中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050405

論木塊堆疊的最長延伸值

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者：	指導老師：
高二 林冠辰 高二 蔡秉儒	吳博仁

關鍵詞：重心、等比數列、時間複雜度

摘要

堆磚塊問題的最長延伸值在 150 年來普遍的被探討，甚至也出現在我國的物理課本當中。然而在我們的特殊堆疊之下，發現最大延伸值或許可以延長。在過去等寬等質量磚塊的堆疊中，所有磚塊皆遵循上面 n 塊的總質心位在第 n+1 塊的右邊緣正上方。但是，我們可以跳脫原本「只能向右延伸」的框架，有計畫地其中某幾塊向左排列。這些延長值的範圍可以透過函數的斂散來解釋。

我們也探討如何堆疊不同長度及質量的磚塊而得最長延伸值。我們以不同順序堆疊磚塊，並且同樣透過典型方法及特殊方法來討論，並且由上到下以數列來描述不同長度木塊的擺設順序，由此討論可能的最大延伸值，並寫成數學式，用於計算每層磚的不同長度的最大懸伸。

一、 前言

在學習高中物理質心時，我們學習到了如何堆疊木塊得到延伸而不傾倒的最大值。高中物理在探討這一部分時，藉由直觀的物理概念訂定最上面 n 塊的總質心位在第 n+1 塊的右邊緣正上方，而得到向右延伸的最大值，但此種堆疊方式缺乏嚴格證明，而令我們懷疑其正確性，然而我們又對這種木塊堆疊的最大值十分有興趣，所以我們決定就木塊的各種最長延伸值進行探討。而堆疊方式和討論途徑也是充滿了挑戰性和前景。

因此，我們翻閱 John F. Hall, 2005, American Journal of Physics, 72, 1107-1116 和 David Treeby, 2018, The American Mathematics Monthly, 125 , 44-60，他們描述了一些比高中物理更廣義的木塊堆疊討論，而我們則是以此為基礎，進行更加深入的討論

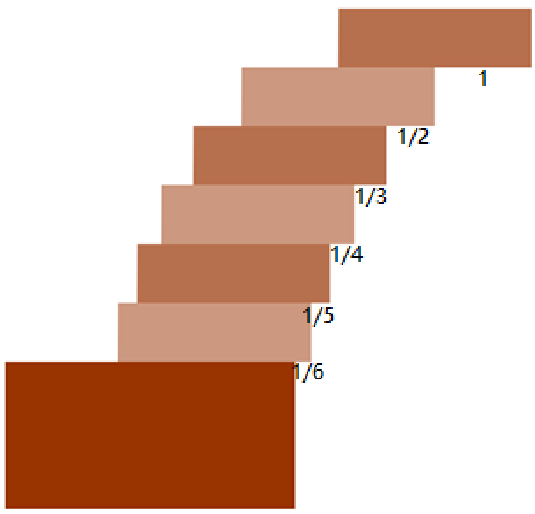
在文獻中作者只討論了簡單排法及一般化排法的正整數數列，而我們則討論了一般化排法及一般性的討論和後續的資訊方法。

二、研究方法或過程

1. 每塊等長等質量時

(1)排列法則與伸長量

最上面 n 塊的總質心位在第 n+1 塊的右邊緣正上方且每塊等長等質量時，延伸長度為 H(n)(調和級數$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$)的推導，基本假設每一個木塊質量$\mu$，長度的一半為 1，延伸長度對塊數作函數 f(k) (如圖(1))



圖(1)

當 k=1，延伸長度 f(1)=1=H(1)(質心在桌緣正

上方）

設 k=n，f(n)=H(n)正確(f(n)= $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$)

則當 k=n+1，

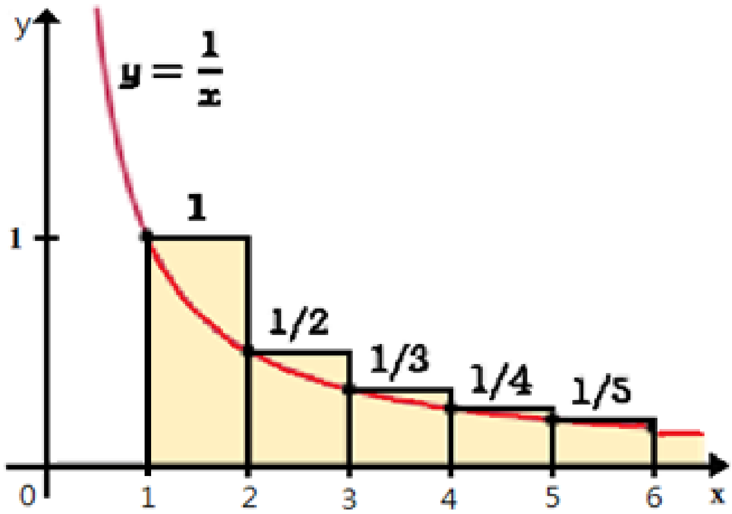
$\overline{x_{n+1}}=\overline{x_n}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{\sum_{k=1}^{n+1}\mu_k}+x_{n+1}\frac{\mu_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1}\mu_k}=0$(在桌緣上)

$\xrightarrow{\overline{x_n}-\overline{x_{n+1}}=f(n+1)-f(n)}$ $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+1}\ \Rightarrow\ f(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$

根據數學歸納法原理，對於任意自然數 n，

$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$均成立。 … 式(1)

(2)f(n)的斂散(如圖(2))



圖(2)

由右圖可知 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n>$

$\int_1^n\frac{1}{x}dx=[l_nx]\ =l_nn-l_n1$ … 式(2)

（矩形面積和）

（曲線下面積）

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x}dx=\int_1^\infty\frac{1}{x}dx$$

$=[l_nx]$

$=l_n\infty-l_n1$

$$\therefore 發散\left(\int_1^\infty\frac{1}{x}dx\to+\infty\right)$$

2. 每塊不等長且不等質量時

(1)排列法則

設第 n 塊木塊寬度的一半為w_n，質量μ_n，質心位置x_n，設每個木塊單位長度的質量都相等($\Rightarrow\mu_n\propto w_n$)，由質心定義，質心位置

$$\overline{x_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k\mu_k}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k}\xrightarrow{\mu_n\propto w_n}\overline{x_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_kw_k}{\sum_{k=1}^{n}w_k}$$

因為任意部分的木塊不傾倒故前 n 塊木塊的總質心必在第(n+1)木塊的最左邊緣至最右邊緣之間

$$\Rightarrow \overline{x_n}\in[x_{n+1}-w_{n+1},x_{n+1}+w_{n+1}]$$

若上面 n 塊的總質心位在第 n+1 塊的右邊緣正上方

$$\Rightarrow \overline{x_n}=x_{n+1}+w_{n+1}$$

(2)伸長量(將由上到下的木塊一半長度順序排列成數列$\langle w_n\rangle$，R($\langle w_n\rangle$)為此種排列下的伸長量)

延續 3.的法則$\overline{x_n}=x_{n+1}+w_{n+1}$，

另假設d_n，d_n= R($\langle w_{n+1}\rangle$)−R($\langle w_n\rangle$) =$|(x_n+w_n)-(x_{n+1}+w_{n+1})|\Rightarrow$

R($\langle w_n\rangle$)= $\sum_{k=1}^{n}d_k$，第 n 塊木塊寬度的一半為w_n，同樣的，每個木塊單位長度的質量都相等($\Rightarrow \mu_n\propto w_n$)

for $i=1\sim n-1$，$\overline{x_i}=\frac{\overline{x_{i-1}}\sum_{k=1}^{i-1}w_k+x_iw_i}{\sum_{k=1}^{i}w_k}=\frac{(x_i+w_i)\sum_{k=1}^{i-1}w_k+x_iw_i}{\sum_{k=1}^{i}w_k}=$

$\frac{x_i\sum_{k=1}^{i}w_k+w_i\sum_{k=1}^{i-1}w_k}{\sum_{k=1}^{i}w_k}=\frac{(x_i+w_i)\sum_{k=1}^{i}w_k-w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$

$=(x_i+w_i)-\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$

$=x_{i+1}+w_{i+1}$

$\xrightarrow{移項}(x_i+w_i)-(x_{i+1}+w_{i+1})=\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$

$\therefore d_i=(x_i+w_i)-(x_{i+1}+w_{i+1})=\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$

$$\Rightarrow R(\langle w_n\rangle)=\sum_{i=1}^{n}d_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}\ldots 式(3)$$

(此式 w=1 即可得到 f(n) =$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$)

(3)改變第一塊和第二塊順序是否影響最大伸長量

將由上到下的木塊一半長度順序排列成數列

設

$$\begin{cases} \text{原本的順序數列}\langle w_i\rangle: \langle w_1, w_2, \dots\dots w_{n-1}, w_n\rangle \\ \text{後來的順序數列}\langle w_i{}'\rangle: \langle w_1' = w_2, w_2' = w_1, \dots\dots w_{n-1}, w_n\rangle \end{cases}$$

伸長量差: $|R(< w_i >) - R(< w_i{}' >)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w{\prime}_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w{\prime}_k}\right|$

$= \left(\frac{w_1^2}{w_1} + \frac{w_2^2}{w_1+w_2}\right) - \left(\frac{w_2^2}{w_2} + \frac{w_1^2}{w_1+w_2}\right) = (w_1 - w_2) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{w_1+w_2}$

$=0$

⇒改變第一塊和第二塊順序並不影響最大伸長量

(4)R(<w_n>)極大時，順序數列$\langle w_i\rangle$是否為單調遞減(除了w_1, w_2)

設$\langle w_i\rangle = \langle w_1, w_2, \dots w_j, w_{j+1} \dots w_{n-1}, w_n\rangle$，$\langle w_i\rangle' = \langle w_1, w_2, \dots w_{j+1}, w_j \dots w_{n-1}, w_n\rangle$

其$\langle w_i\rangle$中，$\forall i_1 > i_2$，$w_{i_1} \le w_{i_2}$

⇒伸長量差: $|R(< w_i >) - R(< w_i' >)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w{\prime}_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w{\prime}_k}\right|$

$\xRightarrow{\text{令}\sum_{k=1}^{j-1} w_k = \lambda} = \left(\frac{w_j^2}{\lambda + w_j} + \frac{w_{j+1}^2}{\lambda + w_j + w_{j+1}}\right) - \left(\frac{w_{j+1}^2}{\lambda + w_{j+1}} + \frac{w_j^2}{\lambda + w_j + w_{j+1}}\right)$

$$= \frac{\lambda w_j w_{j+1}(w_j - w_{j+1})}{(\lambda + w_j)(\lambda + w_{j+1})(\lambda + w_j + w_{j+1})} \ge 0$$

⇒ $\forall i_1 > i_2 \wedge w_{i_1} \le w_{i_2}$時(即順序數列$\langle w_i\rangle$為遞減)，$R(< w_n >)$極大 … 式(4)

