試擴充新的棋盤格，且從中找出可放置最多騎士及各騎士對最少交換步數的可能性。

貳、 研究目的

一、找出 Crazy Knights 遊戲規律及騎士交換條件。

二、研究不同連方塊型態所引導出的騎士路徑連通特性。

三、找出可擺放最多的騎士對及最少交換步數的規律。

參、 研究設備與器材

一、兩種顏色連方塊，用來組合各種連塊組合可能。

二、紀錄資料之 A4 紙張、筆記與電腦。

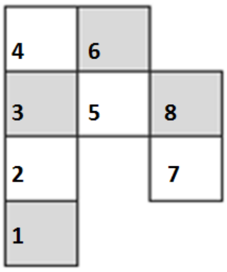
三、連方塊用以模擬交換路徑。

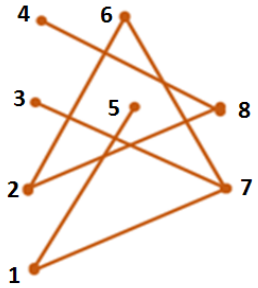
四、微軟 Excel 程式及 GeoGebra 繪圖程式。

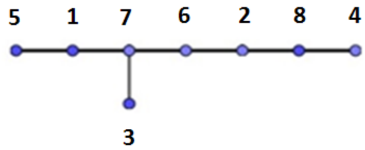
肆、 研究過程及方法

一、騎士巡邏

西洋棋中騎士的玩法為「縱走─斜走」，歷來國內外研究多將騎士巡邏(knight’s tour)延伸為 Euler 迴路(Euler tour)或漢米爾頓迴圈(Hamilton cycle)研究。



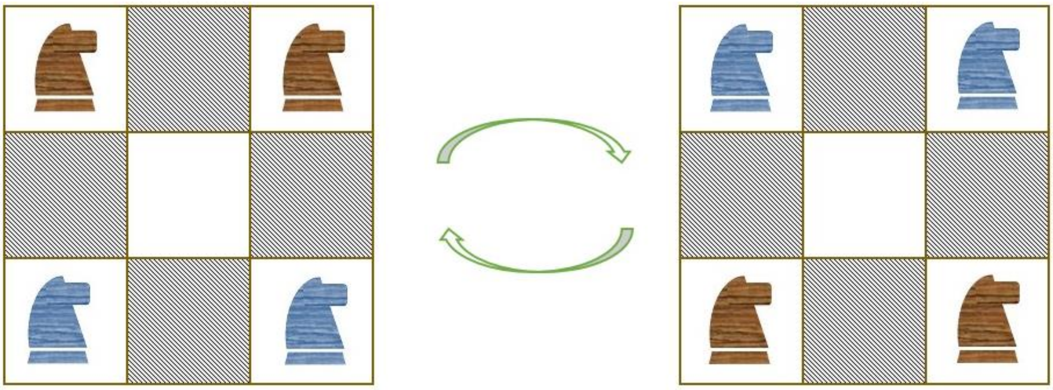




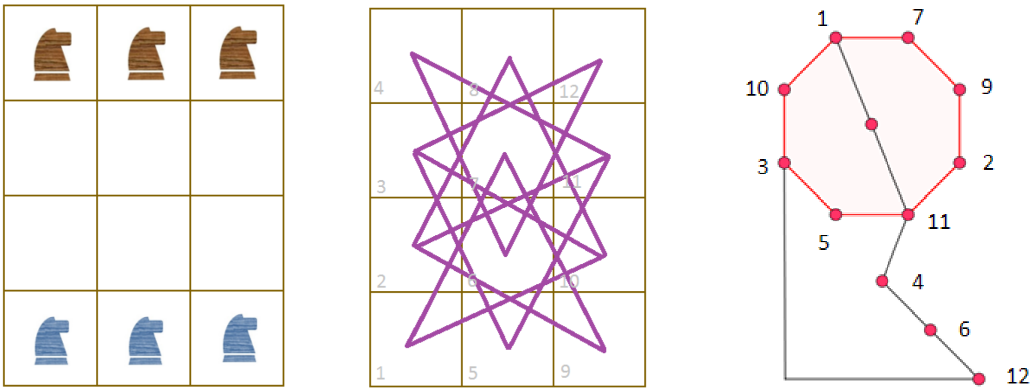
我們利用簡單圖(graph)為有序對 G=(V,E)屬性(張鎮華，2017)，將創發的棋盤有限點標註數字，予以簡化後命名為「節點圖」，利用圖的次數(點數)分析十連塊中騎士巡邏達到騎士交換的可能，並進一步探討最多騎士對與最少交換步數之規律。

二、騎士交換遊戲規則

騎士交換問題(Knights switching problems)源自於 Guarini 在 1512 提出於3×3棋盤格四角落放置兩對騎士，以最少步數完成兩對騎士交換。



原始騎士交換設計



Guarini 騎士交換變形版本 Variant I

(一) 文獻回顧

我們從國內外文獻發現，西洋棋騎士棋探討方向多為騎士巡邏，例如「騎士迷蹤」(第 29 屆)、「一個關於一筆畫的數學遊戲」(第 44 屆)及「棋盤上的馬步」(第 45 屆)。近五年內以騎士巡邏為題的作品僅有兩件：

第 56 屆國中組數學科作品─遨遊棋盤：與直-橫-斜一筆畫共舞。

第 58 屆國中組數學科作品─Knight One One。

前者探討於$m \times n$棋盤上，利用特定的直、橫、斜走法，騎士走完整個棋盤回到原先的出發點問題，是騎士巡邏的擴展應用。後者以「圖論」觀點分析不規則棋盤 Crazy Knights 上兩對騎士交換路徑，研究主要在解釋騎士達成交換與棋盤空間條件(葉其璋，2018)，惟該研究未討論最佳騎士擺法、可放置最多騎士對和騎士最少交換步數，本研究從此三點切入並說明創發棋盤遊戲的可能性。

(二) 名詞解釋

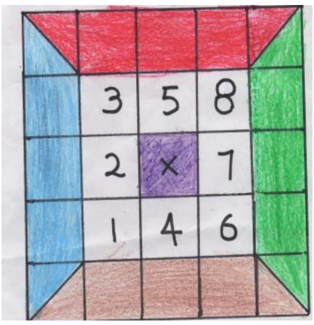
1. V_t表示臨時停駐點，是騎士交換讓位空間。
2. V_f表示分岔點，連接 3 個以上的點。
3. V_c^m表示最大環點，c 表示節點圖的環形構造，以 m 表示環上的最大點值 (maximum number of vertices)，V_c^m表該節點圖多環當中，環點數最多者。
4. nP_{mm}表示擺放騎士對的最少交換步數，P 表示騎士對(pairs)，n表「騎士對數」，P_{mm}該騎士對「最少交換步數」(minimum number of moves)。

二、探究過程 ─騎士為何瘋狂?

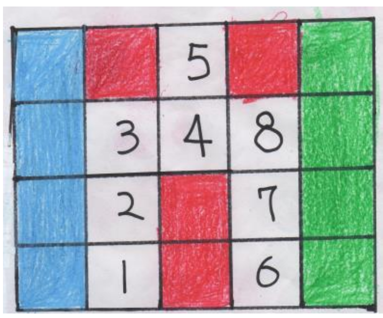
我們的探究過程從八連塊擴充十連塊，透過自創二元編碼方式刪除重複圖形後確認唯一棋盤圖，得到 156 個棋盤圖。接著繪製節點圖，從節點圖特性發掘騎士對與最少交換步數的規則。

(一) 擴展棋盤格十連塊方式

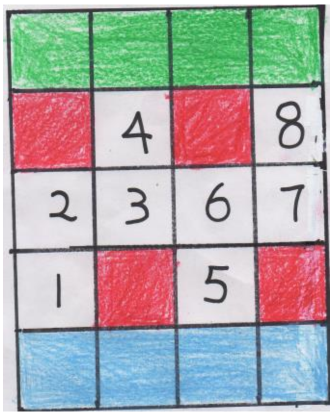
我們參考 R. A. Nonenmacher 編制的 369 個八連塊，找出4×4範圍內有騎士路徑且含分岔或環形的連塊。我們發現這些連塊都具備 1 對騎士交換的條件，再參考 Guarini 的騎士交換問題變化版(Petkovic, 1979)和葉其璋(2018)路徑及虛格分析，嘗試將八連塊加 2 格擴充為十連塊。



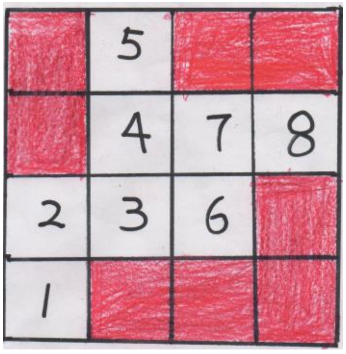
八連塊編號 249 (3× 3)



八連塊編號 171 (3× 4)

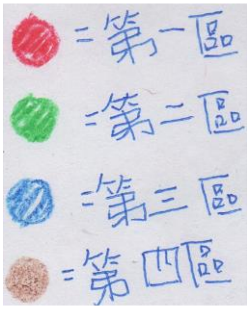


八連塊編號 289 (4× 3)

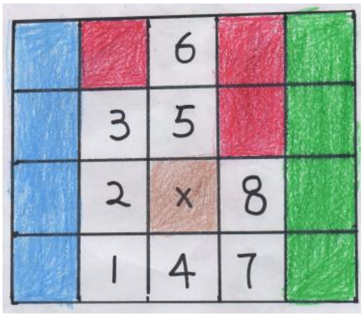


八連塊編號 276 (4× 4)

以八連塊 249 若要加 2 格只能兩兩選擇「1 & 2 區」、「2 & 4」區「4 & 3」或「3 &1」區，其餘皆會超過4×4範圍，不列入選擇。



選擇色塊區域



八連塊編號 136 (3× 4中空)

選擇模式

以八連塊 136 為例，添加兩格時，為了達成4×4範圍，以色塊劃分區域，會有3×3、3×4、4×3、4×4四種分區圖，配合 9 種選擇模式搭配選擇，最後得到近 200 個圖形。

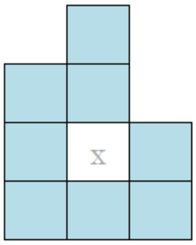
(二) 二元編碼確認唯一圖

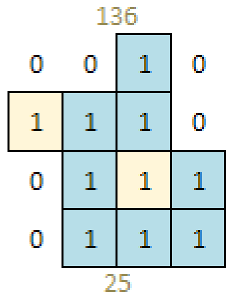
利用 Excel 編寫 01 編碼，在4×4範圍內，標示 0 和 1，0 表示無格，1 表示有格。將棋盤格由下而上由左而右編碼之後，將衍生出的十連塊棋盤格依此規則編碼。

縱深4

m*n=4*3

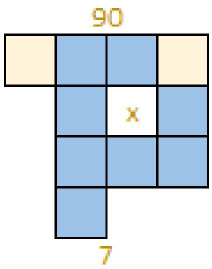
八連塊136

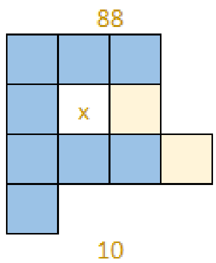


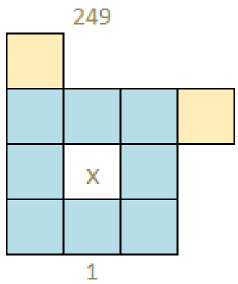


第二步將資料冊的圖形由前向後逐一比對，將旋轉 90∘、180∘、270∘以及鏡射(含鏡射後的旋轉 90∘、180∘、270∘圖形)重複圖刪除，留下 156 個唯一圖，成為我們繪製節點圖的基礎。

組別	序號	二進位編碼	旋轉角度	類型	源頭組別	源頭序號	源頭二進位編碼	源頭旋轉角度	源頭類型
90	1	1111010101110001	0	原圖	88	2	1111010101110001	0	原圖
90	2	1111010101110010	0	原圖	88	7	1111010101110010	0	原圖
90	3	1111010101110100	0	原圖	88	10	1111010101110100	0	原圖
90	4	1000111101010111	0	原圖	88	23	1000111101010111	0	原圖
90	5	0100111101010111	0	原圖	88	22	0100111101010111	0	原圖
90	6	0010111101010111	0	原圖	88	21	0010111101010111	0	原圖
90	7	0001111101010111	0	原圖	88	10	0001111101010111	90	原圖
90	8	1111010101100011	0	原圖					
90	9	1111010101100110	0	原圖					
90	10	1111010111100010	0	原圖					
90	11	1111110101100010	0	原圖	71	15	1111110101100010	180	鏡射
90	12	1111010101101100	0	原圖					
90	13	1111010111100100	0	原圖					
90	14	1111110101100100	0	原圖	71	11	1111110101100100	180	鏡射



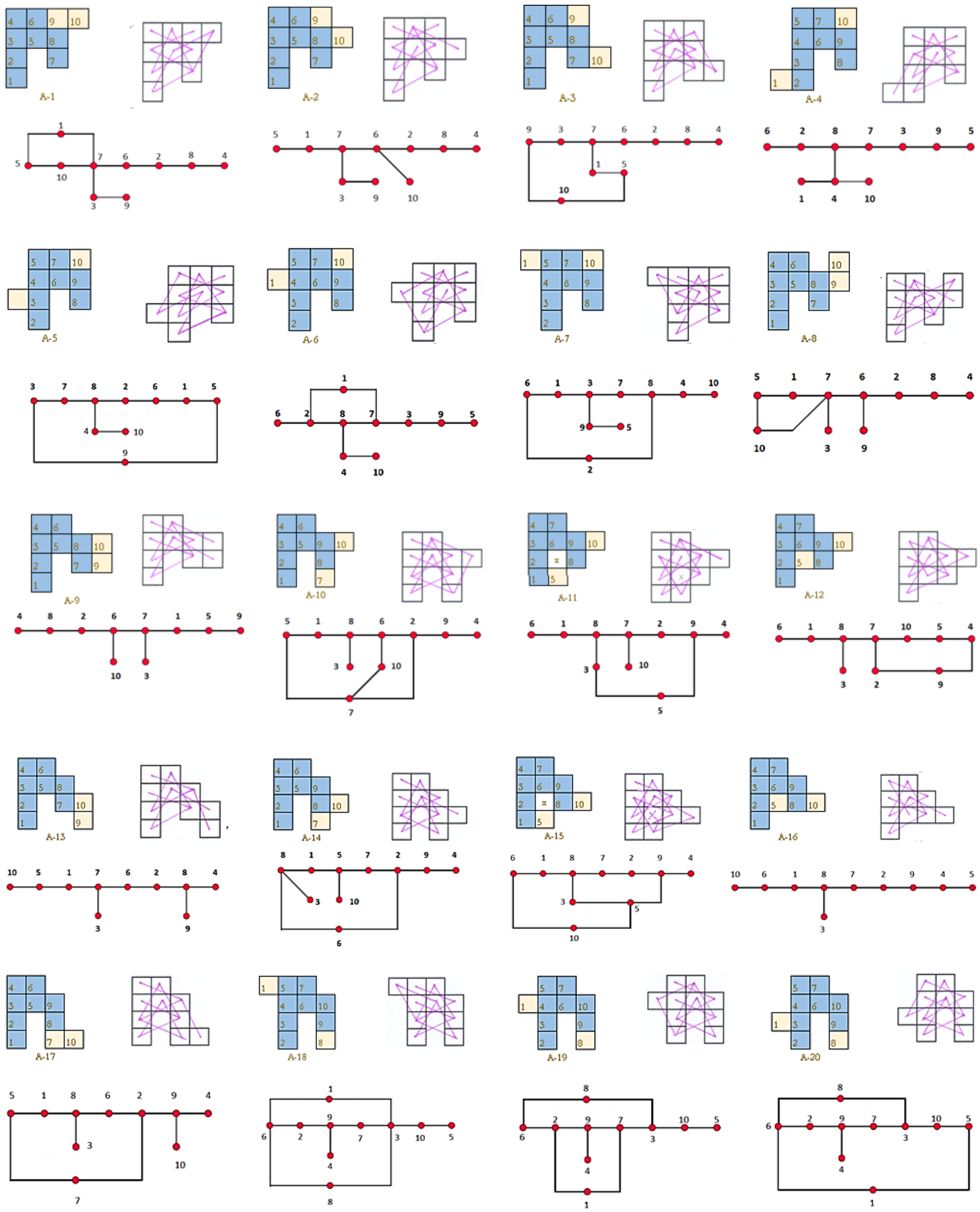




原始編號 90-7 與 88-10 的旋轉 90∘相同，故刪除。同理，249-1 的鏡射後右旋 180∘與 88-10 重複，亦刪除，保留圖 88-10，刪除後重新編組號為 B-8。 二元編碼得到 3580 種可能圖，制圖後將重複刪除得到 16 組，共 156 個圖。

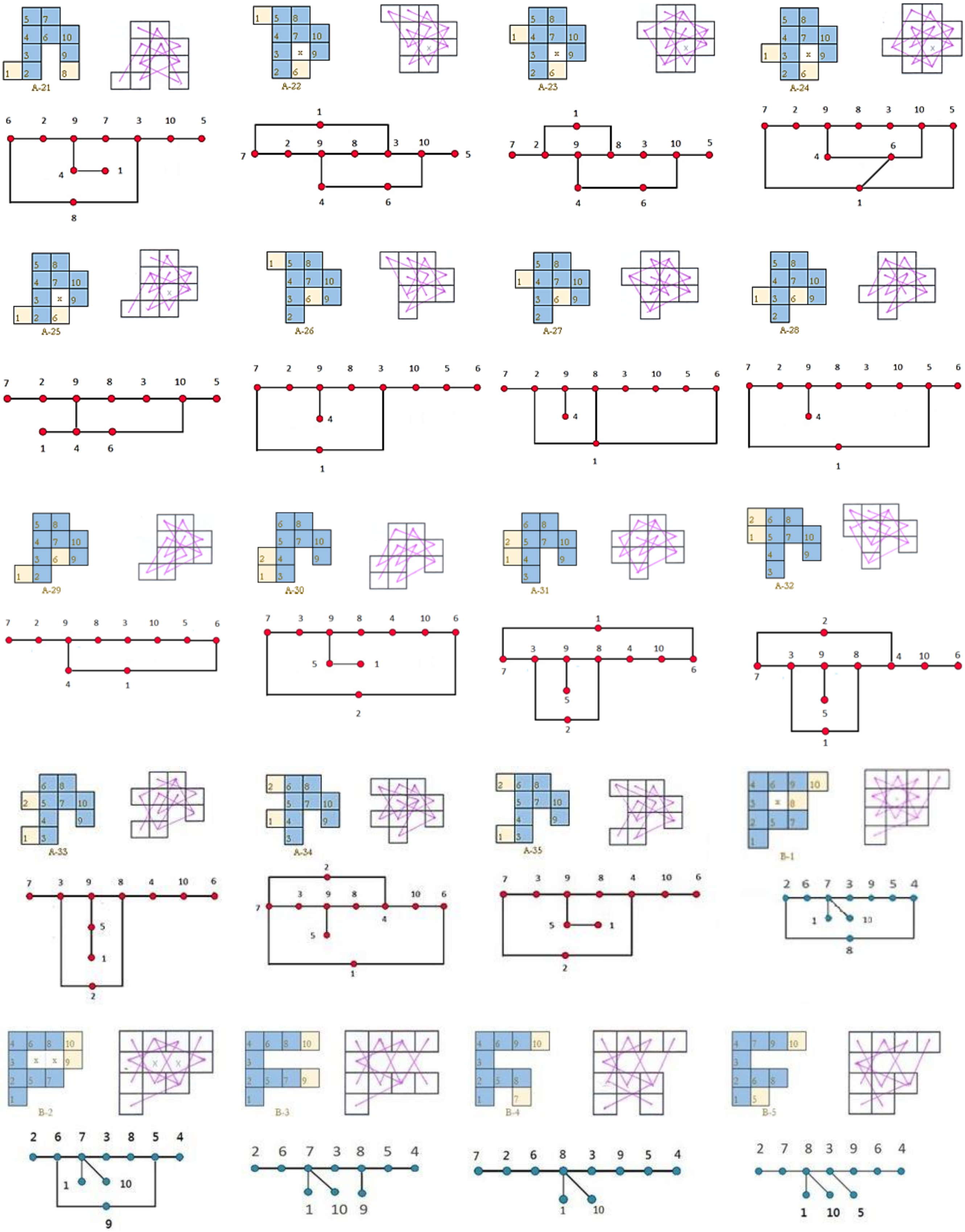
(三) 156 個 16 組路徑圖與節點圖

A 組

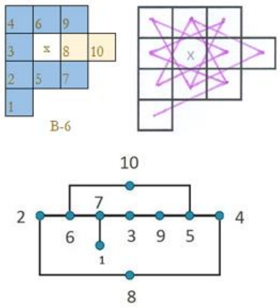


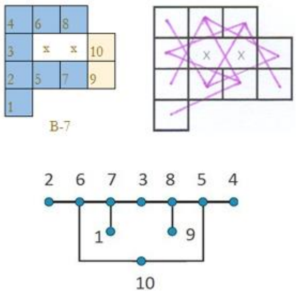
A-1 A-2 A-3 A-4 A-5 A-6 A-7 A-8 A-9 A-10 A-11 A-12 A-13 A-14 A-15 A-16 A-17 A-18 A-19 A-20

