

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

團隊合作獎

050401

Shoot!圓錐曲線神射手

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 高二 李博翰 高二 鄭凱駿 高二 蔡弘祥	指導老師： 周洺朱
---	------------------

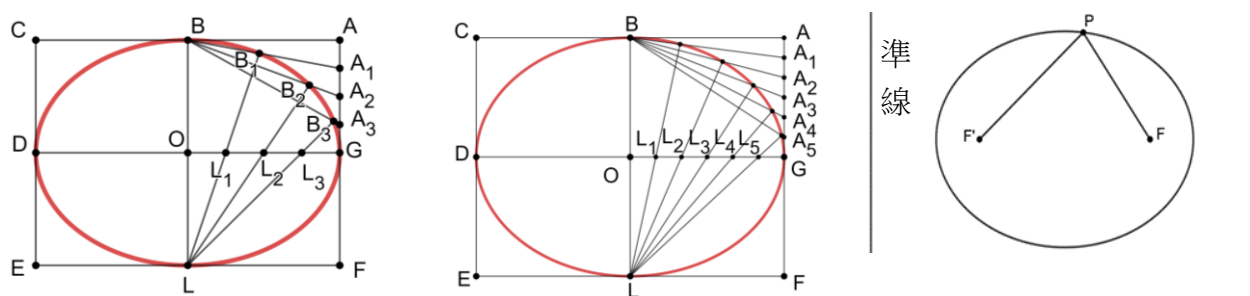
關鍵詞：二次曲線、射影幾何、線束投射

摘要

本研究主要提出新的圓錐曲線製造方法。首先，若 $B_0B_1B_2B_3B_4$ 為三梯五點形，則其頂點必落在一拋物線 Γ 上，且 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 也會落在與拋物線 Γ 的軸平行的五條等距平行線上，當固定其中四點而改變其中一點在平行線上的位置時，則會出現橢圓、雙曲線、二相交直線與二平行直線。第二，由一個點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 往平面上一點 B_0 投射，滿足 $\overrightarrow{B_kB_0} = k \overrightarrow{B_0A_k}$ 得 B_k ， $k=1,2,3,4$ ，依 $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}$ 的不同比例， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 會落於不同二次曲線上。第三，我們分別分類兩個線束基線夾角與線束中心在平面上的相對位置、兩個基圓上點與點的角度與圓心的相對位置，用以製造各式的二次曲線。最後，我們定義了三個線束特定的對應方式，得到六個對應點共橢圓的性質。未來，我們希望能探討更多個線束的對應結果。

壹、研究動機

在數學課我們看到了一題競賽題『矩形 $ACEF$ 中， $\overline{EF}=8$ ， $\overline{CE}=6$ ， B 、 D 、 L 、 G 分別為矩形四條邊之中點， L_1 、 L_2 、 L_3 是 $\overline{OG}$ 的四等分點， A_1 、 A_2 、 A_3 是 $\overline{AG}$ 的四等分點，請證明 $\overline{LL_1}$ 與 $\overline{BA_1}$ 、 $\overline{LL_2}$ 與 $\overline{BA_2}$ 、 $\overline{LL_3}$ 與 $\overline{BA_3}$ 的交點 B_1 、 B_2 、 B_3 都在橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上』，我們用了 *GGB* 做測試，發現 $\overline{OG}$ 、 $\overline{AG}$ 任意 n 等分點的對應線束交點仍落在同一個橢圓上，引起我們很大的好奇心。



此題的橢圓製造方式跟課本的截然不同，我們查到射影幾何(朱德祥,朱維宗(2007))[1]中，有個很特別的定理「兩個不共心的射影線束之對應線交點，連同兩個線束的心，其軌跡為一二次曲線」。題目裡兩組點列中的點是相鄰等距的，所以，我們先探討一線束中心在無窮遠處時的情況，即『分別自五條相鄰等距的平行線束取五點，滿足哪些特定條件，會形成特定圓錐曲線。』最後討論任意兩線束和三線束的相對位置，以及特定的對應方式來製造特定圓錐曲線。

貳、研究目的

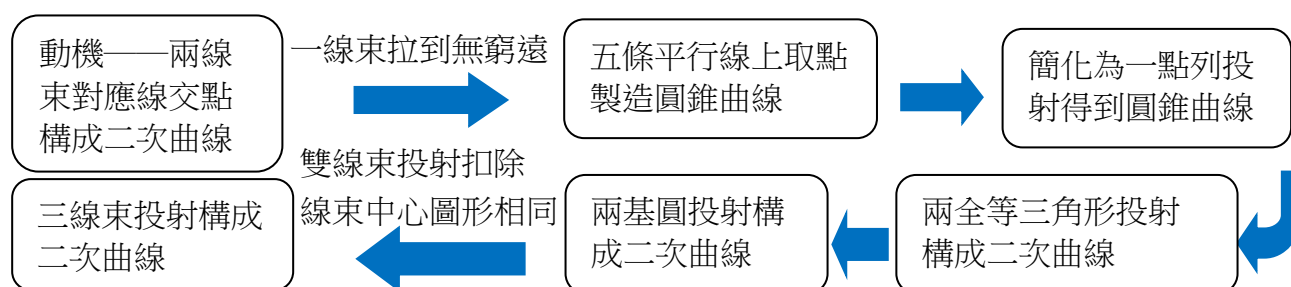
一、在五條平行線間分別取五個點，滿足特定條件，生成特定的二次曲線。

二、以一個點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 的點 A_k 往平面上一點 B_0 投射，改變點列上點的相對位置可生成特定的圓錐曲線。

三、透過兩基線、兩基圓來定義兩線束，並討論相對位置與對應方式，來生成特定二次曲線。

四、定義三線束的對應關係，來生成橢圓。

五、研究流程圖



參、研究設備及器材

一、器材：紙、筆、電腦、Geogebra、MathType

二、名詞解釋：

定義 1. n 梯五點形：

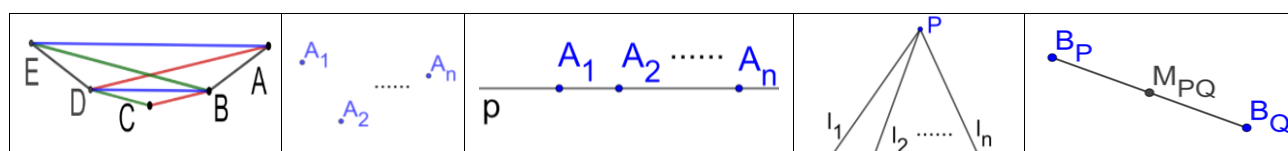
五邊形 $ABCDE$ 中，頂點連線恰有 n 組對邊平行，則稱其為 n 梯五點形， $n=0,1,2,3$ 。

定義 2. 點集、點列和線束：

(1)考慮平面上 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ，則以 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 或 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 表示，稱之為 A 點集。若 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 皆共直線 p ，則記為 $p(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ 或 $p(A_k)_{k=1}^n$ ，稱為 A 點列，直線 p 稱為此點列的基線。

(2)若平面上 n 條直線 $l_1, l_2, \dots, l_n$ 皆過點 P ，則稱為線束，記為 $P(l_k)_{k=1}^n$ ，點 P 稱為線束中心。

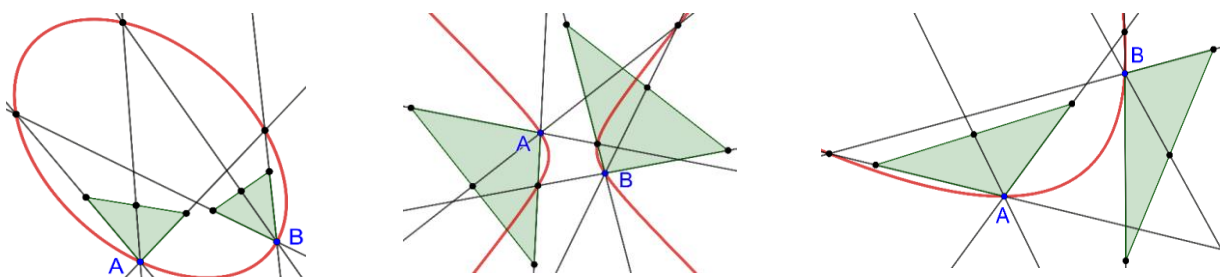
定義 3. 中點符號 M_{PQ} ：平面上 B_p 和 B_Q 的中點記為 M_{PQ} 。



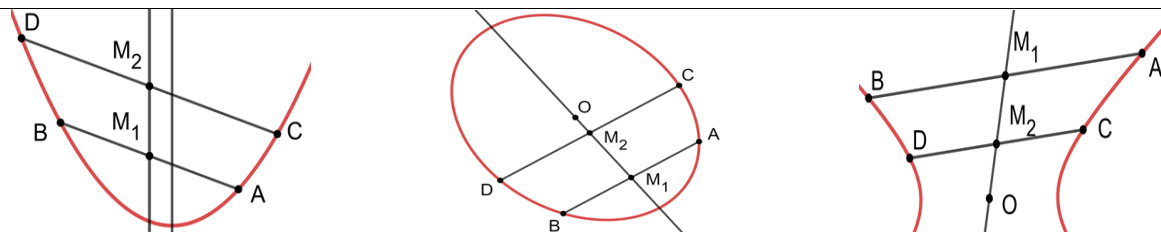
三、預備定理

Lemma 1(朱德祥 et al.(2007))[1]： 有兩個不共線束中心的線束，對應線交點連同這兩個線束中心會組成一條二次曲線。

〈proof〉設兩個線束的方程為 $G + \mu H = 0, G' + \mu' H' = 0$ ，其中 $G、H、G'、H'$ 是 $x_1、x_2、x_3$ 的一次齊次式，由於兩線束成射影對應，所以有 $\mu' = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}$ ， $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ，以上兩式解出 μ 和 μ' ，代入得 $G'(\delta H - \gamma G) + H'(\beta H - \alpha G) = 0$ 這式左端是 $x_1、x_2、x_3$ 的二次齊式，所以按定義，兩射影線束對應線交點的軌跡是一條二階曲線，並且 $G = 0, H = 0$ 滿足上述方程，即第一線束中心是二階曲線上的一點，同理第二線束中心也是這二階曲線上的一點。



Lemma 2(圓錐曲線平行弦中點連線性質)： 拋物線平行弦中點連線會平行軸，橢圓與雙曲線平行弦中點連線會過中心。



Lemma 3： 二次曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 中，判別式： $H = a + c$ ； $\delta = b^2 - 4ac$ ；

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} ; \Omega = d^2 + e^2 - 4(a+c)f$$

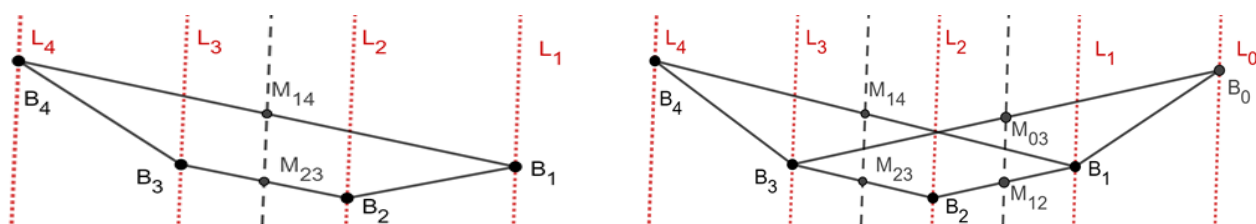
	$\delta < 0$	$\delta = 0$	$\delta > 0$
$\Delta = 0$	一點	①若 $\Omega > 0$ ，則為兩平行直線 ②若 $\Omega = 0$ ，則為兩重合直線 ③若 $\Omega < 0$ ，則為空集合	兩相交直線
$\Delta \neq 0$	① $H \cdot \Delta > 0$ 空集合 ② $H \cdot \Delta < 0$ 圓或橢圓	拋物線	雙曲線

肆、研究過程與方法

一、五條平行線上取點製造圓錐曲線

圓錐曲線有很特殊的幾何性質——橢圓和雙曲線的平行弦中點連線會過中心，拋物線中的平行弦中點連線會平行軸，我們先從性質比較簡單的拋物線做起。

要製造平行弦，讓我們想到『梯形』，加上希望能控制兩組平行弦的中點連線要互相平行，才能形成拋物線，所以想到利用兩個『上底:下底=1:3』的梯形拼成五點形（如下圖），顯然，五點形要落在五條相鄰等距的平行線上，且平行弦的中點連線會平行於給定的平行線，則這五點形會落在一拋物線上。我們希望以這個想法為出發點，製造出其他不同的圓錐曲線。



為了方便討論，以下研究報告中，我們定義 $\{L_k \mid k=0,1,2,3,4\}$ 依 k 遞減由左至右排列，滿足相

鄰等距且互相平行，點 $B_k \in L_k \quad k=0,1,2,3,4$ 。

Proposition 1. (1) 等距平行線上的二梯五點形 $B_0B_1B_2B_3B_4$ 必為三梯五點形。

(2) 一個三梯五點形恰可決定一拋物線。

< proof > 設 $\vec{B_0B_1} = \vec{a}$, $\vec{B_1B_2} = \vec{b}$ ，又因 $\vec{B_0B_1} \setminus \vec{B_1B_2}$ ，可藉由線性組合表示出各個向量，

$$(1) \vec{B_1B_3} = \vec{B_0B_3} - \vec{B_0B_1} = 3\vec{b} - \vec{a} \quad \vec{B_0B_4} = \vec{B_0B_1} + \vec{B_1B_4} = \vec{a} + (-3\vec{a} + 6\vec{b}) = 6\vec{b} - 2\vec{a},$$

$\therefore 6\vec{b} - 2\vec{a} = 2(3\vec{b} - \vec{a}) \therefore \vec{B_1B_3} // \vec{B_0B_4}$ ，故五條平行線上的二梯五點形必為三梯五點形。#

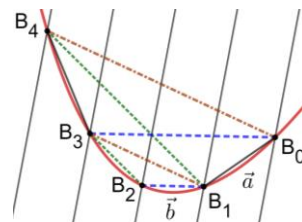
(2) 證三梯五點形 $B_0B_1B_2B_3B_4$ 可構成拋物線，即欲證 $\vec{M_{12}M_{03}} // \vec{M_{23}M_{14}}$ 。

$$\therefore \vec{B_0M_{03}} = \frac{1}{2}\vec{B_0B_3} = \frac{3}{2}\vec{b}, \quad \vec{B_0M_{12}} = \vec{B_0B_1} + \frac{1}{2}\vec{B_1B_2} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \vec{M_{12}M_{03}} = \vec{B_0M_{03}} - \vec{B_0M_{12}} = \frac{1}{2}\vec{B_0B_3} - \vec{B_0B_1} + \frac{1}{2}\vec{B_1B_2} = \frac{3}{2}\vec{b} - (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b},$$

$$\vec{M_{23}M_{14}} = \vec{B_0M_{14}} - \vec{B_0M_{23}} = (\frac{1}{2}\vec{B_0B_1} + \frac{1}{2}\vec{B_0B_4}) - (\frac{1}{2}\vec{B_0B_2} + \frac{1}{2}\vec{B_0B_3}) = (-\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}) - (-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b},$$

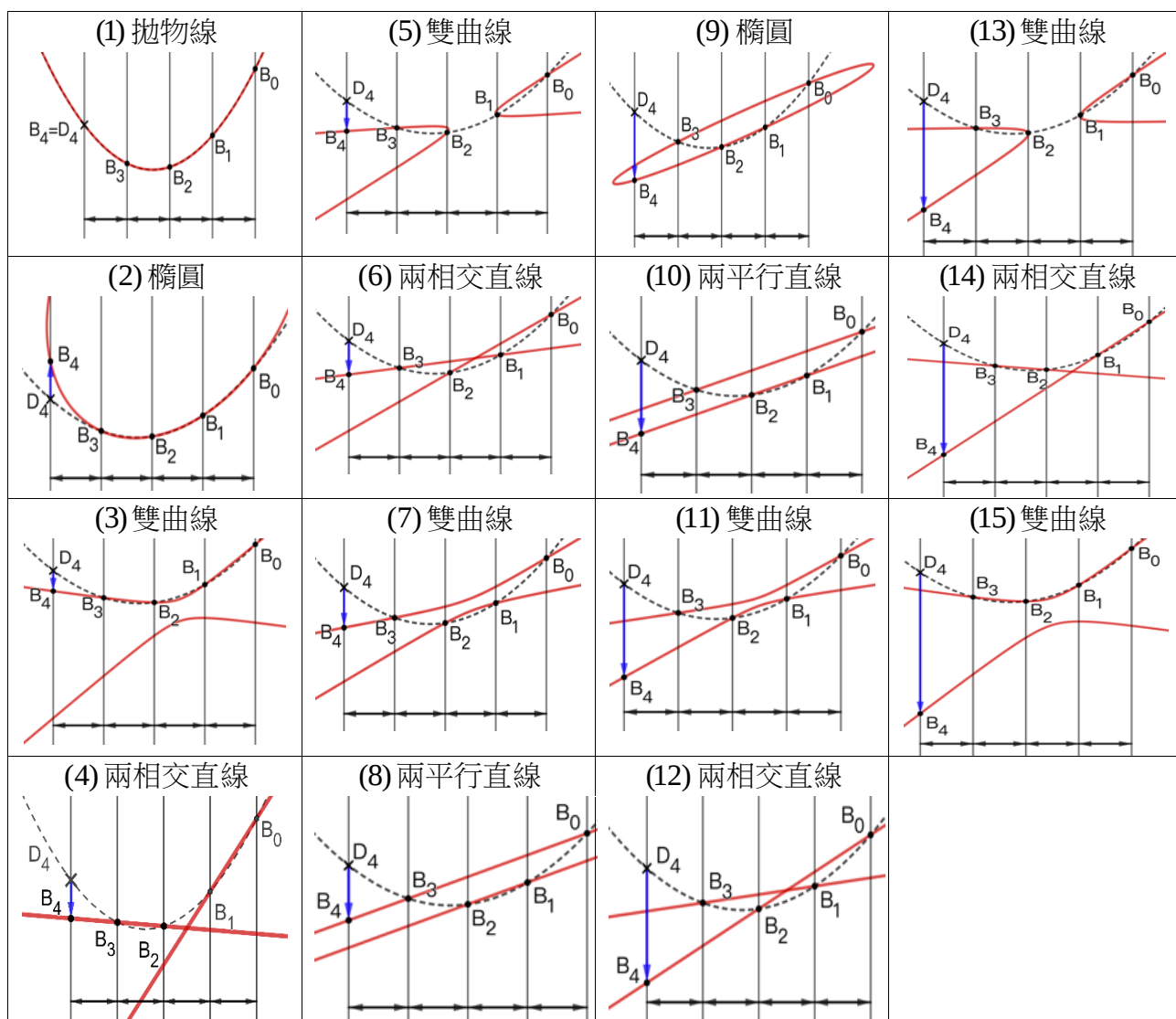
由此可見 $\vec{M_{12}M_{03}} = \vec{M_{23}M_{14}}$ ，即 $\vec{M_{12}M_{03}} // \vec{M_{23}M_{14}}$ 。#



Remark 1. 由 Proposition 1. 的證明過程，可得下列結論，以便後面性質證明。若 $B_0B_1B_2B_3B_4$ 為三梯五點形， $\overrightarrow{B_0B_1} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{B_1B_2} = \vec{b}$ ，則 $\overrightarrow{B_0B_2} = \vec{a} + \vec{b}$ ， $\overrightarrow{B_0B_3} = 3\overrightarrow{B_1B_2} = 3\vec{b}$ ， $\overrightarrow{B_0B_4} = 6\vec{b} - 2\vec{a}$ 。