(5)$R(< w_n >)$ 的大小範圍

定義$< v_i >$ 為 $< w_i >$之遞減數列，當$1 \le i \le n$，$d \le w_i \le D$

$$\begin{aligned} R(< w_n >) \le R(< v_n >) &\le R(V_1, V_{2,\dots} V_n) \\ &\le R(V_1, V_{2,\dots} D) \quad (\text{由式}(4)) \\ &\le R(D, V_{1,\dots} V_{n-1}) \quad (\text{由式}(4)) \\ &\le R(D, V_{1,\dots} D) \quad (\text{由式}(4)) \\ &\le R(D, D \dots V_{n-2}) \quad (\text{由式}(4)) \\ &\le R(\underbrace{D, D \dots . D}_{n\text{個}}) = DR(\underbrace{1,1, \dots .1}_{n\text{個}}) \\ &= DH_n \end{aligned}$$

同理，定義$< L_n >$ 為 $< w_n >$之遞增數列

$$\begin{aligned} R(< w_n >) \ge R(< L_n >) &= R(l_1, l_{2,\dots} l_n) \\ &\ge R(l_1, l_{2,\dots} d) \end{aligned}$$

$$\geq \mathrm{R}(\mathrm{d}, l_{1,\dots} l_{n-1})$$
$$\geq \mathrm{R}(\mathrm{d}, l_{1,\dots} d)$$
$$\geq \mathrm{R}(\underbrace{d, d \dots . d}_{n個}) = \mathrm{dR}(\underbrace{1,1,\dots .1}_{n個}))$$
$$= dH_n$$

∴當 $\mathrm{d} \leq w_i \leq D\ \ for 1 \leq i \leq n$ 時, $dH_n \leq R(< w_n >) \leq DH_n$ ... 式(5)

(6)證明 $\mathbf{R}(\boldsymbol{w_n})$ 發散若且唯若 $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{w_i}}{\mathrm{i}}$ 發散

設 $R(< w_n >) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{S_i}, S_i = \sum_{j=1}^{i} w_j$，且 $< w_n >$ 遞減

$(i)\ \frac{w_i^2}{S_i} \leq \frac{w_i^2}{i w_i} = \frac{w_i}{i}$

(ii) 由阿貝爾定理, $\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{i} = \frac{1}{n} S_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{S_n}{n} +$

$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{S_i}{i^2+i}\right) > \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{i(i+1)} \geq \sum \frac{w_i}{2i^2}$

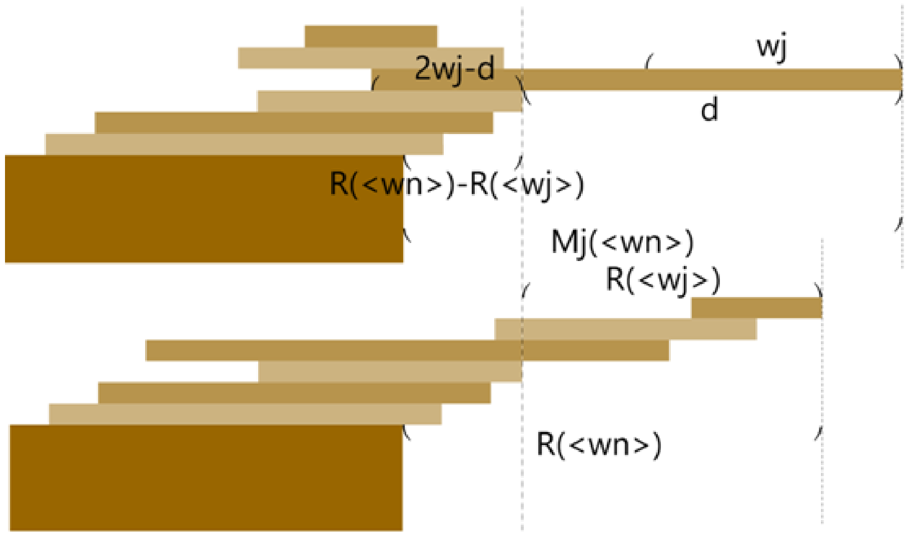
(iii) 由題圖斯定理, $\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{w_i^2}{i^2}}{\frac{w_i}{i^2}} \geq \frac{\left(\sum \frac{w_i}{i}\right)}{\sum \frac{w_i}{i^2}} > \frac{\left(\sum \frac{w_i}{i}\right)}{2 \sum \frac{w_i}{i}} = \frac{1}{2} \sum \frac{w_i}{i}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{S_i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{i}$ ∴ $\sum \frac{\mathrm{w_i}}{\mathrm{i}}$ 發散若且唯若 $\mathrm{R}(\mathrm{w_n})$ 發散

3. 採用不同於前的排列法，延伸長度為 $\mathrm{M}(< w_n >)$

(1)排列法則

$\mathrm{M}(< w_n >) = R(< w_n >) - R(< w_j >) + d$（如圖(3)）



圖(3)

由質心列式，$(d-w_j)(w_j)=\sum_{k=1}^{j-1} w_k(2w_j-d)$

$$\Rightarrow d=\frac{w_j^2+(\sum_{k=1}^{j-1} w_k)(2w_j)}{\sum_{k=1}^{j} w_k}=\frac{w_j^2+w_j^2+(\sum_{k=1}^{j-1} w_k)(2w_j)}{\sum_{k=1}^{j} w_k}-\frac{w_j^2}{\sum_{k=1}^{j} w_k}=2w_j-\frac{w_j^2}{\sum_{k=1}^{j} w_k}\ \ldots 式(6)$$

$$M(< w_n >)=d+R(< w_n >)-R(< w_j >)$$

$$=d+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{W_i^2}{W_1+\cdots+W_i}$$

$$\Rightarrow M(< w_n >)=2w_j-\frac{W_j^2}{W_1+\cdots+W_j}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{W_i^2}{W_1+\cdots+W_i}\ \ldots 式(7)$$

(2) $\underset{1\le j\le n}{M}(W_n)$(表示第j塊突出)什麼時候伸長量比 $R(V_n)$長?(如圖(4))

(i) $M_j(W_n)-R(V_n)$

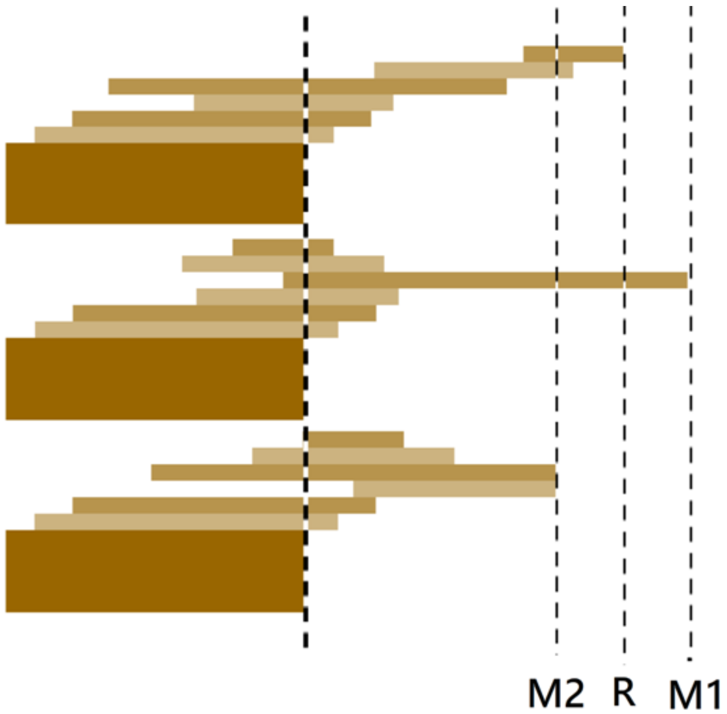
$$=2W_j-\frac{W_j^2}{W_1+\ldots+W_j}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{W_i^2}{W_1+\ldots+W_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{W_i^2}{W_1+\ldots+W_i}$$

$$=2W_j-\frac{W_j^2}{W_1+\ldots+W_j}+\left(\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{W_i^2}{W_1+\ldots+W_i}}-\sum_{i=1}^{j}\frac{W_i^2}{W_1+\ldots+W_n}\right)-\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{W_i^2}{W_1+\ldots+W_i}}$$

$$\Rightarrow M_j(W_n)-R(V_n)=2W_j-\frac{W_j^2}{W_1+\ldots+W_j}-\sum_{i=1}^{j}\frac{W_i^2}{W_1+\ldots+W_n}\ \ldots 式(8)$$

(若此式為正，$M_j(W_n)>R(V_n)$)

$$\xrightarrow{當每塊等長，w_i=1}\ 2-\frac{1}{j}-\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\le 0$$



圖(4)

因為每塊等長時，$M_j(W_n)\le R(V_n)$，造成此種排法易被忽略

(3)證明 $w_1 \sim w_{j-1}$ 與 $w_{j+1} \sim w_n$ 不能調換時，$w_j=max\{w_1,w_2\ldots w_n\}$ 可以使 $M_j(\langle w_n\rangle)$ 有極大值

令 $\langle w_n\rangle=\{w_1,w_2,\ldots w_{j-1},w_j,w_{j+1}\ldots.w_n\}$

$\langle w_n{}'\rangle=\{w_1,w_2,\ldots w_{j-1},w_{j+1},w_j\ldots.w_n\}$

$\Rightarrow \mathrm{M_j}(\langle w_n\rangle) - \mathrm{M_j}(\langle w_n'\rangle)=$

$\xrightarrow{\mathrm{k}=\sum_{i=1}^{j-1} w_i} (w_j - w_{j+1})\frac{w_j w_{j+1}+2k(w_j+w_{j+1})+2k^2}{(w_j+k)(w_{j+1}+k)(w_j+w_{j+1}+k)}$

當$w_j > w_{j+1}$時 ，$\mathrm{M_j}(\langle w_n\rangle) > \mathrm{M_j}(\langle w_n'\rangle)$

令$\langle w_n\rangle = \{w_1, w_2, \dots w_r, w_j \dots w_n\}$

$\langle w_n'\rangle = \{w_1, w_2, \dots w_j \dots . w_r \dots w_n\}, 1 \le \mathrm{r} \le \mathrm{j}-1$

$\mathrm{M_j}(\langle w_n\rangle) - \mathrm{M_j}(\langle w_n'\rangle) =$

$\xrightarrow{\mathrm{k}=\left(\sum_{i=1}^{j-1} w_i\right)-w_r} (w_j - w_r)\left(2 - \frac{w_j+w_r}{w_j+w_r+k}\right)$

當$w_j > w_r$時 ，$\mathrm{M_j}(\langle w_n\rangle) > \mathrm{M_j}(\langle w_n'\rangle)$

$\sigma = \langle w_n\rangle$,為一使$\langle w_n\rangle$重新排列之函數

設$\sigma(\langle w_n\rangle) = V_n = \{V_1, V_2, \dots V_{j-1}\ V_j, V_{j+1} \dots\ V_n\}$

滿足$\begin{cases} V_j = max\{V_1, V_2 \dots V_n\} \\ 對於所有\ i \in \{j, j+1..n-1\}，V_i \ge V_{i+1} \end{cases}$