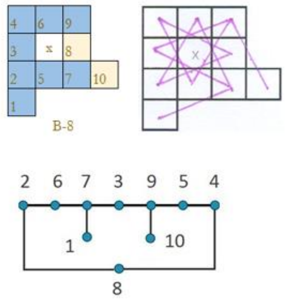
AB 兩組

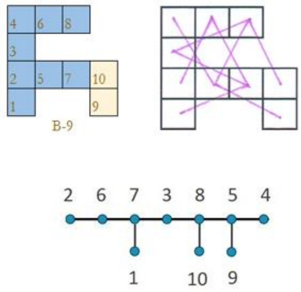

A-21
A-22
A-23
A-24
A-25
A-26
A-27
A-28
A-29
A-30
A-31
A-32
A-33
A-34
A-35
B-1
B-2
B-3
B-4
B-5

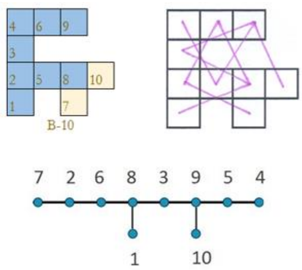
B 組

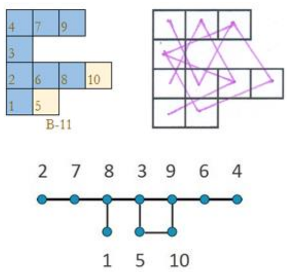

B-6
10
2 7 4
6 3 9 5
1
8

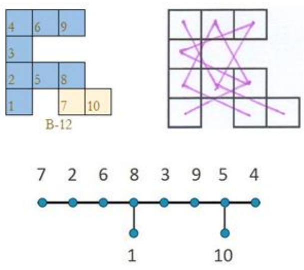

B-7
2 6 7 3 8 5 4
1 9
10

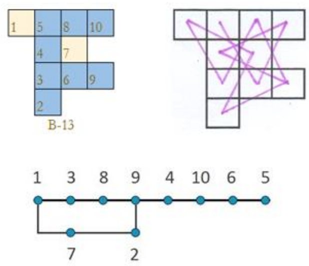

B-8
2 6 7 3 9 5 4
1 10
8

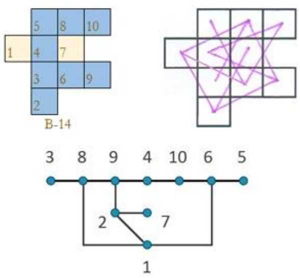

B-9
2 6 7 3 8 5 4
1 10 9

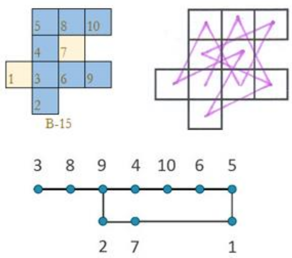

B-10
7 2 6 8 3 9 5 4
1 10

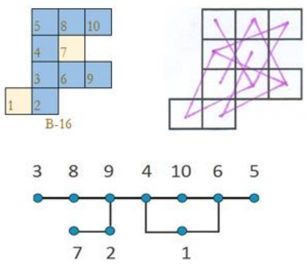

B-11
2 7 8 3 9 6 4
1 5 10

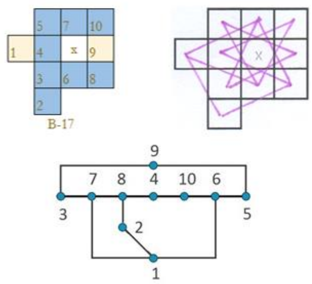

B-12
7 2 6 8 3 9 5 4
1 10

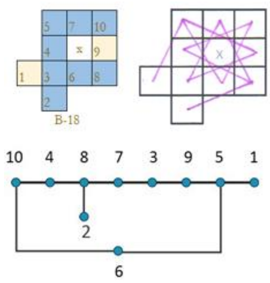

B-13
1 3 8 9 4 10 6 5
7 2

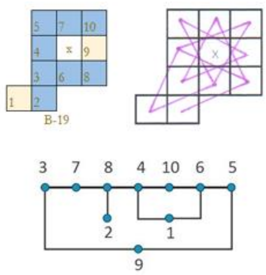

B-14
3 8 9 4 10 6 5
2 7
1

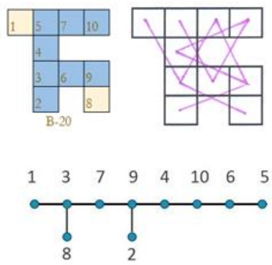

B-15
3 8 9 4 10 6 5
2 7 1

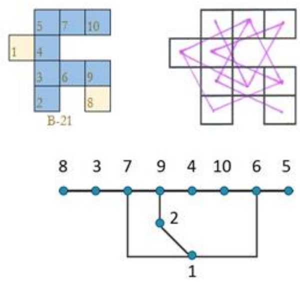

B-16
3 8 9 4 10 6 5
7 2 1

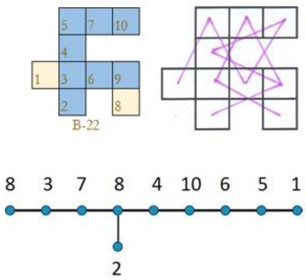

B-17
9
7 8 4 10 6
3 5
2
1

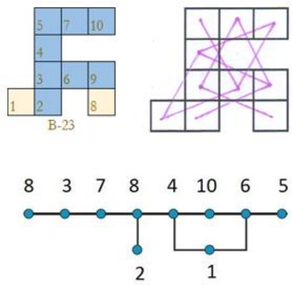

B-18
10 4 8 7 3 9 5 1
2
6

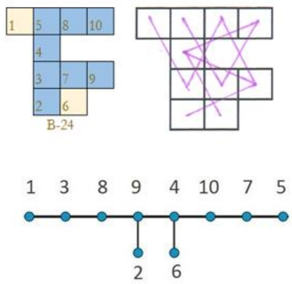

B-19
3 7 8 4 10 6 5
2 1
9

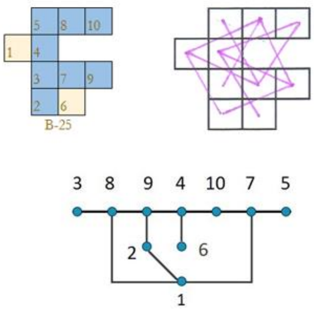

B-20
1 3 7 9 4 10 6 5
8 2


B-21
8 3 7 9 4 10 6 5
2
1

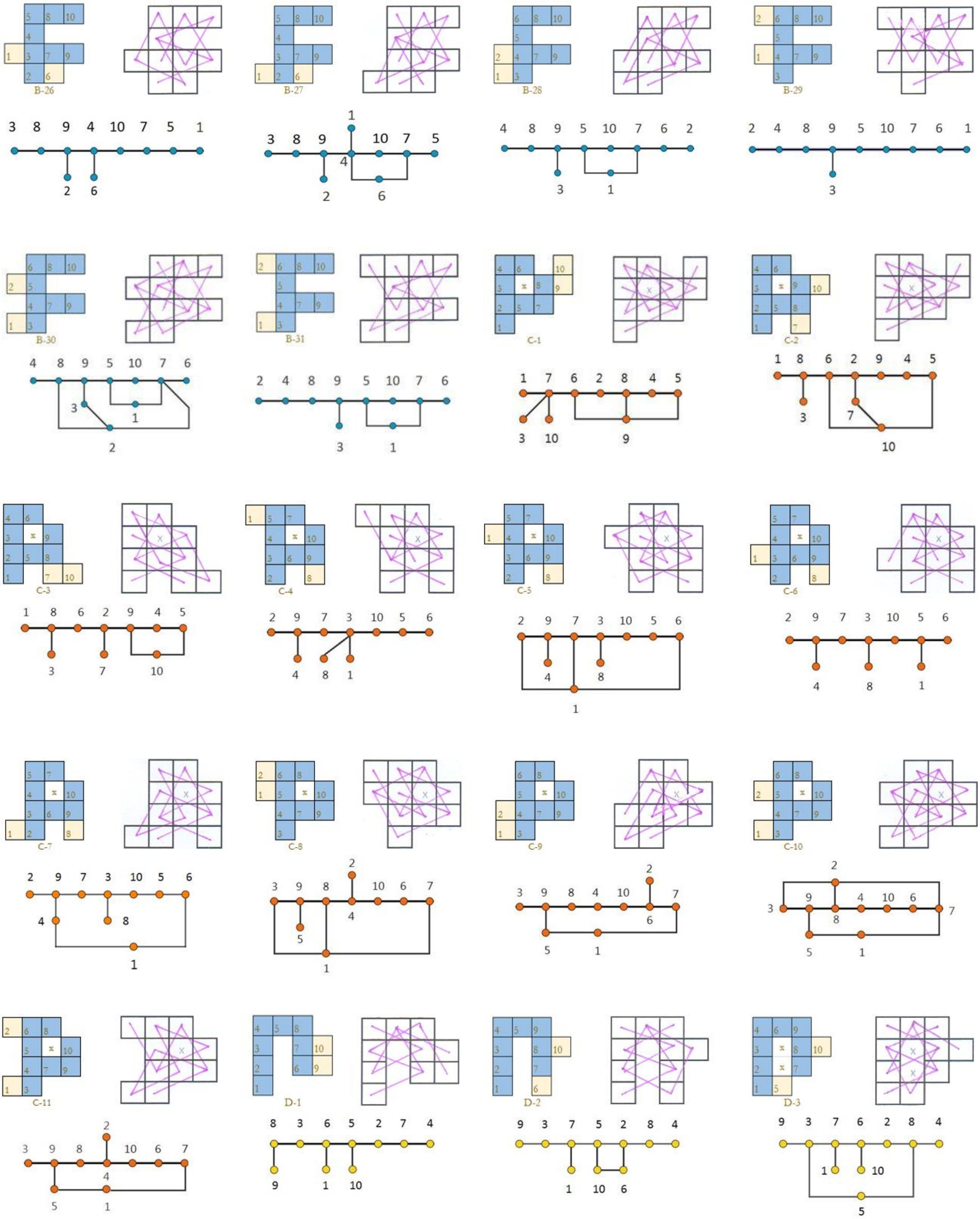

B-22
8 3 7 8 4 10 6 5 1
2


B-23
8 3 7 8 4 10 6 5
2 1

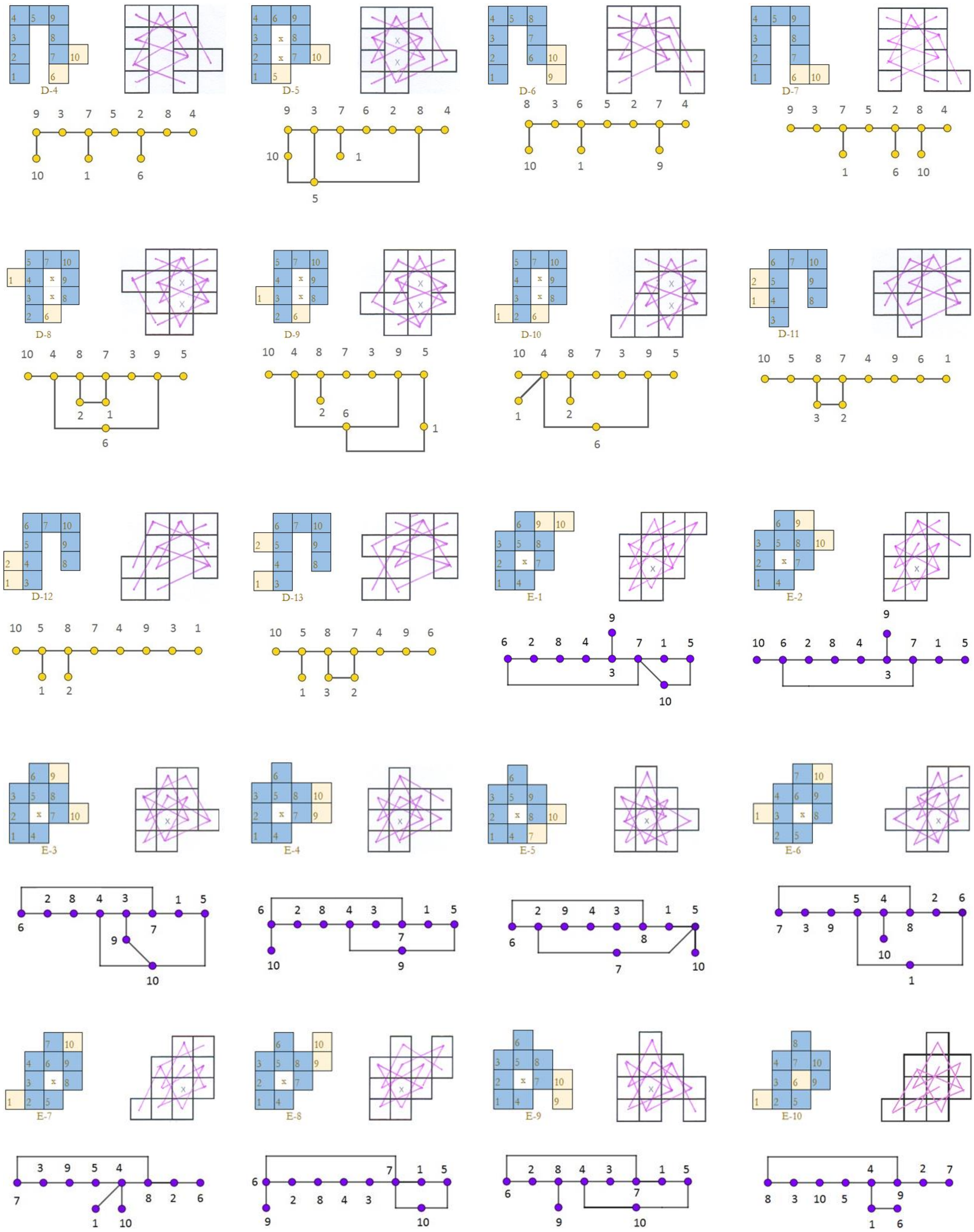

B-24
1 3 8 9 4 10 7 5
2 6


B-25
3 8 9 4 10 7 5
2 6
1

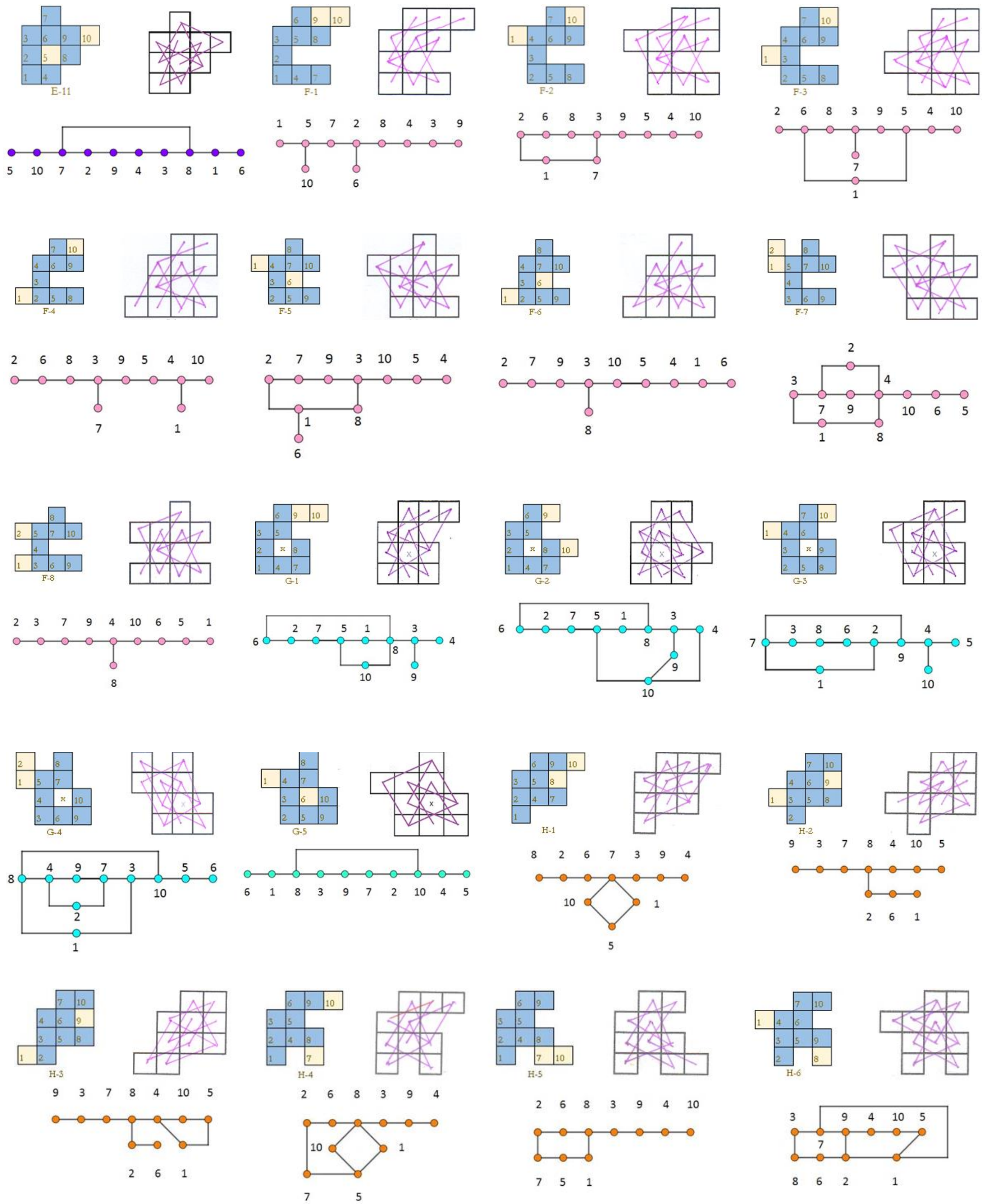
BC 兩組



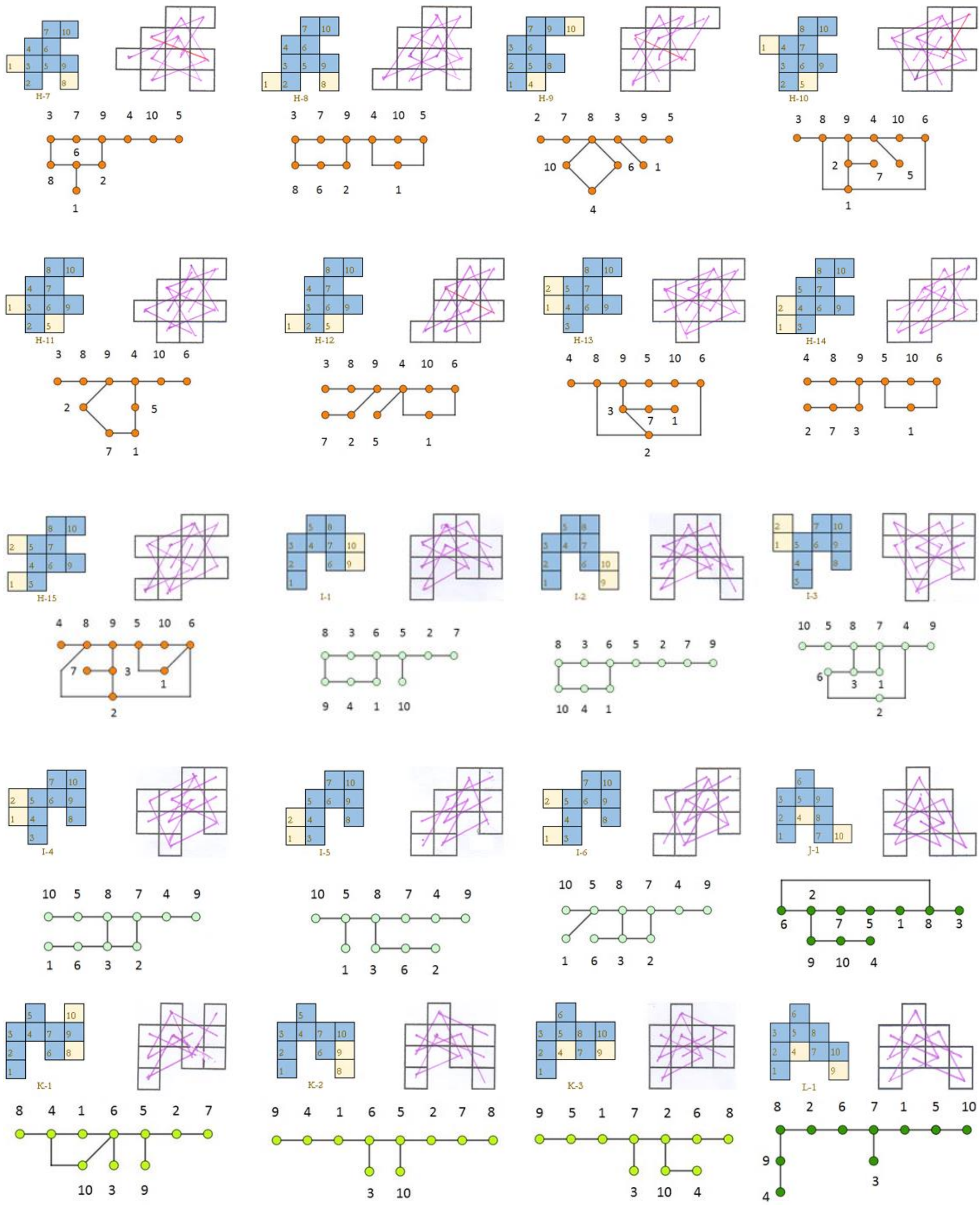
CDE 兩組



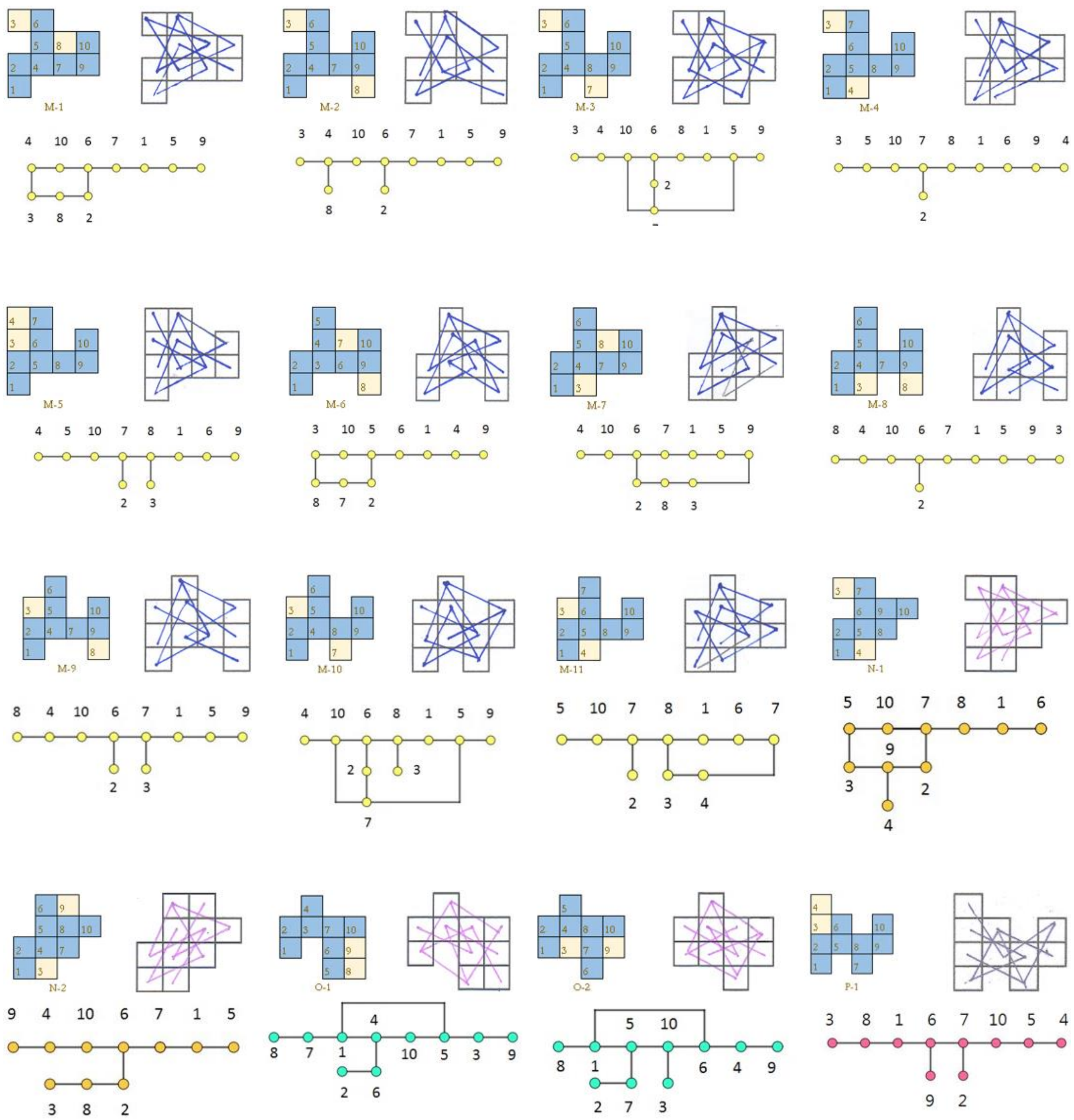
EFGH 四組



HIJKL 五組



MNOP 四組

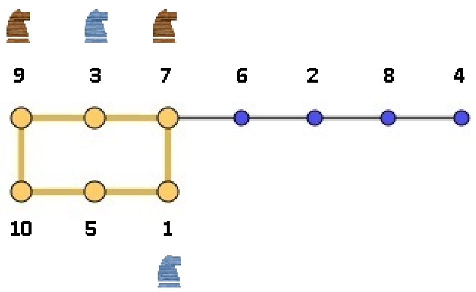


伍、　研究討論與結果

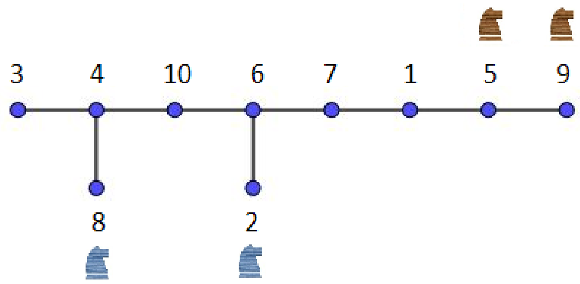
一、　最多騎士對的擺法

我們發現最多騎士對的擺法和圖的結構有密切關係，節點圖分為主幹與分支(V_f)，騎士對放置於「非環圖」主幹兩端或在「環圖」(circle)上交叉擺放。我們發展出來的 156 個節點圖皆可擺放至少兩對騎士，以nP_{mm}表示擺放騎士對的最少交換步數，n表「騎士對數」，P_{mm}該「騎士對最少交換步數」(minimum number of moves)。

(一) 2P 表示該節點圖可放置 2 對騎士分為「環圖」與「非環圖」兩類，前者$2P_{mm}$=5，以 A-3 及為例；後者$2P_{mm}$=6，以 M-2 為例。



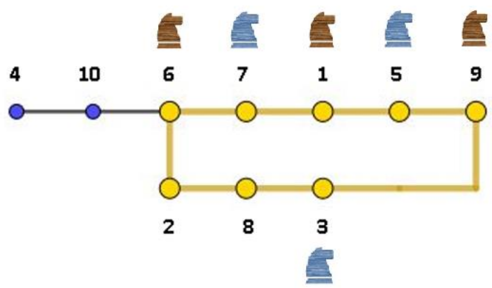
A-3 環圖



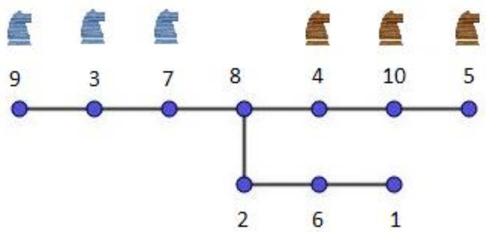
M-2 非環圖

1. 環圖：A-3 分別交錯擺放於點 9、3、7、1，最少交換步數之騎士行經路線如下：1→5, 7→1, 3→7, 9→3, 5→9。
2. 非環圖：M-2 分別交錯擺放於點 5、9、8、2，非環圖最少交換步數 6 步，騎士行經路線如下：5→3, 9→10, 2→9, 10→2, 8→5, 3→8。

(二) 3P 表示該節點圖可放置 3 對騎士分為「環圖」與「非環圖」兩類，前者$3P_{mm}$=7，以 M-7 為例；後者$3P_{mm}$=9，以 H-2 為例。



M-7　環圖

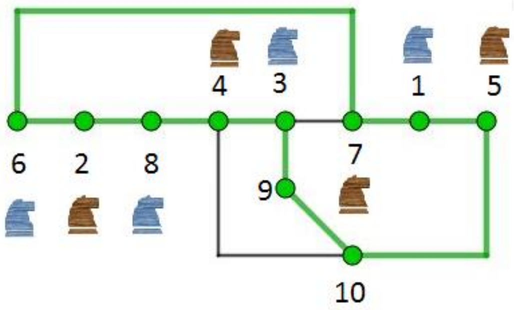


H-2 非環圖

1. 環圖：M-7 分別交錯擺放於點 6、7、1、5、9、3，最少交換步數 7 步，騎士行經路線如右：6→2, 7→6, 1→7, 5→1, 9→5, 3→9, 2→3。

2. 非環圖：H-2 分別交錯擺放於點 9、3、7、4、10、5，最少交換步數 9 步，騎士行經路線如右：7⟶1, 3⟶6, 9⟶2, 4⟶9, 10⟶3, 5⟶7, 2⟶5, 6⟶10, 1⟶4。

(三) 4P 表示該節點圖可放置 4 對騎士僅能放置於「環圖」，前者$4P_{mm}$=9 為例。



得到在交錯擺放之下，單一節點圖最多騎士對得到最少步數關係如下：

「環圖」$1P_{mm}=3$，$2P_{mm}=5$，$3P_{mm}=7$，$4P_{mm}=9$

$$nP_{mm}=2n+1\text{，且}1\le n\le 4$$

$$\text{當}V_f=2\text{ 且}V_t=2\text{，則 }nP_{mm}=3n$$

$$\text{當}V_f=1\text{ 且}V_t=2\text{，則 }nP_{mm}=2n+1$$

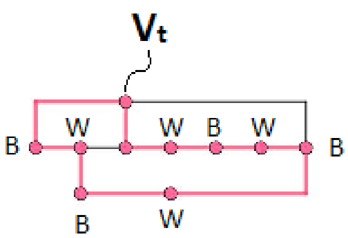
「非環圖」$1P_{mm}=3$，$2P_{mm}=6$，$3P_{mm}=9$

$$nP_{mm}=3n\text{，且}1\le n\le 3$$

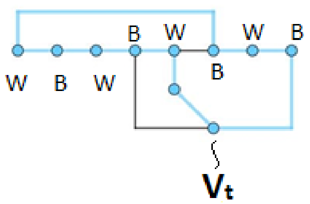
二、 環的發現與討論

(一)關於「環形」

我們發現騎士可以從主幹上方或下方的環移動，不會被主幹上其他騎士阻擋。騎士可以透過環型，從起點順利往前移動。如圖



環圖 C-10



環圖 E-3

我們發現有環可以利用黑白騎士交岔擺放減少讓位次數，和無環圖騎士移動次數比較，

讓位至少需 2-3 次，讓位只需要 1 次，有環圖少了許多，有利於騎士移動。

由於不同棋盤可能出現「最多對且最少交換步數」或「非最多對達最少交換步數」，棋盤規律現象繁雜，我們以設計者的觀點將 156 個棋盤分類為「初階」、「進階」、「挑戰」及「困難」四種等級，作為遊戲設計參考，分級表如下(節錄部分)。

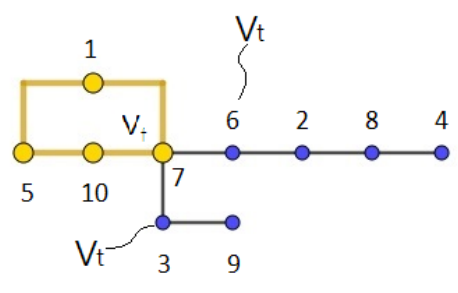
環形擺放 4 對騎士	min Moves	max Pairs	BBBB	WWWW	Level
