中華民國第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030424

圓舞曲-婆羅摩笈多定理推廣至圓或橢圓內接多邊形中之探討

學校名稱：臺北市立內湖國民中學

作者：	指導老師：
國二 林士哲	鄭忠興
國二 彭士鳴	林鳳美

關鍵詞：婆羅摩笈多定理、圓內接多邊形、
橢圓內接多邊形

摘要

圓內接四邊形有一個幾何定理：若圓內接四邊形的兩對角線相互垂直，則連接對角線交點與一邊中點的連線垂直於對邊，稱為婆羅摩笈多定理。

本作品將圓內接四邊形推廣至圓或橢圓內接多邊形的情形，定義其多邊形中若滿足「連接兩垂直對角線交點與一邊中點的連線垂直於對邊，同時連接同一邊垂足點的連線過對邊的中點」，則稱此多邊形為婆羅摩笈多多邊形。

先由兩圓相交關係來建構婆羅摩笈多四邊形，接著從圓內接正多邊形來探討婆羅摩笈多多邊形的建構原則，推導出其邊數及共圓性質，進一步推導出圓內接多邊形的情形。最後探討橢圓內接菱形、鳶形及正方形是否存在婆羅摩笈多定理及其幾何性質，再推廣至橢圓內接多邊形的情形。

壹、研究動機

上數學專題課時，從網路及書籍(參考資料[1]、[2]、[3]與[4])中研讀一些幾何定理，特別對「**婆羅摩笈多定理**」感興趣，於是提出三個問題：「**如何建構婆羅摩笈多四邊形呢？**」、「**婆羅摩笈多定理是否存在於圓內接多邊形呢？**」、「**婆羅摩笈多定理是否存在於橢圓內接多邊形呢？**」為了解決上述三個問題，於是展開我們的研究之旅。

在過程中我們配合國中數學課程中學過的「畢氏定理」、「幾何圖形」、「三角形的基本性質」、「特殊四邊形」、「相似形與相似三角形」及「圓形」等概念來解決問題。

貳、研究目的

一、利用兩圓相交關係來建構婆羅摩笈多四邊形，並且探討其邊長性質。

二、探討正多邊形中兩對角線相互垂直的性質，論證正奇數邊多邊形不存在婆羅摩笈多定理。

三、建構正偶數邊多邊形中的婆羅摩笈多多邊形，進一步探討其邊數及共圓性質。

四、將正偶數邊多邊形的婆羅摩笈多多邊形建構原則推廣至圓內接多邊形中，並且論證之。

五、探討橢圓內接多邊形是否存在婆羅摩笈多定理及其幾何性質，並且論證之。

參、研究設備及器材

筆、紙、電腦、Geogebra5.0 動態幾何繪圖板。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討與名詞定義

印度數學家**婆羅摩笈多** (Brahmagupta，598~660) 在 628 年提出圓內接四邊形的一個幾何定理，稱為**婆羅摩笈多定理** (Brahmagupta Theorem)，詳見參考資料[1]、[2]、[3]與[4]：

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 及 $\overline{A_2A_4}$ 垂直相交於 P，過 P 作直線分別與 $\overline{A_1A_2}$ 、$\overline{A_3A_4}$ 相交於 H 、 M ，(i)若 $\overline{PH} \perp \overline{A_1A_2}$ ，則 $\overline{A_3M} = \overline{MA_4}$ 。

(ii)若 $\overline{A_3M} = \overline{MA_4}$ ，則 $\overline{PH} \perp \overline{A_1A_2}$ 。參見圖 1。