設 L 為 σ 不能將$w_1 \sim w_{j-1}$與$w_{j+1} \sim w_n$調換之集合

G 為σ任意排列之集合

$\Rightarrow \mathrm{M_j}(\langle V_n\rangle) = \max_{\sigma\in \mathrm{L}} \mathrm{M_j}(\sigma\langle w_n\rangle)$ ，但$\mathrm{M_j}(\langle V_n\rangle)$不一定等於$\max_{\sigma\in \mathrm{G}} \max_{1\le j\le n}\ \mathrm{M_j}(\sigma\langle w_n\rangle)$

… 式(9)

(4)證明將$\mathbf{w_m}$(見下方定義)移至突出處能夠增加$\mathbf{M_j}(\langle \mathbf{w_n}\rangle)$

$\langle \mathrm{w_n}\rangle = \{\mathrm{w_1}, \mathrm{w_2}, .. \mathrm{w_j}, \dots \mathrm{w_n}\}$其中$\mathrm{w_j} = \max\{\mathrm{w_1}, \mathrm{w_2}, .. \mathrm{w_n}\}$

設$\mathrm{k} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{j-1}} \mathrm{w_j} - \mathrm{w_m}, \mathrm{m} \in \{1,2 \dots \mathrm{j}-1\}$

若$\mathrm{w_m} > \frac{\mathrm{w_j^2}}{\mathrm{w_{j+k}}}$, 令$\langle w_n'\rangle = \{\mathrm{w_1}, \mathrm{w_2}, .. \mathrm{w_{m-1}}, . \mathrm{w_{m+1}}, \mathrm{w_j}, \mathrm{w_m}, \mathrm{w_{j+1}} \dots .\}$

$\Rightarrow \mathrm{M_j}(\langle w_n'\rangle) - \mathrm{M_j}(\langle \mathrm{w_n}\rangle)$

$= \left(2\mathrm{w_j} - \frac{\mathrm{w_j^2}}{\mathrm{k+w_j}} + \frac{\mathrm{w_m^2}}{\mathrm{k+w_j+w_m}} + \sum_{\mathrm{i=j+1}}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{w_j^2}}{\mathrm{w_j+..+w_i}}\right) - \left(2\mathrm{w_j} - \frac{\mathrm{w_j^2}}{\mathrm{k+w_m+w_j}} + \sum_{\mathrm{i=j+1}}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{w_i^2}}{\mathrm{w_1+..+w_i}}\right)$

$= \frac{\mathrm{w_j^2}}{\mathrm{k+w_j}} + \frac{\mathrm{w_m^2}}{\mathrm{k+w_j+w_m}} + \frac{\mathrm{w_j^2}}{\mathrm{k+w_j+w_m}}$

$= \frac{\left(\mathrm{w_m^2+w_j^2}\right)(\mathrm{k+w_j}) - \mathrm{w_j^2}(\mathrm{k+w_j+w_m})}{(\mathrm{k+w_j})(\mathrm{k+w_j+w_m})}$

$= \frac{\mathrm{w_m^2 k + w_m^2 w_j + w_j^2 k + w_j^3 - w_j^2 k - w_j^3 - w_j^2 w_m}}{(\mathrm{k+w_j})(\mathrm{k+w_j+w_m})}$

$= \frac{\mathrm{w_m}\left(\mathrm{w_m}(\mathrm{k+w_j}) - \mathrm{w_j^2}\right)}{(\mathrm{k+w_j})(\mathrm{k+w_j+w_m})} > 0$

$\therefore$ 當$\mathrm{w_m} > \frac{\mathrm{w_j^2}}{\mathrm{w_{j+k}}}$，將$\mathrm{w_m}$移至延伸處會增加延伸量 ... 式(10)

(5) $\boldsymbol{w_1 \sim w_{j-1}}$與$\boldsymbol{w_{j+1} \sim w_n}$不能調換時，$\boldsymbol{w_j = max\{V_1, V_2 \ldots V_n\}}$可以使 $\mathbf{M_j}(\langle \boldsymbol{w_n} \rangle)$有極大值的輔助證明(1)

$\mathrm{M_j}(\langle \mathrm{w_n} \rangle) - \mathrm{M_j}(\langle w_n{}' \rangle)$

$$=\left(2w_j - \frac{w_j^2}{k+w_j} + \frac{w_{j+1}^2}{k+w_j+w_{j+1}} + \sum_{i=j+2}^{n} \frac{w_i^2}{w_1+..+w_i}\right) - \left(2w_j - \frac{w_j^2}{k+w_{j+1}+w_j} + \sum_{i=j+2}^{n} \frac{w_i^2}{w_1+..+w_i}\right)$$

$$= \frac{w_j^2(k+w_j+w_{j+1}) + (k+w_j)\left(w_j^2+w_{j+1}^2\right)}{(k+w_j)(k+w_j+w_{j+1})}$$

$$\frac{-kw_j^2 - w_j^3 - w_j^2 w_{j+1} + kw_j^2 + w_{j+1}^2 + w_i^3 + w_j w_{j+1}^2}{\left((k+w_j)\right)(k+w_j+w_{j+1})}$$

$$= \frac{w_{j+1}\left(-w_j^2+k+w_j+w_{j+1}\right)}{(k+w_j)(k+w_j+w_{j+1})}$$

$$= \frac{w_{j+1}\left(w_{j+1}(k+w_j) - w_j^2\right)}{(w_j+k)(k+w_j+w_{j+1})} > 0$$

(6) $\boldsymbol{w_1 \sim w_{j-1}}$與$\boldsymbol{w_{j+1} \sim w_n}$不能調換時，$\boldsymbol{w_j = max\{V_1, V_2 \ldots V_n\}}$可以使 $\mathbf{M_j}(\langle \boldsymbol{w_n} \rangle)$有極大值的輔助證明(2)

$\mathrm{M_j}(\langle \mathrm{w_n} \rangle) - \mathrm{M_j}(\langle w_n{}' \rangle)$

$$= \left(2w_j - \frac{w_j^2}{k+w_r+w_j} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{w_j^2}{w_1+..+w_i}\right)$$

$$- \left(2w_r - \frac{w_r^2}{k+w_j+w_r} + \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{w_1+..+w_i}\right)$$

$$= 2(w_j - w_r) - (w_j - w_r) . \frac{w_j+w_r}{w_j+w_r+k}$$

$$= (w_j - w_r)\left(2 - \frac{w_j+w_r}{w_j+w_r+k}\right) > 0$$

3. 木塊模型(令木塊為無限多個寬度=2、高度趨近於 0 的無限薄木塊堆疊而成，高度為 1，並將側面視角於座標平面上表示)

(1)定義

定義一定義木塊為一點集合$\mathrm{S} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}): 0 \leq \mathrm{y} < 1 \wedge [c(\mathrm{y}) - 2] \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{c}(\mathrm{y})\}$

其中 c(y)在 y 座標處之薄木塊最右端 x 座標

另外，桌面即為負 x 軸(y=0, x∈(−∞，0])

定義二，S 為一均質木塊側視圖的模型點集合

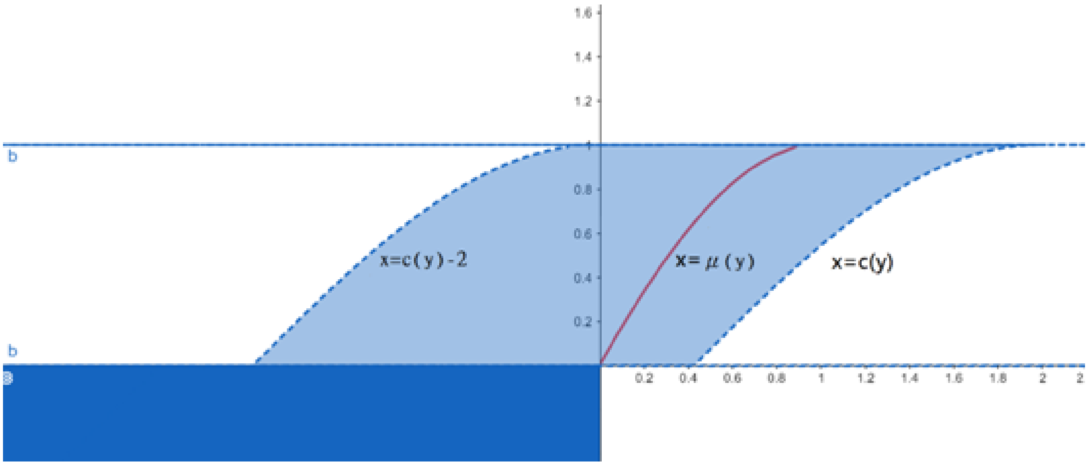
⇒定義一函數μ(y)，為以此 y 座標為下界至 S 的最上界區塊的質心 x 座標

由於整個 S 區塊位在桌緣恰不倒處，故$\mu(0) = 0$，而在 y=t 處，每個 y 座標薄片的

質心位在 x 座標為 c(t)−1 處，並令單位面積的木塊薄片質量為σ，則在 y 處薄片質量為2σdt

$$\Rightarrow \mu(t)=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int_t^1(c(y)-1)2\sigma dy}{\int_t^1 2\sigma dy}=\frac{\int_t^1(c(y)-1)dy}{1-t}\ \dots \text{式}(10)$$

若木塊維持靜力平衡，$\forall y\in[0,1)$，$c(y)-2\le\mu(y)\le c(y)$



圖(5)

(2)μ(y)的討論

1. 設有兩個木塊S_1, S_2，皆為靜力平衡之木塊

若有一木塊 S$\begin{cases} y\in[0,l)\text{時，S 與}S_1\text{相同} \\ y\in[l,1)\text{時，S 與}S_2\text{相同}\end{cases}$

且在 y=l 處，S_1的 μ(y)曲線和 S_2的μ(y)曲線相交，則 S 為靜力平衡之木塊

證明

(1)　$t\in[0,l)$，$\mu(t)=\frac{\int_t^1(c(y)-1)dy}{1-t}=\frac{\int_t^l(c(y)-1)dy+\int_l^1(c(y)-1)dy}{1-t}$

$$=\frac{1}{1-t}[\mu_1(t)(1-t)-\mu_1(l)(1-l)+\mu_2(l)(1-l)]$$

$$=\mu_1(t)+\frac{(1-l)}{1-t}[\mu_2(l)-\mu_1(l)]$$

$$\xRightarrow{\mu_2(l)=\mu_1(l)}\mu(t)=\mu_1(t)$$

(2)　$t\in[0,l)$ ∵形狀同，$\mu(t)-\mu(l)=\mu_2(t)-\mu_2(l)$

$\Rightarrow$ S 為淨力平衡木塊

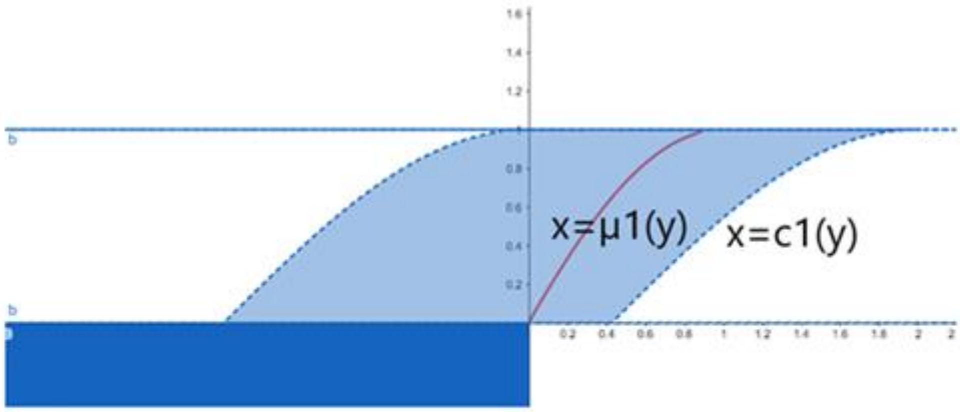
2. 定義 S_2為S_1的一個變換

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2(y) = c_1(y(1-t)+t) - \mu_1(t) \\ \mu_2(y) = \mu_1(y(1-t)+t) - \mu_1(t) \end{cases}，其中 t \in [0, l) \ldots 式(11)$$