【GGB 測試】

我們想先固定 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 四點分別在等距平行線 L_0 、 L_1 、 L_2 、 L_3 上的位置，來任意移動在 L_4 上的 B_4 ，透過 GGB 來觀察 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 會落在哪種類型的二次曲線上：



(1) B_4 僅有一個位置，才能生成拋物線：令此時的 B_4 為 D_4 ，即 $B_0B_1B_2B_3D_4$ 為一三梯五點形。

(2) 若 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 有三點共線，則會生成兩相交直線或兩平行直線。

我們不考慮 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 中有三點共線生成退化型二次曲線的情況，得到以下定理：

Theorem 1(拉拉 move 法)

$\{L_k \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ 依序相鄰等距且互相平行， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 任三點不共線，點 $B_k \in L_k$ 滿足四邊形

$B_0B_1B_2B_3$ 為梯形，其中 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_0B_3}$ 分別為其上底、下底，且 $B_0B_1B_2B_3D_4$ 為三梯五點形。

則下表為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的二次曲線：

B_4 位置	$B_4 = D_4$	與拋物線焦點同側	與拋物線焦點異側
$\{B_k\}_{k=0}^4$ 決定的二次曲線 Γ	拋物線	橢圓	雙曲線、橢圓

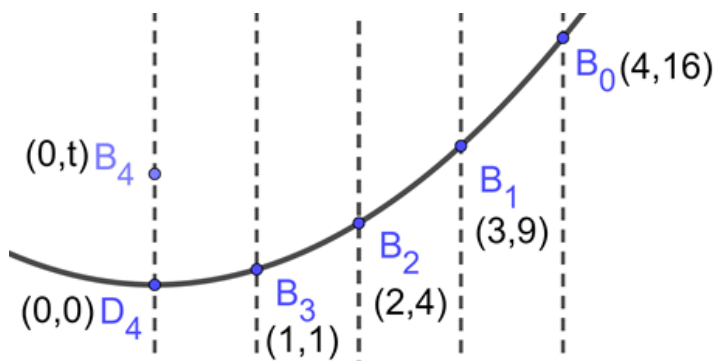
< proof >

當 $B_4 \neq D_4$ ，即非拋物線情形，

我們利用解析證法來證明：

不失一般性，假設 B_0, B_1, B_2, B_3, D_4

落在拋物線 $y = x^2$ 上，令各點座標分別為



$B_0(4,16)$ ， $B_1(3,9)$ ， $B_2(2,4)$ ， $B_3(1,1)$ ， $D_4(0,0)$ ，而有一動點 B_4 落在直線 L_4 上，

設 B_4 座標為 $(0,t)$ 且 $t \neq 0$ ，將 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 代入 $x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，

$$\text{得到} \begin{cases} bt^2 + et + f = 0 \\ 1 + b + c + d + e + f = 0 \\ 4 + 16b + 8c + 2d + 4e + f = 0 \\ 9 + 81b + 27c + 3d + 9e + f = 0 \\ 16 + 256b + 64c + 4d + 16e + f = 0 \end{cases} \quad , \text{再利用克拉瑪公式求得 } \{B_k\}_{k=0}^4 \text{ 會落在}$$

$$x^2 - \frac{10t}{t^2 + 35t + 24}xy + \frac{t}{t^2 + 35t + 24}y^2 - \frac{50t}{t^2 + 35t + 24}x - \frac{t^2 + 24}{t^2 + 35t + 24}y + \frac{24t}{t^2 + 35t + 24} = 0 \quad .$$

由 Lemma 3 中二次曲線的判別式，

$$H = 1 + \frac{t}{t^2 + 35t + 24} = \frac{t^2 + 36t + 24}{t^2 + 35t + 24}, \quad \delta = \left(\frac{-10t}{t^2 + 35t + 24}\right)^2 - 4\left(\frac{t}{t^2 + 35t + 24}\right) = \frac{-4t(t+4)(t+6)}{(t^2 + 35t + 24)^2},$$

$$d^2 + e^2 - 4(a+c)f = \frac{1}{(t^2 + 35t + 24)^2} (t^4 - 96t^3 - 908t^2 - 2304t + 576),$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & \frac{-10t}{t^2+35t+24} & \frac{-50t}{t^2+35t+24} \\ \frac{-10t}{t^2+35t+24} & \frac{2t}{t^2+35t+24} & \frac{-(t^2+24)}{t^2+35t+24} \\ \frac{-50t}{t^2+35t+24} & \frac{-(t^2+24)}{t^2+35t+24} & \frac{48t}{t^2+35t+24} \end{vmatrix} = \frac{-1}{(t^2+35t+24)^3} (t+2)(t+3)(t+4)(t+6)(t+8)(t+12),$$

得：

①當 $t \in (-6, -4) \cup (0, \infty)$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 落在橢圓上。

②當 $t \in (-\infty, -12) \cup (-12, -8) \cup (-8, -6) \cup (-4, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, 0)$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 落在雙曲線上。

③當 $t = 0, -2, -3, -4, -6, -8, -12$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 為兩平行直線與兩相交直線。

t 區間範圍的邊界值即退化型的情況，所以由 t 值可以確定 B_4 在不同位置時決定的二次曲線，

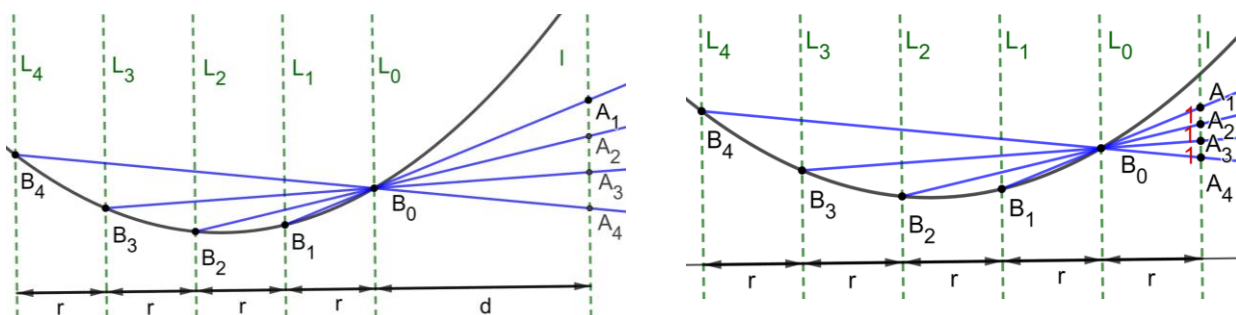
且可看出僅有 $t = 0$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 會落在拋物線上，因此我們找出平移量與圖形變化之關係。#

二、利用一點列線束投射得圓錐曲線

(一) 觀察 B 點集以 B_0 為線束中心投射到一點列

Theorem 1 製造圓錐曲線需仰賴許多平行線，所以我們希望再簡化方法，想到先將五點形透過其中一點為投射中心，找到與其餘四點對應的點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 。

【討論 1】欲在 L_0 右側再找一條平行線 l ，將 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 各點以 B_0 為投射中心投射到 l 上， $B_k \mapsto A_k$ ：



我們先在 L_0 右側作 l 使 $l \parallel L_0$ ，設 $d(L_{m+1}, L_m) = r$ ， $d(L_0, l) = d$ ， $r, d > 0$ 、 $m = 0, 1, 2, 3$ ，

將 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 以 B_0 投射到 l 上得到 $\{A_k\}_{k=1}^4$ ，則 $\vec{B_k B_0} = \frac{kr}{d} \cdot \vec{B_0 A_k}$ 。由相似形與向量運算可得

$\vec{A_1 A_2} : \vec{A_2 A_3} : \vec{A_3 A_4} = 1:1:1$ 。反之，由彼此相鄰等距的 $\{A_k\}_{k=1}^4$ 可利用 $\frac{kr}{d} \cdot \vec{A_k B_0} = \vec{B_0 B_k}$ 得到 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 。

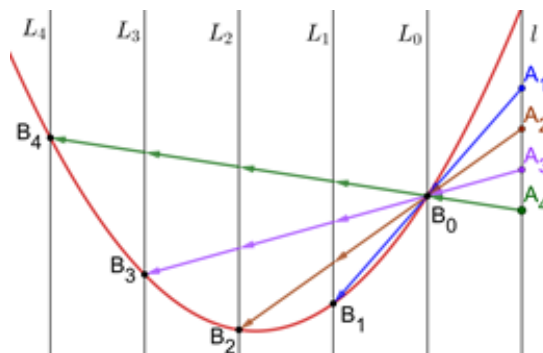
(二) 由一點列經一中心投射整數倍率得落在拋物線上的 B 點集

由討論 1，為了方便討論，我們取 $d = r$ ，

即 l 是 L_0 在右邊的等距平行線時，可得

$$k \cdot \overrightarrow{A_k B_0} = \overrightarrow{B_0 B_k}, \quad k=1, 2, 3, 4, \text{ 即 } \overrightarrow{B_1 B_0} = \overrightarrow{B_0 A_1},$$

$$\overrightarrow{B_2 B_0} = 2 \overrightarrow{B_0 A_2}, \quad \overrightarrow{B_3 B_0} = 3 \overrightarrow{B_0 A_3}, \quad \overrightarrow{B_4 B_0} = 4 \overrightarrow{B_0 A_4}.$$



換句話說，依序相鄰等距的 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 分別對 B_0 投射『1 倍』、『2 倍』、『3 倍』、『4 倍』

得到 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 ， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 五點可決定一個拋物線。

即得下列 Proposition 2，又 Theorem 1 中拉動 B_4 相當於改變 A_4 的位置，我們於 Theorem 2 裡討論這個對應的結果。

Proposition 2. 點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 滿足 $\overrightarrow{A_1 A_2} : \overrightarrow{A_2 A_3} : \overrightarrow{A_3 A_4} = 1:1:1$ ， $B_0 \notin l$ ，以 B_0 為投射中心， $l // L_k$ ， $d(l, L_0) = d(L_{k-1}, L_k)$ ，且 $\overrightarrow{B_k B_0} = k \overrightarrow{B_0 A_k}$ ， $k=1, 2, 3, 4$ ，則 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 落在一拋物線上。

Theorem 2(點列 1234 Shoot 法)

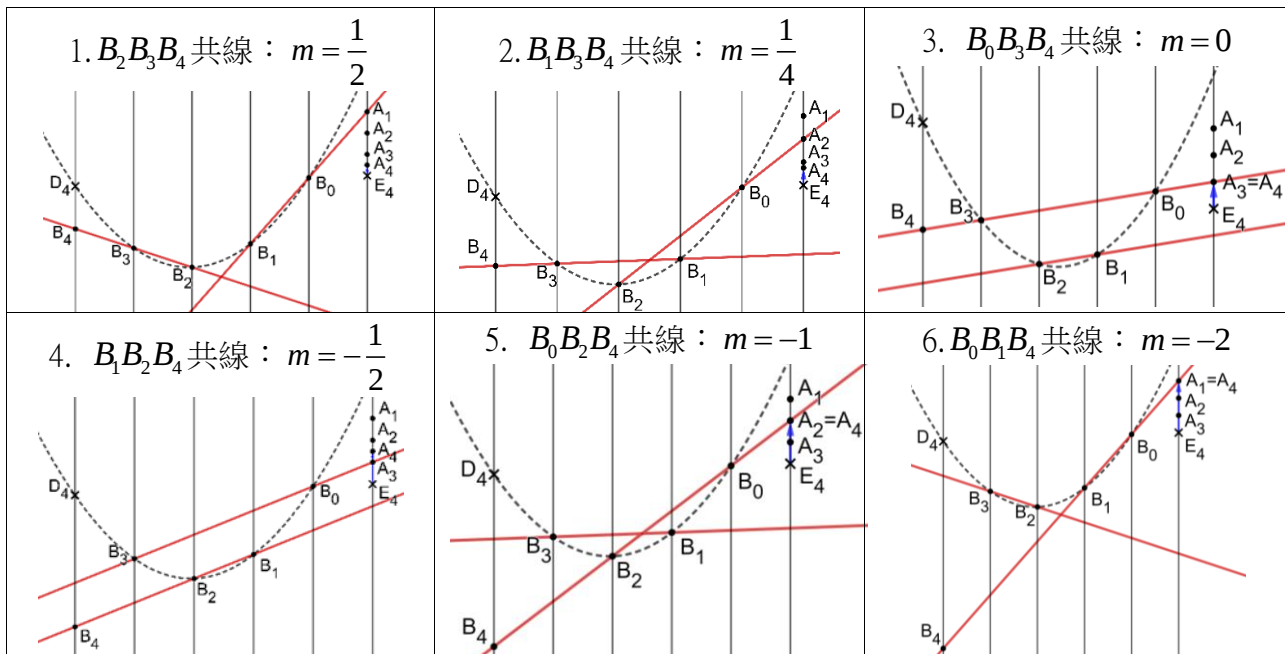
考慮滿足 $\overrightarrow{A_1 A_2} : \overrightarrow{A_2 A_3} : \overrightarrow{A_3 A_4} = 1:1:m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用

$k \overrightarrow{A_k B_0} = \overrightarrow{B_0 B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k=1, 2, 3, 4$ ，則下表為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的二次曲線。

m 範圍	$m=1$	$m > 1$ 或 $-\frac{1}{2} < m < 0$	$0 < m < 1$ 且 $m < -\frac{1}{2}$ ， 其中 $m \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1, -2$	$m = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$ 或 -1 或 -2	$m = -\frac{1}{2}$ 或 0
$\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定 的二次曲線 Γ	拋物線	橢圓	雙曲線	兩相交直線	兩平行直線

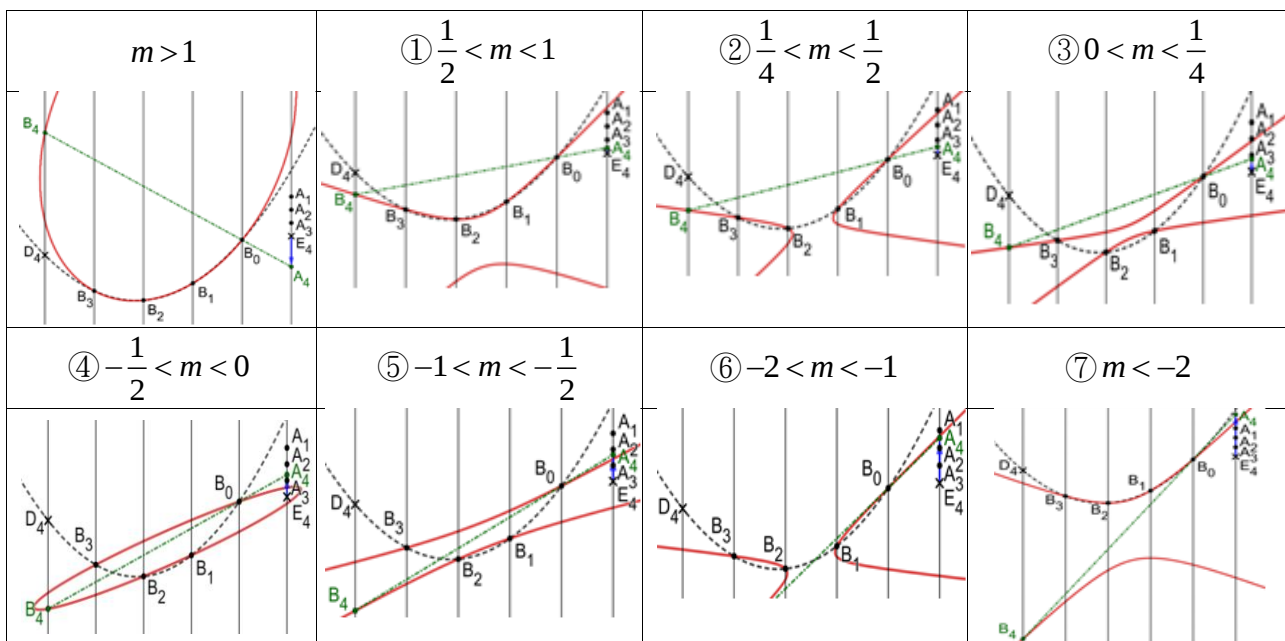
< proof > 退化型的 m 值必為圓錐曲線變化的邊界值，設 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1:1:m$ ：

case1° 【退化型】 若 $\{B_k\}$ 中有三點共線，則可透過 Remark 1 的結果與向量運算得到對應的 m 值，以下為 m 值對應的退化型分類：



case2° 【非退化型】 A_4 在 A 點列上移動：因 Theorem 1 與 Theorem 2 顯然一一對應等價，概略說明如下。我們將 A_4 移動的情況分為三大類，即可得到結論。

1. $A_4 = E_4 \Leftrightarrow m = 1 \Leftrightarrow$ 圖形為拋物線。 2. A_4 向上移 $\Leftrightarrow m < 1$ 。 3. A_4 向下移 $\Leftrightarrow m > 1$ 。

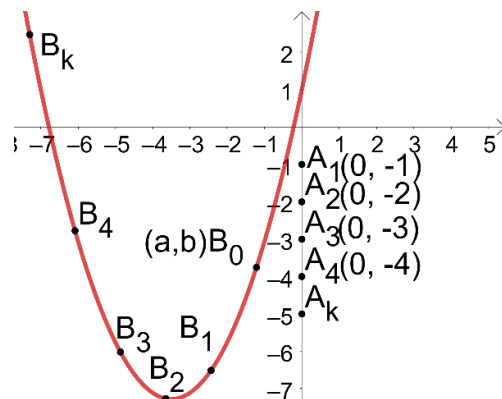
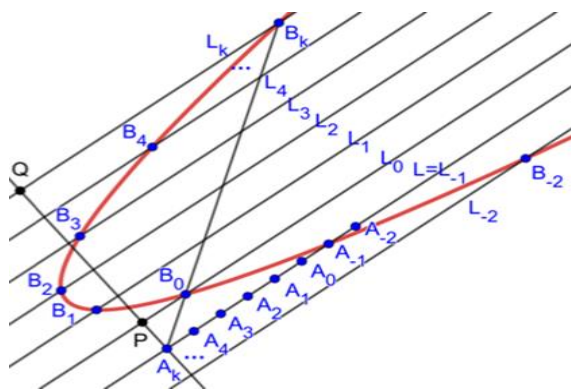


#

當 A 點列上的點彼此相鄰等距時投射會生成拋物線，我們想在 A 點列上再作其餘等距的點

A_k ，使 A_k 對 B_0 投射 k 倍得到 B_k ，而經過 GGB 測試後發現 B_k 也會落在同一拋物線上。

Proposition 3. 在 A 點列的基線上依序作相鄰等距的點 $\{A_k\}$ ，與一不在基線上的點 B_0 ，若滿足 $\overrightarrow{B_0B_k} = k \overrightarrow{A_kB_0}$ ，則 $\{B_k\}$ 必會落在一拋物線上，且對於任意的整數 k 皆成立。



< proof > 不失一般性，設 $A_1(0, -1)$ 、 $B_0(a, b)$ 、 $A_k(0, -k)$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，其中 $a \neq 0$ ，

可知 $A_2(0, -2)$ 、 $A_3(0, -3)$ 、 $A_4(0, -4)$ ，得 $B_1(2a, 2b+1)$ 、 $B_2(3a, 3b+4)$ 、 $B_3(4a, 4b+9)$

由 Prop. 1.， B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 落在拋物線，代入二次曲線一般式，得到 $\Gamma: y = \frac{b}{a}x + (\frac{x}{a} - 1)^2$