C-10	9	4	8,10,7,5	4,6,1,9	BP
E-3	9	4	6,8,3,10	2,4,9,5	BP
非環形擺放 4 對騎士	min moves	max Pairs	BBBB	WWWW	Level
A-24	13	4	7,2,9,4	8,3,10,5	AP
A-27	27	4	7,2,9,8	3,10,5,6	HP
A-28	29	4	7,2,9,8	3,10,5,6	HP
B-6	27	4	2,6,7,3	9,5,4,8	HP
B-30	13	4	4,8,9,3	5,10,7,6	AP
E-5	24	4	6,2,9,4	3,8,1,5	HP

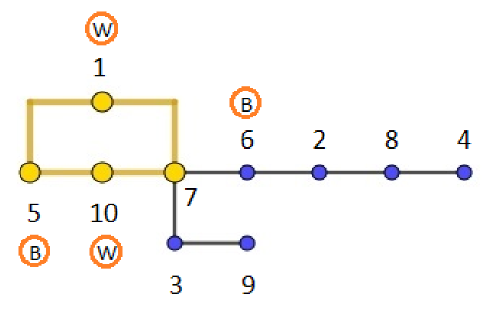
(二)關於「環點」

我們發現節點圖有環形及非環形兩種。環點有讓位功能，尤其是黑白騎士交替擺放有助於騎士交換。環圖上「最大的點值」以 m表示，$4 \leq m \leq 10$，$m = 4$共有 24 個，$m = 6$共有 58 個，$m = 8$共有 32 個，$m = 10$共有 4 個，其中符合最少交換步數的如列表。以下分別就「4 點環」、「6 點環」、「8 點環」、「10 點環」特性說明，V_c^m表示最大環點數，V_t表示臨時停駐點。

【$m = 4$ 】分別就分岔點有無說明

1. 【V_c^4 with $2V_t$】分別為 A-1, A-8, B-27, H-1, H-9, H-12 節點圖，以 A-1 及 B-27 為例說明節點圖上有 V_t，且 $V_t = 2$：





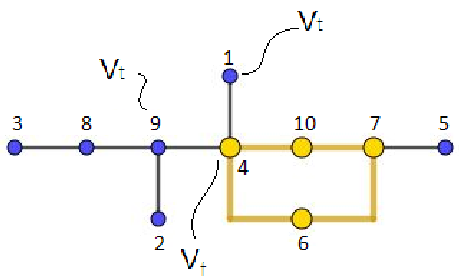
A-1 擺放 2 對黑白騎士最佳位置、分岔點和停駐點

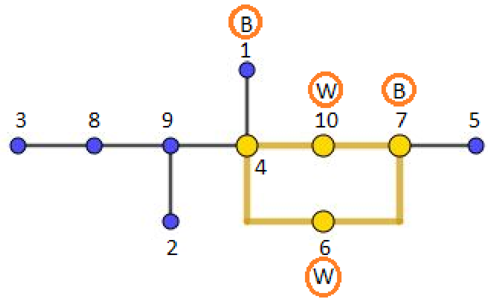
1. 節點圖 A-1 主幹上有 7 點，圖上有一個至多 4 點環形，點 3 和點 6 是臨時停駐點，點 7 是十字形分岔點。
2. 最佳擺放位置為「交替擺放」，最多 2 對騎士且最少交換步數的騎士擺放方式如圖示。
3. 2 對騎士最少交換步數 5 步：10→3, 5→10, 1→5, 6→1, 3→6 合計 5 步完成交換。
4. 最佳交換條件有兩個：騎士交錯擺放且選擇環點和鄰近位置擺放，減少讓位次數，達到最少交換步數。

4 點環環點數與騎士對數量關係─含分岔點

組號	序號	c	V_c^m	Circle 1	Circle 2	Circle 3	Circle 4	Circle 5	Circle 6	Circle 7	1P	**2Ps**	3Ps	4Ps
A	1	1	**4**	5,1,7,10	x	x	x	x	x	x	3	5	0	0
H	9	1	**4**	6,10,8,1	x	x	x	x	x	x	3	5	0	0
H	12	1	**4**	1,4,10,6	x	x	x	x	x	x	3	5	0	0

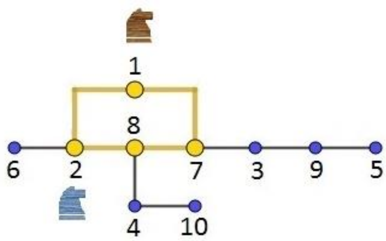
【發現】$V_c^4 = 2 \times 2$，即「環點數」恰好等於「最多騎士對數」$\times 2$。





1. B-27 點 1 和點 9 是 V_t，即騎士的臨時停駐點。點 1 擺放黑騎士且移動到點 9 之後可供其他騎士移動；點 4 以 V_f 標註，是圖中唯一分岔點且為十字形，有利於騎士繞環點移動。
2. 騎士交換的行經位置：1→9, 10→1, 7→10, 6→7, 9→6，總共 5 步完成交換。
3. 最佳交換條件有二：交錯擺放及放置於環上或其相鄰環點，可以減少讓位次數，達到最少交換步數。
4. 「環點數」恰好等於「最多騎士對數」$\times 2$。
5. B-27 若不考慮最少交換步數，最多可放置 3 對騎士，分別為黑騎士於點 3、8、9，白騎士於點 10、7、5，交換步數為 9 步。

【V_c^4】無分岔點的 4 點環



A-6 是 4 點環，環內無臨時停駐點也可以達成最少交換步數，恰好符合 1 對騎士最少交換步數狀態。

4 點環的環點數與騎士對數量關係─無分岔點

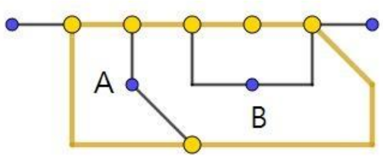
組號	序號	c	V_c^m	Circle 1	Circle 2	Circle 3	Circle 4	Circle 5	Circle 6	Circle 7	1P	2Ps	3Ps	4Ps
A	6	1	**4**	2,1,7,8	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
A	8	1	**4**	10,5,1,7	X	X	X	X	X	X	3	6	11	0
A	33	1	**4**	2,3,9,8	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
B	11	1	**4**	5,3,9,10	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
B	16	1	**4**	1,4,10,6	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
B	23	1	**4**	1,4,10,6	X	X	X	X	X	X	3	6	16	0
B	27	1	**4**	6,4,10,7	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
B	28	1	**4**	1,5,10,7	X	X	X	X	X	X	3	6	0	0
B	31	1	**4**	1,5,10,7	X	X	X	X	X	X	3	6	16	0
C	3	1	**4**	10,9,4,5	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
D	2	1	**4**	10,5,2,6	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
D	11	1	**4**	3,8,7,2	X	X	X	X	X	X	3	6	0	0
D	13	1	**4**	3,8,7,2	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
H	1	1	**4**	5,10,7,1	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
H	3	1	**4**	1,4,10,5	X	X	X	X	X	X	3	6	11	0
H	14	1	**4**	1,5,10,6	X	X	X	X	X	X	3	6	0	0
I	4	1	**4**	3,8,7,2	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
I	6	1	**4**	3,8,7,2	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
K	1	1	**4**	10,4,1,6	X	X	X	X	X	X	3	6	11	0
O	1	1	**4**	1,5,10,4	X	X	X	X	X	X	3	6	9	0
O	2	1	**4**	1,6,10,5	X	X	X	X	X	X	3	6	11	0

【發現】$V_c^4 = 1 \times 2 + 2$，即「環點數」恰好等於「最多騎士對數」$\times 2 + 2$。

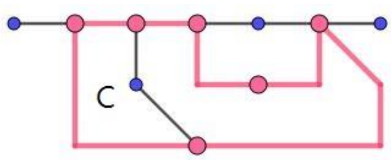
【$m = 6$】分別就分岔點有無說明

【V_c^6 with 2V_t】六點環含 2 個臨時停駐點(V_t)

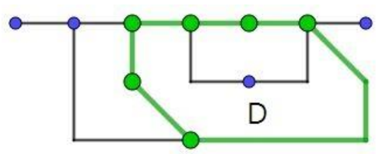
1. 以 $m = 6$表示「6 點環」，以 B-30 為代表圖，最大環點數為 6，環內有兩條分界線，分界線上的 A、B、C、D 點分別為不同構造的「六點環」內的「非環點」。其特點如下：