即將S_1中 $t \le y \le 1$ 之部分沿 y 方向放大$\frac{1}{1-t}$倍

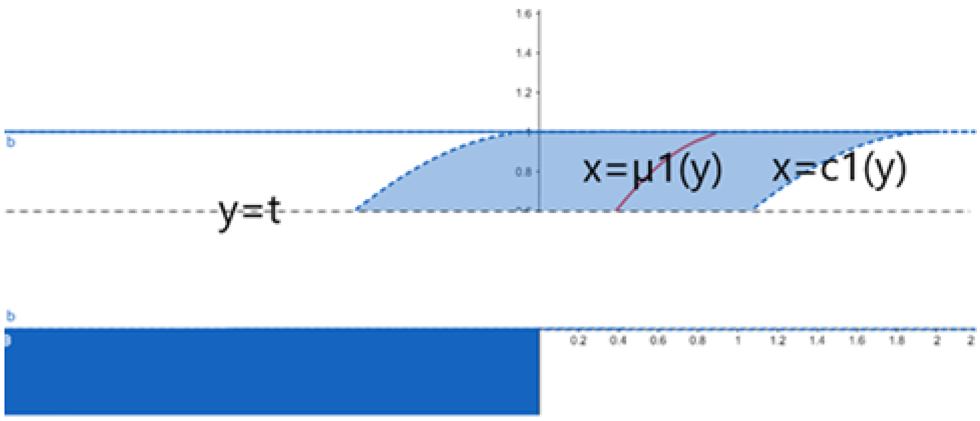
至 $0 \le y \le 1$，並使$\mu_2(0) = 0$(木塊質心在桌緣的正上方)

(1) $\begin{cases} c(y) \\ \mu(y) \end{cases}$，$0 \le y \le 1$(圖(6))



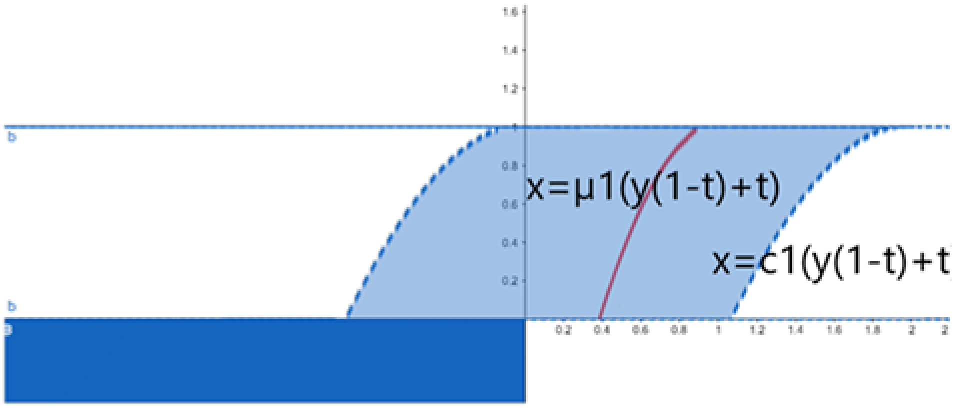
圖(6)

(2) $\begin{cases} c(y) \\ \mu(y) \end{cases}$，$t \le y \le 1$(圖(7))



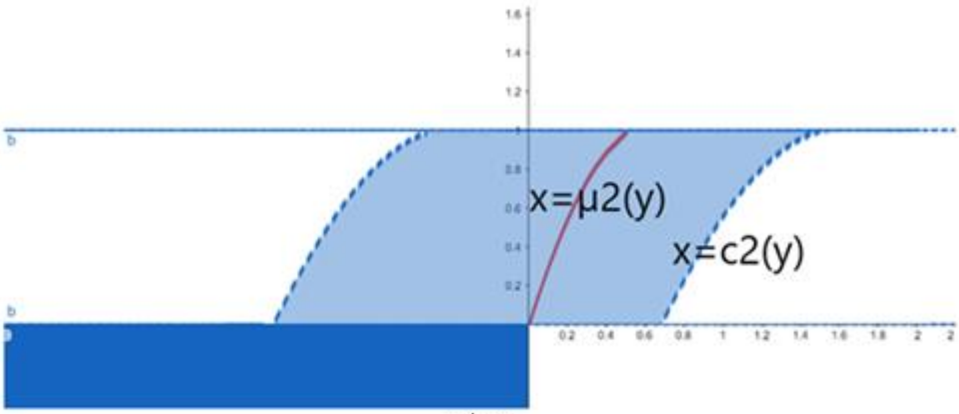
圖(7)

(3) $\begin{cases} c(y(1-t)+t) \\ \mu(y(1-t)+t) \end{cases}$，$0 \le y \le 1$(圖(8))



圖(8)

(4) $\begin{cases} c(y(1-t)+t)-\mu(t) \\ \mu(y(1-t)+t)-\mu(t) \end{cases}$，$0 \leq y \leq 1$(圖(9))



圖(9)

對於所有$t \in [0, l)$，$S'(S,t) = S$，求 S

$\mu_2(y) = \mu(y(1-t)+t) - \mu(t) = \mu(y)$

$\Rightarrow \mu(y+(1-y)t) - \mu(y) = \mu(t)$

$$\Rightarrow \frac{\mu(y+(1-y)t)-\mu(y)}{(1-y)t} = \frac{\mu(t)}{(1-y)t}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{\mu(y+(1-y)t)-\mu(y)}{(1-y)t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mu(t)}{(1-y)t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mu(\mathrm{y})}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{1-y}\frac{d\mu(0)}{dt}$$

$$\Rightarrow \mu'(\mathrm{y}) = \frac{\mu'(0)}{1-y}$$

$\because \mu(0) = 0 \therefore \mu(y) = a\ln(1-y)$

$\Rightarrow c(y) = 1 - \big(\mu(y)(1-y)\big)' = a\ln(1-y) + a + 1$，其中 $a \in R$ ... 式(12)

3. 設在 y 處的薄木塊半寬度也是變數，設為函數$\mathrm{w(y)}$

$$\Rightarrow \mu(y)=\frac{\int_y^1 2\mathrm{w(t)}[\mathrm{c(t)}-\mathrm{w(t)}]\mathrm{dt}}{\int_y^1 2\mathrm{w(t)dt}}$$

$$\Rightarrow \mu(y)\int_y^1 \mathrm{w(t)dt}=\int_y^1 \mathrm{w(t)}\,(\mathrm{c(t)}-\mathrm{w(t)})\mathrm{dt}$$

$$\xRightarrow{\text{對 y 微分}} \mu'(y)\int_y^1 \mathrm{w(t)dt}+\mu(y)\big(-\mathrm{w(y)}\big)=-\mathrm{w(y)}(\mathrm{c(y)}-\mathrm{w(y)})$$

$$\xRightarrow{\text{移項}} \mathrm{c(y)}=\mathrm{w(y)}+\mu(y)-\frac{\mu'(y)}{\mathrm{w(y)}}\int_y^1 \mathrm{w(t)dt}$$

當$\mathrm{w(y)}$，$\mathrm{c(y)}=1+\mu(y)-[\mu'(y)](1-y)=1-\{[\mu(y)](1-y)\}'$

當 $\mathrm{c(y)}=\mu(y)$，得$\mathrm{c}'(y)=\frac{\mathrm{w(y)}^2}{\int_y^1 \mathrm{w(t)dt}}$

$$\int_{\mathrm{c(0)}}^{\mathrm{c(Y)}}\mathrm{dc(y)}=\int_0^{\mathrm{Y}}\frac{\mathrm{w(y)}^2}{\int_y^1 \mathrm{w(t)dt}}\mathrm{dy}$$

$\because \mathrm{c(0)}=\mu(0)=0$，$\mathrm{c(Y)}=\int_0^{\mathrm{Y}}\frac{\mathrm{w(y)}^2}{\int_y^1 \mathrm{w(t)dt}}\mathrm{dy}$，當 $\mathrm{w(y)}=1$，$\mathrm{c(Y)}=\int_0^{\mathrm{Y}}\frac{1^2}{1-\mathrm{y}}\mathrm{dy}=$

$\ln(1-\mathrm{Y})$

十分有趣的是，此結果與當初的簡單數學式形式一致，也達成了此式的更加一般化

4. 接續以上述做法討論木塊之不連續堆疊之極限

(1)據上述定義，使有$\mathbf{n}$個木塊，每塊高度$\boldsymbol{\frac{1}{n}}$，寬度為$\mathbf{2}$，$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}(\mathbf{y})=$ 總延伸量 $=$

$\sum_{\mathbf{m=n-[ny]}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\frac{1}{m}}$，$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(\mathbf{y})$則為此時的$\boldsymbol{\mu}$函數

(同前定義此處不贅述)，則在第$\mathbf{m}$塊木塊上時，

$\mathbf{y}\in\left[\boldsymbol{\frac{m-1}{n}},\boldsymbol{\frac{m}{n}}\right)\therefore \mathbf{m}=[\mathbf{ny}]+\mathbf{1}$，其中$\mathbf{m}\in\{\boldsymbol{N}\leq\boldsymbol{n}\}$

(pf)$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{ny}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}[\mathrm{ny}]\ldots$式(13)

由 $0\leq \mathrm{ny}-[\mathrm{ny}]<1$

$$\Rightarrow 0\leq \mathrm{y}-\frac{[\mathrm{ny}]}{n}<\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0\leq \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\mathrm{y}-\frac{[\mathrm{ny}]}{n}\right)<\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0(\text{夾擠定理})$$

$\therefore \lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\mathrm{y}-\frac{[\mathrm{ny}]}{n}\right)=0$，$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{[\mathrm{ny}]}{n}=\mathrm{y}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} ny = \lim_{n\to\infty}[ny]$ 得證

＊當 $n \to \infty$，$\varphi_n(y) \to \mu_n(y)$

(pf)討論第 m 塊木塊，$\mu_n\left(\frac{m-1}{n}\right) \le \mu_n(y) \le \mu_n\left(\frac{m}{n}\right)$ … 式(14)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\mu_n\left(\frac{m}{n}\right) - \mu_n\left(\frac{m-1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-[ny]-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{ny-[ny]+n-ny-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(ny-[ny])+n(1-y)-1}$

$\because \lim_{n\to\infty} ny - [ny] = 0$，$0 < y < 1 \Rightarrow 0 < 1 - y < 1$

$\therefore$ 原式 $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1-y)-1} = 0$

由夾擠定理 $\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\frac{m-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(y) = \lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\frac{m}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(y)$

$\Rightarrow$ 當 $n \to \infty$，$\varphi_n(y) \to \mu_n(y)$得證

(2)接下來討論每塊木塊寬度皆為 2 時的極限時 $c(y)\equiv \varphi(y)$情況，有三種證法

1.