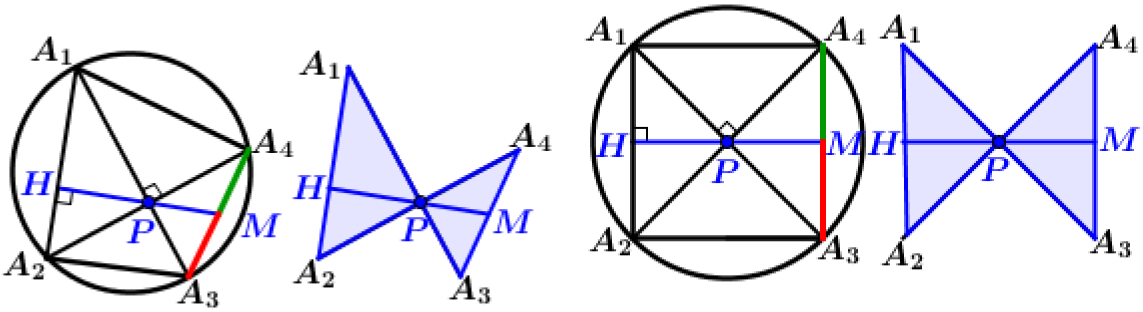


圖 1：婆羅摩笈多定理

【註】**婆羅摩笈多定理**中滿足(i)與(ii)必會有圖 1 中的兩種<u>**蝴蝶的構形**</u>，這乃是推廣至圓內接多邊形或橢圓內接多邊形的重要線索。

【定義 1】(**婆羅摩笈多四邊形**，沈康身[1]、黃家禮[2]、Coxeter[3]、Honsberger[4])

在圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，設 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$ 相交於 P ，若過 P 作直線分別與 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 相交於 H 、 M 且 $\overline{PH} \perp \overline{A_1A_2} \Leftrightarrow \overline{A_3M} = \overline{MA_4}$ ，則稱此四邊形為**婆羅摩笈多四邊形** (Brahmagupta Quadrilateral)，參見圖 1。為了方便，簡稱 $B-$**四邊形**。

【定義 2】(**婆羅摩笈多多邊形**： $B-$**多邊形**)

圓內接四邊形推廣至圓或橢圓內接多邊形的情形，定義其多邊形中若滿足「**連接兩垂直對角線交點與一邊中點的連線垂直於對邊，同時連接同一邊垂足點的連線過對邊的中點**」，則稱此多邊形為**婆羅摩笈多多邊形** (Brahmagupta Polygon)。為了方便，簡稱 $B-$**多邊形**。

本作品推導出並非所有圓或橢圓內接多邊形均滿足**定義 2**，特別是在圓內接正偶邊多邊

形及橢圓內接正方形中可建構 $B-$多邊形，其餘情形是遵循建構原則可得出 $B-$多邊形。

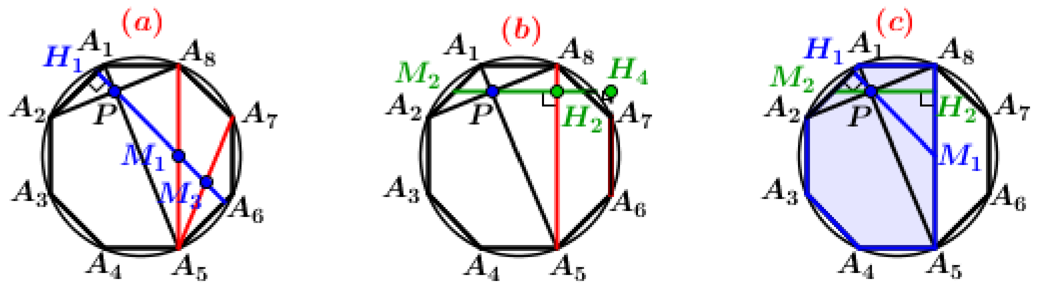


圖 2：定義正八邊形中的 $B-$六邊形

建構 $B-$多邊形中對邊必須保持唯一性，以圓內接正八邊形中 $\overline{A_1A_5}\perp\overline{A_2A_8}$ 交於 P 為例：

(i)過 P 向 $\overline{A_1A_2}$ 作垂直線 $\overleftrightarrow{H_1P}$ 分別交對邊 $\overline{A_5A_8}$ 或 $\overline{A_5A_7}$ 於中點 M_1 或 M_3，參見圖 2(a)。