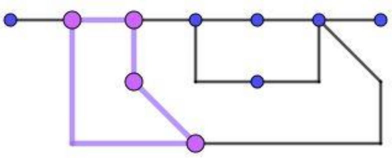
B-30-環 1



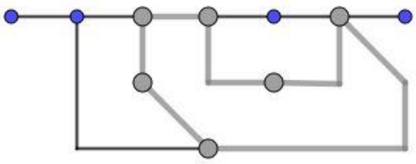
B-30-環 2



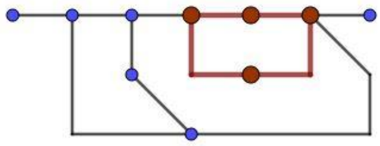
B-30-環 3



B-30-環 4

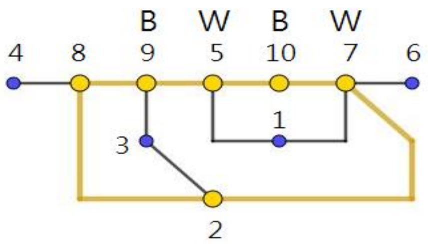


B-30-環 5

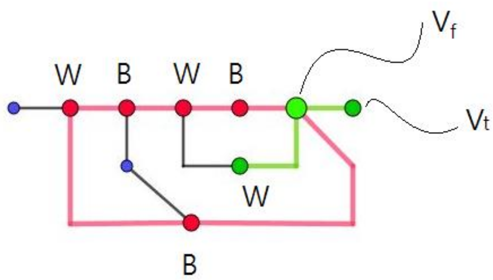


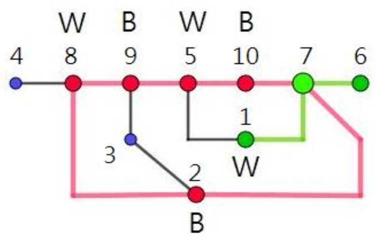
B-30-環 6

2. 有 3 環套，以 B-30-環 1 為例，A 點 B 點分別代表兩條分界線上的點，將 B-30 的六點環分割為三個環，因此我們稱之為「三環套」。
3. 有 6 個環，環點數分別為 6、6、6、4、6、4，最大環點數為 6。
4. 最佳擺放位置為交替擺放，如下圖 2 對騎士及 3 對騎士擺放方式。



1. 最少交換步數 5 步：9→8, 5→9, 10→5, 7→10, 8→7，總共 5 步完成交換。
2. 最佳交換條件有二：交錯擺放及六點環，這樣可以減少讓位次數，達到最少交換步數。





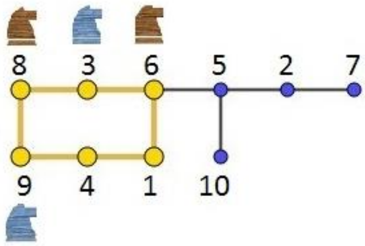
3. V_t是騎士的臨時停駐點；V_f指的是環與 V_t分岔點。
4. 騎士交換的行經位置：10→6, 5→10, 9→5, 8→9, 2→8, 1→2, 6→1，7 步完成交換。
5. 最佳交換條件有二：交錯擺放及六點環可以減少讓位次數，達到最少交換步數。

6 點環和 3 對騎士關係─含分岔點

組號	序號	c	V_c^m	Circle 1	Circle 2	Circle 3	Circle 4	Circle 5	Circle 6	Circle 7	1P	2Ps	**3Ps**	4Ps
B	2	1	**6**	9,6,7,3,8,5	x	x	x	x	x	x	3	5	7	0
E	7	1	**6**	7,8,4,5,9,3	x	x	x	x	x	x	3	5	7	0
E	8	2	**6**	6,7,3,4,8,2	10,7,1,5	x	x	x	x	x	3	5	7	0
G	1	3	**6**	6,8,1,5,7,2	10,5,1,8	6,8,10,5,7,2	x	x	x	x	3	5	7	0
H	4	3	**6**	7,2,6,8,10,5	5,10,8,1	7,2,6,8,1,5	x	x	x	x	3	5	7	0

【發現】$V_c^6 = 3 \times 2$，即「環點數」恰好等於「最多騎士對數」$\times 2$。

【V_c^6】 6 點環，以 I-1 為代表圖如下：



1. 總計有 53 個節點圖符合 6 點環與騎士對關係。
2. 分岔點及臨時停駐點可能出現於節點圖中，但在騎士交換時無需用到，只需要用到環形，如 I-1 節點圖所示。
3. 有些圖可以擺放到 3 對騎士，也會用到分岔點及臨時停駐點，但節點圖點數至多 10 點，在有限的移動空間下，無法達到最少交換步數，可以作為難度等級的判定標準。
4. 在我們的研究中，我們以最少交換步數為基準，每增加 0-1 步設為簡單等級，增加 2-4 為普通難度，增加 5-8 步是挑戰級，9 步以上是困難等級。

6 點環的環點數與騎士對數量關係—無分岔點

組序號		c	V_c^m	Circle 1	Circle 2	Circle 3	Circle 4	Circle 5	Circle 6	Circle 7	1P	2Ps	3Ps	4Ps
A	3	1	**6**	10,9,3,7,1,5	X	X	X	X	X	X	3	**5**	0	0
A	7	1	**6**	2,6,1,3,7,8	X	X	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	10	3	**6**	7,5,1,8,6,10	7,2,6,10	X	X	X	X	X	3	**5**	8	0
A	11	1	**6**	5,3,8,7,2,9	X	X	X	X	X	X	3	**5**	8	0
A	12	1	**6**	2,7,10,5,4,9	X	X	X	X	X	X	3	**5**	11	0
A	14	1	**6**	6,8,1,5,7,2	X	X	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	17	1	**6**	7,5,1,8,6,2	X	X	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	18	3	**6**	6,1,3,7,9,2	8,6,2,9,7,3	8,3,1.6	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	19	3	**6**	6,8,3,7,9,2	1,2,9,7	1,2,6,8,3,7	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	21	1	**6**	8,6,2,9,7,3	X	X	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	25	1	**6**	4,9,8,3,10,6	X	X	X	X	X	X	3	**5**	8	0
A	26	1	**6**	1,7,2,9,8,3	X	X	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	32	3	**6**	7,2,4,8,9,3	1,3,9,8	1,3,7,2,4,8	X	X	X	X	3	**5**	9	0
A	35	1	**6**	2,7,3,9,8,4	X	X	X	X	X	X	3	**5**	9	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

續接上表

組號	序號	c	V_c^m	Circle 1	Circle 2	Circle 3	Circle 4	Circle 5	Circle 6	Circle 7	1P	2Ps	3Ps	4Ps
I	1	1	**6**	9,8,3,6,1,4	x	x	x	x	x	x	3	**5**	13	0
I	2	1	**6**	10,8,3,6,1,4	x	x	x	x	x	x	3	**5**	0	0
I	3	3	**6**	3,8,7,1	6,3,1,7,4,2	6,3,8,7,4,2	x	x	x	x	3	**5**	8	0
J	1	1	**6**	6,8,1,5,7,2	x	x	x	x	x	x	3	**5**	9	0
M	1	1	**6**	3,4,10,6,2,8	x	x	x	x	x	x	3	**5**	0	0
M	3	3	**6**	10,6,2,7	7,2,6,8,1,5	7,10,6,8,1,5	x	x	x	x	3	**5**	8	0
M	6	1	**6**	8,3,10,5,2,7	x	x	x	x	x	x	3	**5**	0	0
M	10	3	**6**	10,6,2,7	7,2,6,8,1,5	7,10,6,8,1,5	x	x	x	x	3	**5**	8	0
M	11	1	**6**	3,8,1,6,9,4	x	x	x	x	x	x	3	**5**	11	0
N	1	1	**6**	3,5,10,7,2,9	x	x	x	x	x	x	3	**5**	9	0

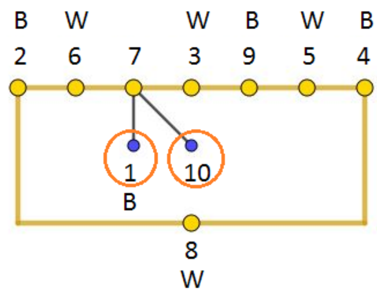
【發現】由 6 點環討論可得到$V_c^6 = 2 \times 2 + 2$，

「環點數」恰好等於「最多騎士對數」$\times 2 + 2$。

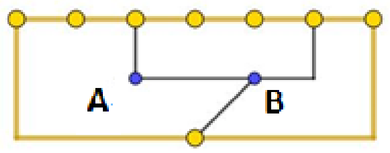
【m = 8】就分岔點之有無討論節點圖形態

【V_c^8 with 2V_t】8 點環含 2 個臨時停駐點(V_t)

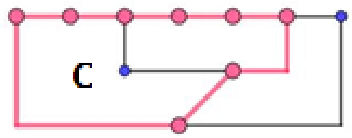
1. B-1 是 156 個圖當中唯一符合「8 點環」且 4 對 9 步的節點圖，交換步驟為 6→10, 2→6, 8→2, 4→8, 5→4, 9→5, 3→9, 1→3, 10→1。
2. B-1 最大特徵是單環本身包含分岔點並延伸出點 1 和點 10 兩個停駐點，在四對騎士的時候會使用到停駐讓位功能。



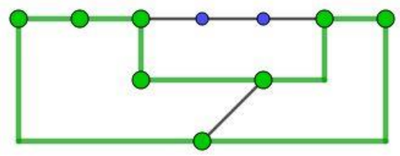
3. 四對非最少交換步數以 A-24 為代表圖，最大環點數為 8，環內有兩條分界線，分界線上的 A、B、C 點分別為不同構造的「8 點環」內的「非環點」。其特點如下：



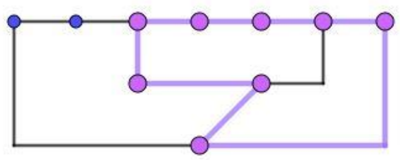
A-24-環 1



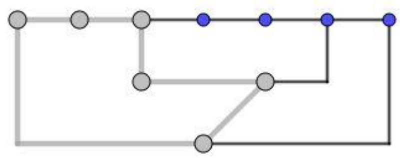
A-24-環 2



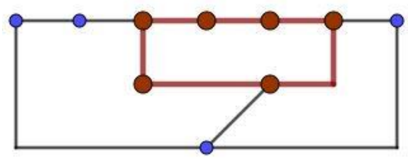
A-24-環 3



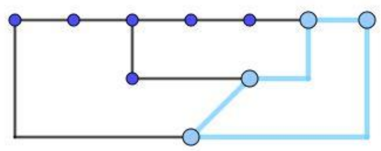
A-24-環 4



A-24-環 5

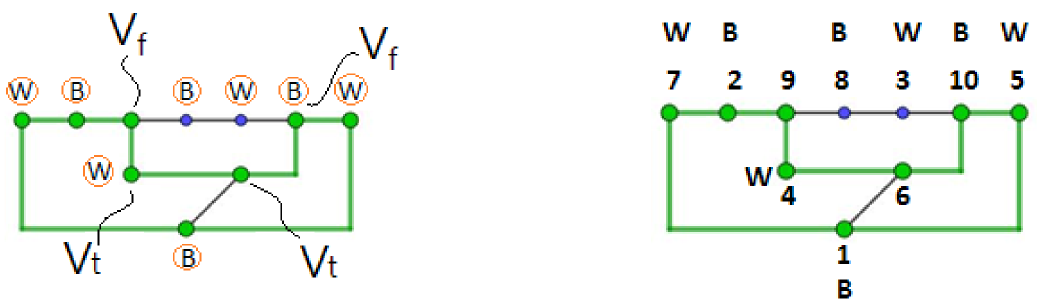


A-24-環 6

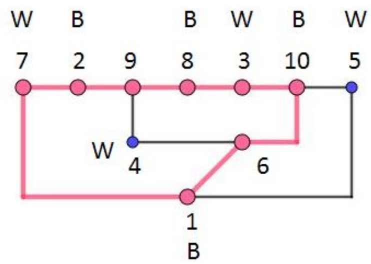


A-24-環 7

4. 有 3 環套，以 A-24-環 1 為例，A 點 B 點分別代表兩條分界線上的點，將 A-24 的 8 點環分割為三個環，因此我們稱之為「三環套」。
5. 有 7 個環，環點數分別為 8、8、8、8、6、6、4，最大環點數為 8，以$V_c^m = 8$表示。
6. 最佳擺放位置為交替擺放，當擺放 3 對的時候可以達到最少交換步數，然而擺放至最多 4 對騎士的時候，步數增加為 12 步。其方式如下：



3 對黑白騎士擺放位置、分岔點和停駐點



4 對黑白騎士擺放位置

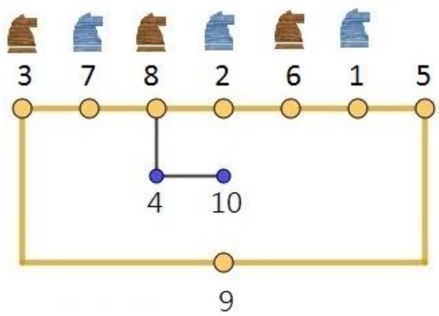
7. 最少交換步數的對數為 3 對，騎士交換的行經位置：10→6, 5→10, 9→5, 8→9, 2→8, 1→2, 6→1，總共 7 步完成交換。
8. 4 對騎士交換路徑：1→6, 7→1, 2→7, 4→2, 8→4, 3→9, 10→8, 5→3, 6→5, 3→10, 8→4, 9→8，合計 12 步。
9. 最佳交換條件有二：交錯擺放有利於減少讓位次數，達到該騎士對數最少交換步數。

【發現】 由 8 點環 31 組圖形討論，得到$V_c^8 = 3 \times 2 + 2$，

「環點數」等於「最多騎士對數」$\times 2 + 2$。

【m = 8】

討論狀態【V_c^8】3 對騎士交換不使用分叉停駐點，僅利用 8 點環即可達成交換位置。



A-5 擺放 3 對黑白騎士最佳位置、分岔點

我們取 A-5 當代表圖，在本圖中雖然有點 4、點 10 看起來似乎有停駐點的功能，然而大環本身就有 2 點可供讓位，不需要使用非環上的點的讓位功能。

【發現】

由 8 點環 31 組圖形討論，得到$V_c^8 = 3 \times 2 + 2$，

「環點數」等於「最多騎士對數」$\times 2 + 2$。

8 點環與 3 對騎士關係─含分岔點 A 組

組序號		c	V_c^m	環號及環點編號 1	2	3	4	5	6	7	1P	2Ps	**3Ps**	4Ps
A	5	1	**8**	9,3,7,8,2,6,1,5	x	x	x	x	x	x	3	5	**7**	0
A	15	3	**8**	10,6,1,8,3,5	3,8,7,2,9,5	10,6,1,8,7,2,9,5	x	x	x	x	3	5	**7**	12
A	20	3	**8**	6,8,3,7,9,2	1,6,2,9,7,3,10,5	1,6,8,3,10,5	x	x	x	x	3	5	**7**	11
A	22	3	**8**	7,1,3,8,9,2	4,9,8,3,10,6	4,9,2,7,1,3,10,6	x	x	x	x	3	5	**7**	12
A	23	3	**8**	2,1,8,9	4,9,8,3,10,6	4,9,2,1,8,3,10,6	x	x	x	x	3	5	**7**	13
A	24	7	**8**	1,7,2,9,4,6	4,9,8,3,10,6	1,6,10,5	1,7,2,9,8,3,10,6	1,7,2,9,4,6,10,5	1,6,4,9,8,3,10,5	1,7,2,9,8,3,10,5	3	5	**7**	12
A	27	3	**8**	1,2,9,8	1,8,3,10,5,6,	1,2,9,8,3,10,5,6	x	x	x	x	3	5	**7**	10
A	28	1	**8**	1,2,9,8,3,10,5,6	X	x	x	x	x	x	3	5	**7**	13
A	29	1	**8**	1,2,9,8,3,10,5,6	X	x	x	x	x	x	3	5	**7**	0
A	30	1	**8**	2,7,3,9,8,4,10,6	X	x	x	x	x	x	3	5	**7**	0
A	31	3	**8**	7,1,6,10,4,8,9,3	2,3,9,8	2,3,7,1,6,10,4,8	x	x	x	x	3	5	**7**	0
A	34	3	**8**	7,3,9,8,4,2	1,7,3,9,8,4,10,6	1,7,2,4,10,6	x	x	x	x	3	5	**7**	11

8 點環與 3 對騎士關係—含分岔點 BCD 組

組序號	c	V_c^m	環號及環點編號 1	2	3	4	5	6	7	1P	2Ps	3Ps	4Ps
B 6	3	**8**	6,10,5,9, 3,7	8,2,6,7, 3,9,5,4	8,2,6,10, 5,4	x	x	x	x	3	5	**7**	10
B 8	1	**8**	8,2,6,7, 3,9,5,4	X	X	x	x	x	x	3	5	**7**	11
B 15	1	**8**	2,9,4,10, 6,5,1,7	X	X	x	x	x	x	3	5	**7**	0
B 18	1	**8**	6,10,4,8, 7,3,9,5	X	X	x	x	x	x	3	5	**7**	13
B 19	3	**8**	9,3,7,8, 4,10,6,5	1,4,10,6	9,3,7,8, 4,1,6,5	x	x	x	x	3	5	**7**	10
C 5	3	**8**	1,2,9,7	1,7,3,10, 5,6	1,2,9,7, 3,10,5,6	x	x	x	x	3	5	**7**	11
C 7	1	**8**	1,4,9,7, 3,10,5,6	X	X	x	x	x	x	3	5	**7**	11
C 8	3	**8**	1,3,9,8	1,8,4,10, 6,7	1,3,9,8, 4,10,6,7	x	x	x	x	3	5	**7**	11
C 9	1	**8**	5,9,8,4, 10,6,7,1	X	X	x	x	x	x	3	5	**7**	13
C 11	1	**8**	9,8,4,10, 6,7,1,5	X	X	x	x	x	x	3	5	**7**	11
D 5	3	**8**	5,10,9,3	5,3,7,6, 2,8	5,10,9,3, 7,6,2,8	x	x	x	x	3	5	**7**	12
D 8	3	**8**	6,4,8,7, 3,9	2,8,7,1	6,4,8,2, 1,7,3,9	x	x	x	x	3	5	**7**	11
D 9	3	**8**	6,4,8,7, 3,9	6,9,5,1	6,4,8,7, 3,9,5,1	x	x	x	x	3	5	**7**	10

8 點環與 3 對騎士關係—含分岔點 EGM 組

組序號	c	V_c^m	環號及環點編號 1	2	3	4	5	6	7	1P	2Ps	3Ps	4Ps
E 4	3	**8**	6,7,3,4,8,2	9,4,3,7,1,5	6,7,1,5, 9,4,8,2	x	x	x	x	3	5	**7**	10
E 5	3	**8**	6,8,3,4,9,2	7,2,9,4, 3,8,1,5	7,2,6,8,1,5	x	x	x	x	3	5	**7**	11
E 6	3	**8**	7,8,4,5, 9,3	1,5,4,8, 2,6	7,8,2,6, 1,5,9,3	x	x	x	x	3	5	**7**	0

續接上表

組序號	c	V_c^m	環號及環點編號 1	2	3	4	5	6	7	1P	2Ps	**3Ps**	4Ps
E 9	3	**8**	6,7,3,4, 8,2	10,4,3,7, 1,5	6,7,1,5, 10,4,8,2	x	x	x	x	3	5	**7**	12
G 2	6	**8**	6,8,1,5, 7,2	10,5,1,8, 3,9	10,9,3,4	6,8,3,9, 10,5,7,2	10,5,1,8, 3,4	6,8,3,4, 10,5,7,2	x	3	5	**7**	10
M 7	1	**8**	2,6,7,1, 5,9,3,8	x	x	x	x	x	x	3	5	**7**	0

【發現】由 8 點環 31 組圖形得到$V_c^8 = 3 \times 2 + 2$。

「環點數」等於「最多騎士對數」$\times 2 + 2$。

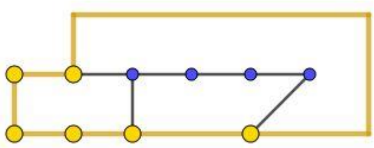
【m = 10 】

10 點環與 8 點環有相同情形，停駐點沒有讓位功能，但有增加步數的可能，可以改變騎士擺放位置增加挑戰難度。

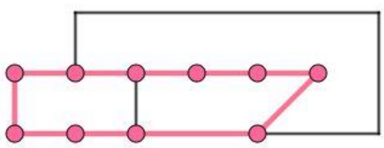
10 點環與 4 對騎士關係

組序號	c	V_c^m	環號及環點編號 1	2	3	4	5	6	7	1P	2Ps	3Ps	**4Ps**
B17	7	**10**	3,9,5,6, 10,4,8,7	1,7,8,2	1,2,8,4, 10,6	1,7,3,9,5, 6,10,4,8,2	1,7,8,4, 10,6	1,2,8,7, 3,9,5,6	1,7,3,9, 5,6	3	5	7	**9**
C10	7	**10**	3,2,8,9	8,2,7,6, 10,4	5,9,8,4, 10,6,7,1	5,9,3,2,8, 4,10,6,7,1	5,9,8,2, 7,1	3,2,7,6, 10,4,8,9	5,9,3,2, 7,1	3	5	7	**9**
E3	7	**10**	6,2,8,4,3,7	10,4,3,9	10,9,3,7, 1,5	6,7,3,9,10, 4,8,2	6,7,1,5,10, 9,3,4,8,2	10,4,3,7, 1,5	10,4,8,2, 6,7,1,5	3	5	7	**9**
H6	7	**10**	8,3,7,9,2,6	2,9,4,10, 5,1	7,1,5,10, 4,9	8,3,7,9,4, 10,5,1,2,6	8,3,7,1,5, 10,4,9,2,6	2,9,7,1	8,3,7,1, 2,6	3	5	7	**9**