設 i 是木塊編號，共 n 塊木塊，每塊木塊厚度為$\frac{1}{n}$，

找出 $c(y)|_{n\to\infty}$

設第 k 個木塊的最右緣上端座標為v_k，共 n 個木塊

$\Rightarrow$此處斜率$m_k=\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}=\frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-k+1}}=\frac{n-k+1}{n}\xrightarrow{y_k=\frac{k}{n}} m_k = \frac{n-ny_k+1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} m_k=\lim_{n\to\infty}\frac{dy}{dx} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-ny_k+1}{n} =1-y_k$

$\Rightarrow dx = \frac{dy}{1-y}\Rightarrow\int dx=x=\int\frac{dy}{1-y}=-\ln|1-y|+C$

$\because 0\le y<1 \therefore 1-y>0$，又此函數通過原點

$\Rightarrow\ x=c(y)=-\ln(1-y)$

另定義$\varphi(y)=$ 總延伸量 $= \sum_{m=n-[ny]=n-k,k\in[1,n],k\in N}^{n}\frac{1}{m}$(見式(1))

$\Rightarrow\ c(y)\equiv \varphi(y)$

2.

$\lim_{n\to\infty}[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \ln n] = \gamma$(Euler’s constant)

; $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n \; = \gamma+\varepsilon(n)$，其中$\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0$

φ(y)= 總延伸量 = $\sum_{\mathrm{m=n-[ny]}}^{\mathrm{n}}\frac{1}{m}=\sum_{\mathrm{m=1}}^{\mathrm{n}}\frac{1}{m}-\sum_{\mathrm{m=1}}^{\mathrm{n-[ny]-1}}\frac{1}{m}$

$=[\ln(n)+\gamma+\varepsilon(n)]-[\ln(n-[\mathrm{ny}]-1)+\gamma+\varepsilon(n-[\mathrm{ny}]-1)]$

$=\ln(n)-\ln(n-[\mathrm{ny}]-1)+\varepsilon(n)-\varepsilon(n-[\mathrm{ny}]-1)$

$=\ln(n)-\left[\ln n+\ln\left(1-\frac{[\mathrm{ny}]}{n}-\frac{1}{n}\right)\right]+\varepsilon(n)-\varepsilon(n-[\mathrm{ny}]-1)$

$=-\ln\left(1-\frac{[\mathrm{ny}]}{n}-\frac{1}{n}\right)+\varepsilon(n)-\varepsilon(n-[\mathrm{ny}]-1)$

$n-[\mathrm{ny}]-1=ny-[\mathrm{ny}]-1+n-ny$

$=ny-[\mathrm{ny}]+n(1-y)-1$

$\because y<1 \therefore \lim_{n\to\infty}(ny-[\mathrm{ny}]+n(1-y)-1)\to\infty$

又根據式(13)

$\therefore \lim_{n\to\infty}\varphi(\mathrm{y})=\sum_{\mathrm{m=n-[ny]}}^{\mathrm{n}}\frac{1}{m}$

$=\lim_{n\to\infty}\left[-\ln\left(1-\frac{[\mathrm{ny}]}{n}-\frac{1}{n}\right)\right]+\lim_{n\to\infty}[\varepsilon(n)-\varepsilon(n-[\mathrm{ny}]-1)]$

$=\lim_{n\to\infty}\left[-\ln\left(1-\frac{[\mathrm{ny}]}{n}-\frac{1}{n}\right)\right]+0$

$=-\ln(1-\mathrm{y})=$ c(y)

3.

$\because$恰不傾倒$\therefore \forall \mathrm{t}\in[0,1), \mu(\mathrm{t})=\mathrm{c(t)}$

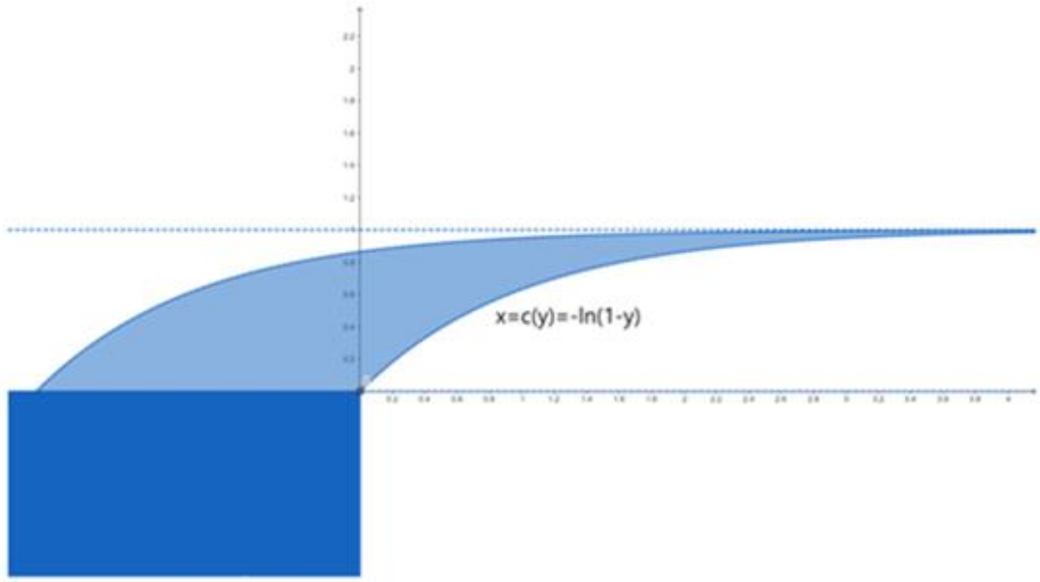
$\Rightarrow \mu(\mathrm{t})=\frac{\int_t^1(\mathrm{c(y)}-1)\mathrm{dy}}{1-\mathrm{t}}=\mathrm{c(t)}$

$\Rightarrow \int_t^1(\mathrm{c(y)}-1)\mathrm{dy}=\mathrm{c(t)(1-t)}$

$\Rightarrow \frac{\mathrm{dc(y)}}{\mathrm{dy}}=\frac{1}{1-\mathrm{y}}$

$\Rightarrow \mathrm{c(y)}=\int\frac{\mathrm{dy}}{1-\mathrm{y}}+C=-\ln(1-\mathrm{y})+C$

又此函數通過原點$\therefore \mathrm{c(y)}=-\ln(1-\mathrm{y})$



圖(10)

5.透過資訊方法討論木塊最長延伸值

(1)程式與時間複雜度

1. 透過式(7)，我們寫了一個程式，輸入項數與所有木塊一半的長度後，此程式可以自動算出木塊的最大伸長量並列出此時的木塊排序。若無任何輔助和限制，此時電腦程式計算時間複雜度為 $O(n \times n!)$
2. 透過上面論述，M 排法有最長延伸值時排列符合 $\langle v_n \rangle$定義。當我們將此法與程式結合，電腦只需將最長木塊置於突出區後，將木塊分成兩堆，一堆置於平衡區，此時木塊用於平衡最長木塊的突出故其排列並不影響延伸值 $M_j(\langle w_n \rangle)$；另一堆置於突出木塊下方的延伸區，此時根據前面的證明，呈遞減排列時可以得到最長延伸值。因此，電腦無須耗費計算能力於木塊的排列上，所做的計算僅用於將木塊分成兩堆，故時間複雜度由 $O(n \times n!)$降為 $2^{\mathrm{poly}(n)}$
3. 另外，我們認為由式(10)(當$w_m > \frac{w_j^2}{w_{j+k}}$，將$w_m$移至延伸處會增加延伸量)，可以再降低時間複雜度。

   說明:可使程式先將最長木塊至於突出區，其餘所有的木塊置於平衡區，然後透過式(10)將此區木塊一 一挑選置於延伸區，為一種類似於資訊領域中氣泡排序法 Bubble Sort 的方法，因此我們猜測此時的時間複雜度將接近於 $O(n^2)$
4. 由上述的長度轉移定理，我們相信它也能在適當的應用下減小程式計算時的時間複雜度

5. 以上程式已透過多組數列證實無誤

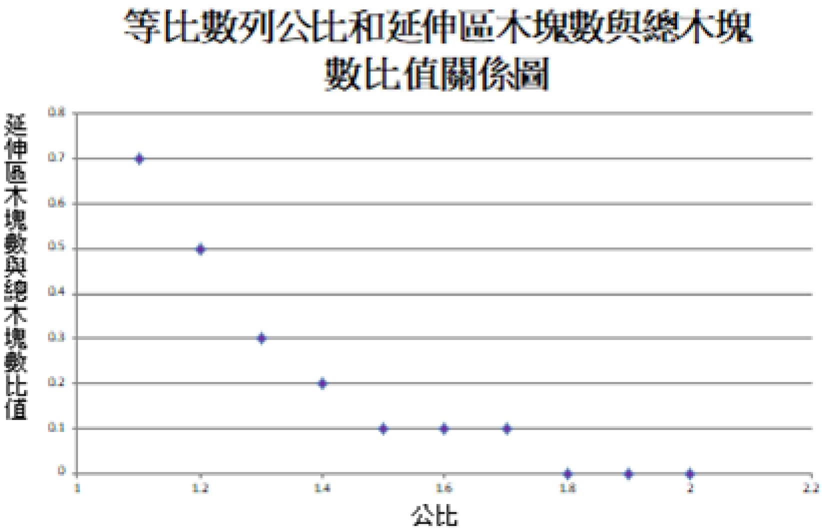
(2)程式應用

1. 由於此種函數過於不定，我們希望能夠由我們熟悉的數列來初步實驗最長值及排列方法，如一些數列，經過帶入和觀察後，我們發現每個情況下，延伸區的木塊數都不同，有許多情況甚至一塊都沒有。

   根據帶入數列變化的特性，我們猜測延伸區木塊數與數列發散速度有負相關。

   為了量化發散速度，我們採取各種首項為 1 的等比數列，以公比作為發散速度的指標

2. 我們為方便討論每個等比數列都代 10 項，而帶入結果也如預期，公比越大，延伸區木塊會一直減少至 0



圖(11)

3. 證明方法:將 延伸區無木塊的M函數與 延伸區有m塊木塊的M 函數相減，並說明當 r 夠大，此式必為正

   設一等比數列為$\{1, r, \dots, r^{k-1}, \dots r^{n-1}\}$，其中$r > 1$，又由$\langle \mathrm{v_n} \rangle$定義可知$w_j = r^{n-1}$

$$令 M_j(\langle w_n \rangle) = M_j\{1, r, \dots, r^{k-1}, \dots r^{n-1}\}$$

$$M_j(\langle w_n{}' \rangle) = M_j\{1, r, \dots r^{n-1}, r^{k_1-1}, r^{k_2-1}, \dots, r^{k_m-1}\}$$