(ii)過 P 向 $\overline{A_1A_2}$ 作中線 $\overleftrightarrow{M_2P}$ 分別交對邊 $\overline{A_5A_8}$ 或延長 $\overline{A_6A_7}$ 於垂直點 H_2 或 H_4，參見圖 2(b)。

但**建構 $B-$多邊形中對邊必須保持唯一性**，所以取 $\overline{A_5A_8}$ ，即

$$\overline{PH_1}\perp\overline{A_1A_2}\Leftrightarrow\overline{A_5M_1}=\overline{M_1A_8}\quad 且\quad \overline{A_1M_2}=\overline{M_2A_2}\Leftrightarrow\overline{PH_2}\perp\overline{A_5A_8}\text{ 。}$$

因此，六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_8$ 滿足建構原則，稱此多邊形為 $B-$六邊形，參見圖 2(c)。

【預備定理 1】($B-$**四邊形的八點共圓性質**，沈康身[1]與黃家禮[2])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為異於正方形的圓內接四邊形且兩垂直對角線 $\overline{A_1A_3}$ 及 $\overline{A_2A_4}$ 相交於 P，若過 P 向四邊形各邊作垂直線與中線，其中垂足點為 H_1、H_2、H_3、H_4，中點為 M_1、M_2、M_3、M_4，則 H_1、H_2、H_3、H_4、M_1、M_2、M_3、M_4 等八點共圓，參見圖 3。

【註】當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接正方形，中線與垂直線同一條，故**四點共圓**。

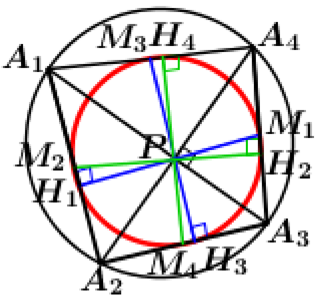


圖 3： $B-$四邊形的八點共圓

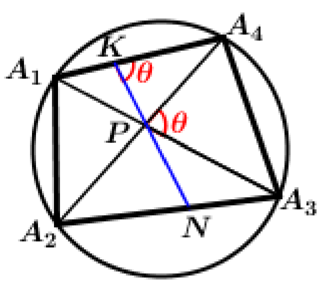


圖 4：兩對角線夾角為角 θ ($0^\circ<\theta<180^\circ$)

本作品將**婆羅摩笈多定理**中的<u>放寬一般角度條件</u>來探討，即兩對角線的夾角 90° 改為 θ

$(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ 及過兩對角線交點作一邊的垂直線改為作一邊夾角為θ的直線，參見圖 4。

【預備定理 2】(婆羅摩笈多定理推廣-兩對角線交角為θ，黃家禮[2])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 及 $\overline{A_2A_4}$ 相交於 P，交角為θ，若過 P 作直線分別與 $\overline{A_1A_4}$ 、$\overline{A_2A_3}$ 相交於 K 、 N ，則 $\dfrac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}} = \dfrac{\sin(\theta + \angle PA_3A_2)}{\sin \angle PA_2A_3}$，其中 $\theta = \angle A_3PA_4$，參見圖 4。**【註】預備定理 2** 證明參見**定理 19**。當 $\theta = 90^\circ$時，$\dfrac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}} = 1$，即**婆羅摩笈多定理**。

【預備定理 3】(圓內兩垂直交弦性質，沈康身[1])

給定一圓的圓心為O且半徑為r，設$\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 為圓內兩垂直交弦，相交於 P，則 $\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = 4r^2$，參見圖 5。

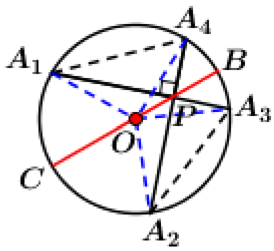


圖 5：圓內兩垂直交弦定理

【證明】因為 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$，所以由**圓內角性質**知 $\angle A_1PA_4 = 90^\circ = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_1A_4} + \overset{\frown}{A_2A_3}\right)$，即