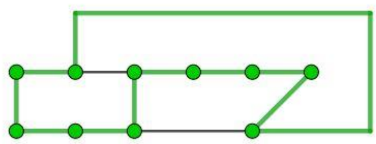
以 H-6 為代表圖，$m = 10$表示「10 點環」由 10 個點形成一個大環，將 6 點形成的主幹包覆。以下七個分解圖環點數分別為 6, 10, 10, 4, 6, 6, 6，最大環點數為 10。其特點如下：



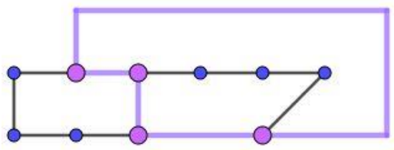
H-6-環 1



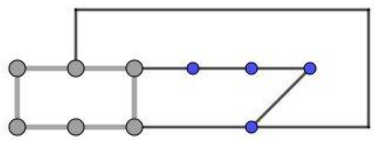
H-6-環 2



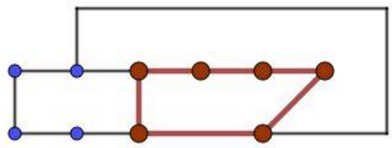
H-6-環 3



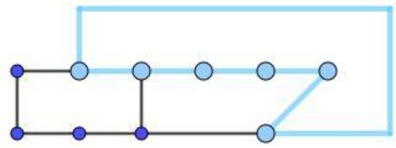
H-6-環 4



H-6-環 5

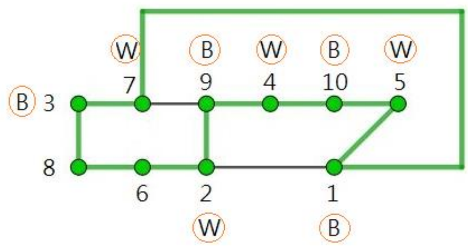


H-6-環 6



H-6-環 7

1. 有 3 環套， H-6 的 10 點環分割為三個環，符合「三環套」。
2. 最佳擺放位置為交替擺放，最多可以擺放 4 對騎士且交替擺放可以得到最少交換步數為 9 步。以下圖 4 對騎士擺放方式為例：



3. 騎士交換的行經位置：3→8, 7→3, 9→7, 4→9, 10→4, 5→10, 1→5, 2→1, 8→2，總共 9 步完成交換。
4. 最佳交換條件有二：交錯擺放及 10 點環，這樣可以減少讓位次數，達到最少交換步數。

【發現】由 10 點環 4 組圖形得到$V_c^{10} = 4 \times 2 + 2$。

「環點數」等於「最多騎士對數」$\times 2 + 2$。

綜上，各環上點數與騎士對的關係如下：

(1) V_c^m $with$ 2V$_t$：當$m = 4, 6, 8$， $V_c^m = 2n$

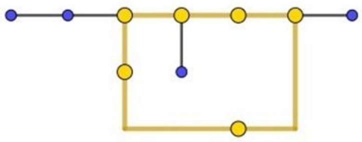
(2) V_c^m ：當$m = 4, 6, 8, 10$， $V_c^m = 2n + 2$

三、 度序列與同構圖判斷

我們在繪製節點圖的過程中發現「度序列」(Degree Sequence)有助於判斷同構圖。以下是利用度序列判斷同構圖。

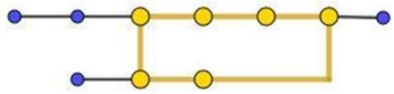
(一) 同構圖判斷

度序列(3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)



A-11

度序列(3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)

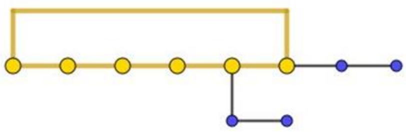


A-25

圖 A-11 和圖 A-25 度序列相同，皆是(3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)，判斷其相似度從環入手，首先其環點都是 6 點，接著判斷其他特徵是否相同，如停駐點及分岔點，兩圖都有 3 個分岔點和 3 個停駐點，前述特徵的距離也是判斷標準之一。

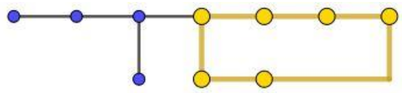
(二) 異構圖判斷

度序列(3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)



E-10

度序列(3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)



M-10

E-10 和 M-10 度序列相同，但分岔點與停駐點的連接方式不同，所以是異構圖。由此可知，除了判斷度序列之外，也要觀察圖形的特徵相似性，才能夠辨別是否為同構或異構圖。

陸、 研究結論

一、我們的探究過程從八連塊擴充十連塊，透過自創二元編碼方式刪除重複圖形後確認唯一棋盤圖，共得到 156 個棋盤圖。

二、從節點圖特性可以判斷最多騎士對與騎士最少交換步數。

三、騎士對的擺法依對數有從數十種到近千種擺法，我們找到最適合的擺法為「交錯擺放」，有利於找到騎士最少交換步數。

四、騎士對交錯擺放之下，單一節點圖最多騎士對得到最少交換步數關係如下：

「環圖」$1P_{mm}=3$，$2P_{mm}=5$，$3P_{mm}=7$，$4P_{mm}=9$

$$nP_{mm}=2n+1\text{，且}1\le n\le 4$$

$$\text{當}V_f=2\text{ 且}V_t=2\text{，則 }nP_{mm}=3n$$

$$當V_f = 1 且V_t = 2，則 nP_{mm} = 2n + 1$$

「非環圖」$1P_{mm} = 3$，$2P_{mm} = 6$，$3P_{mm} = 9$

$$nP_{mm} = 3n，且1 \le n \le 3$$

五、環上點數與騎士對的關係如下：

(一)若 V_c^m $_{with}$ $2\mathrm{V_t}$ 且 $\mathrm{m} = 4, 6, 8$， $V_c^m = 2n$

(二)若 V_c^m 且$\mathrm{m} = 4, 6, 8, 10$， $V_c^m = 2n + 2$

六、度序列可作為判斷同構圖的有效工具，但需參考節點圖特徵將分岔點與臨時停駐點的距離予以比對確認。

柒、未來研究方向

關於這個遊戲，我們想到可以嘗試擴增棋盤， 增加更多連塊。其二為將棋盤擴展為三維設計，成為立體期盤。目前我們的研究成果可以單人玩，主要在黑白騎士位置交換。未來建議增加遊戲規則，創發多人玩法，亦可以嘗試擴充將遊戲數位化。

捌、參考文獻

施信瑋、吳哲瑋、江孟烜、王澤瑋(2003)。騎士迷蹤。中華民國第 43 屆中小學科學展覽會作品說明書。高中組數學科。

徐睿、曾紹齊(2004)。一個關於一筆畫的數學遊戲。中華民國第 44 屆中小學科學展覽會作品說明書。高中組數學科。

張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論。臺北市：台大出版中心出版。

陳柔安、張昭偉、張宸溥(2016)。棋盤遊戲：與直-橫-斜一筆畫共舞。中華民國第 56 屆中小學科學展覽會作品說明書。國中組數學科。

黃右嫺、潘建融、陳柏諺(2005)。棋盤上的馬步。中華民國第 45 屆中小學科學展覽會作品說明書。高中組數學科。

葉其璋(2018)。Knight One One. 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。國中組數學科。

El-Zohny, H. & El-Morsy, H. (2012). *Shortest Path Algorithm for Some Graphs before and after Folding.* International Journal of Pure and Applied Mathematics, 75 (2), 141-148.

Erde, J., Golenia, B. & Golenia, S. (2018). *The Closed Knight Tour Problem in higher Dimentions*. 2020/ 3/ 12 Retrieved from https://arxiv.org/pdf/1202.5291.pdf

Petkovic, M. (1997). *Mathematics and Chess*. New York: Dover Publications.

Rhoads, G. C. (2005). *Planar titlings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds.* Journal of computational and Applied Mathematics, 174, 329-353. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.05.002

Weisstein, E. W. *"Octomino"*. 2019/ 9/ 5 retrieved from Math World – A Wolfram Web Resource.

附錄、156 個節點圖度序列(節錄)

組號	序號	4 度	3 度	2 度	1 度	合併參照	**組號**	序號	4 度	3 度	2 度	1 度	合併參照
A	1	1	0	6	3	1063	**B**	1	1	0	7	2	1072
A	2	0	2	4	4	0244	**B**	2	1	2	3	4	1234
A	3	0	1	8	1	0181	**B**	3	1	1	3	5	1135
A	4	0	2	4	4	0244	**B**	4	1	0	5	4	1054
A	5	0	1	8	1	0181	**B**	5	1	1	3	5	1135
A	6	0	3	4	3	0343	**B**	6	0	3	6	1	0361
A	7	0	2	6	2	0262	**B**	7	0	4	2	4	0424
A	8	1	1	5	3	1153	**B**	8	0	2	6	2	0262
A	9	0	2	4	4	0244	**B**	9	0	3	2	5	0325
A	10	0	4	4	2	0442	**B**	10	0	2	4	4	0244
A	11	0	3	4	3	0343	**B**	11	0	4	3	3	0433
A	12	0	2	6	2	0262	**B**	12	0	2	4	4	0244
A	13	0	2	4	4	0244	**B**	13	0	1	8	1	0181
A	14	0	3	4	3	0343	**B**	14	0	4	3	3	0433
A	15	0	3	6	1	0361	**B**	15	0	1	8	1	0181
A	16	0	1	6	3	0163	**B**	16	0	2	5	3	0253
A	17	0	2	5	3	0253	**B**	17	0	3	7	0	0370
A	18	1	2	5	2	1252	**B**	18	0	2	6	2	0262
A	19	0	4	4	2	0442	**B**	19	0	3	6	1	0361
A	20	0	3	6	1	0361	**B**	20	0	2	4	4	0244
A	21	0	2	6	2	0262	**B**	21	0	3	5	2	0352
A	22	0	3	6	1	0361	**B**	22	0	1	6	3	0163
A	23	0	4	4	2	0442	**B**	23	0	3	4	3	0343
A	24	0	4	6	0	0460	**B**	24	0	2	4	4	0244
A	25	0	3	4	3	0343	**B**	25	0	4	3	3	0433
A	26	0	2	6	2	0262	**B**	26	0	2	6	2	0262
A	27	0	4	4	2	0442	**B**	27	1	2	3	4	1234
A	28	0	2	6	2	0262	**B**	28	0	3	4	3	0343
A	29	0	1	8	1	0181	**B**	29	0	1	6	3	0163
A	30	0	1	8	1	0181	**B**	30	1	3	4	2	1342
A	31	0	3	6	1	0361	**B**	31	0	3	4	3	0343
A	32	0	4	4	2	0442							
A	33	0	3	4	3	0343							
A	34	0	3	6	1	0361							
A	35	0	2	6	2	0262							

【評語】080401

從一個西洋棋衍生的古老棋盤遊戲找到探究的靈感，本作品探討西洋棋中騎士巡邏的延伸，透過棋盤變形版本，觀察騎士交換規律，並嘗試擴充新的棋盤格，且以對應之節點圖形特徵，決定騎士擺放位置、最多騎士對與最少交換步數規則。研究進行的方式主要是透過窮舉法，且運用一些理論的觀點，進行觀察與歸納，並列出 156 個 16 組路徑圖與本作品所提出的節點圖，可以看出作者的用心。建議日後可以考慮運用更多圖論的方法進行探討，同時輔以更完備的說明以及更嚴謹的證明，更能凸顯本研究的亮點。

作品海報

研究動機

這是一個源自於西洋棋衍生的古老棋盤遊戲，透過棋盤變形版本，我們觀察到騎士交換規律，並嘗試擴充新的棋盤格，且從中找出可放置最多騎士及各騎士對最少交換步數的可能性。

研究目的

- 解出Crazy Knights遊戲棋盤騎士交換條件。
- 研究不同連方塊引導出的騎士路徑連通特性。
- 找出最多騎士對的可能性與最少交換步數規律。

研究設備與器材

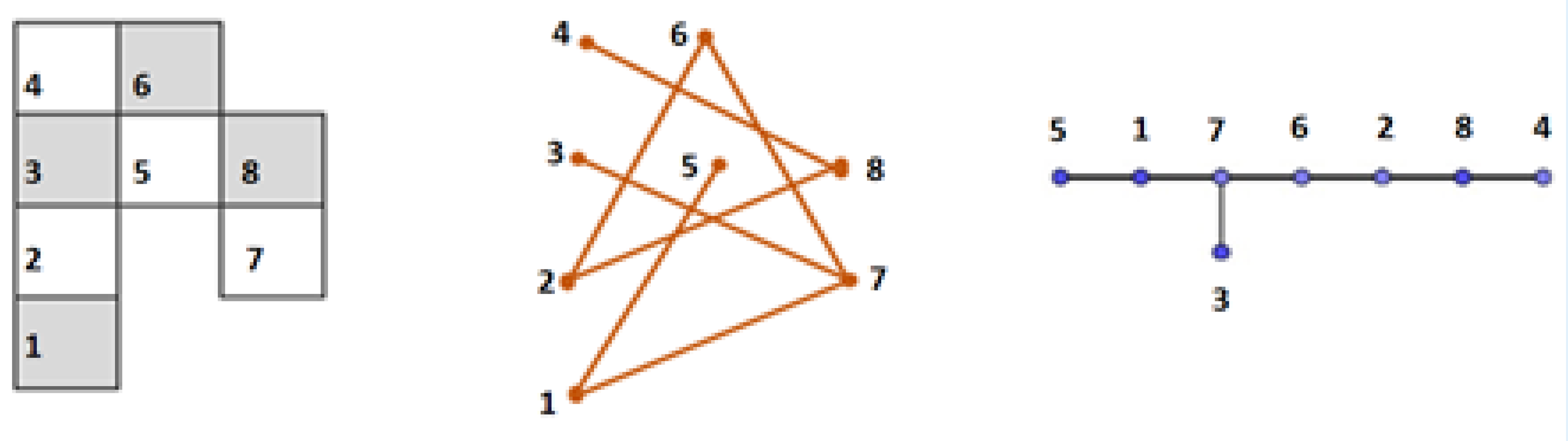
- 兩種顏色連方塊，用來組合各種連塊組合可能。
- 紀錄資料之A4紙張、筆記與電腦。
- 連方塊用以模擬交換路徑。

研究過程與方法

騎士路徑可以延伸之可能性，我們連續分析七連塊及八連塊，從中分析騎士路徑，進一步設計出十連塊棋盤，再設計節點圖，探究放置最多騎士的可能與最少交換步數規則。

節點圖

一般簡單圖(graph)屬性為有限個點，任兩點之間最多只有一條邊相連，有序對G=(V , E)，V是非空有限集合，其元素為「點」(vertex)，本研究指「點集合」，E元素為「邊」(edge)，指「邊集合」，本研究將簡單圖命名為「節點圖」。

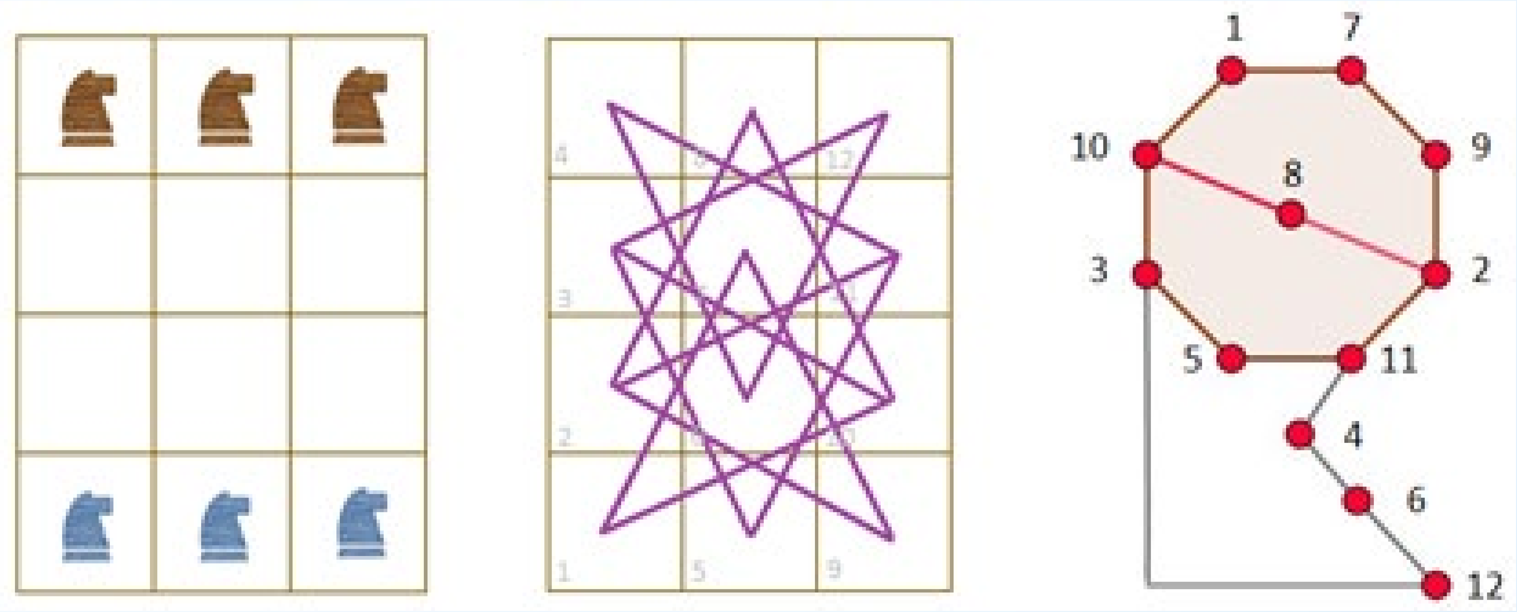


名詞定義

V_t　表示臨時停駐點，是騎士交換讓位空間。
V_f　表示分岔點，連接3個以上的點。
c　表示節點圖的環形構造。
$V_c{}^m$ 表示環點最大值，數個環中，環上點數最多者；
m　表示環上的最大點數。
P　表示騎士對(pairs)，n表「騎士對數」。
P_{mm}　該騎士對「最少交換步數」
nP_{mm}　表示擺放騎士對的最少交換步數。
k　表示兩個分岔點之間的距離包含的邊數 。

騎士交換與騎士對

從文獻回顧得知最早的騎士交換遊戲源自於1512年Guarini設計的騎士交換遊戲，分析達成騎士交換的主要條件，要有分岔停駐及環形circle，依不同的分岔停駐點數與環點數也會有不同的騎士對「對數」(pairs)。