(把r^{k_i-1}移至延伸區，其中$i \in \{1,2 \dots m\}$，且$k_1 > k_2 > \cdots > k_m$)

$M_j(\langle w_n \rangle)$− $M_j(\langle w_n{}' \rangle)$

$$= \left(2r^{n-1} - \frac{(r^{n-1})^2}{1+r^1+\cdots+r^{n-1}}\right)$$

$$-\left(2r^{n-1} - \frac{(r^{n-1})^2}{(1+r^1+\cdots+r^{n-1})-(r^{k_1-1}+r^{k_2-1}+\cdots+r^{k_m-1})} + \right.$$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(r^{k_j-1}\right)^2}{(1+r^1+\cdots+r^{n-1})+(r^{k_1-1}+r^{k_2-1}+\cdots+r^{k_j-1})}\Bigg)$$

$$=r^{2n-2}\left(\frac{1}{\frac{r^n-1}{r-1}-\sum_{i=1}^{m}r^{k_i-1}}-\frac{1}{\frac{r^n-1}{r-1}}\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{r^{2k_j-2}}{\frac{r^n-1}{r-1}-\sum_{i=1}^{m}r^{k_i-1}+\sum_{i=1}^{j}r^{k_i-1}}\cdots \text{式}(11)$$

顯然的，若 r 夠大，$M_j(\langle w_n\rangle)-M_j(\langle w_n{}'\rangle)>0$

三、結論與應用

1.(1)$R(<w_n>)=\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$

(2)改變第一塊和第二塊順序並不影響影響 R(<w_n>)

(3)R(<w_n>)極大時，順序數列$\langle w_i\rangle$為單調遞減(除了w_1,w_2)

(4) $R(w_n)$ 發散若且唯若 $\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{i}$發散

(5)連續木塊在 y=t 至 y=1 區塊質心 x 座標函數$\mu(t)=\frac{\int_t^1(c(y)-1)dy}{1-t}$

(6)當連續木塊以 R 排法排列時，最大伸長量為$c(1)=\int_0^1\frac{\mathrm{w(y)^2}}{\int_y^1\mathrm{w(t)dt}}\mathrm{dy}$，與

$\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$相似

2.(1)$M_j(\langle w_n\rangle)=2w_j-\frac{W_j^2}{\sum_{k=1}^{j}w_k}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{W_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$

(2)M 排法有最長延伸值時，其排列必符合$\langle \mathrm{v_n}\rangle$定義

(3)若在平衡區中存在一$w_m>\frac{w_j^2}{w_{j+k}}$，其中

$$k=\sum_{i=1}^{j-1}w_i-w_m,m\in\{1,2\ldots j-1\}$$

將$\mathrm{w_m}$移至延伸區能夠增加$\mathrm{M_j}(\langle \mathrm{w_n}\rangle)$

(4) 長度轉移定理：若有兩塊木塊$\mathrm{w_a},\mathrm{w_b}$位於延伸區且$\mathrm{w_a}>\mathrm{w_b}$，$\mathrm{w_a}$在$\mathrm{w_b}$上方，則將$\mathrm{w_b}$之部分長度轉移至$\mathrm{w_a}$可增加最長延伸值。

(5)長度轉移定理應用：若延伸區中有某兩塊木塊$\mathrm{w_a}$和$\mathrm{w_b}$滿足$\mathrm{w_a}$+$\mathrm{w_b}$等於平衡區中木塊$\mathrm{w_c}$之重量，將$\mathrm{w_c}$調到延伸區且將$\mathrm{w_a},\mathrm{w_b}$調到平衡區可增加$\mathrm{M_j}(\langle \mathrm{w_n}\rangle)$

3.(1)若無任何輔助和限制，此時電腦程式計算時間複雜度為 O$(\mathrm{n}\times\mathrm{n!})$，但若限制排列方法在$\langle \mathrm{v_n}\rangle$的定義下,時間複雜度將由 O$(\mathrm{n}\times\mathrm{n!})$降為$2^{\mathrm{poly(n)}}$

(2)對於任意的等比數列，延伸區的木塊數佔總木塊數的比例將隨公比的增加而減少至 0

四、參考文獻

1. David Treeby, 2018, *The American Mathematics Monthly*, 125 , 44-60

2. Burkard Polster, Burkard polster, Marty Ross, and David Treeby, 2012, *The American Mathematics Monthly*, 119 , 122-139

【評語】050405

本作品探討磚塊堆疊的最大延伸長度，並允許某些磚塊可向左堆疊以增加向右的最大延伸長度。這是一個古典問題，在標準的情形下，答案會是調和級數。作者所加入「向左」的新條件的確增加了問題的變化度，並豐富了分析的技巧，整體而言是相當有趣的作品。然而回堆之討論以及呈現方式不夠清晰，且作品的書寫上，未定義的符號過多，比如 page 5，V_i 以及 H_n 都沒有定義。圖三的排列法則僅用圖示。參考文獻僅列兩個，而且完全沒有論文標題。程式編碼過程未詳細交代(還出現前面未曾提及的「平衡區」)，等等，都是這份作品需要改進之處。

作品海報

前言

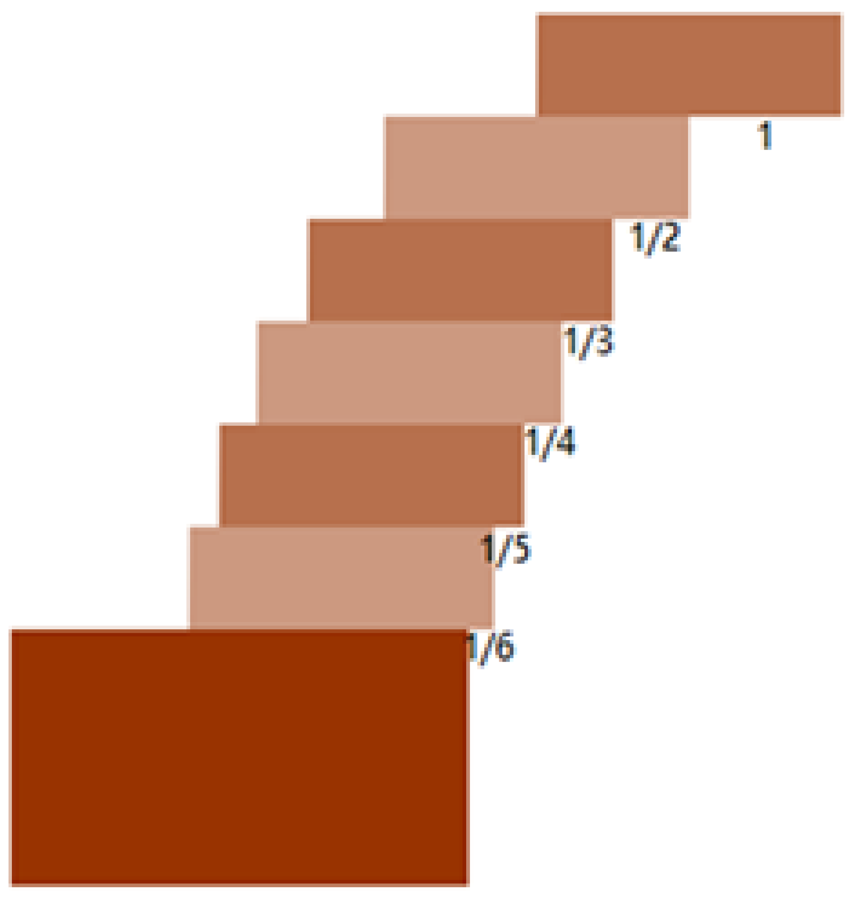
在學習高中物理的質心時，我們學習到了如何堆疊木塊得到延伸而不傾倒的最大值。每塊木長度定為*2*，訂定最上面n塊的總質心位在第$n+1$塊的右邊緣正上方，而得到向右延伸的最大值$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$〔1〕但此種堆疊方式缺乏嚴格證明（實際上$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$也或許並非最大）而令我們懷疑其正確性，然而我們又對這種木塊堆疊的最大值十分有興趣〔2，3〕，所以我們決定就木塊的各種最長延伸值進行探討。而堆疊方式和討論途徑也是充滿了挑戰性和前景，我們可以不像傳統般純粹的像右延伸而得到更大值，也可以有趣的用函數來描摩而得到更加普遍而且深入的了解。

研究方法或過程

基本假設:每個木塊單位長度質量相同，且重量皆為其長度的一半

1.向右延伸法(R排法) 如圖(二)

定義:設由上而下第*n*塊木塊之重心座標為x_n(側視，定桌緣為0)長度為$2w_n$，排成一數列$<w_n>$，又使得第*1*塊到第i塊木塊的重心座標在$\bar{x}_i$，$\forall i\in[1,n], \bar{x}_i = x_{i+1}+w_{i+1}$，其中第$n+1$塊右緣位置定義為桌緣。



圖(一)每塊長度是2時的*R*排法延伸值。

(1)定義R($<w_n>$)為此種排列下的伸長量

另設d_i為第i塊右緣位置與第$i+1$塊右緣位置的距離

$$\Rightarrow d_i = R(<w_i>) - R(<w_{i-1}>) = |(x_i + w_i) - (x_{i+1} + w_{i+1})|$$

顯然得，所有的*d*值將組成所有木塊的伸長量

$$\Rightarrow R(<w_n>) = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w_k} \cdots (1)$$

特例:當每塊長度皆為2時，$R(<w_n>) = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w_k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$(調和級數)。

(2)改變第一塊和第二塊順序並不影響影響 R($<w_n>$)

$$\begin{cases}\text{原本的順序數列}\langle w_i\rangle:\langle w_1, w_2, \ldots\ldots w_{n-1}, w_n\rangle \\ \text{後來的順序數列}\langle w_i'\rangle:\langle w_1' = w_2, w_2' = w_1, \ldots\ldots w_{n-1}, w_n\rangle\end{cases}$$

伸長量差: $|R(<w_i>) - R(<w_i'>)|$

$$= (\boldsymbol{w_1} - \boldsymbol{w_2}) + \frac{\boldsymbol{w_2^2 - w_1^2}}{\boldsymbol{w_1 + w_2}} = \boldsymbol{0}$$ **⇒改變第一塊和第二塊順序並不影響最大伸長量** 。


圖(二)*R* 排法。

(3)R($<w_n>$)極大時，順序數列$\langle w_i\rangle$**為單調遞減(除了w_1, w_2)**

設在$\langle w_i\rangle$中，$\forall i_1 > i_2$，$w_{i_1} \le w_{i_2}$

$$\begin{cases}\text{原本的順序數列}\langle w_i\rangle:\langle w_1, w_2, \ldots w_j, w_{j+1} \ldots w_{n-1}, w_n\rangle \\ \text{後來的順序數列}\langle w_i'\rangle:\langle w_1, w_2, \ldots w_{j+1}, w_j \ldots w_{n-1}, w_n\rangle\end{cases},$$