由 $\overrightarrow{B_0B_k} = k \overrightarrow{A_kB_0}$ ，利用向量運算和係數積可以得到 $B_k((k+1)a, (k+1)b + k^2)$ ， $k \in \mathbb{Z}$

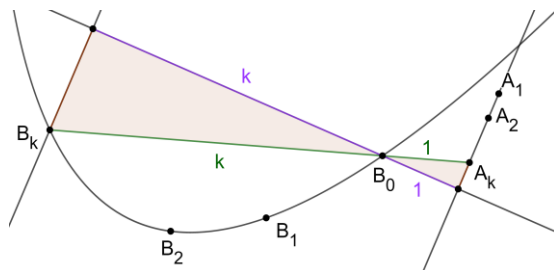
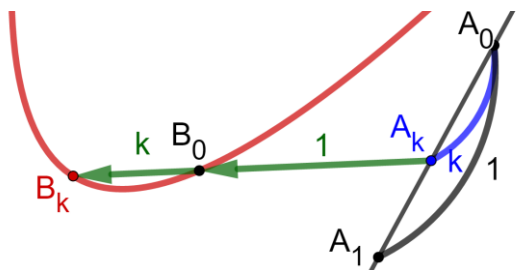
將 B_k 代入 Γ ，得 B_k 會落在其上。也就是對於任意整數 k ，等距的 A_k 投射而得的 B_k 都會落在同一個拋物線上。#

【討論 2】 在上述證明中，可以看出 k 滿足任意實數時， B_k 也會落在同一拋物線上，也就是

得到一個拋物線和實數線的一一對應關係，亦得到以下的 Corollary：

Corollary (拋物線的終極製造法---僅需不共線三點)

任意給定不共線三點 B_0 、 A_0 、 A_1 ，利用 $\overrightarrow{A_0A_k} = k \cdot \overrightarrow{A_0A_1}$ 和 $\overrightarrow{B_0B_k} = k \overrightarrow{A_kB_0}$ ， $k \in \mathbb{R}$ ，則所得的 $\{B_k\}$ 會落在一個拋物線上。



Proposition 4. 考慮滿足 $\overrightarrow{A_0A_1}:\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}=1:1:1:1$ 的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用 $k \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ， Γ 為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所在的拋物線，則 $\overline{A_0B_0}$ 為 Γ 過 B_0 的切線。

< proof > 不失一般性，設拋物線方程式 $y = x^2$ 、 $B_0(x_0, x_0^2)$ ，設平行線間距 d ，得

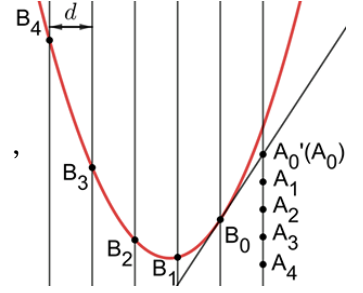
$\overline{A_1A_2}: x = x_0 + d$ 。過 B_0 作切線 $y = 2x_0x - x_0^2$ 交於 $\overline{A_1A_2}$ 於

$A_0'(x_0 + d, x_0^2 + 2dx_0)$ ，由 $B_1(x_0 - d, (x_0 - d)^2)$ 、 $B_2(x_0 - 2d, (x_0 - 2d)^2)$ ，

得 $A_1(x_0 + d, 2x_0^2 - (x_0 - d)^2)$ 、 $A_2(x_0 + d, \frac{1}{2}(3x_0^2 - (x_0 - 2d)^2))$ ，

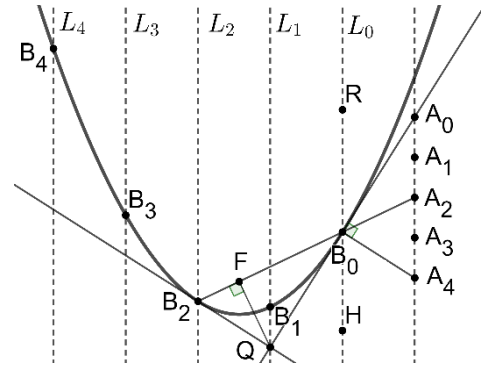
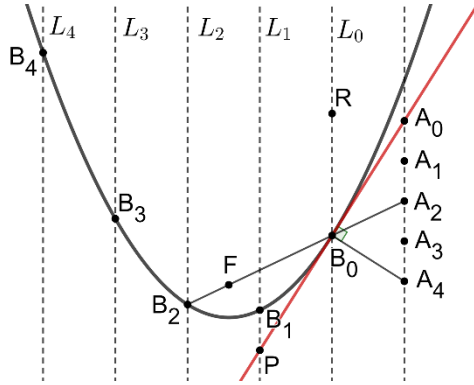
則 $\overline{A_1A_2} = [2x_0^2 - (x_0 - d)^2] - [\frac{1}{2}(3x_0^2 - (x_0 - 2d)^2)] = [x_0^2 + 2dx_0 - d^2] - [x_0^2 + 2dx_0 - 2d^2] = d^2$ ，

可知 $A_0(x_0 + d, 2x_0^2 - (x_0 - d)^2 + d^2)$ 。即 $A_0 = A_0'$ ，也就是 $\overline{A_0B_0}$ 是過 B_0 的切線。#



Proposition 5. 考慮滿足 $\overrightarrow{A_0A_1}:\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}=1:1:1:1$ 的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，且 $\angle A_0B_0A_4 = 90^\circ$ ，利用 $k \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ， Γ 為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所在的拋物線，則 $\overline{B_0B_2}$ 為 Γ 的焦弦，且 $\overline{B_0F}:\overline{B_2F} = \overline{B_0A_0}^2:\overline{B_0A_4}^2$ ，其中 F 為 Γ 的焦點。

< proof >



1° 欲證 $\overline{B_0B_2}$ 為拋物線焦弦，即證過 B_0 平行於軸的入射光必朝 B_2 反射而去：

過 B_0 作 $\overline{B_0R}$ 平行拋物線之軸，並連 $\overline{A_0B_0}$ （由 Proposition 4.，其為過 B_0 之切線），

因 $\angle A_0B_0A_4 = 90^\circ$ 且 A_2 為 $\overline{A_0A_4}$ 中點，所以 $\overline{A_0A_2} = \overline{B_0A_2}$ ，得 $\angle B_0A_0A_4 = \angle A_0B_0A_2$ ，

又因 $\overline{B_0R} \parallel l$ ，由內錯角 $\angle A_0B_0R = \angle B_0A_0A_4$ ，另外由對頂角 $\angle B_2B_0P = \angle A_0B_0A_2$ ，

得 $\angle A_0 B_0 R = \angle B_2 B_0 P$ ，故滿足拋物線的光學性質， $\overline{B_0 B_2}$ 為焦弦。#

2° 分別作過 B_0 、 B_2 的切線 $\overline{B_0 Q}$ 與 $\overline{B_2 Q}$ ，因 $\overline{B_0 B_2}$ 為焦弦，則 $\angle B_0 Q B_2 = 90^\circ$ ，且 $\overline{QF} \perp \overline{B_0 B_2}$

由 1° 的證明中可得 $\angle B_0 A_0 A_4 = \angle B_2 B_0 Q = \angle Q B_0 F$ ，又 $\angle A_0 B_0 A_4 = \angle B_0 F Q = 90^\circ$ ，則

$\triangle A_0 B_0 A_4 \sim \triangle B_0 F Q$ (AA 相似)。可得 $\overline{B_0 F} : \overline{A_0 B_0} = \overline{B_0 Q} : \overline{A_0 A_4}$ ，又 $\overline{B_0 Q} = \overline{A_0 B_0}$ ，則 $\overline{B_0 F} = \frac{\overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}}$ ，

$$\overline{B_2 F} = \overline{B_0 B_2} - \overline{B_0 F} = \overline{A_0 A_4} - \frac{\overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}} = \frac{\overline{A_0 A_4}^2 - \overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}} = \frac{\overline{B_0 A_4}^2}{\overline{A_0 A_4}}。$$

$$\text{故 } \overline{B_0 F} : \overline{B_2 F} = \frac{\overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}} : \frac{\overline{B_0 A_4}^2}{\overline{A_0 A_4}} = \overline{B_0 A_0}^2 : \overline{B_0 A_4}^2。 \#$$

(三) 由一點列經中心投射到水平距離交錯等距的 B 點集

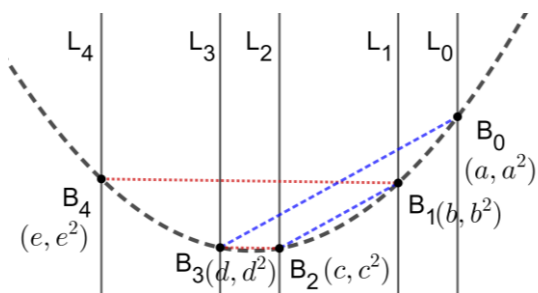
決定拋物線的二梯五點形不一定是落在等距平行線上，但一定會落在交錯等距的平行線上：

Proposition 6. 若在拋物線 Γ 上依序作 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ，滿足 $\overline{B_0 B_3} // \overline{B_1 B_2}$ ， $\overline{B_2 B_3} // \overline{B_1 B_4}$ ，

則 $d(L_0, L_1) = d(L_2, L_3)$ ， $d(L_1, L_2) = d(L_3, L_4)$ 。即 L_4 、 L_3 、 L_2 、 L_1 、 L_0 為交錯等距。

< proof > 不失一般性，設拋物線 $\Gamma: y = x^2$ ，

依序取點 $B_0(a, a^2)$ 、 $B_1(b, b^2)$ 、 $B_2(c, c^2)$ 、 $B_3(d, d^2)$ 、 $B_4(e, e^2)$ ，其中 $a > b > c > d > e$ ，



$$\because m_{B_1 B_2} = m_{B_0 B_3}, m_{B_2 B_3} = m_{B_1 B_4},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{b^2 - c^2}{b - c} = \frac{a^2 - d^2}{a - d} \Rightarrow b + c = a + d \text{ --- ①} \\ \frac{c^2 - d^2}{c - d} = \frac{b^2 - e^2}{b - e} \Rightarrow c + d = b + e \text{ --- ②} \end{cases}。$$

由①得 $a - b = c - d$ ，即 $d(L_0, L_1) = d(L_2, L_3)$ ，由②得 $b - c = d - e$ ，即 $d(L_1, L_2) = d(L_3, L_4)$ 。#

以上的討論告訴我們，滿足落在交錯等距平行線上的二梯五點形即可描繪出拋物線。

我們猜測落在交錯等距平行線上的五點形 $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4$ ，移動其中一點 B_4 也可以改變其對應的

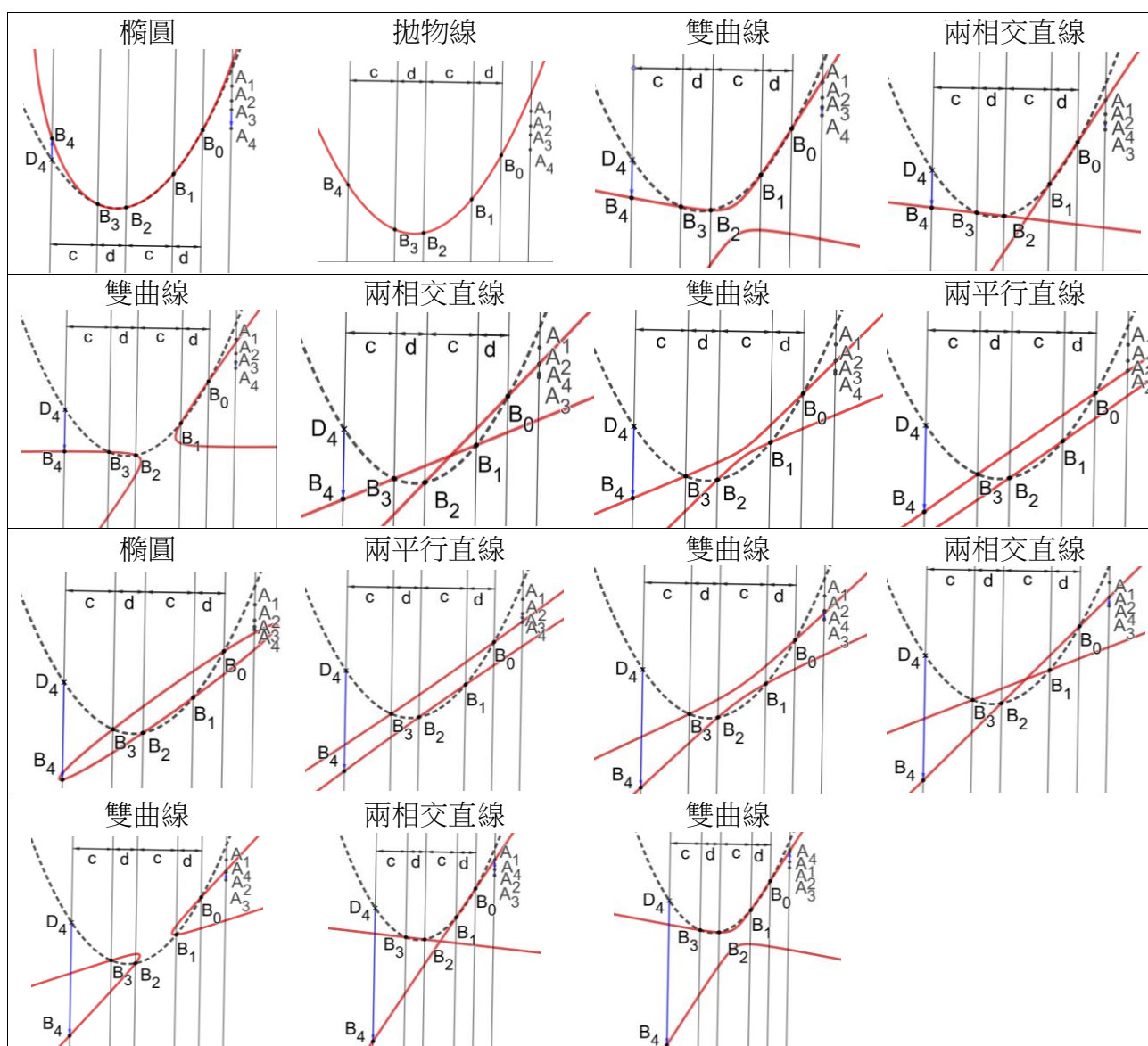
二次曲線，並找出 $\{B_k\}$ 對應的 A 點列，以下為移動 A_4 在 A 點列上的位置與二次曲線的關係：

Theorem 3(交錯等距拉拉 move 法) 考慮滿足 $\vec{A_1A_2} : \vec{A_2A_3} : \vec{A_3A_4} = c : d : m$ 的點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 及一投

射中心 $B_0 \notin l$ ，以 $\frac{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor c + \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor d}{d} \vec{B_0A_k} = \vec{B_kB_0}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=1}^4$ ，則：

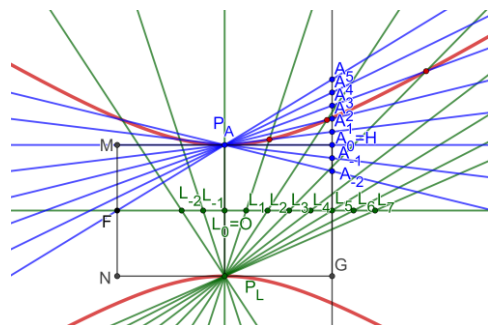
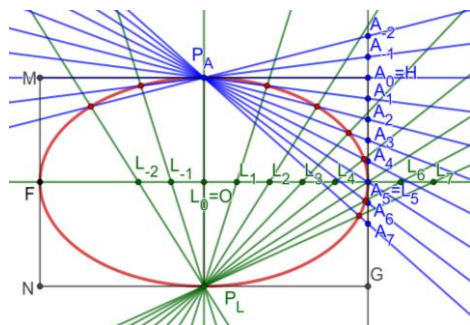
m 範圍	$m = c$	$-\frac{d}{2} < m < 0$ 或 $m > c$	$m < -\frac{d}{2}$ 或 $0 < m < c$	$m = \frac{c}{2}$ 或 $-\frac{cd}{2(c+d)}$ 或 $-d$ 或 $(-d - \frac{d^2}{c})$	$m = -\frac{d}{2}$ 或 0
$\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定 的二次曲線 Γ	拋物線	橢圓	雙曲線	兩相交直線	兩平行直線

< proof > 此處證明與 Theorem 2 類似，可以由向量證之，故證明略。以下為拉動 A_4 的圖形：



三、兩個線束生成圓錐曲線

(一) 基互相垂直 n 等分的雙點列生成特定的圓、橢圓與雙曲線



由動機，我們發現當基線為互相垂直時，若增加點列之等份點的個數，其對應線束與交點 $\{B_k\}$ 仍落在原來的橢圓上。若翻轉其一點列的位置，基線仍保持垂直，卻可以製造出雙曲線。

Theorem 4(雙線束 Shoot 法) 一矩形 $MNGH$ ， P_A 、 P_L 分別為 $\overline{MH}$ 與 $\overline{GN}$ 之中點， E 、 F 、原點 O 分別為 $\overline{HG}$ 、 $\overline{MN}$ 與 $\overline{EF}$ 之中點， L_k 、 A_k 分別於 $\overline{OE}$ 、 $\overline{A_0A_n}$ 上，滿足 $\overrightarrow{OL_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{OE}$ 且 $\overrightarrow{A_0A_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{A_0A_n}$ ， B_k 為 $\overline{P_L L_k}$ 與 $\overline{P_A A_k}$ 之交點， $k \in \mathbb{R}$ ， $n \in \mathbb{Z}$ ，若 $\overline{MH} = 2a$ ， $\overline{MN} = 2b$ ，則：

(1) 當 $A_0 = H$ 且 $A_n = E$ ， $\{B_k\}$ 會落在圓或橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上。

(2) 當 $A_0 = M$ 且 $A_n = F$ ， $\{B_k\}$ 會落在雙曲線 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 上。

< proof > 設 $t = \frac{k}{n}$ ，

1. $A_n = E$ ；可知 $L_k(at, 0)$ 、 $A_k(a, b-bt)$ ，

得 $\overline{P_L L_k} : y = \frac{b}{at}x - b$ 、 $\overline{P_A A_k} : y = \frac{-bt}{a}x + b$ ，

此二直線交點座標 $B_k(\frac{2at}{t^2+1}, \frac{b-bt^2}{t^2+1})$ ，可看出其

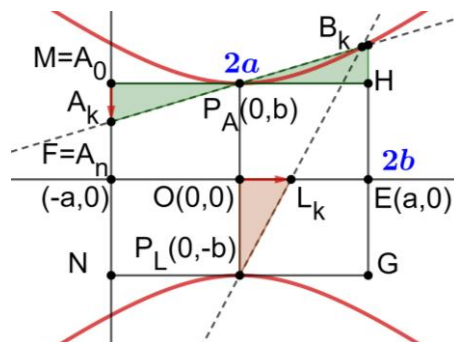
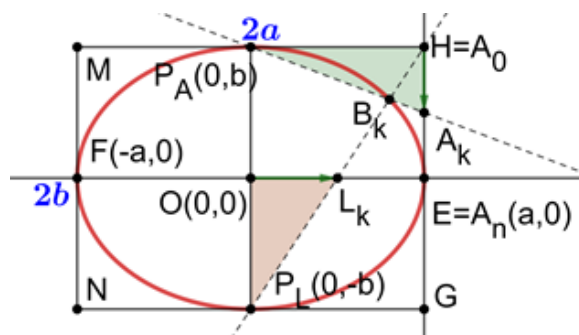
會落於橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上。#