$\overset{\frown}{A_1A_4} + \overset{\frown}{A_2A_3} = 180^\circ$，即 $\angle A_1OA_4 + \angle A_2OA_3 = \overset{\frown}{A_1A_4} + \overset{\frown}{A_2A_3} = 180^\circ$。在 ΔOA_1A_4 與 ΔOA_2A_3 中，

由**餘弦定理**知 $\overline{A_1A_4}^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\angle A_1OA_4$ 且 $\overline{A_2A_3}^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\angle A_2OA_3$。所以

$\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = 4r^2 - 2r^2(\cos\angle A_1OA_4 + \cos\angle A_2OA_3) = 4r^2$。因此，$\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = 4r^2$。 ■

二、探討 $B-$四邊形

(一) $B-$四邊形的邊長性質

【性質 1】(預備定理 2 的逆定理)

給定一圓的圓心為O且半徑為r，設$\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 為圓內兩交弦，相交於 P，若

$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$，則$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$，參見圖 5。

【**證明**】在ΔOA_1A_4與ΔOA_2A_3中，由**餘弦定理**知

$$\overline{A_1A_4}^2=r^2+r^2-2r^2\cos\angle A_1OA_4 \quad 且 \quad \overline{A_2A_3}^2=r^2+r^2-2r^2\cos\angle A_2OA_3 \text{。}$$

又$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$，所以$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2-2r^2(\cos\angle A_1OA_4+\cos\angle A_2OA_3)=4r^2$。

但$r>0$，得$\cos\angle A_1OA_4+\cos\angle A_2OA_3=0$，故$\angle A_1OA_4+\angle A_2OA_3=180^\circ$。

由**圓內角性質**知$\angle A_1PA_4=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1A_4}+\overset{\frown}{A_2A_3})=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$。因此，$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$。 ■

【**定理 1**】($B-$四邊形的邊長性質)

給定一圓的圓心為O且半徑為r，設圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$滿足$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$為$B-$**四邊形**，參見圖 5。

【**證明**】由**性質 1** 知$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$，則由**婆羅摩笈多定理**知四邊形$A_1A_2A_3A_4$為$B-$**四邊形**。 ■

(二)兩圓內離

定義同時擁有內切圓與外接圓的四邊形稱為**雙心四邊形** (Bicentric quadrilateral)，參見圖 6 中的雙心四邊形$QRST$，這裡探討四邊形$QRST$與內切圓相切於四點所成的四邊形$A_1A_2A_3A_4$為$B-$**四邊形**，證明參見**定理 2**，注意四邊形$QRST$中內切圓與外接圓是**內離**的情形。

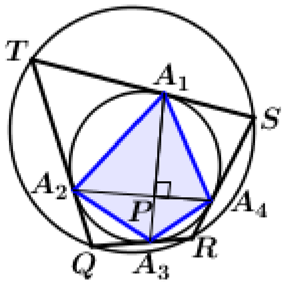


圖 6：兩圓內離中的$B-$四邊形

【**定理 2**】(兩圓內離中的$B-$四邊形)

設四邊形$QRST$為雙心四邊形且四邊形$QRST$與內切圓相切於A_1、A_2、A_3、A_4四點，則

(i) $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$。(ii)四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$四邊形。參見圖 6。

【**證明**】(i)由於四邊形 $QRST$ 為**雙心四邊形**，所以 $\angle STQ + \angle QRS = 180^\circ = \angle A_1TA_2 + \angle A_3RA_4$。

由**圓外角性質**知 $\frac{1}{2}(\overparen{A_2A_3A_4A_1} - \overparen{A_1A_2}) + \frac{1}{2}(\overparen{A_3A_2A_1A_4} - \overparen{A_3A_4}) = 180^\circ$，得到

$\frac{1}{2}(2\overparen{A_2A_3} + 2\overparen{A_1A_4}) = 180^\circ$，故 $\angle A_1PA_4 = 90^\circ$，因此，$\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$。