⇒伸長量差: $|R(<w_i>) - R(<w_i'>)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w_k} - \sum_{i=1}^{n}\frac{{w'}_i^2}{\sum_{k=1}^{i} {w'}_k}\right|$，令$\sum_{k=1}^{j-1} w_k = \lambda$

$$= \left(\frac{w_j^2}{\lambda + w_j} + \frac{w_{j+1}^2}{\lambda + w_j + w_{j+1}}\right) - \left(\frac{w_{j+1}^2}{\lambda + w_{j+1}} + \frac{w_j^2}{\lambda + w_j + w_{j+1}}\right) = \frac{\lambda w_j w_{j+1}(w_j - w_{j+1})}{(\lambda + w_j)(\lambda + w_{j+1})(\lambda + w_j + w_{j+1})} \ge 0$$

$\forall i_1 > i_2 \wedge w_{i_1} \le w_{i_2}$時(即數列$\langle w_i\rangle$為遞減)，$R(<w_n>)$極大$\cdots(2)$

(4) $\boldsymbol{R(<w_n>)}$ 發散若且唯若 $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{i}}$ 發散

設 $R(<w_n>) = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{S_i}, S_i = \sum_{j=1}^{i} w_j$，且$<w_n>$遞減

①$\frac{w_i^2}{S_i} \le \frac{w_i^2}{iw_i} = \frac{w_i}{i}$

②$Abels\ lemma, \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{i} = \frac{1}{n}S_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{S_n}{n} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{S_i}{i^2+i}\right) > \sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{i(i+1)} \ge \sum\frac{w_i}{2i^2}$

③$titus\ lemma, \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{w_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{w_i^2}{i^2}}{\frac{w_i}{i^2}} \ge \frac{\left(\sum\frac{w_i}{i}\right)}{\sum\frac{w_i}{i^2}} > \frac{\left(\sum\frac{w_i}{i}\right)}{2\sum\frac{w_i}{i}} = \frac{1}{2}\sum\frac{w_i}{i}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{i} < \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{S_i} < \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{i}\cdots$式(3) $\therefore \sum\frac{w_i}{i}$發散若且唯若$R(<w_n>)$發散 。

2.連續木塊模型

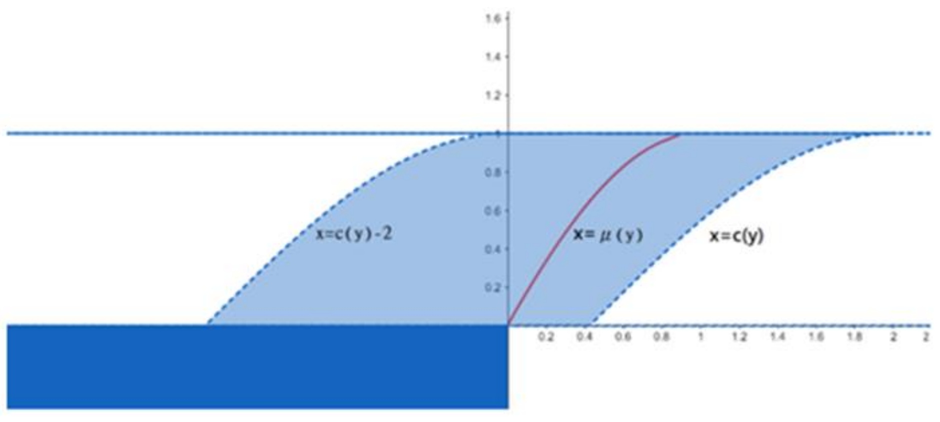
(1) 木塊為無限多個，每個寬度=2、高度趨近於0，總高度為1

連續木塊為一點集合$S = \{(x,y): 0 \le y < 1 \wedge [c(y) - 2] \le x \le c(y)\}$

其中*c(y)*為在*y*座標處之薄木塊最右端*x*座標。桌面即為負*x*軸*(y=0,x∈(-∞，0))*

⇒定義一質心函數μ(t)，為以*y=t*至*y=1*區塊的質心*x*座標

由於整個*S*區塊位在桌緣恰不倒處，故$\mu(0) = 0$，而在*y=t*處，每個y座標薄片的質心位在x座標為*c(t)-1*處，並令單位面積的木塊薄片質量為σ，則在*y*處薄片質量為$2\sigma dt$



圖(三)連續木塊。

$$\Rightarrow \mu(t) = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_t^1 (c(y) - 1)2\sigma dy}{\int_t^1 2\sigma dy} = \frac{\int_t^1 (c(y) - 1)dy}{1 - t}\cdots(4)$$

若木塊維持靜力平衡，$\forall y \in [0,1)$，$c(y) - 2 \le \mu(y) \le c(y)$

(2)木塊長度為y的函數$w(y)$

$$\Rightarrow \mu(y) = \frac{\int_y^1 2\sigma w(t)[c(t)-w(t)]dt}{\int_y^1 2\sigma w(t)dt} \qquad \Rightarrow \mu(y)\int_y^1 w(t)dt = \int_y^1 w(t)\,(c(t)-w(t))dt$$

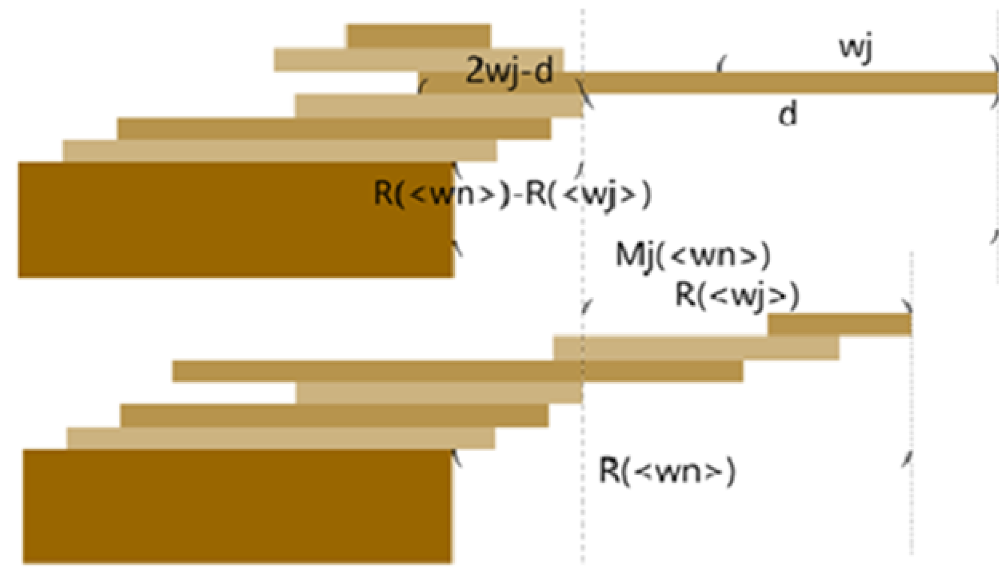
$$\xRightarrow{\text{對y微分}} \mu'(y)\int_y^1 w(t)dt + \mu(y)\big(-w(y)\big) = -w(y)(c(y)-w(y))$$

$$\xRightarrow{\text{移項}} c(y) = w(y) + \mu(y) - \frac{\mu'(y)}{w(y)}\int_y^1 w(t)dt \qquad \text{當}c(y)=\mu(y)\text{，得}c'(y) = \frac{w(y)^2}{\int_y^1 w(t)dt}$$

$$\int_{c(0)}^{c(1)} dc(y) = \int_0^1 \frac{w(y)^2}{\int_y^1 w(t)dt}dy\text{，}\because c(0)=\mu(0)=0\text{，}\therefore c(1) = \int_0^1 \frac{w(y)^2}{\int_y^1 w(t)dt}dy \cdots (5)$$

3.延伸平衡法(M排法)如圖(四)

定義:在R的排法下，選擇其中一塊木塊編號為*j*，使第*j*塊木塊盡量伸出，同時調整第*1*塊到第*j-1*塊木塊的重心使第1塊到第j塊的重心維持在第*j+1*塊的右緣，直到第1塊到第*j-1*塊木塊的重心不能再調整，此時第*1*塊到第*j-1*塊木塊的重心位於第*j*塊的左緣，第j塊的右緣位置即是最大伸長量。其餘木塊在第*j*塊下方，繼續照R法排列。同時定義:第*1*塊到第*j-1*塊木塊為「平衡區」，第j塊木塊為「突出木塊」，定義第*j+1*塊到第*n*塊木塊為「延伸區」。



圖(四)M排法(上)R排法(下)。

(1)伸長量

定義$M_j(\langle w_n\rangle)$為$\langle \boldsymbol{w_n}\rangle$排列下的最大伸長量，其中$\langle \boldsymbol{w_n}\rangle$承上為順序數列，且第j塊為突出木塊

$\Rightarrow M_j\ (\langle w_n\rangle) = R(\langle \boldsymbol{w_n}\rangle) - R\big(\langle \boldsymbol{w_j}\rangle\big) + d$(如圖(3))

$\Rightarrow M_j(\langle w_n\rangle) = 2w_j - \frac{w_j^2}{\sum_{k=1}^{j} w_k} + \sum_{i=j+1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i} w_k}$ ... 式(6)

(2)當 $\langle \boldsymbol{w_n}\rangle$順序不變時，$\boldsymbol{w_j = max\{w_1, w_2 \ldots w_n\}}$將包含 $\boldsymbol{M_j(\langle w_n\rangle)}$有極大值的情況

令$\langle w_n\rangle = \{w_1, w_2, \ldots w_{j-1}, w_j, w_{j+1} \ldots . w_n\}$ $\langle w_n'\rangle = \{w_1, w_2, \ldots w_{j-1}, w_{j+1}, w_j \ldots . w_n\}$

$$\Rightarrow M_j\ (\langle w_n\rangle) - M_j(\langle w_n'\rangle) \xRightarrow{k=\sum_{i=2}^{j-1} w_i} (w_j - w_1)\left(2 - \frac{w_{j+}w_1}{w_j + w_1 + k}\right) > 0\text{當}w_j > w_1\text{時}\text{，}M_j(\langle w_n\rangle)M_j(\langle w_n'\rangle) \ldots \text{式}(8)$$

(3)M排法有最長延伸值時，其排列必符合 $\langle \boldsymbol{v_n}\rangle$定義

定義$\langle \boldsymbol{v_n}\rangle$: 任意給定一個$\langle w_n\rangle$，而$\langle v_n\rangle$則為在使$\langle w_n\rangle$重新排列下其中一種符合(2)的木塊排列，即第j塊為最長的木塊，第*j+1*塊到第*n*塊長度遞減。由式(7)和式(8)，突出木塊需為所有木塊中最長的木塊由式(2)，延伸區因為為單向延伸，符合R法的遞減法則將可以得出最大延伸值。

(4)將 平衡區的 $\boldsymbol{w_m}$移至延伸區能夠增加($\langle \boldsymbol{w_n}\rangle$)

$\langle w_n\rangle = \{w_1, w_2, .. w_j, \ldots w_n\}$其中$w_j = max\{w_1, w_2, .. w_n\}$

設$k = \sum_{i=1}^{j-1} w_i - w_m, m \in \{1,2 \ldots j-1\}$ 若$w_m > \frac{w_j^2}{w_{j+k}}$,