2. $A_n = F$ ；可知 $L_k(at, 0)$ 、 $A_k(-a, b-bt)$ ，

得 $\overline{P_L L_k} : y = \frac{b}{at}x - b$ 、 $\overline{P_A A_k} : y = \frac{bt}{a}x + b$ ，

此二直線交點座標 $B_k(\frac{2at}{1-t^2}, \frac{b+bt^2}{1-t^2})$ ，可看出其

會落於雙曲線 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 上。#

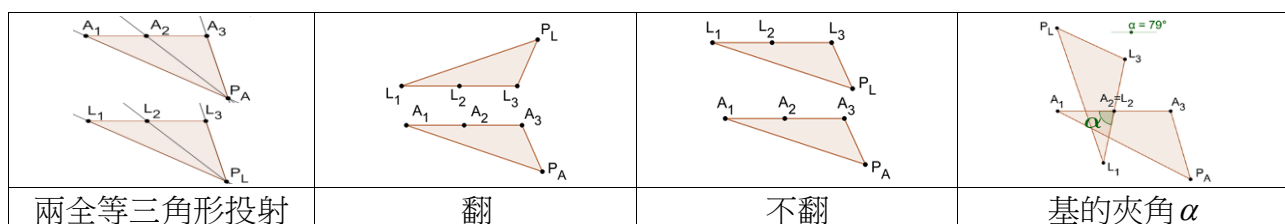


(二) 全等三角形的雙線束投射

Theorem 4 的條件為兩基線互相垂直，我們猜測曲線形狀與兩線束中心的位置和兩基線的夾角有關，但要找到雙線束一般的情況過於複雜，所以我們先研究包含線束中心與基的兩全等的

三角形 $\triangle P_A A_1 A_3$ 、 $\triangle P_L L_1 L_3$ ，觀察兩全等三角形之位置與基之夾角所作出之二次曲線關係，選

定 P_A 、 P_L 為線束中心，以其對邊當作基， $\overline{A_1 A_3}$ 、 $\overline{L_1 L_3}$ 的中點分別為 A_2 、 L_2 ，如下圖：



定義 4.(基線夾角、翻與不翻、對應關係)

令 $\vec{v}_A = \overrightarrow{A_2 A_3}$ ， $\vec{v}_L = \overrightarrow{L_2 L_3}$ ， α 為 $\vec{v}_A$ 與 $\vec{v}_L$ 之夾角， $\varphi = \angle A_3 A_2 P_A$ 。

正對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_k}$ 之交點。	逆對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_{4-k}}$ 之交點。
翻：兩三角形 $\triangle P_A A_1 A_3$ 、 $\triangle P_L L_1 L_3$ ，令 P_L' 為 P_L 對 L 點列的對稱點，若 $\triangle P_A A_1 A_3 \cong \triangle P_L' L_1 L_3$ ，則稱 $\triangle P_A A_1 A_3$ 、 $\triangle P_L L_1 L_3$ 關係為翻。	未翻：兩三角形 $\triangle P_A A_1 A_3$ 、 $\triangle P_L L_1 L_3$ ，若 $\triangle P_A A_1 A_3 \cong \triangle P_L L_1 L_3$ ，則稱 $\triangle P_A A_1 A_3$ 、 $\triangle P_L L_1 L_3$ 關係為未翻。

Theorem 5(全等三角形 Shoot 法) 當 $\triangle P_A A_1 A_3 \cong \triangle P_L L_1 L_3$ ，且兩三角形皆不為等腰三角形， P_A 、 P_L 為線束中心，其中 $P_A \neq P_L$ ，以其對邊當作基，以下為兩線束對應的圖形：

分類	正對應	逆對應
未翻	(1) $\vec{v}_A \nmid \vec{v}_L$: 圓 (2) $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_L$: 無圖形	(5) $\overrightarrow{P_A P_L} \nmid \vec{v}_A$ 且 $\overrightarrow{P_A P_L} \nmid \vec{v}_L$: 雙曲線, 兩相交直線 (6) $\overrightarrow{P_A P_L} \parallel \vec{v}_A \parallel \vec{v}_L$: 兩相交直線
翻	(3) $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 雙曲線 (4) $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線	(7) $\vec{v}_A \nmid \vec{v}_L$: 雙曲線或橢圓或拋物線或兩相交直線或兩平行直線。當 $k \in \mathbb{Z}$ ， $\alpha = k\pi - 2\angle P_A A_2 A_3$ ，為拋物線或兩平行線。 (8) $\overrightarrow{P_A P_L} \parallel \vec{v}_A \parallel \vec{v}_L$: 兩平行直線 (9) $\overrightarrow{P_A P_L} \nmid \vec{v}_A$ 且 $\overrightarrow{P_A P_L} \nmid \vec{v}_L$ 且 $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_L$: 拋物線

<説明>

	未翻	翻	
正對應	(1)	(3)	(4)
	(5)-1	(7)-5	(7)-1
	(5)-2	(8)	(7)-2
逆對應	(6)	(9)	(7)-3
			(7)-4

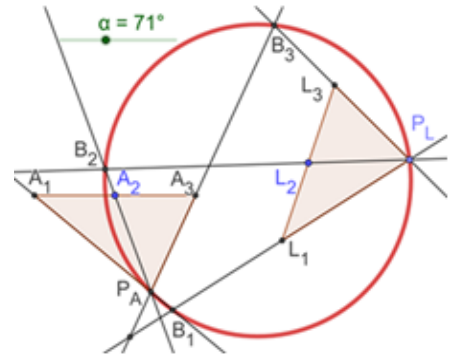
< proof of Theorem 5 >

1. 未翻正對應—基不平行軌跡為圓的證明 (case(1))

1° 因 $\angle B_3 P_A A_1 = \angle B_3 P_L B_1$ ，則四邊形 $P_A B_1 P_L B_3$ 中
 $\angle B_3 P_A B_1 + \angle B_3 P_L B_1 = (\pi - \angle B_3 P_A A_1) + \angle B_3 P_L B_1 = \pi$ ，
 得 $P_A B_1 P_L B_3$ 四點共圓。

2° 因 $\angle B_2 P_A A_1 = \angle B_2 P_L B_1$ ，則四邊形 $P_A B_1 P_L B_2$ 中
 $\angle B_2 P_A B_1 + \angle B_2 P_L B_1 = (\pi - \angle B_2 P_A A_1) + \angle B_2 P_L B_1 = \pi$ ，
 得 $P_A B_1 P_L B_2$ 四點共圓。

由 1°、2° 得 $P_A B_1 P_L B_3 B_2$ 五點共圓。 #

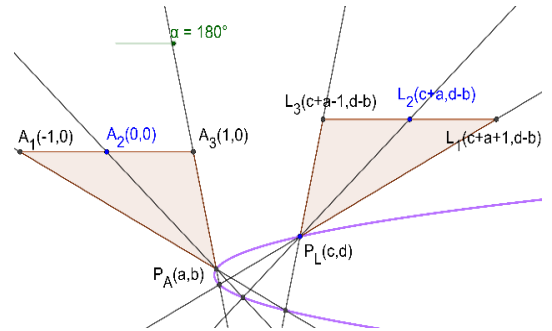


未翻正對應—基不平行

2. 翻逆對應—基平行軌跡為拋物線的證明 (case(9))

不失一般性，設 $P_A(a, b)$ 、 $A_1(-1, 0)$ 、 $A_2(0, 0)$ 、 $A_3(1, 0)$ 、 $P_L(c, d)$ ，則可知 $L_1(c+a+1, d-b)$ 、 $L_2(c+a, d-b)$ 、 $L_3(c+a-1, d-b)$ ，由條件可知顯然 $b \neq 0$ 且 $b \neq d$ ，將三個交點與兩線束中心代入二次曲線一般式，再利用克拉瑪公式可解得其方程式為

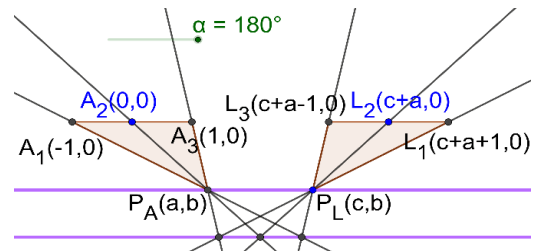
$$x = \frac{-2a}{b(d-b)} y^2 + \frac{bc+ab+2ad}{b(d-b)} y - \frac{bc+ad}{d-b}, \text{ 可知其為拋物線。 \#}$$



翻逆對應—基平行

3. 翻逆對應—基重合軌跡為兩平行直線的證明 (case(8))

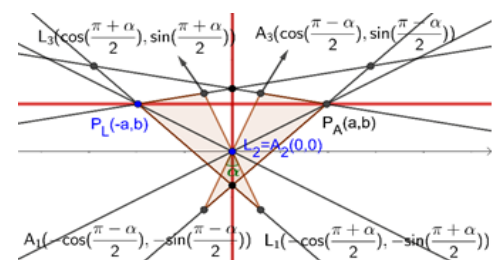
不失一般性，設 $P_A(a, b)$ 、 $A_1(-1, 0)$ 、 $A_2(0, 0)$ 、 $A_3(1, 0)$ 、 $P_L(c, b)$ ，則可知 $L_1(c+a+1, 0)$ 、 $L_2(c+a, 0)$ 、 $L_3(c+a-1, 0)$ ，將三個交點與兩線束中心代入二次曲線一般式，再利用克拉瑪公式可解得其方程式為
 $(y-b)(2ay-(ab+bc))=0$ ，為兩平行直線。 #



翻逆對應—基重合

4. 翻正對應 $A_2 = L_2$ 軌跡為互相垂直的兩直線的證明 (case(4))

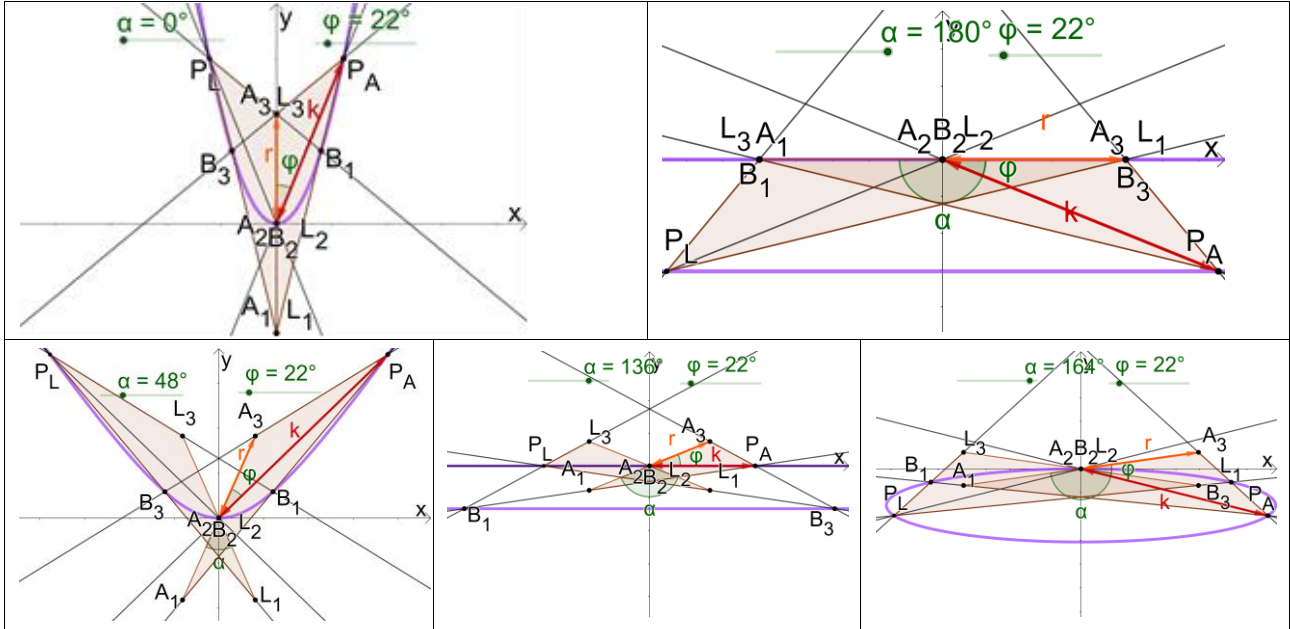
不失一般性，令對稱軸為 y 軸，設 $A_2(0, 0)$ 、 $P_A(a, b)$ 、 $A_1(-\cos \frac{\pi-\alpha}{2}, -\sin \frac{\pi-\alpha}{2})$ 、 $A_3(\cos \frac{\pi-\alpha}{2}, \sin \frac{\pi-\alpha}{2})$ 、



翻正對應— $A_2 = L_2$

$P_L(-a, b)$ ，則可知 $L_1(-\cos \frac{\pi+\alpha}{2}, -\sin \frac{\pi+\alpha}{2})$ 、 $L_2(0, 0)$ 、 $L_3(\cos \frac{\pi+\alpha}{2}, \sin \frac{\pi+\alpha}{2})$ ，將三個交點與兩線束中心代入二次曲線一般式，再利用克拉瑪公式可解得其方程式為 $x(y-b)=0$ ，為互相垂直的兩直線。# 〔其餘退化型 (case(6)) 皆可用與上述類似方法求得，故省略〕

5. 翻、逆對應、基不平行的證明：我們先考慮兩基線中點重合的情況，



< proof > 設 $A_2(0, 0)$ 、 $L_2(0, 0)$ 、 $\overline{A_3A_2} = r$ 、 $\overline{P_A A_2} = k$ 、 $\angle A_3A_2P_A = \varphi$ ，

其中規定 $0 \leq \alpha \leq \pi$ 、 $0 < \varphi < \pi$ 、 $\frac{\alpha}{2} + \varphi \neq \pi$ (否則 $P_A = P_L$)， $r, k \in \mathbb{R}^+$ ，

則 $A_1(-r \sin \frac{\alpha}{2}, -r \cos \frac{\alpha}{2})$ 、 $A_3(r \sin \frac{\alpha}{2}, r \cos \frac{\alpha}{2})$ 、 $P_A(k \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi), k \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi))$ 、

$L_1(r \sin \frac{\alpha}{2}, -r \cos \frac{\alpha}{2})$ 、 $L_3(-r \sin \frac{\alpha}{2}, r \cos \frac{\alpha}{2})$ 、 $P_L(-k \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi), k \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi))$ ，

$\overline{P_A A_1}$ 交 $\overline{P_L L_3}$ 於 $B_1(\frac{k^2 r \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha}, \frac{kr^2 \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha})$ ，

$\overline{P_A A_2}$ 交 $\overline{P_L L_2}$ 於 $B_2(0, 0)$ ，

$\overline{P_A A_3}$ 交 $\overline{P_L L_1}$ 於 $B_3(\frac{-k^2 r \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha}, \frac{kr^2 \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha})$ ，

將 P_A 、 P_L 、 B_1 、 B_2 、 B_3 代入二次曲線一般式，解得

$$-\cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos \frac{\alpha}{2} (\cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} r^2 + \sin \varphi \cos \frac{\alpha}{2} r^2 - \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos^2(\frac{\alpha}{2} + \varphi) k^2) x^2$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} r^2 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \cos \frac{\alpha}{2} k^2 + \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) k^2 \right) y^2 \\
& + k \sin \varphi \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} r - \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) k \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} r + \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) k \right) y = 0,
\end{aligned}$$

透過 Lemma 3 的結論，可以得到 α 、 φ 、 k 的不同限制來對應不同的二次曲線。#

6. 翻逆對應—基不平行拋物線出現的情況的證明 (case (7))

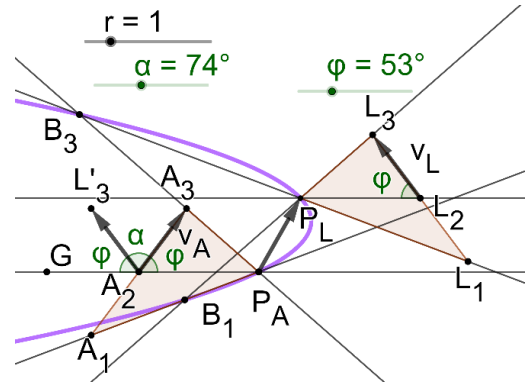
拋物線僅發生在 $A_2 \neq L_2$ ，且 $\alpha = k\pi - 2\varphi$ ，其中 $k=1, 2$ ，

以下為 $\varphi < \frac{\pi}{2}$ 的證明，而 $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 的證明類似，故略之。

< proof > 因軌跡為拋物線時， B_2 必在無窮遠處，可知

$\overrightarrow{P_A A_2} // \overrightarrow{P_L L_2}$ 。作 L'_3 滿足 $\overrightarrow{v_L} = \overrightarrow{A_2 L'_3}$ ，因 $\angle P_L L_2 L_3 = \varphi$ 且

$\overrightarrow{P_A A_2} // \overrightarrow{P_L L_2}$ ，所以 $\angle GA_2 L'_3 = \varphi$ 。

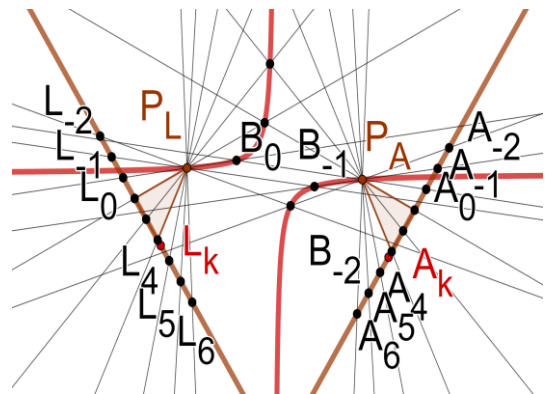
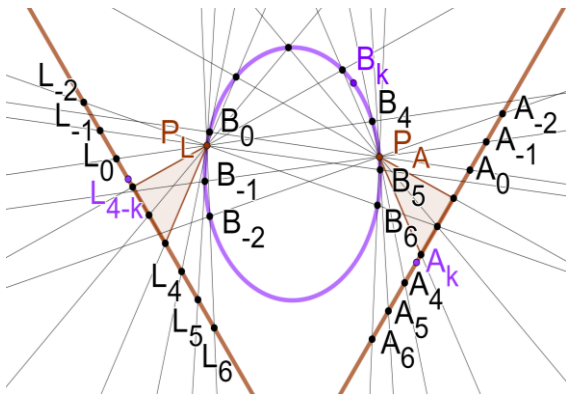


因 $\angle GA_2 L'_3 + \angle L'_3 A_2 A_3 + \angle P_L L_2 L_3 = \pi$ ，所以得 $\alpha + 2\varphi = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - 2\varphi$ 。#

Proposition 7. 當 $\triangle P_A A_1 A_3 \cong \triangle P_L L_1 L_3$ ， P_A 、 P_L 為線束中心，其中 $P_A \neq P_L$ ，以 $\overrightarrow{A_1 A_3}$ 、 $\overrightarrow{L_1 L_3}$ 當作基，

$\overrightarrow{OA_k} = \frac{(3-k)\overrightarrow{OA_1} + (k-1)\overrightarrow{OA_3}}{2}$ ， $\overrightarrow{OL_k} = \frac{(3-k)\overrightarrow{OL_1} + (k-1)\overrightarrow{OL_3}}{2}$ ，則 $\overrightarrow{P_A A_k}$ 、 $\overrightarrow{P_L L_k}$ 的交點 B_k 會落在