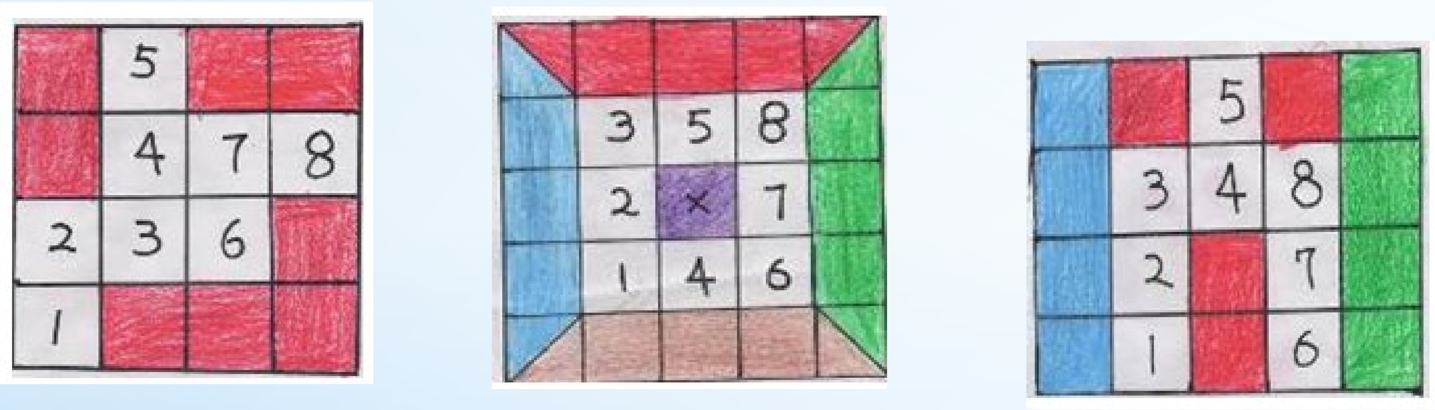
Guarini's problem　　variant I

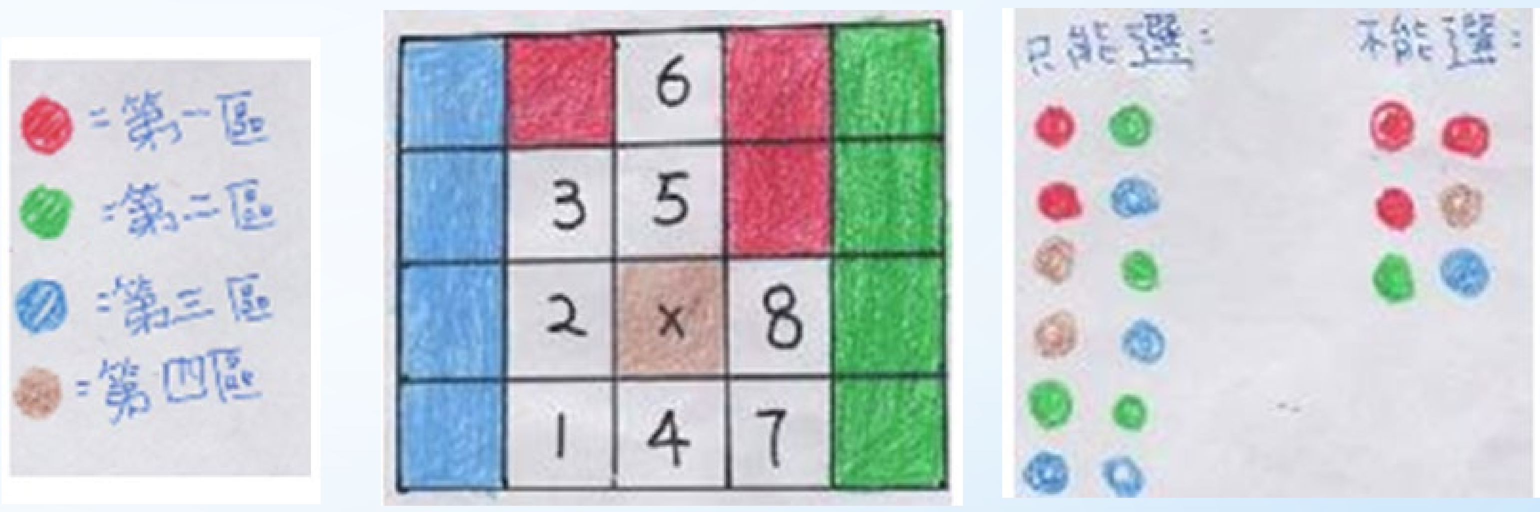
研究歷程

【猜想一】瘋狂騎士棋盤格可能不只一種！

【找證據】從369個八連塊中，以能達成1對騎士交換及4 × 4範圍內的自由連方塊為基準，篩選出可用之騎士交換圖有__21__個可用八連塊。

【有條件的擴充】 也就是前提必須先能形成騎士交換再進行擴充，從篩選出來的棋盤加兩格擴充為新的十連塊棋盤格。





【猜想二】瘋狂騎士有多少可能性？

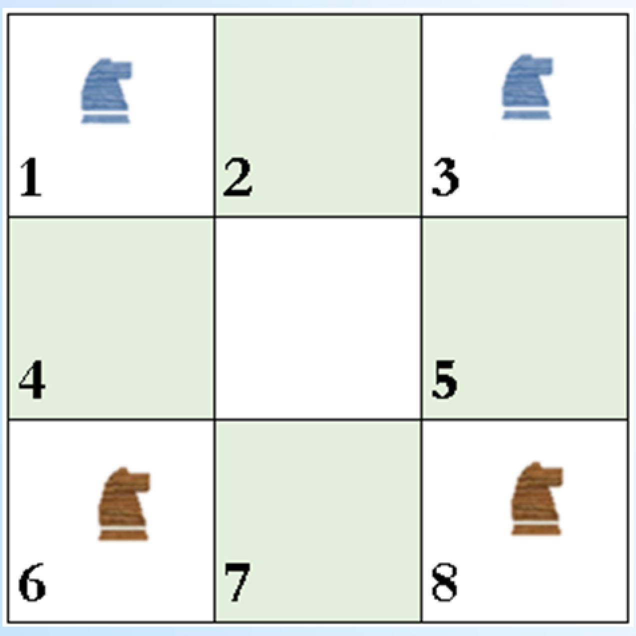
【Coding 】將八連塊以順時鐘方向加上兩格成為十連塊，再以二元編碼將圖形編號、比對後，刪除重複得到唯一解。

【第一階段】刪除旋轉90°、180 °和270 °圖形。　　【第二階段】刪除鏡射旋轉90°、180 °和270 °圖形。

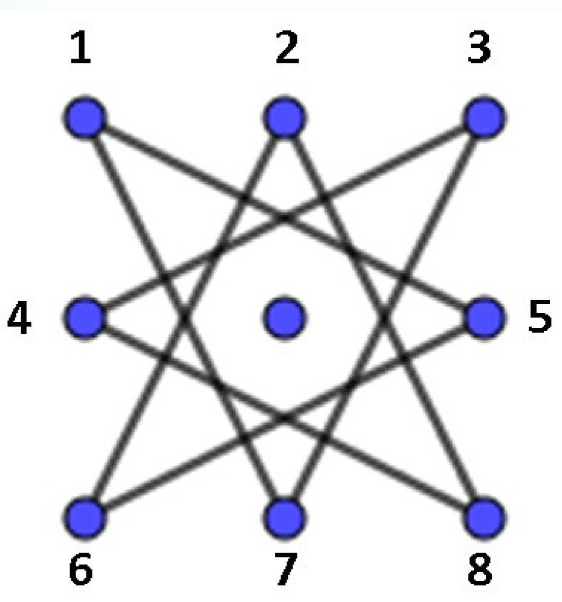
0	1	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	1	1	0

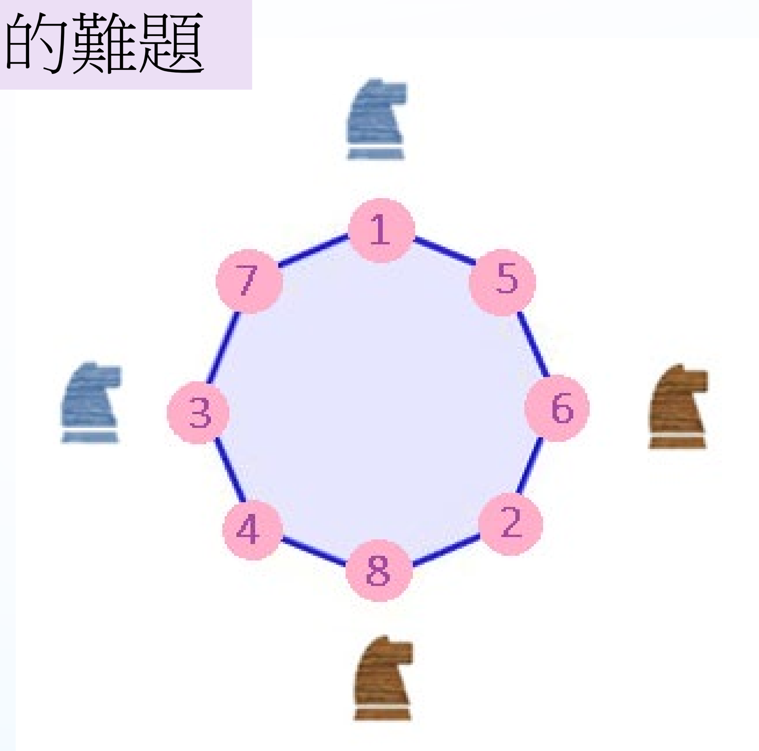
組別	序號	二元編碼	旋轉角度	類型	源頭組別	源頭序號	源頭二元編碼	源頭旋轉角度	源頭類型
90	1	1111010101110001	0	原圖	88	2	1111010101110001	0	原圖
90	2	1111010101110010	0	原圖	88	7	1111010101110010	0	原圖
90	3	1111010101110100	0	原圖	88	10	1111010101110100	0	原圖
90	4	1000111101010111	0	原圖	88	23	1000111101010111	0	原圖
90	5	0100111101010111	0	原圖	88	22	0100111101010111	0	原圖
90	6	0010111101010111	0	原圖	88	21	0010111101010111	0	原圖
90	7	0001111101010111	0	原圖	88	10	0001111101010111	90	原圖

【結果】確認得_16_組_156_個唯一圖，創發新的棋盤。



Guarini 的難題

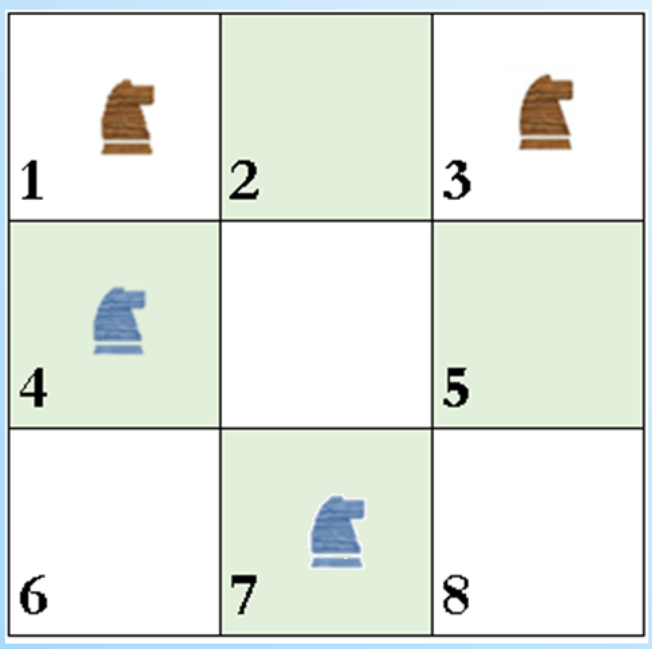


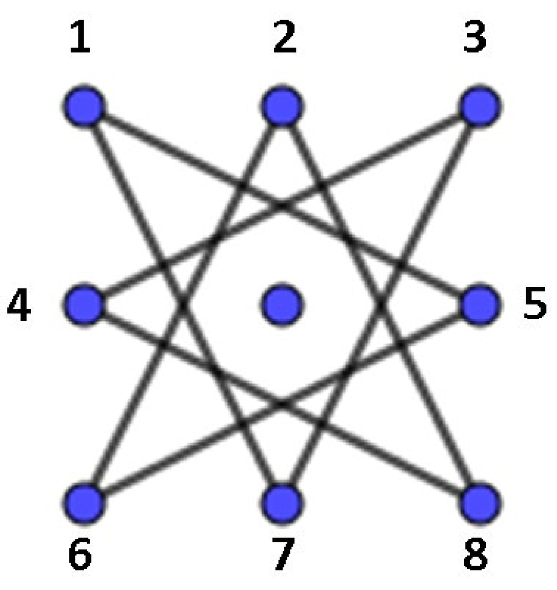


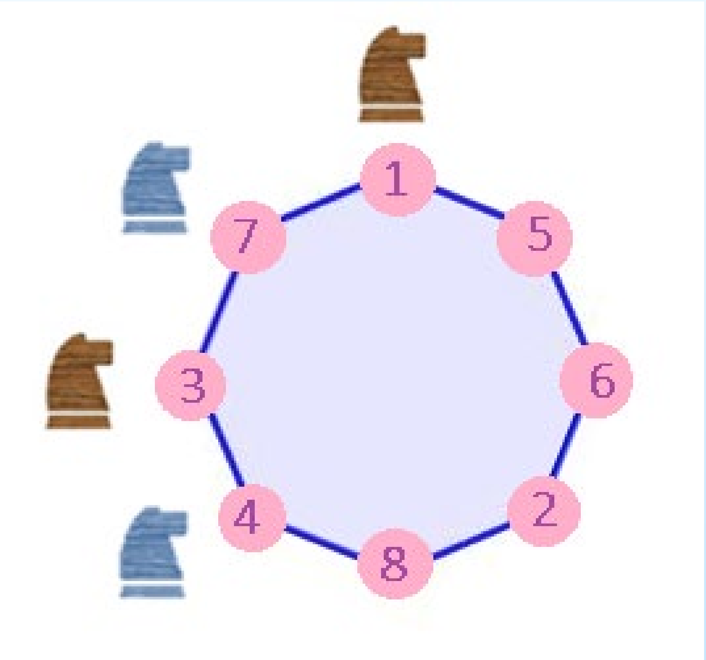
原始位置最少交換步數

W 1→5	B 6→2
W 3→7	B 8→4
W 5→6	B 2→8
W 7→1	B 4→3
W 6→2	B 3→7
W 1→5	B 8→4
W 2→8	B 7→1
W 5→6	B 4→3

改變騎士位置





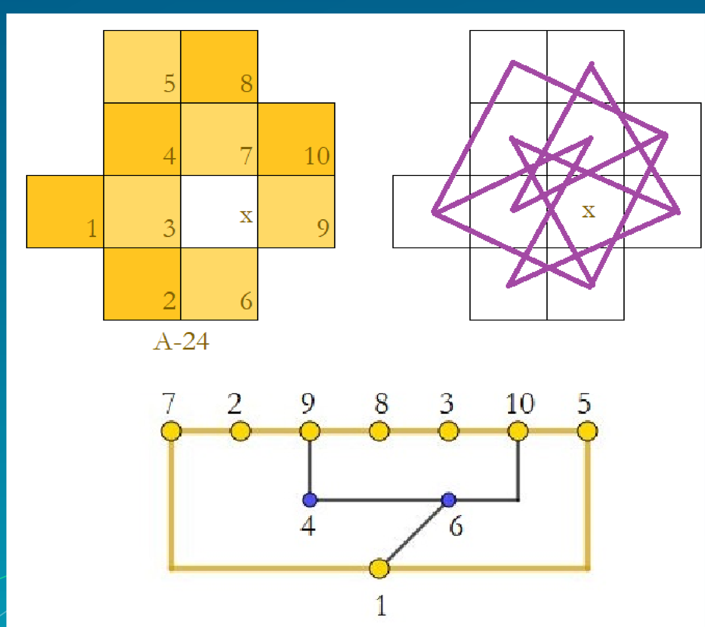


第一種走法

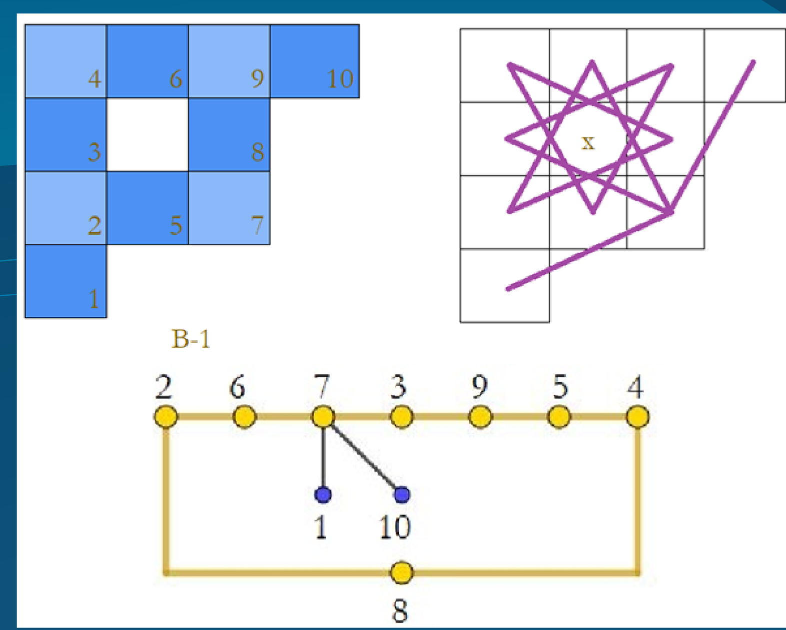
W 4→5	B 3→4
W 7→3	B 1→7
W 5→1	

第二種走法

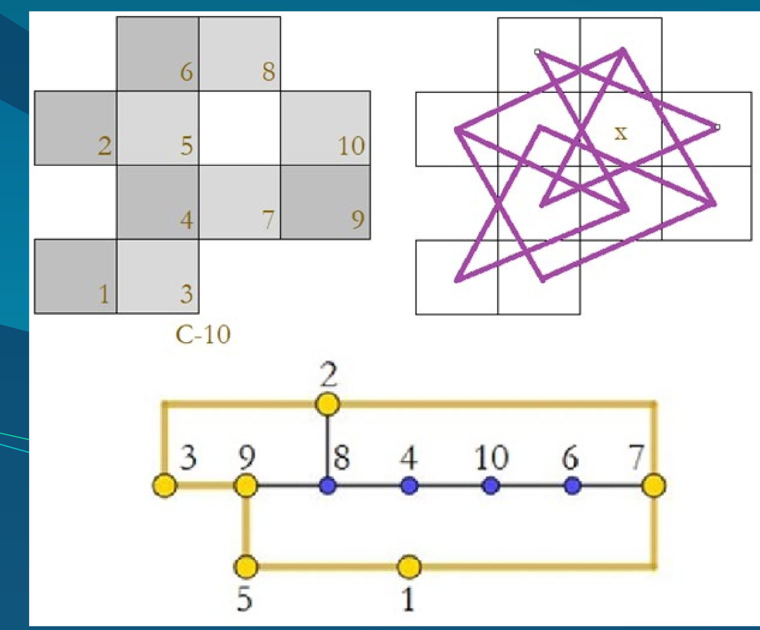
B 1→8	W 7→1
B 3→7	W 4→3
B 8→4	



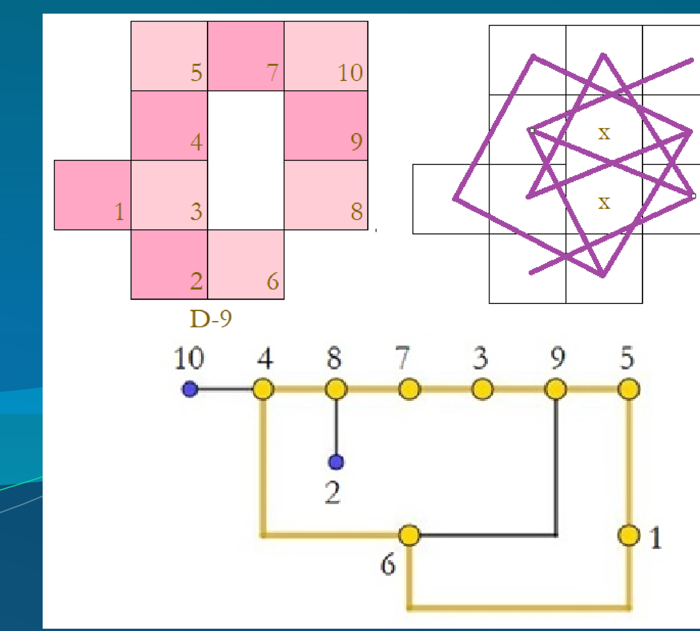
A-24　有3環套且有7個環與8點環，且可以達成4對12步。



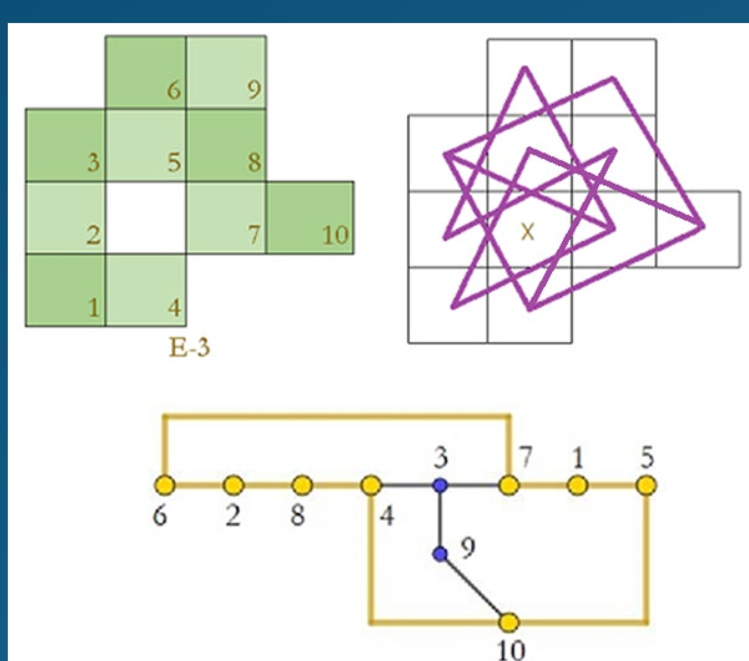
B-1　是唯一8點環且形成4對9步，其餘4對九步都是10點環。



C-10　有3環套且有7個環及10點環，達成4對9步。



D-9　雖然只有3個環和8點環但可以達成4對10步。



E-3　有3環套且有7個環及10點環，達成4對9步。

最多騎士對數

最多騎士對有3種類型$V_c^m = 0$ (無環)、 $V_c^m = 2n$ (少點環)及 $V_c^m = 2n + 2$(多點環)，無環的第2條件是至少n個V_t，且V_f與端點的距離邊數必須大於n，少點環的條件1個V_f及2個V_t，多點環則不須其他條件。從我們的觀察發現1對的棋盤都是無環和4點環，2對則是無環、4點環及6點環，3對則有無環、6點環與8點環，4對則是8點環及10點環，無環形結構則沒辦法達成4對騎士交換。