令$\langle w_n'\rangle = \{w_1, w_2, \ldots w_{m-1}, w_{m+1.} \ldots w_{j-1}, w_j, w_m, w_{j+1} \ldots\}$

$\Rightarrow M_j\ (\langle w_n'\rangle) - M_j(\langle w_n\rangle) = \frac{w_m\left(w_m(k+w_j)-w_j^2\right)}{(k+w_j)(k+w_j+w_m)} > 0 \therefore$ 當$w_m > \frac{w_j^2}{w_{j+k}}$，將$w_m$移至延伸處會增加延伸量$\cdots(9)$

(5)長度轉移定理

說明:兩木塊w_a和w_b，若此兩塊此時位於延伸區且$w_a > w_b$，且w_a在w_b上方，則將w_b之部分長度轉移至w_a可增加最長延伸值；δ_w為長度的轉移量。

令$\sum_{k=1}^{a-1} w_k$=k，延伸值變化為$\frac{(w_a+\delta w)^2}{k+w_a+\delta w} + \frac{(w_b-\delta w)^2}{k+w_a+w_b} - \frac{w_a{}^2}{k+w_a} - \frac{w_b{}^2}{k+w_a+w_b} > A(w_a - w_b) \ge 0 \cdots (10)$

其中A為正數

應用:若延伸區中有某兩塊木塊w_a和w_b滿足w_a+w_b等於平衡區中木塊w_c之重量，可將延伸區的w_a和w_b轉移成一重量為w_a+w_b的木塊，其最大伸長量將增加。此時，將此木塊與平衡區的w_c調換兩者同義，最後，因為平衡區的木塊唯有總重量改變時會影響伸長量，因此可將w_a+w_b木塊拆回成w_a和w_b使木塊保持不變。**例子:** $\mathbf{M}(\mathbf{8}, w_j = \mathbf{11,10,6,5,4,3}) < \mathbf{M}(\mathbf{8}, w_j = \mathbf{11,10,6,5,7}) < \mathbf{M}(\mathbf{8}, w_j = \mathbf{11,10,7,6,5})$
$< \mathbf{M}(\mathbf{8}, w_j = \mathbf{11,10,7,7,4}) < \mathbf{M}(\mathbf{8}, w_j = \mathbf{11,10,8,6,4}) < \mathbf{M}(\mathbf{3,5}, w_j = \mathbf{11,10,8,6,4})$

4.透過資訊方法討論木塊最長延伸值

(1)程式與時間複雜度

① 依據公式(7)，我們寫了一個程式，輸入項數與所有木塊一半的長度後，此程式可以自動算出木塊的最大伸長量並列出此時的木塊排序。若無任何輔助和限制，此時電腦程式計算時間複雜度為 $O(n \times n!)$

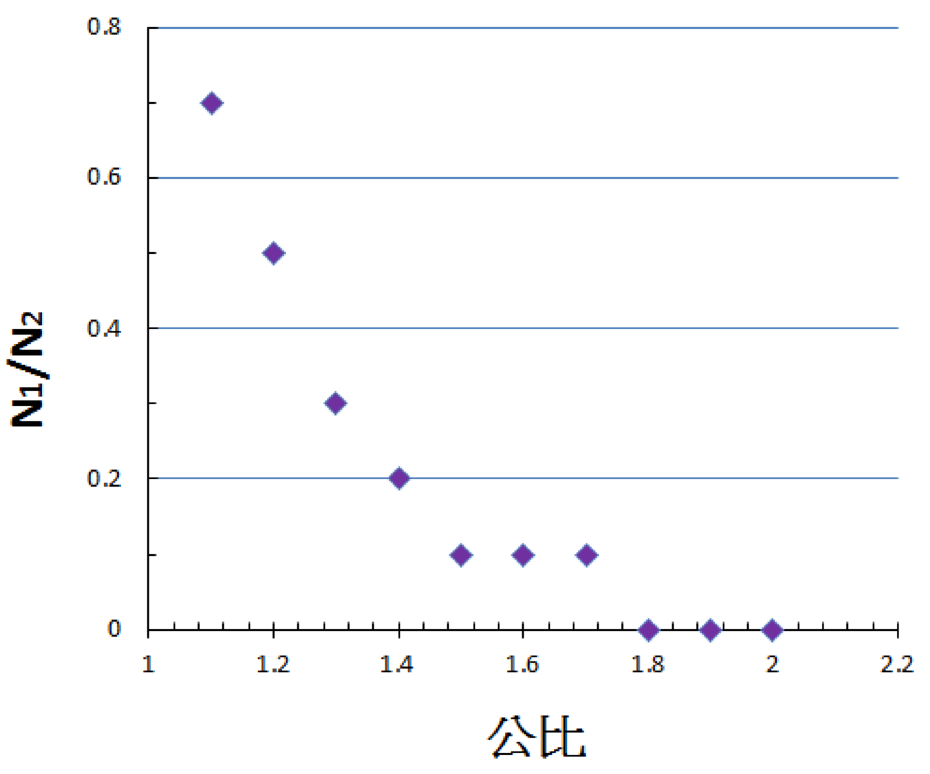
②透過上面論述，*M*排法有最長延伸值時排列符合 $\langle v_n\rangle$定義。當我們將此法與程式結合，電腦只需將最長木塊置於突出區後，將木塊分成兩堆，一堆置於平衡區，此時木塊用於平衡最長木塊的突出故

其排列並不影響延伸值$M_j(\langle w_n\rangle)$；另一堆置於突出木塊下方的延伸區，此時根據前面的證明，呈遞減排列時可以得到最長延伸值；時間複雜度由$O(n\times n!)$降為$2^{poly(n)}$。

③由公式(9)(當$w_m > \frac{w_j^2}{w_{j+k}}$，將$w_m$移至延伸處會增加延伸量)使程式先將最長木塊置於突出區，其餘所有的木塊置於平衡區，然後透過公式(9)將此區木塊一 一挑選置於延伸區此時的時間複雜度將接近於$O(n^2)$。

④由上述的長度轉移定理，在適當的應用下減小程式計算時的時間複雜度。

⑤以上程式已透過多組數列證實無誤。



圖(五)延伸區木塊數和(N_1)，木塊總數(N_2)的比值與等比數列公比的關係。

(2)程式應用

①透過簡易的數據分析，計算伸長量最長值及排列方法，如一些數列，經過代入和觀察後我們發現每個情況下，延伸區的木塊數都不同，有許多情況甚至一塊都沒有。根據代入數列變化的特性，猜測延伸區木塊數與數列發散速度為負相關。為了量化發散速度，採取各種首項為1的等比數列，以公比作為發散速度的指標

②將每個等比數列都代10項，代入結果也如預期，公比越大，延伸區木塊會一直減少至0為止。

③對任意等比數列，若公比夠大，M排法有最長延伸值時延伸區將沒有木塊。證明方法:將延伸區無木塊的M與 延伸區有m塊木塊的M 相減，並說明當r夠大，此式為正

設一等比數列為$\{1,r,\dots,r^{k-1},\dots r^{n-1}\}$，其中$r>1$，又由$\langle v_n\rangle$定義可知$w_j=r^{n-1}$

令$M_j(\langle w_n\rangle)=M_j\{1,r,\dots,r^{k-1},\dots r^{n-1}\}$

$M_j(\langle w_n'\rangle)=M_j\{1,r,\dots r^{n-1},r^{k_1-1}，r^{k_2-1}，\dots，r^{k_m-1}\}$

(把r^{k_i-1}移至延伸區，其中$i\in\{1,2\dots m\}$，且$k_1>k_2>\cdots>k_m$)

$M_j(\langle w_n\rangle)$- $M_j(\langle w_n'\rangle)$

$$=\left(2r^{n-1}-\frac{(r^{n-1})^2}{1+r^1+\cdots+r^{n-1}}\right)$$

$$-\left(2r^{n-1}-\frac{(r^{n-1})^2}{(1+r^1+\cdots+r^{n-1})-(r^{k_1-1}+r^{k_2-1}+\cdots+r^{k_m-1})}+\sum_{j=1}^{m}\frac{(r^{k_j-1})^2}{(1+r^1+\cdots+r^{n-1})+(r^{k_1-1}+r^{k_2-1}+\cdots+r^{k_j-1})}\right)$$

$$=r^{2n-2}\left(\frac{1}{\frac{r^n-1}{r-1}-\sum_{i=1}^{m}r^{k_i-1}}-\frac{1}{\frac{r^n-1}{r-1}}\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{r^{2k_j-2}}{\frac{r^n-1}{r-1}-\sum_{i=1}^{m}r^{k_i-1}+\sum_{i=1}^{j}r^{k_i-1}}\cdots\text{式}(11)$$

顯然的，若r夠大，$M_j(\langle w_n\rangle)-M_j(\langle w_n'\rangle)>0$ 。

結論

1.(1)$R(<w_n>)=\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$　(2)改變第一塊和第二塊順序並不影響影響 R(<w_n>)。

(3)R(<w_n>)極大時，順序數列$\langle w_i\rangle$為單調遞減(除了w_1,w_2)

(4) $R(w_n)$ 發散若且唯若$\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{i}$發散

2.(1)連續木塊在y=t至y=1區塊重心x座標函數$\mu(t)=\frac{\int_t^1(c(y)-1)dy}{1-t}$

(2)當連續木塊以R排法排列時，最大伸長量為$c(1)=\int_0^1\frac{w(y)^2}{\int_y^1 w(t)dt}dy$，與$\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$相似

3.(1)$M_j(\langle w_n\rangle)=2w_j-\frac{w_j^2}{\sum_{k=1}^{j}w_k}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{w_i^2}{\sum_{k=1}^{i}w_k}$

(2)M排法有最長延伸值時，其排列必符合$\langle v_n\rangle$定義

(3)若在平衡區中存在一$w_m>\frac{w_j^2}{w_{j+k}}$，其中$k=\sum_{i=1}^{j-1}w_i-w_m, m\in\{1,2\dots j-1\}$

將w_m移至延伸區能夠增加$M_j(\langle w_n\rangle)$

(4)長度轉移定理: 若有兩塊木塊w_a,w_b位於延伸區且$w_a>w_b$，w_a在w_b上方，則將w_b之部分長度轉移至w_a可增加最長延伸值。

(5)長度轉移定理應用: 若延伸區中有兩塊木塊w_a和w_b滿足w_a+w_b等於平衡區中木塊w_c之重量，將w_c調到延伸區且將w_a,w_b調到平衡區可增加$M_j(\langle w_n\rangle)$。

4.(1)若無任何輔助和限制，此時電腦程式計算時間複雜度為$O(n\times n!)$，但若限制排列方法在$\langle v_n\rangle$的定義下，時間複雜度將由$O(n\times n!)$降為$2^{poly(n)}$。

(2)對於任意的等比數列，延伸區木塊數佔總木塊數的比例將隨公比的增加而減少至0。

參考文獻

1. John F. Hall, 2005, *American Journal of Physics*, **72,** 1107-1116
2. David Treeby, 2018**,** *The American Mathematics Monthly*, **125 ,** 44-60
3. Burkard Polster, Burkard polster, Marty Ross, and David Treeby, 2012, *The American Mathematics Monthly*, **119 , 122-139**