同一個二次曲線上， k 為任意實數。〔此性質和 Proposition 3. 是類似的〕



(三) 兩基圓生成特定的二次曲線

Thm. 5 中，兩基線上的點都是相鄰等距的，自然的就想把條件改成『等角』，所以我們將基線彎成了『基圓』，基線上等距的點變成基圓上『圓心角相同的點』。我們先探討包含線束中心的兩個等圓 O_A 、 O_L ，觀察兩等圓及兩線束中心 P_A 、 P_L 的相對位置與作出之二次曲線的關係：

定義 5. (基圓對應的翻與不翻、正逆對應關係)

兩等圓 O_A 、 O_L 上四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 、四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ 滿足 $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_2 A_3}$ ， $\overline{L_1 L_2} = \overline{L_2 L_3}$ 且

$\angle A_1 P_A A_3 = \angle L_1 P_L L_3$ 。固定一基圓，使得另一基圓平行移動至兩圓心 O_A 、 O_L 重合，令此時的

$\angle A_2 O_A L_2 = \alpha$ ， $\varphi = \angle A_2 O_A P_A$ ， $k=1,2,3$ ，兩線束中心為 P_A 、 P_L ，則定義對應關係如下：

正對應： B_k 為 $\overrightarrow{P_A A_k}$ 與 $\overrightarrow{P_L L_k}$ 之交點。		逆對應： B_k 為 $\overrightarrow{P_A A_k}$ 與 $\overrightarrow{P_L L_{4-k}}$ 之交點。	
未翻： 兩四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 、 $P_L L_1 L_2 L_3$ 經旋轉平移後能完全重合且 $P_A \mapsto P_L$ ， $A_k \mapsto L_k$ ， $k=1,2,3$ 。		翻： P_L 對 $\overrightarrow{O_A A_2}$ 作線對稱得 P_L' ，兩四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 、 $P_L' L_1 L_2 L_3$ 經旋轉平移後能完全重合且 $P_A \mapsto P_L'$ ， $A_k \mapsto L_k$ ， $k=1,2,3$ 。	
兩基圓投射	翻	未翻	基圓的夾角 α

Theorem 6(雙基圓 Shoot 法) 兩等圓 O_A 、 O_L 上四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 、四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ 滿足

$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_2 A_3}$ ， $\overline{L_1 L_2} = \overline{L_2 L_3}$ 且 $\angle A_1 P_A A_3 = \angle L_1 P_L L_3$ 。兩線束中心為 P_A 、 P_L ， $\{A_k\}_{k=1}^3$ 、 $\{L_k\}_{k=1}^3$ 分別在兩等圓 O_A 、 O_L 上順時針排列。

以下為兩線束 $P_A(\overrightarrow{P_A A_k})_{k=1}^3$ 、 $P_L(\overrightarrow{P_L L_k})_{k=1}^3$ 所對應的 $\{B_k\}$ 圖形分類：

Case 1 雙基圓重合

	正對應	逆對應
未	(1) $\alpha \neq 0^\circ$ 或 180° ：圓	(5) $\varphi \neq 180^\circ$ ：等軸雙曲線
翻	(2) $\alpha = 0^\circ$ 或 180° ：無圖形	(6) $\varphi = 180^\circ$ ：兩垂直直線 (7) $\alpha = \varphi$ ：無圖形
翻	(3) $\alpha + \varphi \neq 180^\circ$ ：圓 (4) $\alpha + \varphi = 180^\circ$ ：無圖形	(8) $\varphi \neq 180^\circ$ ：兩垂直直線 (9) $\varphi = 180^\circ$ ：無圖形
	未翻	翻
正對應	(10)	(12)

逆對應	(14)		(16)	
	(15)		(17)	

Case 2 雙基圓不重合

分類	正對應	逆對應
未	(10) $\alpha \neq 0^\circ$ 或 180° : 圓	(14) $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線
翻	(11) $\alpha = 0^\circ$ 或 180° : 無圖形	(15) $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 等軸雙曲線
翻	(12) $\alpha + \varphi \neq 180^\circ$: 圓	(16) $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線
	(13) $\alpha + \varphi = 180^\circ$: 無圖形	(17) $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 等軸雙曲線
	未翻	翻
正對應	(1)	(3)
逆對應	(5)	(8)
	(6)	

< proof of Theorem 6 >

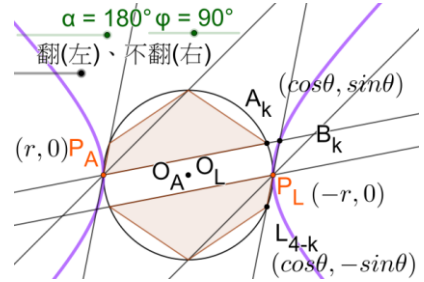
1. 未翻逆對應— $\varphi \neq \pi$ 、雙基圓重合 (case(5))

設圓心 $O_A = O_L$ 座標為 $(0,0)$ 、 $P_A(r,0)$ 、 $P_L(-r,0)$ 、

$A_k(\cos\theta, \sin\theta)$ 、 $L_{4-k}(\cos\theta, -\sin\theta)$ 、

可得 $\overline{P_A A_k} : y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}x - \frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}$ ， $\overline{P_L L_{4-k}} : y = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta+1}x - \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}$ ，解出 $B_k(\frac{1}{\cos\theta}, \frac{-\sin\theta}{\cos\theta})$ ，

會落在等軸雙曲線 $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$ 上。#



2. 翻正對應— $\alpha + \varphi \neq \pi$ 、雙基圓不重合 (case(12))

$\therefore \angle B_2 P_L B_1 = \angle L_2 P_L L_1$ (對頂角)，

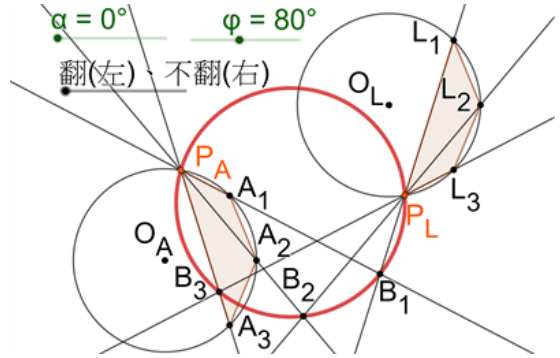
$\angle L_2 P_L L_1 = \angle A_2 P_A A_1$ (點列與線束中心皆等角)，

$\therefore \angle B_2 P_L B_1 = \angle A_2 P_A A_1$ ，

四邊形 $P_A P_L B_1 B_2$ 中 $\therefore \angle B_2 P_L B_1 = \angle A_2 P_A A_1$ ，

$\therefore P_A P_L B_1 B_2$ 四點共圓。同理可證 $P_A P_L B_2 B_3$ 四點共圓，

由 $P_A P_L B_1 B_2$ 四點共圓、 $P_A P_L B_2 B_3$ 四點共圓，可得 $P_A P_L B_1 B_2 B_3$ 五點共圓。#



3. 翻逆對應— $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$ 、雙基圓不重合 (case(17))

設 $O_A(a,b)$ 、 $O_L(-a,-b)$ 、基圓半徑 $r=1$ 、 $\angle A_2 O_A A_3 = \theta$

可得 $L_k(-a + \cos(\frac{\alpha}{2} - (2-k)\theta), -b - \sin(\frac{\alpha}{2} - (2-k)\theta))$ 、

$A_k(a + \cos(\frac{\alpha}{2} + (2-k)\theta), b + \sin(\frac{\alpha}{2} + (2-k)\theta))$ ， $k=1,2,3$ ，

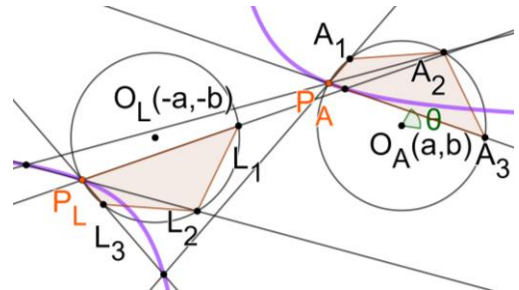
$P_A(a + \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi), b + \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi))$ 、 $P_L(-a + \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi), -b - \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi))$ ，

此時漸近線恆垂直且曲線中心 O 也是 P_A 、 P_L 的中點，故 $O(\cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi), 0)$ 。

又兩漸近線的方向向量和 x 、 y 軸分別平行，寫出兩漸近線相乘後解得等號右邊的常數，

故雙曲線方程式為 $[x - \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi)]y = a[b + \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi)]$ ，再代入 B_1 、 B_2 、 B_3 、 P_L 發現其確實也

會落在其上。# [未翻逆對應— $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$ (case(15)) 也可以由類似的方法證明]



伍、研究結果

Theorem 1: 在五條相鄰等距平行線上的三梯五點形必落在一拋物線上，固定其中 4 點，拉動第 5 點，依其不同位置產生不同二次曲線。

Theorem 2: 在一條基線上給定相鄰等距的 4 個點，往平面上一點 B_0 分別以 1、2、3、4 倍投射，得到的 4 個投射點與 B_0 必落在一拋物線上，拉動 A_4 ，依 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1:1:m$ 不同比例產生不同二次曲線。

Corollary: 任意給定不共線三點 B_0 、 A_0 、 A_1 ，利用 $\overrightarrow{A_0A_k} = k \cdot \overrightarrow{A_0A_1}$ 和 $\overrightarrow{B_0B_k} = k \overrightarrow{A_kB_0}$ ， $k \in \mathbb{R}$ ，則所得的 $\{B_k\}$ 會落在一個拋物線上。

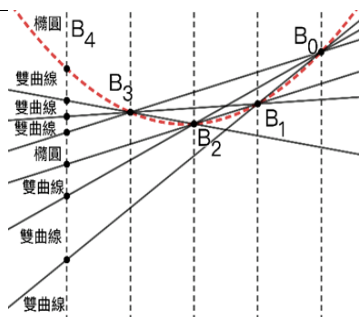
Proposition 4: 給定一相鄰等距的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用 $k \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ，其中 Γ 為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所在的拋物線，則 $\overrightarrow{A_0B_0}$ 為 Γ 過 B_0 的切線。

Theorem 3: 在一條基線上給定交錯等距的 4 個點，往平面上一點 B_0 分別以 $\left[\frac{k}{2} \right]_c + \left[\frac{k+1}{2} \right] d$ $\overrightarrow{B_0A_k} = \overrightarrow{B_kB_0}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k=1,2,3,4$ ， $\{B_k\}$ 與 B_0 必落在一拋物線上，拉動 A_4 ，依 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = c:d:m$ 不同比例產生不同二次曲線。

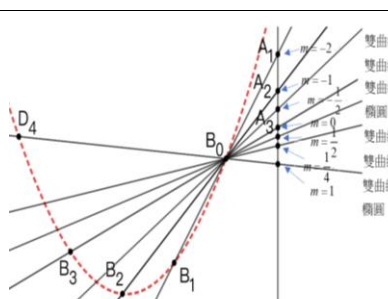
Theorem 4: 取一矩形的一組對邊中點為線束中心，其內中線和邊上的線段之等分點來生成兩個線束，可以透過矩形的大小，與對應線束的交點，生成特定的圓、橢圓和雙曲線。

Theorem 5: 藉由改變兩線束的相對位置與基線的特定夾角來生成特定的二次曲線。

Theorem 6: 藉由改變兩線束的相對位置與兩基圓上點的角度關係生成特定的二次曲線。

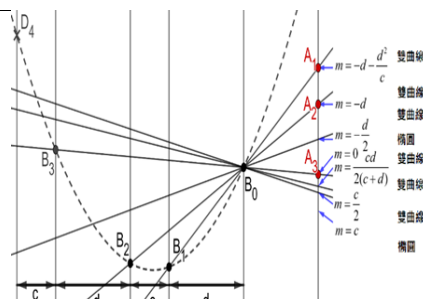


Theorem 1 拉拉 move 法



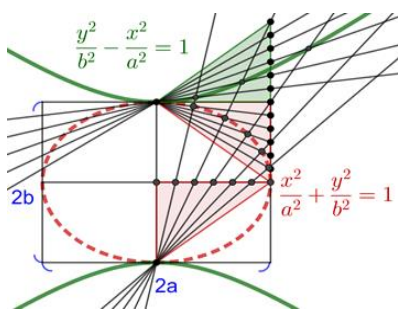
Theorem 2 點列 1234Shoot 法

投射倍率 1:2:3:4

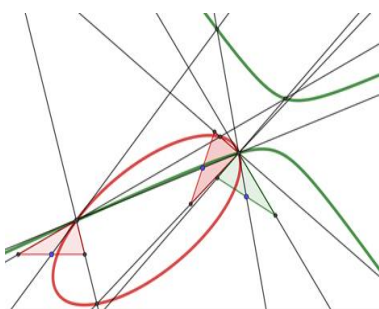


Theorem 3 交錯等距拉拉 move 法

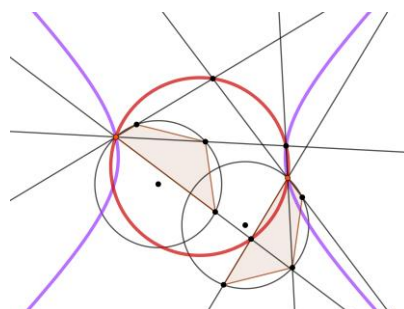
投射倍率 $d:(d+c):(2d+c):(2d+2c)$



Theorem 4 雙線束 Shoot 法



Theorem 5 全等三角形 Shoot 法



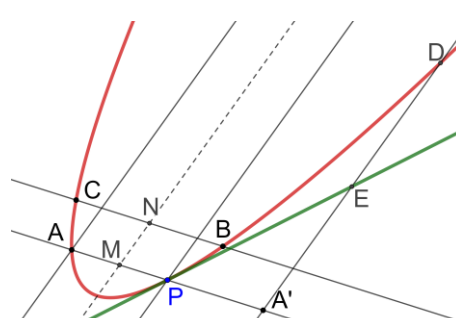
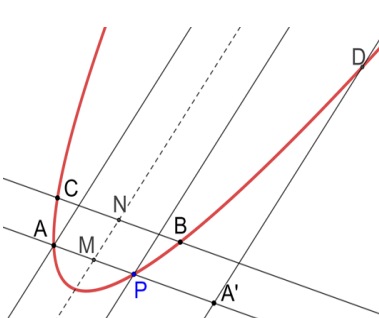
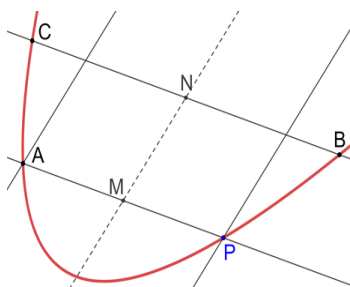
Theorem 6 雙基圓 Shoot 法

陸、討論

一、研究應用

應用 1. 作過拋物線上「任意點」 P 的切線

- ① 作出平行軸方向的直線：在 Γ 上作平行弦 $\overline{PA} // \overline{BC}$ ，分別取其中點 M 、 N 連線，得 $\overline{MN}$ 。
- ② 作 A 對 P 的對稱點 A' ，作過 A' 且平行 $\overline{MN}$ 的直線，其交拋物線於 D 。
- ③ 作 A' 、 D 中點 E 並連線 P 、 E ，則 $\overline{PE}$ 為拋物線過 P 的切線。

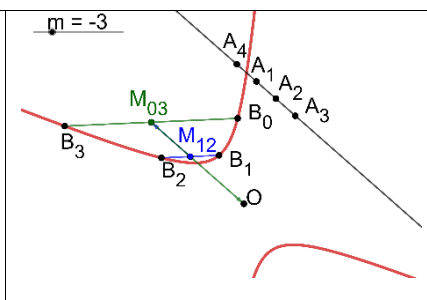
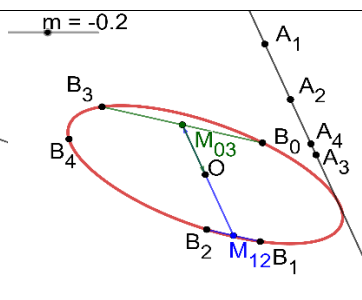
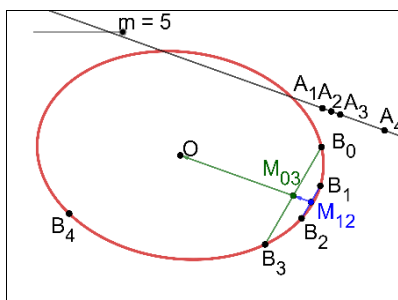


< proof > 將 P 點視為 B_0 ， A 點視為 B_1 ，則 $\overline{A'D}$ 為 A 點列且 A' 可視為 A_1 ， D 可視為 A_1 。因

此 E 可視為 A_0 ，由 Proposition 4. 可知 $\overline{A_0B_0}$ 為切線，即 $\overline{EP}$ 為 Γ 過 P 的切線。#

應用 2. 可透過中點連線段與神奇比例來定圓錐曲線中心：

【GGB 測試】 $\overrightarrow{M_{03}O}$ 與 $\overrightarrow{M_{12}M_{03}}$ 的比值：



$m=5$ $\overline{M_{03}O}=12.75$, $\overline{M_{12}M_{03}}=2$ $\frac{\overrightarrow{M_{03}O}}{\overrightarrow{M_{12}M_{03}}}=\frac{12.75}{2}=6.375=\frac{2 \times 5^2+1}{2 \times 5-2}$	$m=-0.2$ $\overline{M_{03}O}=1.8$, $\overline{M_{12}M_{03}}=4$ $\frac{\overrightarrow{M_{03}O}}{\overrightarrow{M_{12}M_{03}}}=-\frac{1.8}{4}=-0.45=\frac{2 \times (0.2)^2+1}{2 \times (0.2)-2}$	$m=-3$ $\overline{M_{03}O}=4.75$, $\overline{M_{12}M_{03}}=2$ $\frac{\overrightarrow{M_{03}O}}{\overrightarrow{M_{12}M_{03}}}=-\frac{4.75}{2}=-2.375=\frac{2 \times (-3)^2+1}{2 \times (-3)-2}$
---	---	--

Theorem 7. 考慮滿足 $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}=1:1:m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及投射中心 $B_0 \notin l$, 以 $k \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$, $k=1,2,3,4$, $m \in \mathbb{R}$, 由 $\{B_k\}$ 與 B_0 構出的圓錐曲線會滿足 $\frac{\overrightarrow{M_{03}O}}{\overrightarrow{M_{12}M_{03}}} = \frac{2m^2+1}{2m-2}$, 其中 O 為圓錐曲線的中心。(定義拋物線中心於無窮遠處)

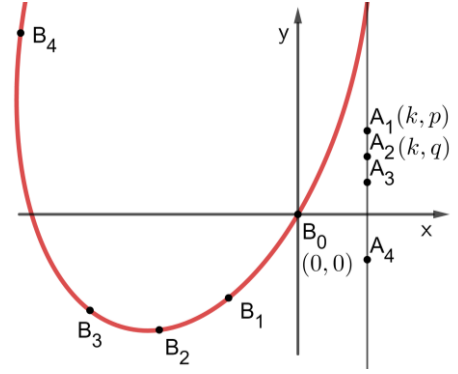
<proof> 設 B_0 為原點 , $A_1(k, p)$ 、 $A_2(k, q)$,

由 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}=1:1:m$, $m \in \mathbb{R}$, 得 $A_3(k, 2q-p)$,