得到結果為環點數÷ 2 ≥ 騎士對數($V_c^{\frac{m}{2}} \geq n$)

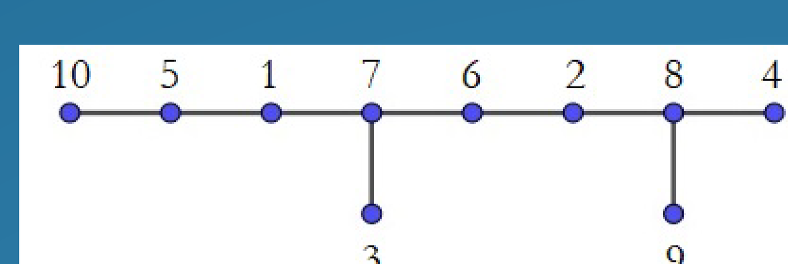
最少步數nP_{mm}

無環只能靠讓位、定位、定位各n步達成3n的步數，少點環則是$2n+1$到$3n+1$不等，步數則視$\hbar$值的大小而定，而多點環的步數則全是$2n+1$。得出的結果為$V_c^m = 0$，

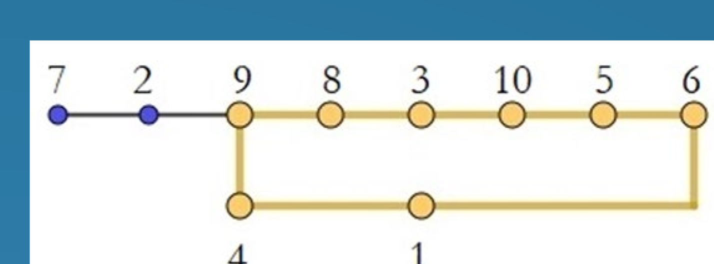
$nP_{mm} = 3n$、 $V_c^m = 2n$ $nP_{mm} = 2n + 1 + \hbar$、

$V_c^m = 2n + 2$ $nP_{mm} = 2n + 1$，

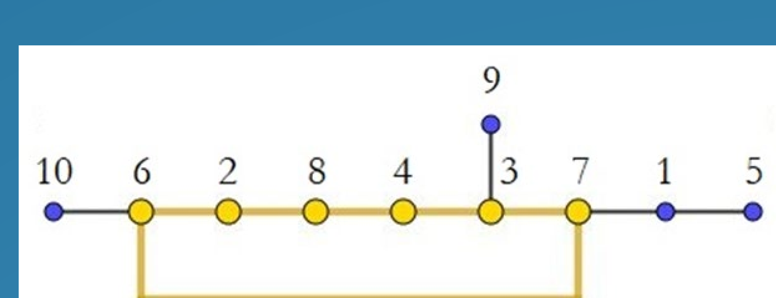
特例則是2對10步及3對16步。



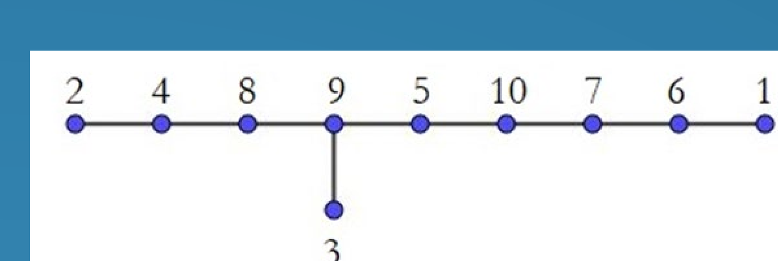
A-13　　2對6步　無環



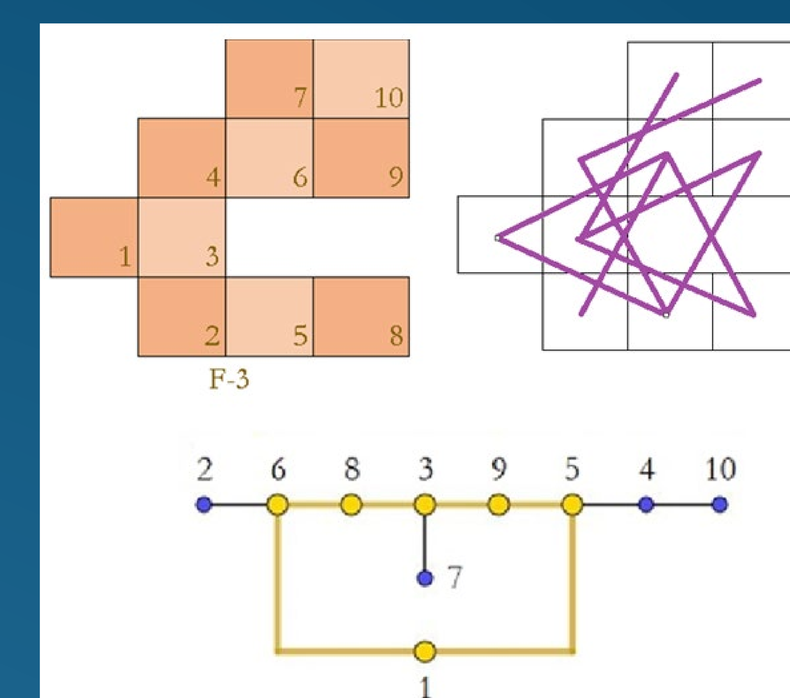
A-29　3對7步　多點環



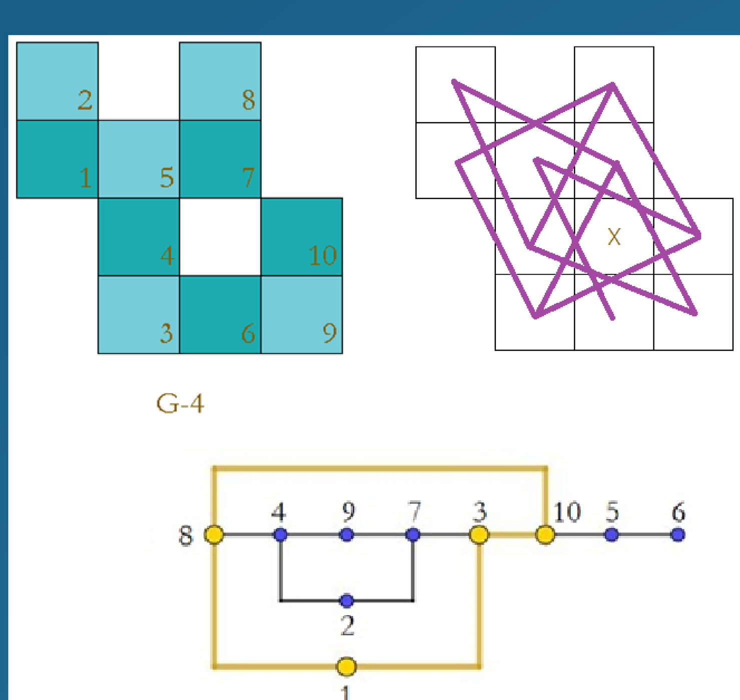
E-2　3對8步　少點環



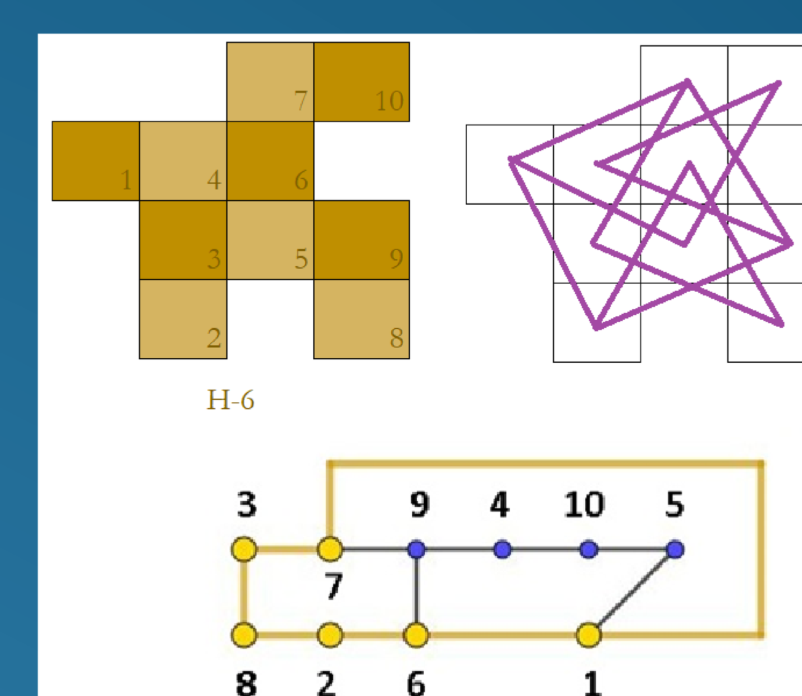
A-16　2對10步 無環 (特例)



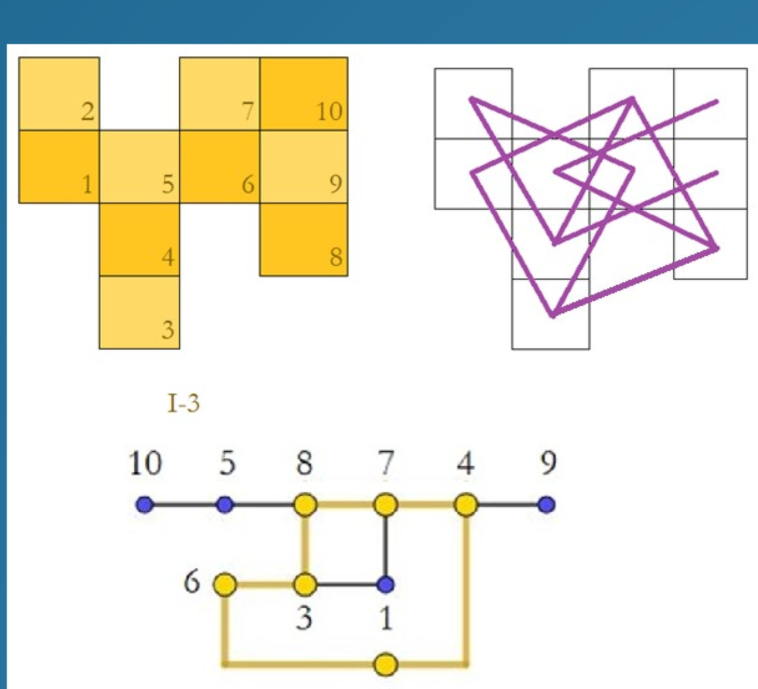
F-3 有1個環，最大環點為6點環，可達成3對9步。



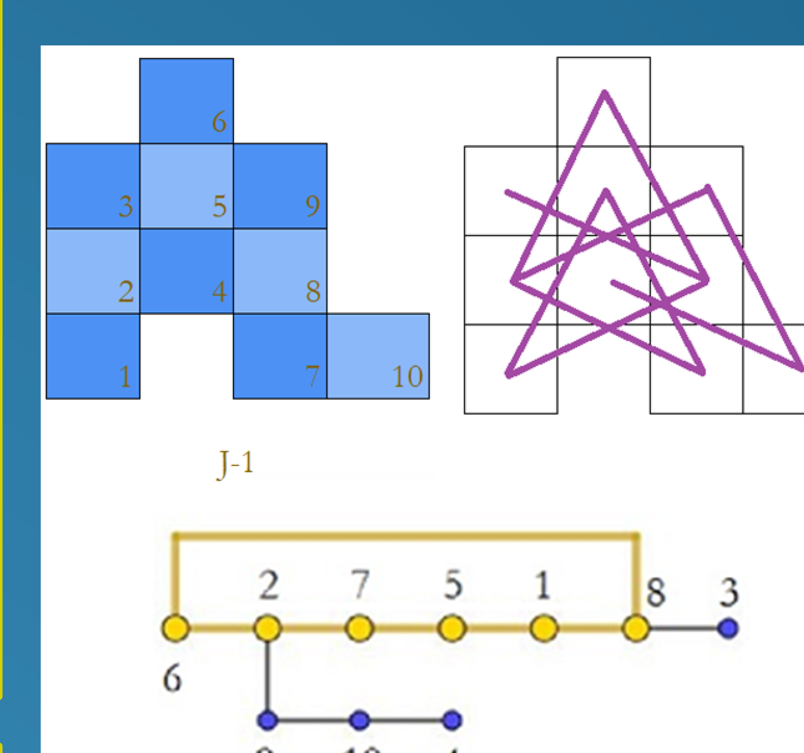
G-4　有3環套且有6個環及6點環，達成3對7步。



H-6 有3環套且有7個環及10點環，達成4對9步。

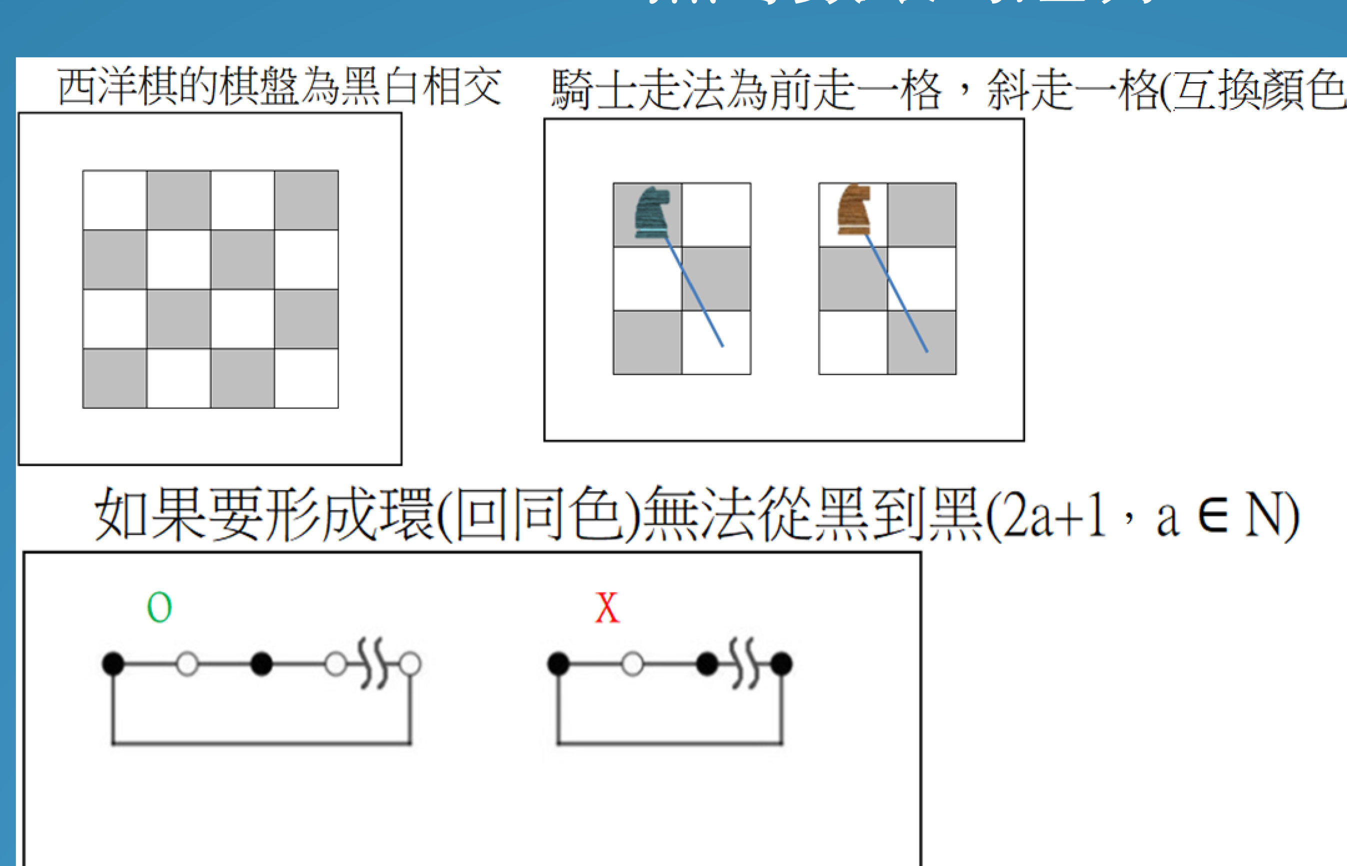


I-3　有3個環及6點環，達成3對8步。

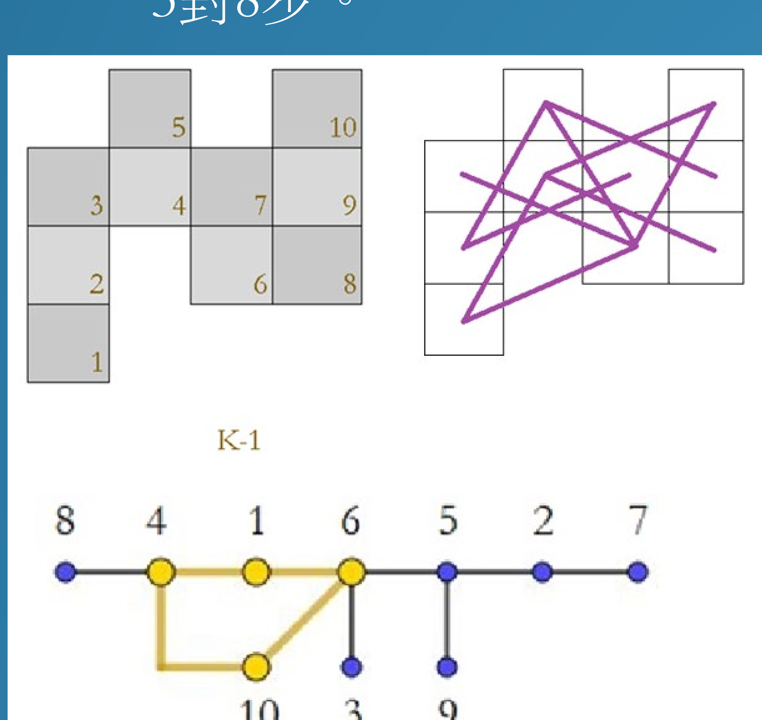


J-1　有1個環及6點環，達成3對9步。

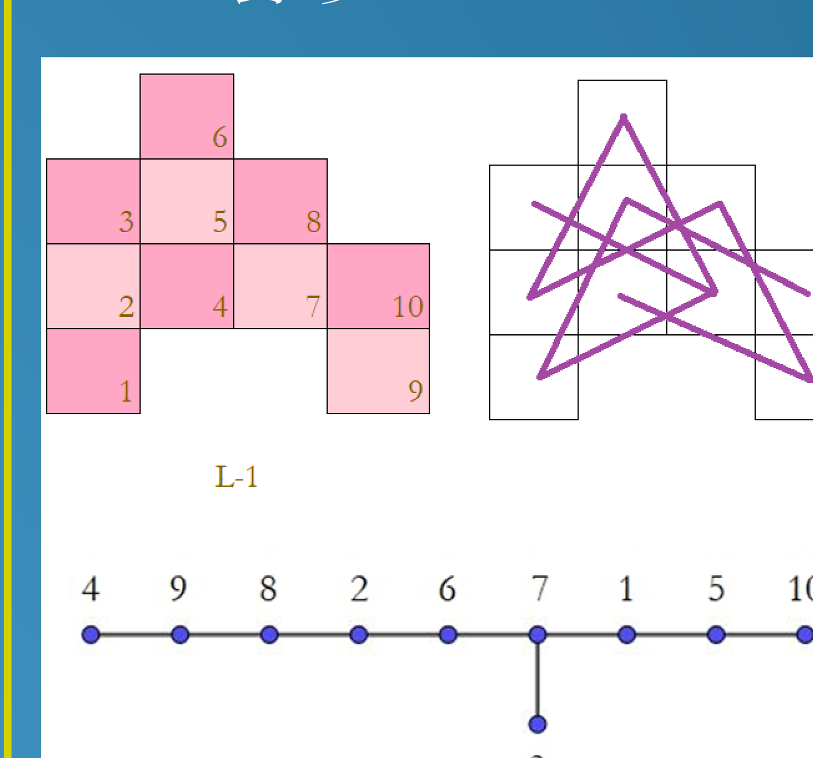
無奇數環的證明



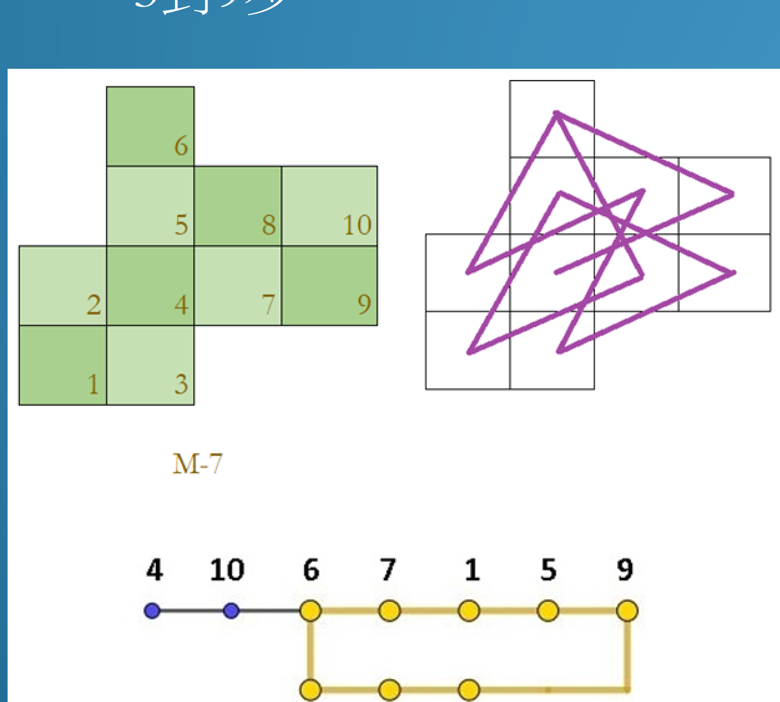
因為沒有奇數環所以4對以上的棋盤最少連塊數皆為$2n+2$。1~3對因為有無環擺法所以不是$2n+1$，6對之後無法在4×4範圍內達成騎士交換。