$A_4(k, (2+m)q-(1+m)p)$, 又因投射倍率為 1、2、3、4 倍 ,

可知 $B_1(-k, -p)$ 、 $B_2(-2k, -2q)$ 、 $B_3(-3k, 3p-6q)$ 、

$B_4(-4k, 4(1+m)p-4(2+m)q)$,



因只有 A_4 在移動 , 由 Proposition 1. 可知 $\overline{B_1B_2} // \overline{B_0B_3}$,

再使用 Lemma 2 圓錐曲線平行弦中點連線性質 , 得到 O 之 x 座標為 $\frac{-k-2k}{2} = -\frac{3}{2}k$,

將 $\{B_k\}$ 代入二次曲線一般式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$,

$$\begin{cases} Ak^2+Bkp+Cp^2-Dk-Ep=0 \\ 4Ak^2+4Bkq+4Cq^2-2Dk-2Eq=0 \\ 9Ak^2+9Bk(2q-p)+9C(2q-p)^2-3Dk-3E(2q-p)=0 \\ 16Ak^2+16Bk[(2+m)q-(1+m)p]+16C[(2+m)q-(1+m)p]^2-4Dk-4E[(2+m)q-(1+m)p]=0 \end{cases} ,$$

又因圓錐曲線方程式可寫成 $A(x-u)^2+B(x-u)(y-v)+C(y-v)^2+f=0$, 其中 (u, v) 為中心 O 之座標 , 即 $Ax^2+Bxy+Cy^2+(-2Au-Bv)x+(-2Cv-Bu)y+Au^2+Cv^2+Buv+f=0$,

比較係數可得 : $2Au+Bv=-D$, 因為 $u=-\frac{3}{2}k$, 所以 $v=\frac{-D+3Ak}{B}$.

$$\begin{cases} Bkp+Cp^2-Dk-Ep=-Ak^2 \\ 4Bkq+4Cq^2-2Dk-2Eq=-4Ak^2 \\ 9Bk(2q-p)+9C(2q-p)^2-3Dk-3E(2q-p)=-9Ak^2 \\ 16Bk[(2+m)q-(1+m)p]+16C[(2+m)q-(1+m)p]^2-4Dk-4E[(2+m)q-(1+m)p]=-16Ak^2 \end{cases} ,$$

利用克拉瑪公式可得 :

$$\Delta = 48k^2(q-p)^2(4m^2q^2 + 6mq^2 - 4q^2 - 8m^2pq - 8mpq + 4pq + 4m^2p^2 + 3mp^2 - p^2),$$

$$\Delta_B = -96Ak^3(m-1)(q-p)^2(2q-p),$$

$$\Delta_D = 96Ak^3(q-p)^3(2m^2q + 3mq - 2q - 4m^2p - 3mp + p),$$

$$\text{代入 } v = \frac{-D+3Ak}{B} = \frac{-\Delta_D+3Ak\Delta}{\Delta_B} = \frac{-4m^2q-6mq+4q+4m^2p+3mp-p}{2m-2},$$

$$\text{因此 } O(-\frac{3}{2}k, \frac{-4m^2q-6mq+4q+4m^2p+3mp-p}{(2m-2)}), \text{ 所以 } \overrightarrow{M_{12}M_{03}} = (0, \frac{3p-6q}{2} - (-\frac{p-2q}{2})) = (0, 2(p-q)),$$

$$\overrightarrow{M_{03}O} = (0, \frac{-4m^2q-6mq+4q+4m^2p+3mp-p}{2m-2} - (\frac{3p-6q}{2})) = (0, \frac{2(p-q)(2m^2+1)}{2m-2}),$$

$$\overrightarrow{M_{03}O} : \overrightarrow{M_{12}M_{03}} = (\frac{2(p-q)(2m^2+1)}{2m-2}) : 2(p-q) = \frac{2m^2+1}{2m-2} : 1 = (2m^2+1) : (2m-2).$$

當 $m=1$ ，則 $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} = 1:1:1$ ，得出對應的 $\{B_k\}$ 會構成拋物線，此時 $\frac{\overrightarrow{M_{03}O}}{\overrightarrow{M_{12}M_{03}}} = \frac{2m^2+1}{2m-2}$ 之

分母為 0，可視為拋物線中心於無窮遠處。故此結論於求「三種圓錐曲線」中心皆會成立！#

應用實例 給定一滿足 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1:1:(-4)$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心

$B_0 \notin l$ ，利用 $k \overrightarrow{A_k B_0} = \overrightarrow{B_0 B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=1}^4$ ，作出由 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 與 B_0 構出之雙曲線 Γ 的中心。

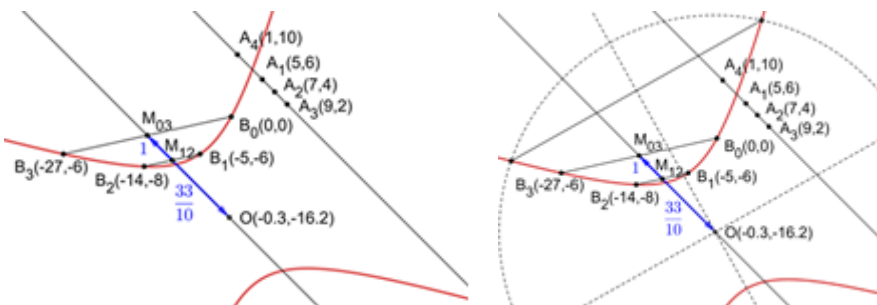
<已知>任取不共線三點 A_1 、 A_2 、 B_0 ：假設 $A_1(5,6)$ 、 $A_2(7,4)$ 、 $B_0(0,0)$ ，

<作法>

①由投射比例，得 $A_3(9,2)$ 、 $A_4(1,10)$ 、 $B_1(-5,-6)$ 、 $B_2(-14,-8)$ 、 $B_3(-27,-6)$ ，

②利用中點連線段特殊比例性質：可知 $\overrightarrow{M_{12}M_{03}} : \overrightarrow{M_{03}O} = 1 : (-\frac{33}{10})$ ，利用分點公式作出

$M_{03}(-\frac{27}{2}, -3)$ 與 $M_{12}(-\frac{19}{2}, -7)$ ，並將 $\overrightarrow{M_{12}M_{03}}$ 伸縮 $-\frac{33}{10}$ 倍，得到 Γ 的中心為 O 點 $(-\frac{3}{10}, -\frac{81}{5})$ 。#



<驗證>以圓錐曲線中心

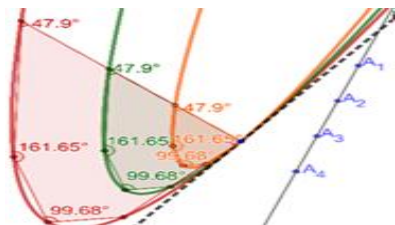
O 為圓心，適當長為半徑作圓，交 Γ 於四點，作出貫軸、共軛軸，確定 O 點確實為此雙曲線之中心。

應用結論：一般要得到圓錐曲線中心，要不是透過伸縮平移方程式經過大量運算而得，就是要先有圓錐曲線圖形，透過平行弦中點連線作圖得到。由我們的『中點連線段特殊比例性質』，卻不必描繪出曲線圖形，直接透過『分點公式』輕鬆計算而得！

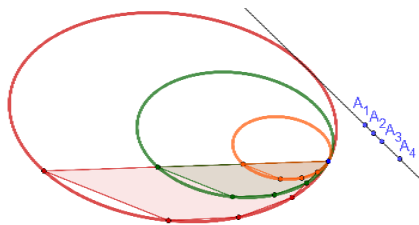
應用 3. 固定一點列，若伸縮倍率成比例，則可製造相似的圓錐曲線：

考慮滿足 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1 : n : m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用

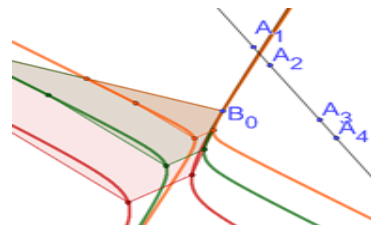
$k \overrightarrow{A_k B_0} = \overrightarrow{B_0 B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k = \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \frac{3}{r}, \frac{4}{r}$ ， $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ ，由 $\{B_k\}$ 構之圓錐曲線彼此相似。



$n = m = 1$ 3 梯五點形相似



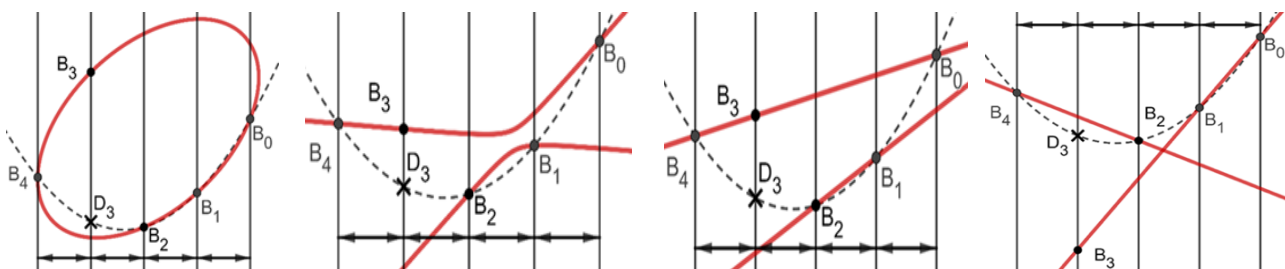
$m > n = 1$ 1 梯五點形相似



$n > m = 1$ 0 梯五點形相似

二、延伸性質討論

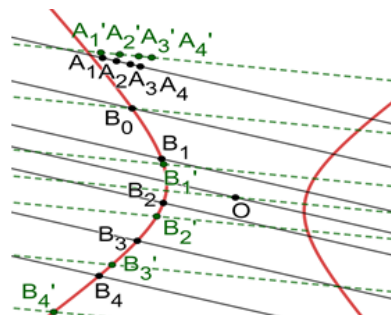
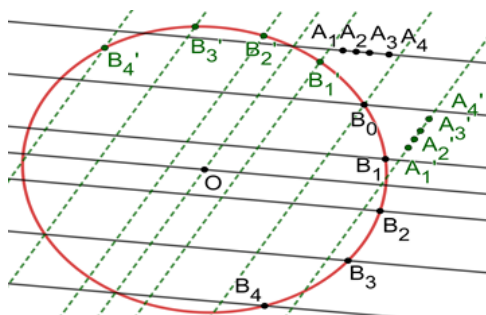
(一) 拉拉 move 法只需固定其中任意四點拉動第五個點：在研究 Theorem 1 時，發現不一定要移動 B_4 ，只要固定四點移動第五個點也會有類似的結論，下表是移動 B_3 的部分結果：



(二) 利用「等腰」簡化全等雙線束：我們發現在非等腰三角形與等腰三角形的情形在正對應的部分是相同的，是因為 $\triangle A_1A_2P_A \cong \triangle A_3A_2P_A$ ， $\triangle L_1L_2P_L \cong \triangle L_3L_2P_L$ ，導致未翻正對應和翻逆對應的結果相同，而翻正對應和未翻逆對應的結果相同，也就是完全避免掉「逆對應」的討論。

(三) 固定投射倍率，任意圓錐曲線反作 A 點列不唯一：

在 Theorem 2 中，一個 A 點列恰可投射出唯一的圓錐曲線，引起我們思考『去除對稱性後，給定圓錐曲線後可以對應得唯一的 A 點列嗎？』、『投射中心 B_0 固定，A 點列唯一嗎？』



<作法> 1° 作一過中心 O 之直線 L 。

2° 取適當距離，依序作直線 L_m 平行 L ，對於 $m=1,2,3$ 滿足 $L // L_m$ 且

$d(L_{m-1}, L_m) = d(L_m, L_{m+1})$ ，且 L_k 分別與圓錐曲線相交於 B_k ， $k=0,1,2,3,4$ 。

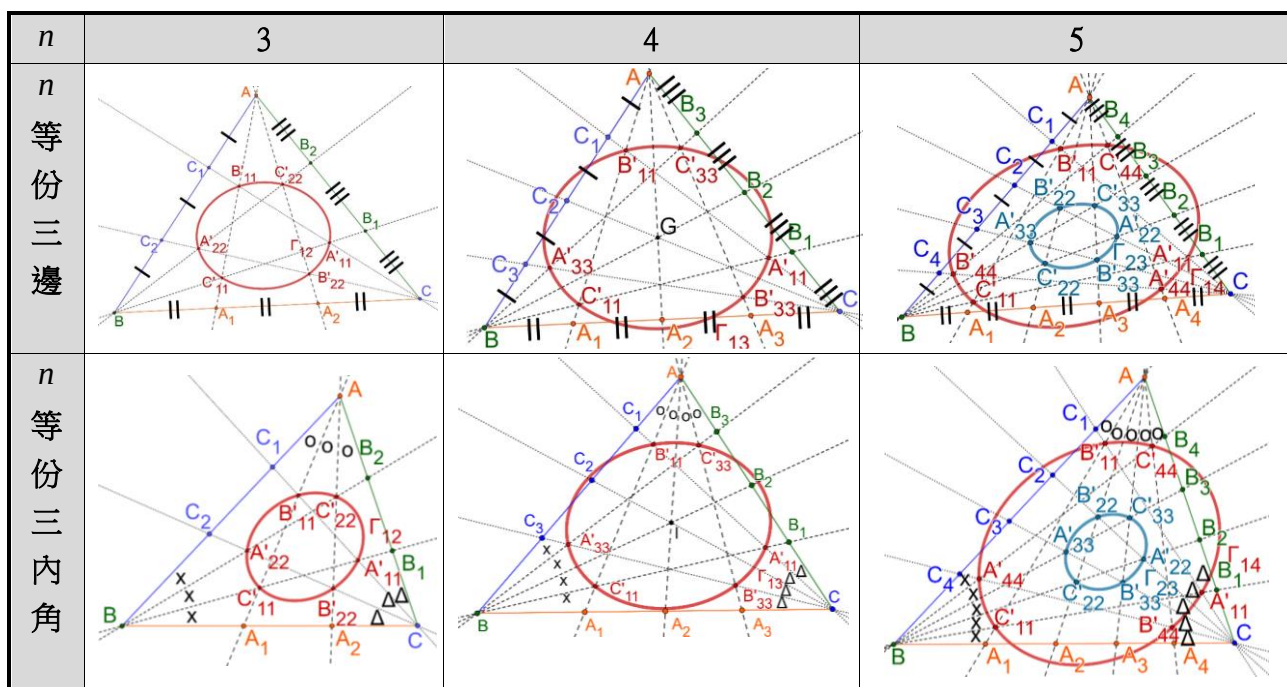
3° 將 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 ，對 B_0 分別投射 1 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 倍，得 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 。

在上述過程中，我們並未給定直線 L 之斜率和平行線間的距離，所以很顯然地，即使固定投射中心 B_0 與投射倍率 $1:2:3:4$ ，得出的 A 點列不唯一。#

三、未來展望---三線束對應的交點

由 Proposition 7. 可得雙線束原始對應的條件可鬆綁通過線束中心的條件，投出的二次曲線結果大致不會改變，僅當出現退化型時，結論會改變。以翻正對應為例，原本包含線束中心的兩相交直線，卻成了不包含線束中心的一直線，若視其為二重合直線，更完善了全部的二次曲線製造法。

接著，我們把原本的雙線束推廣到三線束，並定義三線束對應條件來觀察『六個』交點所決定的二次曲線，多數情況六個交點無法共二次曲線，僅符合下列對應時『六個』交點會共橢圓。



Theorem 8. $n \geq 3$ ，任意給定非正三角形 $\triangle ABC$ ，以頂點 A 、 B 、 C 分別作為線束中心，令三線束的對應方式為 $\overrightarrow{XX_k}$ 、 $\overrightarrow{YY_k}$ 的交點為 Z'_{kk} ， $X_k \in \overrightarrow{YZ}$ 且 (X, Y, Z) 為 (A, B, C) 的輪流置換，若 $\overrightarrow{AA_k}$ 、 $\overrightarrow{BB_k}$ 、 $\overrightarrow{CC_k}$ 滿足下列對應條件之一，則 A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 $A'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $B'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $C'_{(n-k)(n-k)}$ 會共橢圓 $\Gamma_{k,(n-k)}$ 。(規定 $\Gamma_{k,(n-k)} = \Gamma_{(n-k),k}$)

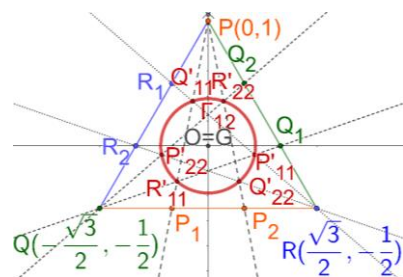
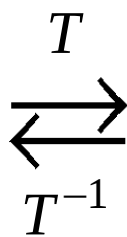
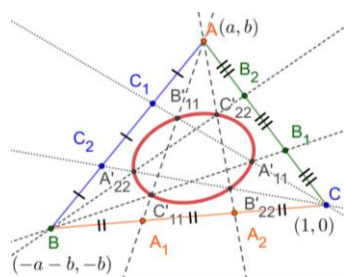
$$(1) \angle A_k AB = \frac{k}{n} \angle CAB, \angle B_k BC = \frac{k}{n} \angle ABC, \angle C_k CA = \frac{k}{n} \angle BCA, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$(2) \overrightarrow{BA_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{AB}, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

< proof of 三邊 n 等份線交點 > (1) $n = 3$ ：不失一般性，任意給定重心 G 在 $(0,0)$ 的 $\triangle ABC$ ， $A(a,b)$ 、 $B(-a-1,-b)$ 、 $C(1,0)$ ，其中 $b \neq 0$ ，設 $\triangle ABC$ 經由線性變換 T 變為正三角形 $\triangle PQR$ ，滿足 $P(0,1)$ 、 $Q(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 、 $R(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ，且 $A \xrightarrow{T} P$ 、 $B \xrightarrow{T} Q$ 、 $C \xrightarrow{T} R$ ， M 為 T 對應到的方陣。正三角形 $\triangle PQR$ 用三邊 n 等份線的對應方式，顯然，六個對應交點會共圓。因為線性變換 T 顯然可逆，所以 T 的逆變換會把圓送至二次曲線，封閉曲線經過線性變換後仍然是封閉曲線，所以可以確定變換回去的 Γ 只可能是圓或橢圓。

經由計算 $M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}a}{2b} \\ -1 & \frac{a+2}{2b} \end{bmatrix}$ ，可表示成 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ ，即 M 為推移變換與伸縮

變換的合成，則 Γ 顯然為橢圓。#



(2) $n \geq 3$ ：因為對稱性，正三角形 $\triangle PQR$ 中 A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 $A'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $B'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $C'_{(n-k)(n-k)}$ 一定會共圓，我們可以透過孟氏定理快速得到對應點在線段上的比例以及 $\triangle ABC$ 映至 $\triangle PQR$ 之線性變換，再利用類似 $n = 3$ 的證明方式就可以得到結論。

Remark 2.

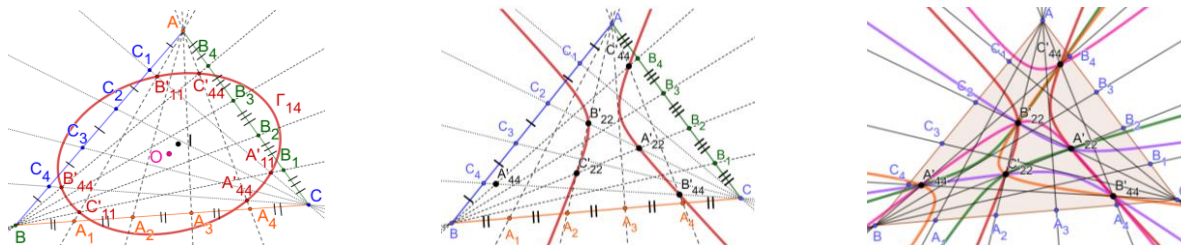
1.內角 n 份線交點構成的橢圓 Γ 中心與 $\triangle ABC$ 的內心不共點：

給定 $\triangle ABC$ ，以內角 n 等份線對應交點構成橢圓 Γ ，則 Γ 的中心 O 與 $\triangle ABC$ 的內心 I 不共點。

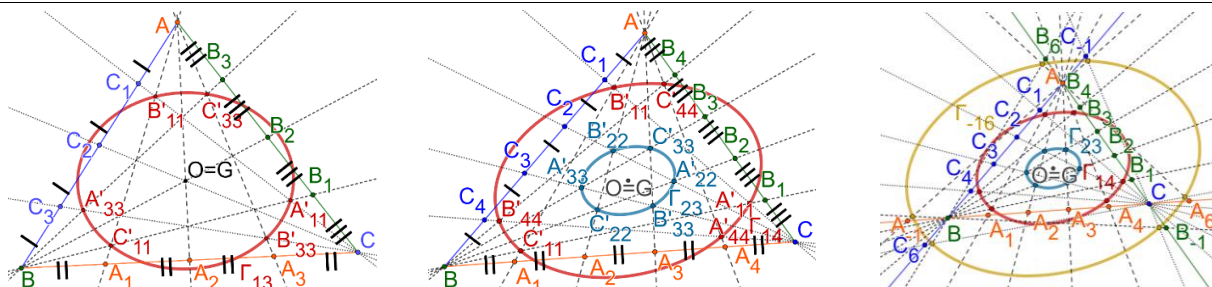
2. 在 n 等份三線束的對應方式下，不管是等份邊或角，若 $k+t \neq n$ ，則 A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 A'_{tt} 、 B'_{tt} 、 C'_{tt} 六點不共二次曲線， $k, t \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ， $k < t$ 。

例. 以 $n=5$ 等份邊為例，如下圖，① A'_{11} 、 B'_{11} 、 C'_{11} 、 A'_{44} 、 B'_{44} 、 C'_{44} 六點必共橢圓，

② A'_{22} 、 B'_{22} 、 C'_{22} 、 A'_{44} 、 B'_{44} 、 C'_{44} 六點無法共一個二次曲線，除 A'_{44} 外，其他共雙曲線。



Proposition 8. 由 n 等份邊對應的橢圓 $\{\Gamma_{k,(n-k)} \mid k \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ 且 } k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ 會共中心 O ，且 O 亦為 $\triangle ABC$ 的重心 G ，其中 $n \geq 3$ 。(以 5 等分為例: Γ_{14} 、 Γ_{23} 、 Γ_{-16} 中心和 $\triangle ABC$ 重心會共點)



< proof > 因為原點經過線性變換後還是會送到原點，所以其中心不會改變。 #

柒、結論

我們的研究主要是提供製造圓錐曲線的新方法。第一，是在五條平行線上，利用三梯五點形製造拋物線，再固定其中四點，移動第五個點來製造二次曲線；第二，利用一點列與投射點，再加上特定投射倍率，可以製造出各特定圓錐曲線，而在這種製造方式中，我們還得到非常神奇的『定中心的比例』，不用透過旋轉與平移，只需利用分點公式就可以輕鬆得到曲線中心，另外，還得到製造拋物線切線、定焦點的快速方法；第三，對極度複雜的二線束中心、二基線、二基圓的相對位置與對應方式來作分類二次曲線。最後，我們定義出三線束的對應方式，發現有六點共橢圓性質，未來，我們希望能對 n 個線束對應再做更進一步的探討。

捌、參考資料及其他

1. 朱德祥、朱維宗(2007)。高等幾何。高等教育出版社。
2. (德)德里(1982)。100 個著名初等數學問題。凡異出版社。

【評語】 050401

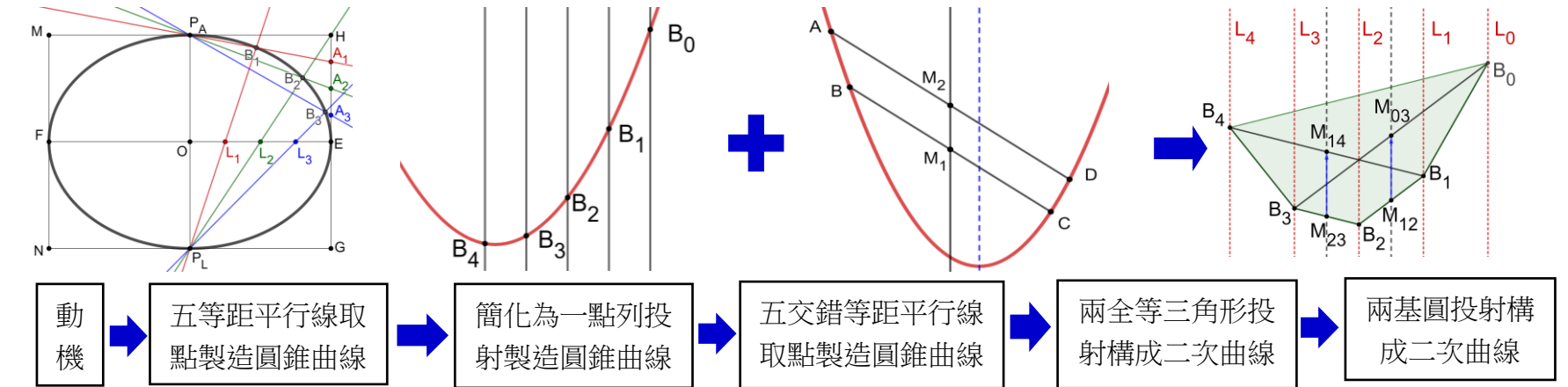
本作品藉由觀察圓錐曲線的一些平行弦性質，反推構造出圓錐曲線。先假設5條等距平行線為直角坐標系上的鉛直線，並定出五個點的座標，再代入二次曲線的一般式。利用判別式來斷定橢圓、雙曲、拋物的類型。此為定理一。其他構造方式，如定理二、定理三皆源自於定理一，基本原理相仿，但加以推廣或簡化。定理四、五、六為使用兩線束的方式來構造圓錐曲線，定理四其實才是真正「原題」的推廣。然而由於狀況複雜，作品僅討論幾種自訂的特殊狀況。且多半基於圖形觀察，詳細証明常常一語帶過，但仍可以看出証明技巧和定理一雷同，並未使用到較為巧妙的技巧。本作品利用平行線性質構造圓錐曲線的想法有創意，可惜的是並未真正比較出各種作法的特色，也未提及要如何構造出已給定類型的圓錐曲線，若是能透過射影幾何的觀點，也許能夠讓作品更完善。

摘要

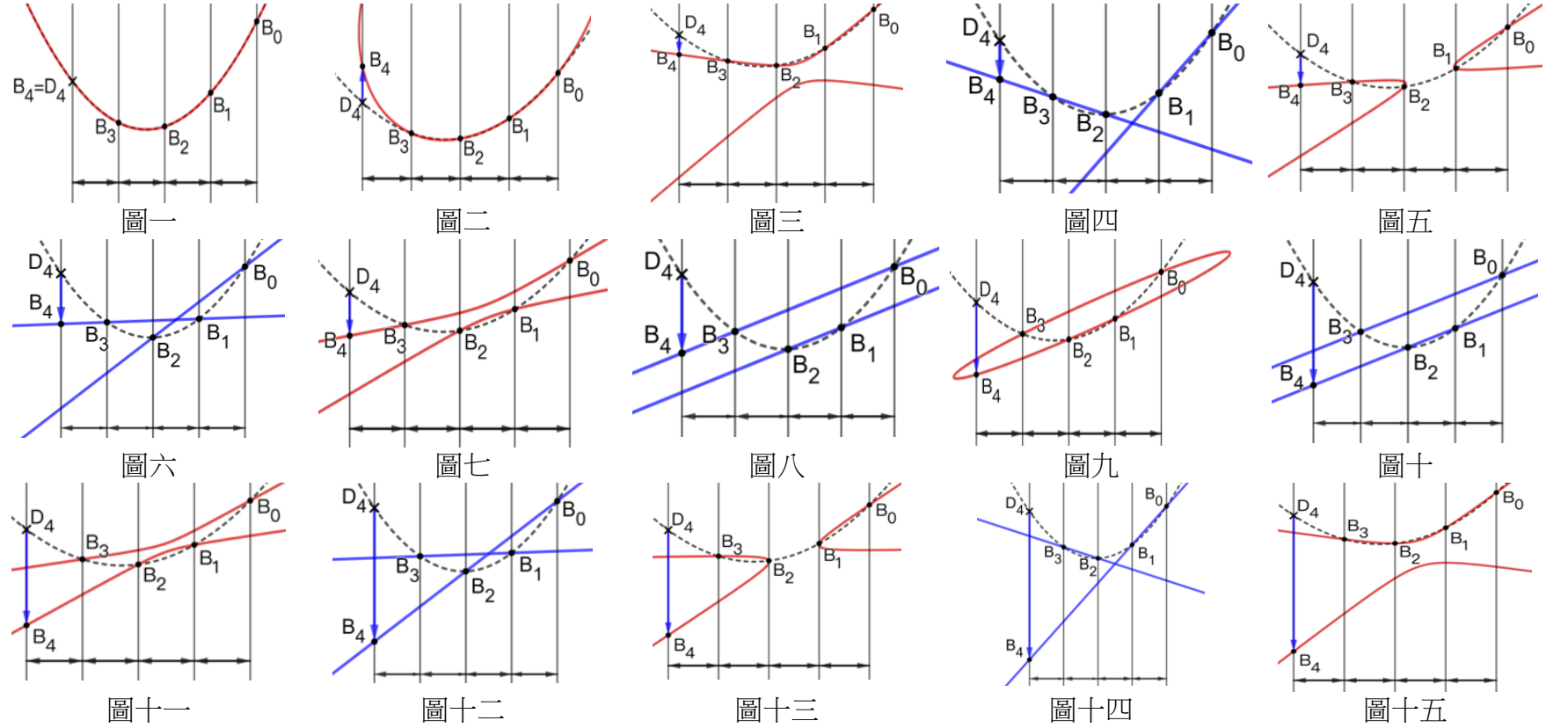
本研究主要提出新的圓錐曲線製造方法。首先，若 $B_0B_1B_2B_3B_4$ 為三梯五點形，則其頂點必落在一拋物線 Γ 上，且 $B_0、B_1、B_2、B_3、B_4$ 也會落在與拋物線 Γ 的軸平行的五條等距平行線上，當固定其中四點而改變其中一點在平行線上的位置時，則會出現橢圓、雙曲線、二相交直線與二平行直線。第二，由一個點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 往平面上一點 B_0 投射，滿足 $\overrightarrow{B_kB_0}=k\cdot\overrightarrow{B_0A_k}$ 得 B_k ， $k=1,2,3,4$ ，依 $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}$ 的不同比例， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 會落於不同二次曲線上。第三，我們分別分類兩個線束基線夾角與線束中心在平面上的相對位置、兩個基圓上點與點的角度與圓心的相對位置，用以製造各式的二次曲線。最後，我們定義了三個線束特定的對應方式，得到六個對應點共橢圓的性質。未來，我們希望能探討更多個線束的對應結果。

研究動機

當初在課堂上看到一個題目，有一矩形，以兩長邊中點為投射點，並將 $\overline{OA}$ 與 $\overline{EA}$ 切為4等分，對應線交點連同投射點會位於一橢圓上，因此引發了我們的好奇心。



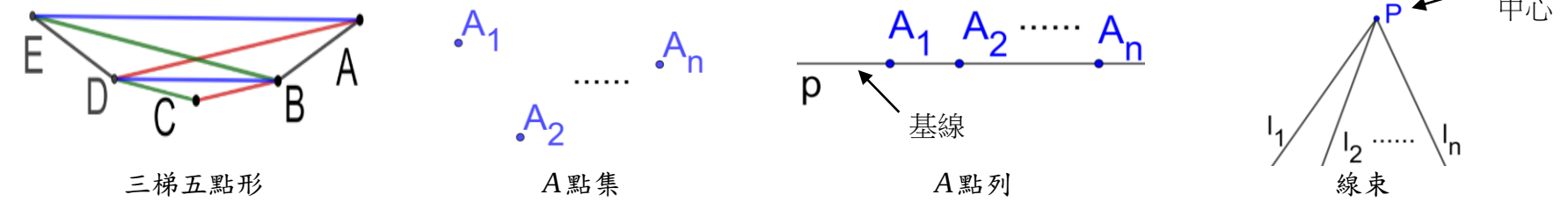
GGB 測試



研究方法與過程

I. 定義

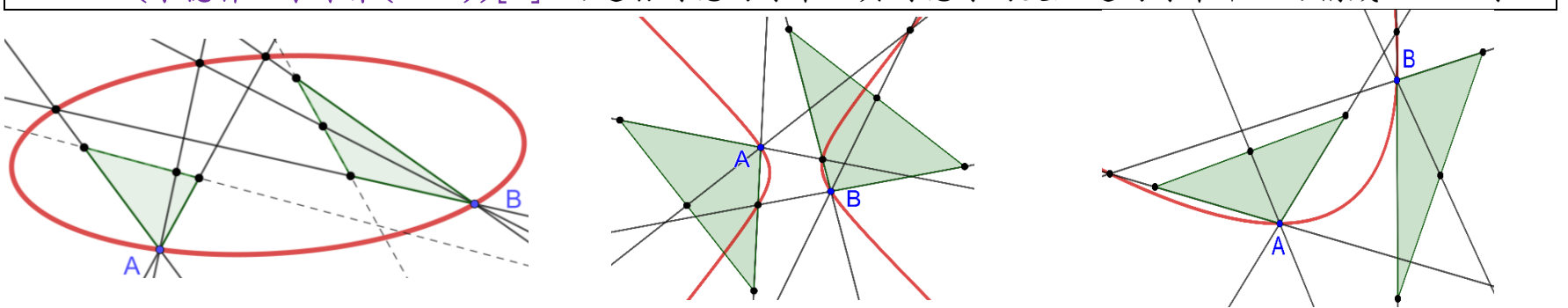
1. n 梯五點形：五邊形 $ABCDE$ 中，頂點連線恰有 n 組對邊平行，稱其為 n 梯五點形， $n=0,1,2,3$
2. ①考慮平面上 n 個點 $A_1、A_2、\dots、A_n$ ，則以 $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ 或 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 表示，稱之為 A 點集。
② $\{A_k\}_{k=1}^n$ 皆共直線 p ，則記為 $p(A_1,A_2,\dots,A_n)$ 或 $p(A_k)_{k=1}^n$ ，稱為 A 點列，直線 p 稱為此點列的基線。
③若平面上 n 條直線 $l_1、l_2、\dots、l_n$ 皆過點 P ，則稱為線束，記為 $P(l_k)_{k=1}^n$ ，點 P 稱為線束中心。



II. 預備定理

Lemma 1: 圓錐曲線上的平行弦中點連線，拋物線平行於軸，橢圓和雙曲線會過中心

Lemma 2(朱德祥、朱維宗(2007))[1]:兩透射對應的線束，其對應線的交點連同線束中心可構成二次曲線。



Lemma 3: 二次曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 中，判別式： $H=a+c$ ； $\delta=b^2-4ac$ ； $\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$			
	$\delta<0$	$\delta=0$	$\delta>0$
$\Delta=0$	一點	①若 $d^2+e^2>4(a+c)f$ 為兩平行線 ②若 $d^2+e^2=4(a+c)f$ 為兩重合直線 ③若 $d^2+e^2<4(a+c)f$ 為空集合	兩相交直線
$\Delta\neq 0$	① $H\cdot\Delta>0$ 空集合 ② $H\cdot\Delta<0$ 圓或橢圓	拋物線	雙曲線

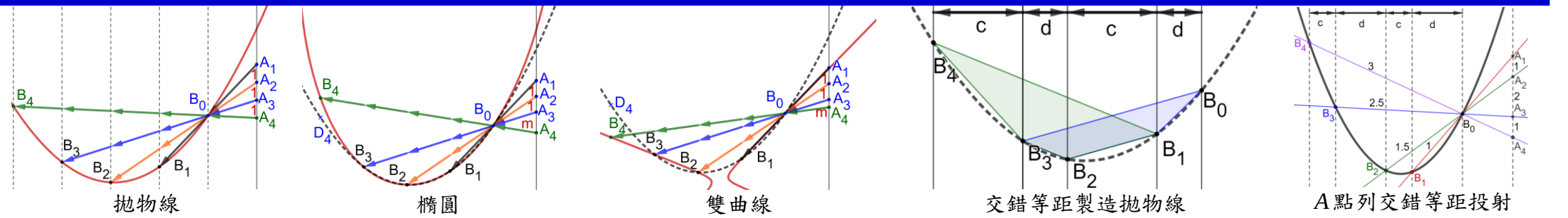
III. 主定理

Theorem 1(拉拉 move 法) $\{L_k | k=0,1,2,3,4\}$ 依序相鄰等距且互相平行, $\{B_k\}_{k=0}^4$ 任三點不共線, 點 $B_k \in L_k$ 滿足四邊形 $B_0B_1B_2B_3$ 為梯形, 其中 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_0B_3}$ 分別為其上底、下底, 且 $B_0B_1B_2B_3D_4$ 為三梯五點形。則下表為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的圓錐曲線:

B_4 位置	$B_4 = D_4$	與拋物線焦點同側	與拋物線焦點異側
$\{B_k\}_{k=0}^4$ 決定的圓錐曲線 Γ	拋物線	橢圓	雙曲線、橢圓

Theorem 2、3 考慮點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$, 利用投射方式得 $\{B_k\}$, 則下表為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的非退化二次曲線:

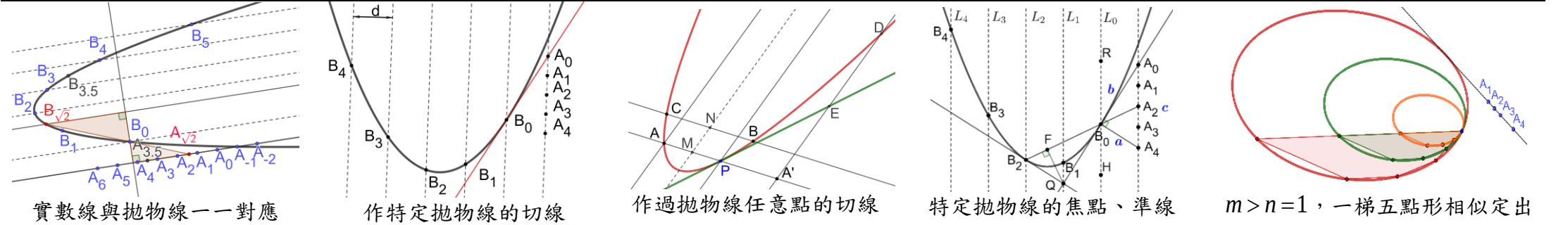
$\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的非退化二次曲線 Γ		拋物線	橢圓	雙曲線
$\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}=1:1:m$	投射方式: $k\cdot\overrightarrow{A_kB_0}=\overrightarrow{B_0B_k}$, $k=1,2,3,4$	$m=1$	$m>1$ 或 $-\frac{1}{2}<m<0$	$0<m<1$ 且 $m<-\frac{1}{2}$, $m\neq\frac{1}{2},\frac{1}{4},-1,-2$
$\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}=c:d:m$	投射方式: $(\left[\frac{k}{2}\right]\frac{c}{d}+\left[\frac{k+1}{2}\right])\cdot\overrightarrow{B_0A_k}=\overrightarrow{B_kB_0}$, $k=1,2,3,4$	$m=c$	$-\frac{d}{2}<m<0$ 或 $m>c$	$m<\frac{-d}{2}$ 或 $0<m<c$, $m\neq\frac{c}{2},\frac{cd}{2(c+d)},-d,(-d-\frac{d^2}{c})$