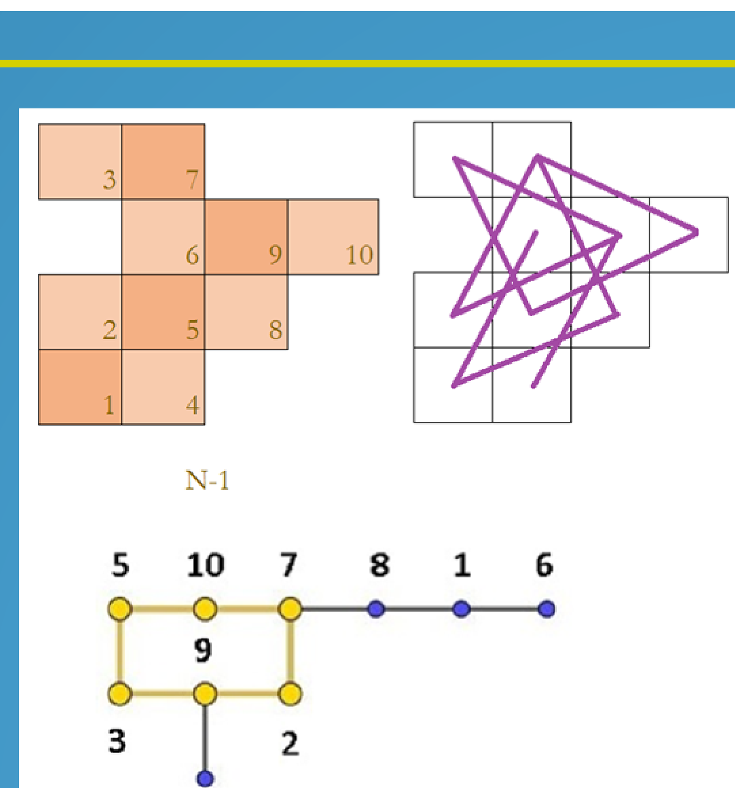
K-1　有1個環及4點環，達成3對9步。



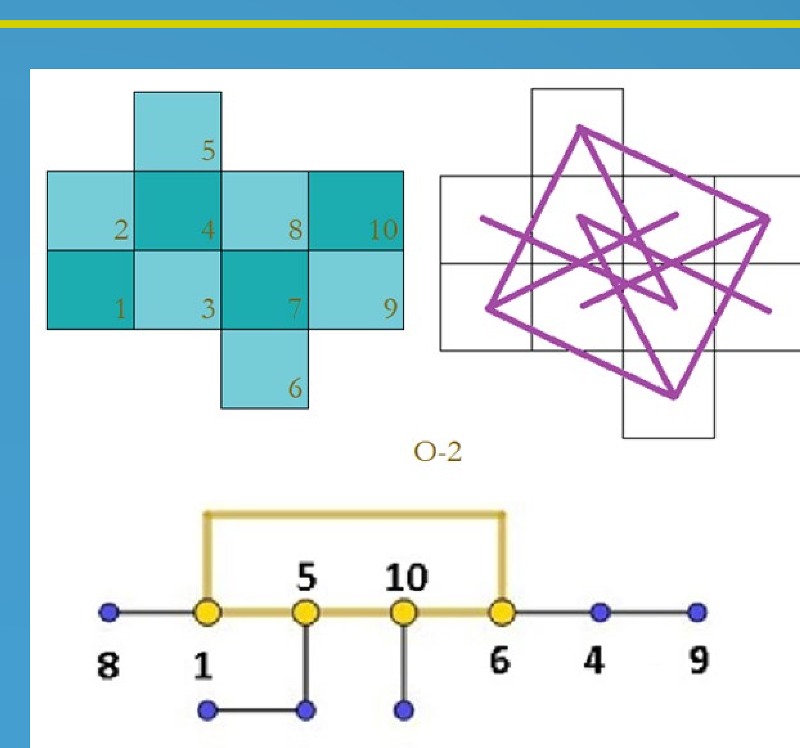
L-1　無環，達成2對10步。



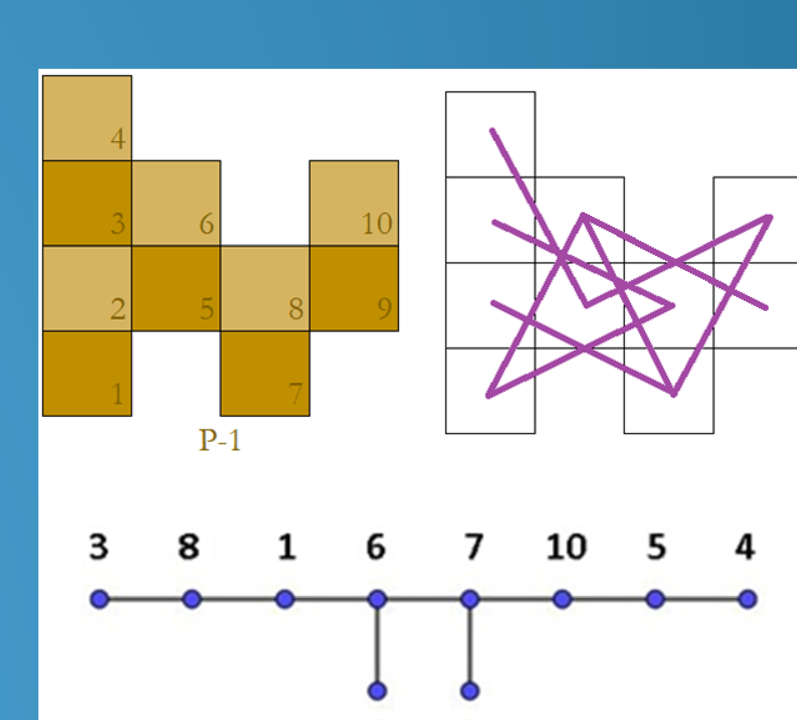
M-7　有1個環與8點環，達成3對7步。



N-1　有1個環與6點環，達成3對9步。

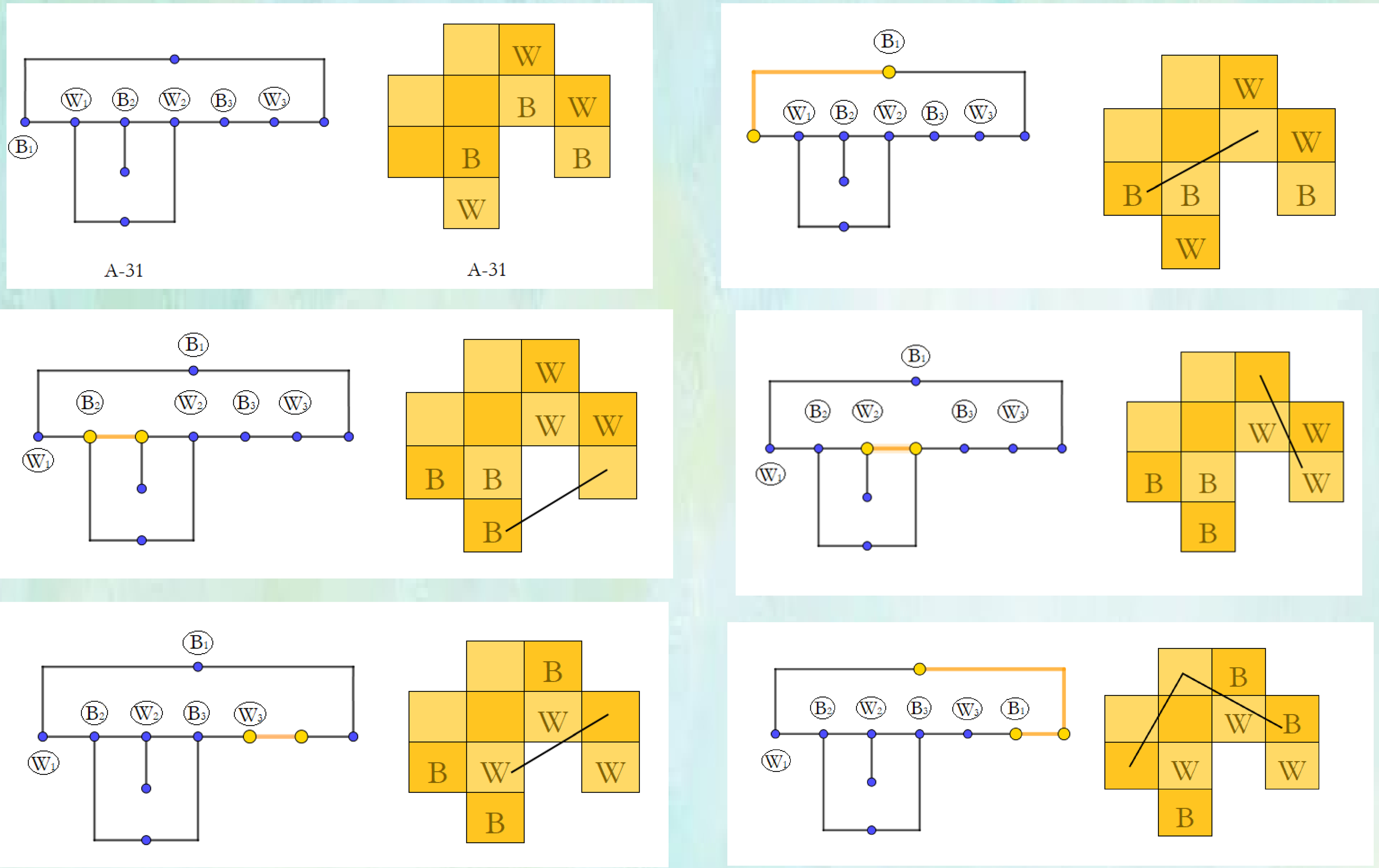


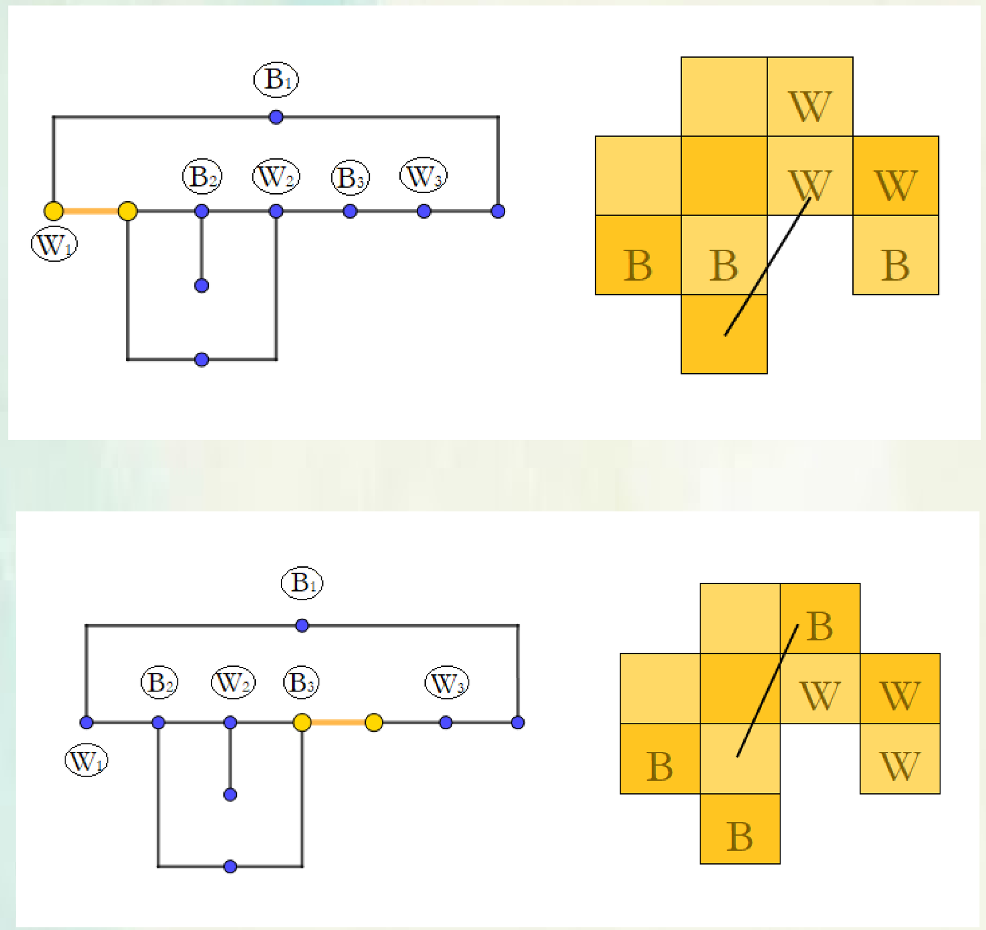
O-2　有1個環與6點環，達成3對9步。



P-1　無環，達成3對16步。

騎士路徑與騎士交換





以A-31為例，
可放置3對騎士，
7步可達到騎士交換。

關於k值討論

依我們的觀察發現$V_c^m = 2n\ with\ 2V_t + 2V_f$步數為$2n + 1 + k$，在計算$k$值時，會用到特別的計算方法(例)。

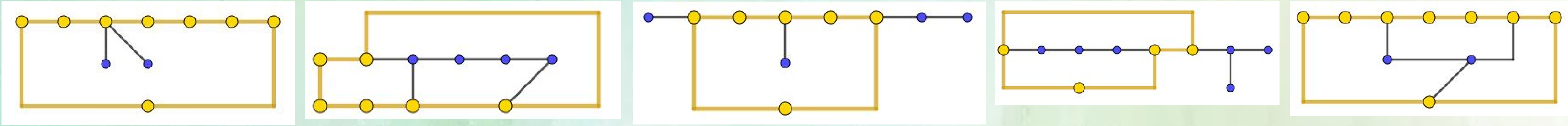
【B-1】只有$1V_f$，計算方法是將$1V_f$視為$2V_f$重疊所以k值為0。

【H-6】是10點環，是$V_c^m = 2n + 2$的種類，第1個騎士前面的點也稱為V_t但沒有V_f，沒有分岔點就代表距離為0因此$k = 0$。

【 F-3】有$3V_f$則採用k值最少的來計算。

【G-3】有2個以上的6點環，如有這種情況則選擇k值最少的來計算，但G-3的$1V_f$同時也是V_t所以可以達成3對7步，只是V_f在後方而已。

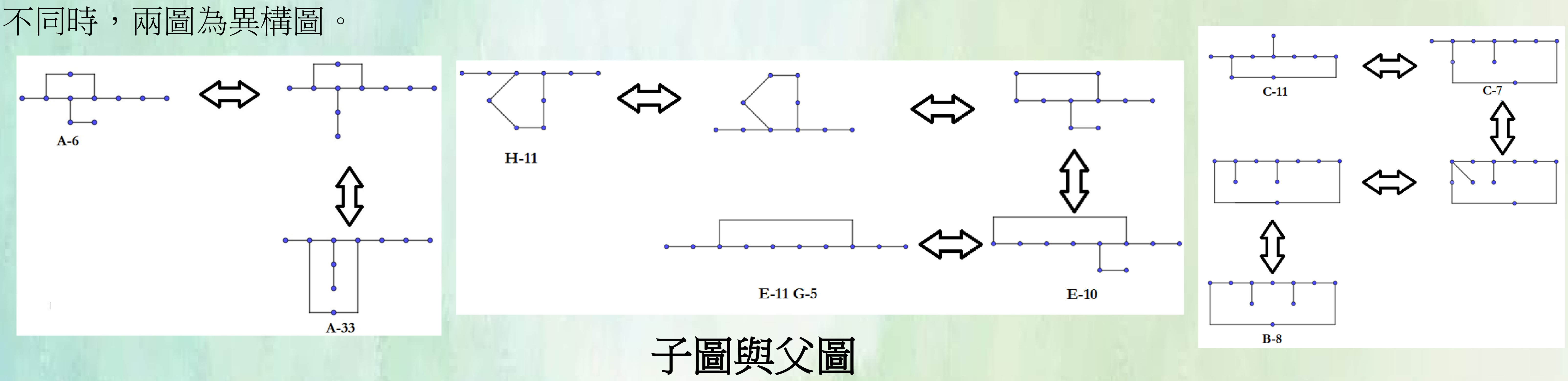
【A-24】有$2V_f$，因為共用$1V_t$，所以需用$2V_f$計算k值。



B-1　H-6　F-3　G-3　A-24

圖同構

同構是只有在節點圖中的「點數量相當」且「度序列的度數也相同」時，才有可能發生的情況。將A的節點圖變形處理後，若與B的節點圖一樣時，就稱這兩個圖為同構圖。反之，當A的節點圖變形處理後，與B的節點圖不同時，兩圖為異構圖。



子圖與父圖

如果$V(A) \subseteq V(B)$並且$E(A) \subseteq E(B)$，$G(A) \subseteq G(B)$，這樣A就是B的子圖，而B就是A的父圖，另外，如果$A \subseteq B$並且$B \subseteq A$，則稱$A = B$，或A與B同構。

研究結論

◆創發Crazy Knights的可能性

我們分析八連塊騎士路徑，得到21個瘋狂騎士圖。棋盤圖以二元編碼刪除旋轉及鏡射，得到16組十連塊，合計156個瘋狂騎士棋盤。

◆圖的次數和圖的尺寸

節點與邊的數量有特定值；分析所有棋盤成功條件皆有10點，圖的尺寸則為9~12。

◆邊集與點集的關係

本研究設計得到有序對為 $V\ -1 \leq \mathrm{E}$ 。

◆環點數與騎士對的關係

當 V_c^m=6可達成2對騎士最少步數交換
當 V_c^m=8可達成3對騎士最少步數交換
當 V_c^m=10可達成4對騎士最少步數交換
綜上所述nP_{mm} 所需環點數= V_c^{2n+2} 。

◆可放置最多騎士並完成交換的可能性

全部16組棋盤至少可放置2對黑白騎士，至多可放置4對騎士。節點圖可作為判斷騎士對的依據，4對騎士是10連塊的極限。

◆騎士交換最少步數

移動次數依騎士數量及棋盤格型態和擺放位置有不同結果，若僅有一對騎士可得到最少移動步數是3步；若兩對騎士最少移動步數是5步；三對騎士可得到最少移動步數是7步；四對騎士可推得最少移動步數是9步。

◆少點環與多點環的最少交換步數關係

少點環圖的最少交換步數可得到規律
若$V_c^m = 2n$，則 $nP_{mm} = 2n + 1 + k$
多點環圖的最少交換步數可得到規律
若$V_c^m = 2n + 2$， 則 $nP_{mm} = 2n + 1$

參考文獻：
張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論。 臺北市：臺大出版中心出版。
葉其璋(2018)。Knight One One. 中華民國第58屆 中小學科學展覽會作品說明書國中組數學科。(以下略)