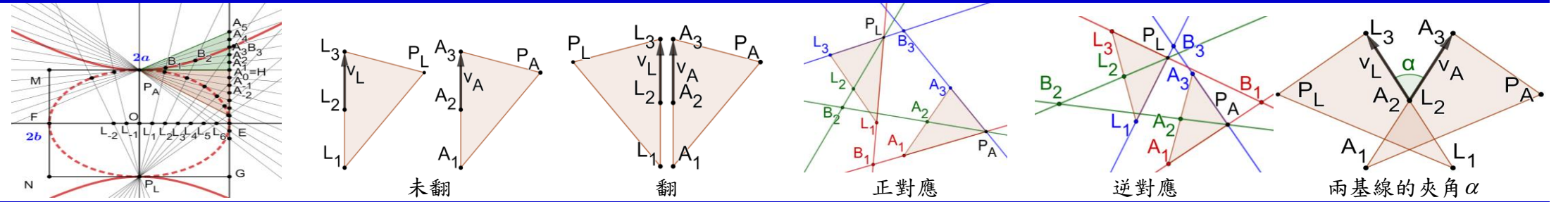
Proposition 1: $\overline{A_0A_1}$ 上取一點 A_k , 以 $\overrightarrow{B_kB_0} = k \cdot \overrightarrow{B_0A_k}$ 作 B_k , $k = \frac{\overrightarrow{A_0A_k}}{\overrightarrow{A_0A_1}}$, $k \in \mathbb{R}$, 則 $\{B_k\}$ 會落在一拋物線上。

Proposition 2: 考慮滿足相鄰等距的點列 $l(A_k)$ 及投射中心 $B_0 \notin l$, 以 $k \cdot \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 得 $\{B_k\}$, $k=0,1,2,3,4$, Γ 為 $\{B_k\}$ 所決定的拋物線, 則:
① $\overline{A_0B_0}$ 為 Γ 過 B_0 的切線, ② 當 $\angle A_0B_0A_4 = 90^\circ$ 時, $\overline{B_0F} : \overline{B_2F} = \overline{B_0A_0}^2 : \overline{B_0A_4}^2$, 其中 F 為 Γ 的焦點。

Proposition 3: 考慮滿足 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1:n:m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$, 以 $k \cdot \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 得 $\{B_k\}$, 若 $k = \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \frac{3}{r}, \frac{4}{r}$ 且 $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, 則由 $\{B_k\}$ 構出之圓錐曲線彼此相似。



Theorem 4(雙線束 Shoot 法) 矩形 $MNGH$ 中, P_A 、 P_L 、 E 、 F 、原點 O 分別為 $\overline{MH}$ 、 $\overline{GN}$ 、 $\overline{HG}$ 、 $\overline{MN}$ 、 $\overline{EF}$ 之中點, 滿足 $\overrightarrow{OL_k} = \frac{k}{n} \cdot \overrightarrow{OE}$ 且 $\overrightarrow{A_0A_k} = \frac{k}{n} \cdot \overrightarrow{A_0A_n}$, B_k 為 $\overline{P_LL_k}$ 與 $\overline{P_AA_k}$ 之交點, $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, 若 $\overline{MH} = 2a$, $\overline{MN} = 2b$, 則 ① 當 $\begin{cases} A_0 = H \\ A_n = E \end{cases}$, $\{B_k\} \in$ 圓或橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ② 當 $\begin{cases} A_0 = M \\ A_n = F \end{cases}$, $\{B_k\} \in$ 雙曲線 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 。



Theorem 5(全等三角形 Shoot 法) 考慮線束 $P_A(A_k)$ 、 $P_L(L_k)$, 且 $P_A \neq P_L$, $\triangle P_AA_1A_3 \cong \triangle P_LL_1L_3$, $\overline{A_kA_{k+1}} : \overline{A_kA_{k-1}} = \overline{L_kL_{k+1}} : \overline{L_kL_{k-1}} = 1:1$, $k=1,2,3$, 令 $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{v_L} = \overrightarrow{L_2L_3}$, α 為 $\overrightarrow{v_A}$ 與 $\overrightarrow{v_L}$ 之夾角, φ 為 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overrightarrow{A_2P_A}$ 之夾角,

① 正對應: $A_k \mapsto L_k$; 逆對應: $A_k \mapsto L_{4-k}$ ② 未翻: $\triangle P_AA_1A_3 \cong \triangle P_LL_1L_3$; 翻: P_L 對 $\overline{L_1L_3}$ 作線對稱得 P_L' , $\triangle P_AA_1A_3 \cong \triangle P_L'L_1L_3$ 。則線束對應交點軌跡如下:

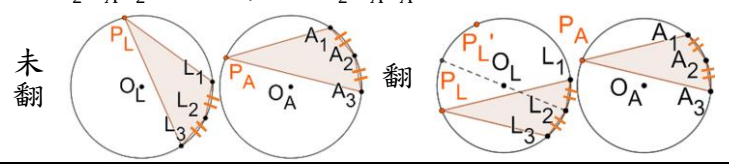
分類	正對應	逆對應
未翻	(1) $\overrightarrow{v_A} \setminus \overrightarrow{v_L}$: 圓 (2) $\overrightarrow{v_A} // \overrightarrow{v_L}$: ϕ 	(5) $\overrightarrow{P_AP_L} \setminus \overrightarrow{v_A}$ 且 $\overrightarrow{P_AP_L} \setminus \overrightarrow{v_L}$: 雙曲線或兩相交直線 (6) $\overrightarrow{P_AP_L} // \overrightarrow{v_A} // \overrightarrow{v_L}$: 兩相交直線
翻	(3) $\overline{P_AB_2} \neq \overline{P_LB_2}$: 雙曲線 (4) $\overline{P_AB_2} = \overline{P_LB_2}$: 兩垂直直線 	(7) $\overrightarrow{v_A} \setminus \overrightarrow{v_L}$: 雙曲線或橢圓或拋物線或兩相交直線或兩平行直線, 當 $\alpha = k\pi - 2\angle P_AA_2A_3, k \in \mathbb{Z}$ 為拋物線或兩平行直線 (8) $\overrightarrow{P_AP_L} // \overrightarrow{v_A} // \overrightarrow{v_L}$: 兩平行直線 (9) $\overrightarrow{P_AP_L} \setminus \overrightarrow{v_A}$ 且 $\overrightarrow{P_AP_L} \setminus \overrightarrow{v_L}$ 且 $\overrightarrow{v_A} // \overrightarrow{v_L}$: 拋物線

Theorem 6(雙基圓 Shoot 法) 四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 和四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ 分別在等圓 O_A 、 O_L 上，兩線束中心分別為 P_A 、 P_L ，且 $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_2 A_3}$ ， $\{A_k\}$ 、 $\{L_k\}$ 分別在兩等圓 O_A 、 O_L 上順時針排列， $k=1,2,3$ ，令 $\angle A_2 O_A L_2 = \alpha$ ， $\varphi = \angle A_2 O_A P_A$ ，

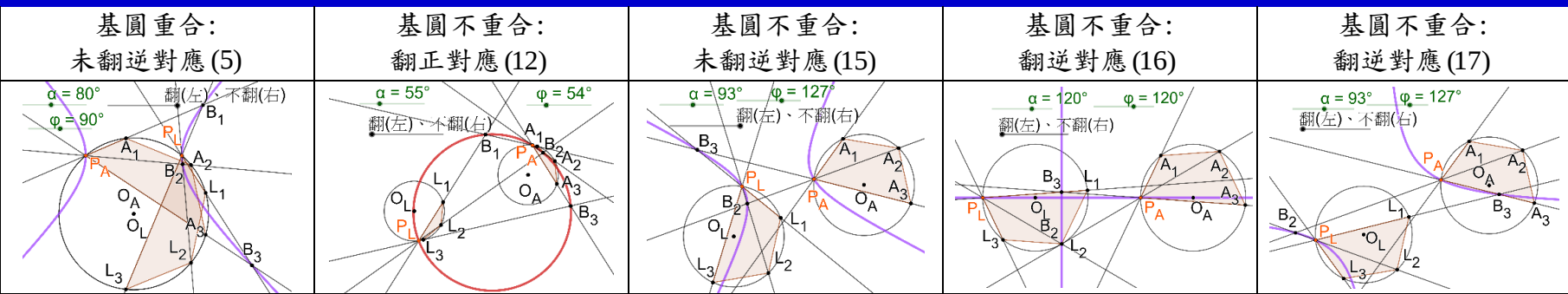
① 正對應： $A_k \mapsto L_k$ ；逆對應： $A_k \mapsto L_{4-k}$ 。

② 未翻：四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3 \cong$ 四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ ；

翻： P_L 對 $O_A A_2$ 作線對稱得 P_L' ，四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3 \cong$ 四邊形 $P_L' L_1 L_2 L_3$ 。

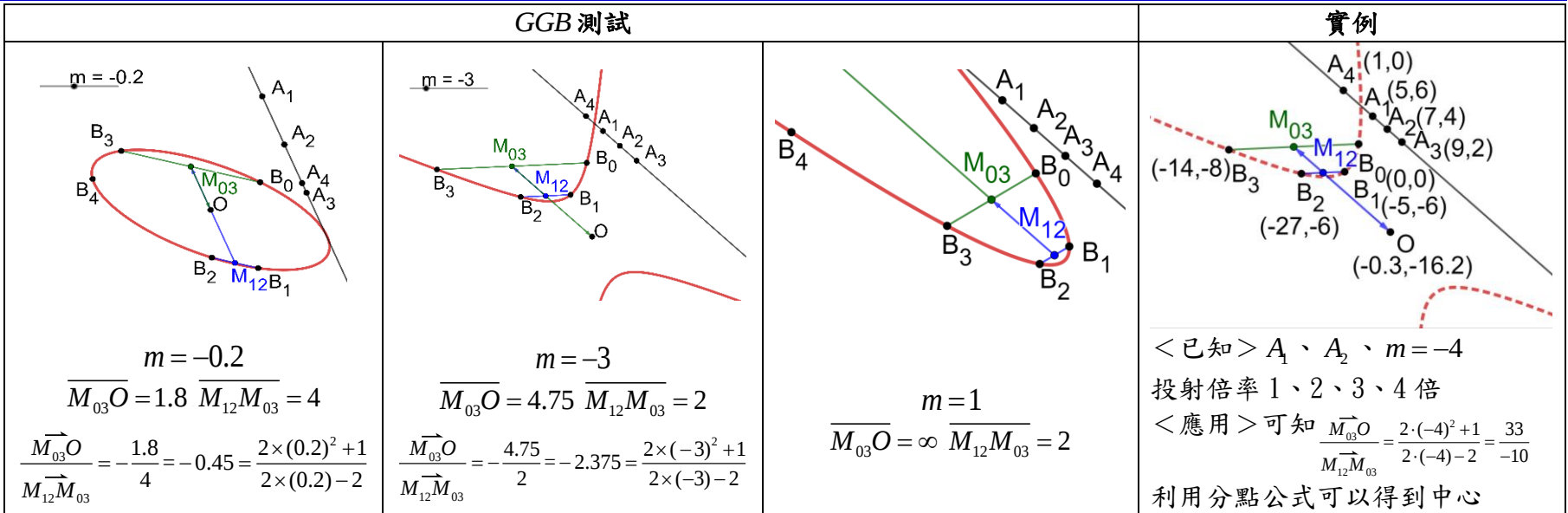


	Case1 雙基圓重合		Case2 雙基圓不重合	
	正對應	逆對應	正對應	逆對應
未翻	(1) $\alpha \neq 0^\circ$ 或 180° : 圓 (2) $\alpha = 0^\circ$ 或 180° : 無圖形	(5) $\varphi \neq 180^\circ$: 等軸雙曲線 (6) $\varphi = 180^\circ$: 兩垂直直線 (7) $\alpha = \varphi$: 無圖形	(10) $\alpha \neq 0^\circ$ 或 180° : 圓 (11) $\alpha = 0^\circ$ 或 180° : 無圖形	(14) $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線 (15) $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 等軸雙曲線
翻	(3) $\alpha + \varphi \neq 180^\circ$: 圓 (4) $\alpha + \varphi = 180^\circ$: 無圖形	(8) $\varphi \neq 180^\circ$: 兩垂直直線 (9) $\varphi = 180^\circ$: 無圖形	(12) $\alpha + \varphi \neq 180^\circ$: 圓 (13) $\alpha + \varphi = 180^\circ$: 無圖形	(16) $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線 (17) $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 等軸雙曲線

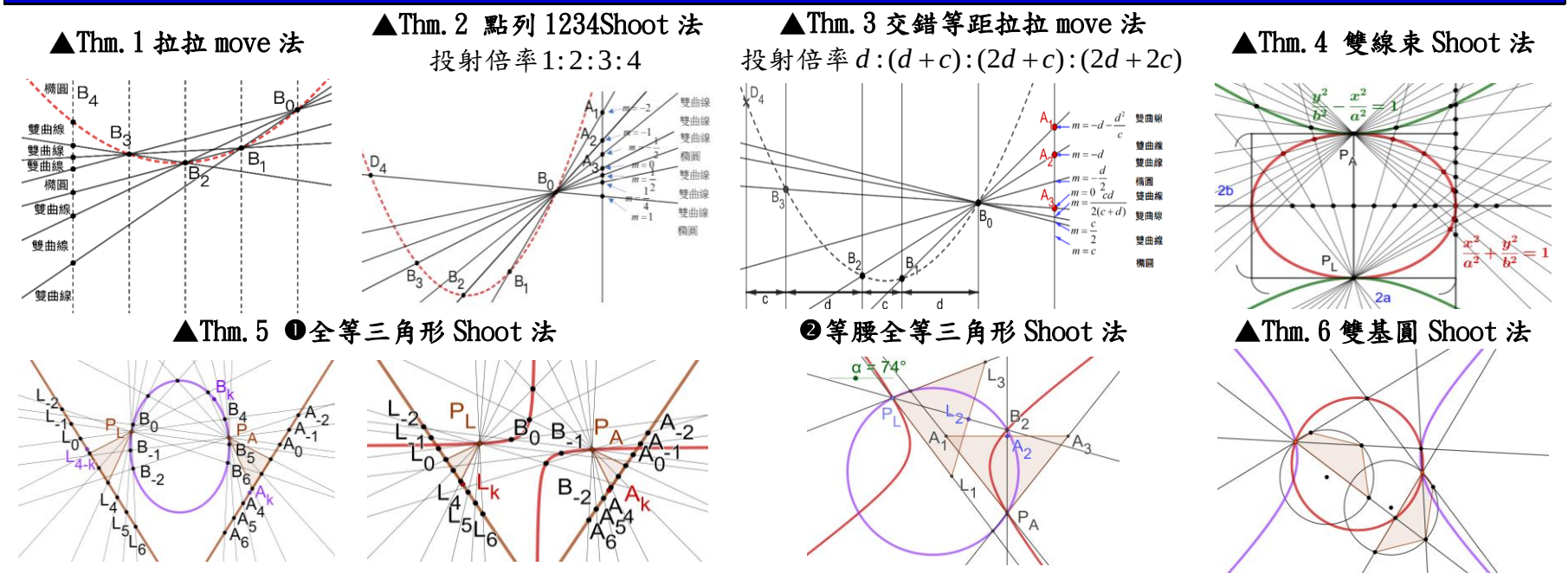


IV. 研究應用

Theorem 7:考慮滿足 $\overrightarrow{A_1 A_2} : \overrightarrow{A_2 A_3} : \overrightarrow{A_3 A_4} = 1:1:m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，以 $k \cdot \overrightarrow{A_k B_0} = \overrightarrow{B_0 B_k}$ 得 $\{B_k\}$ ， $k=1,2,3,4$ ，則 $\{B_k\}$ 構出之圓錐曲線滿足 $\frac{\overrightarrow{M_{03} O}}{M_{12} \overrightarrow{M_{03}}} = \frac{2m^2 + 1}{2m - 2}$ ，其中 O 為圓錐曲線的中心。(定義拋物線中心於無窮遠處)



研究結果



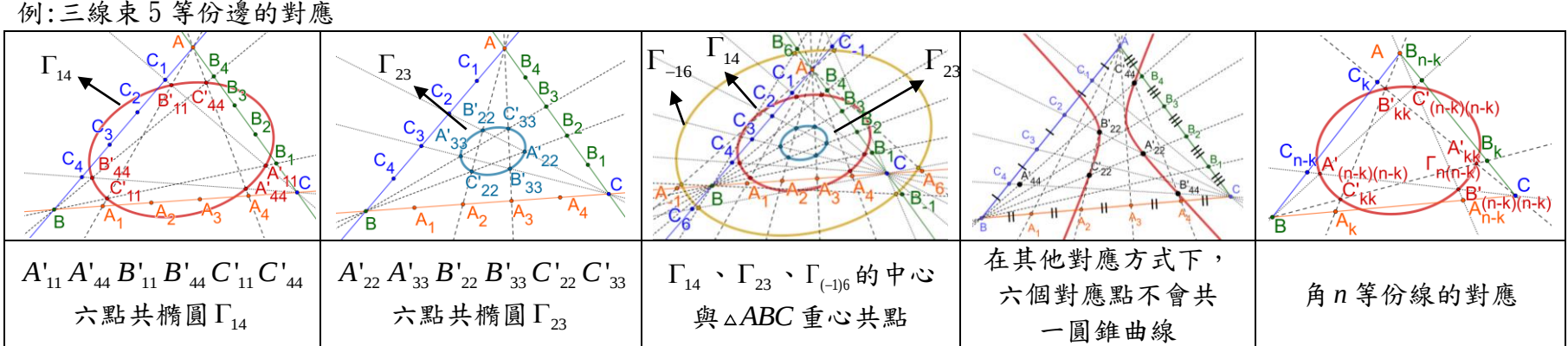
討論與未來展望

▲三線束 Shoot 法 (邊 n 等份線): 任意給定非正三角形 $\triangle ABC$ ，以頂點 A 、 B 、 C 分別作為線束中心，令三線束的對應方式為 $\overline{XX_k}$ 、 $\overline{YY_k}$ 的交點為 Z'_{kk} ， $X_k \in \overline{YZ}$ 且 (X, Y, Z) 為 (A, B, C) 的輪流置換，若 $\overline{AA_k}$ 、 $\overline{BB_k}$ 、 $\overline{CC_k}$ 滿足 $\overline{BA_k} = \frac{k}{n} \overline{BC}$ 、 $\overline{CB_k} = \frac{k}{n} \overline{CB}$ 、 $\overline{AC_k} = \frac{k}{n} \overline{AB}$ ， $k=1,2,...,n-1$ ，則

① A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 $A'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $B'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $C'_{(n-k)(n-k)}$ 會共橢圓 $\Gamma_{k,(n-k)}$ ， $n \geq 3$ 。(規定 $\Gamma_{k,(n-k)} = \Gamma_{(n-k),k}$)

② $\{\Gamma_{k,(n-k)} | k \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ 且 } k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ 會共中心 O ，且 O 亦為 $\triangle ABC$ 的重心 G

例: 三線束5等份邊的對應



參考資料

1. 朱德祥、朱維宗(2007)。高等幾何。高等教育出版社。
2. 黃家禮(2000)。幾何明珠。九章出版社。