(ii)由(i)知 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$，由**婆羅摩笈多定理**知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$四邊形。 ■

(三)兩圓外切

利用兩圓外切來建構 $B-$四邊形，共有二種，參見**定理 3** 與**定理 4**。

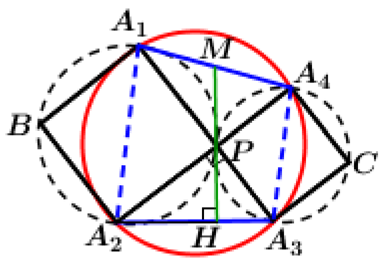


圖 7：外切兩圓中的 $B-$四邊形

【**定理 3**】(**兩圓外切中的 $B-$四邊形(I)**)

給定一個斜邊為 c 的直角三角形 ΔPA_2A_3，設以兩股 $\overline{A_2P}$ 與 $\overline{A_3P}$ 分別作正方形 A_1BA_2P 與 A_3CA_4P，則(i) A_1, A_2, A_3, A_4 四點共圓。(ii)四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$四邊形。(iii) $c = \sqrt{2}r$，其中 r 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圓半徑。參見圖 7。【**註**】兩正方形的外接圓是外切的。

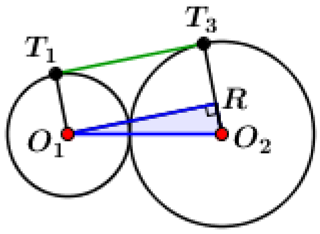
【**證明**】(i)連接 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$，由**正方形對角線性質**知 $\angle A_1A_2A_4 = \angle A_1A_3A_4 = 45^\circ$，所以由**圓內接四邊形判定性質**知 A_1, A_2, A_3, A_4 四點共圓。(ii)由(i)知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$，由**婆羅摩笈多定理**知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$四邊形。

(ii)由於 $\overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_4} = c$，由**預備定理 3** 知 $\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = 4r^2$，得知 $c^2 + c^2 = 4r^2$。

因此，$c = \sqrt{2}r$。 ■

【定理 4】(兩圓外切中的$B-$四邊形(II))

給定兩圓外切於P，設兩圓Γ_1與Γ_2的圓心分別為O_1與O_2且半徑分別為r_1與r_2 ($r_1 \le r_2$)，若$\overline{T_1T_3}$與$\overline{T_2T_4}$為兩圓的外公切線，其中T_1,T_2,T_3,T_4為切點，$\overleftrightarrow{A_1A_2}$為兩圓的內公切線，參見圖 9，則(i)$\overline{T_1T_3}=\overline{T_2T_4}=\overline{A_1A_2}=2\sqrt{r_1r_2}$。(ii)$A_1,O_1,A_2,O_2$四點共圓。(iii)四邊形$A_1O_1A_2O_2$為$B-$四邊形。



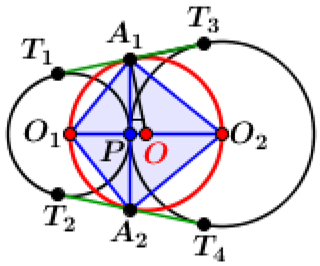


圖 8：證明$\overline{T_1T_3}=\overline{T_2T_4}=\overline{A_1A_2}=2\sqrt{r_1r_2}$　圖 9：外切兩圓中的$B-$四邊形

【證明】(i)過O_1作垂直線交$\overline{O_2T_3}$於R，參見圖 8，得到$\overline{O_1R}=\overline{T_1T_3}$。

在ΔO_1O_2R中，由**畢氏定理**知$\overline{O_1R}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$，所以$\overline{T_1T_3}=2\sqrt{r_1r_2}$。

由於$\overline{T_1T_3}$為對A_1的圓Γ_1與Γ_2之公切線，所以$\overline{A_1T_1}=\overline{A_1P}=\overline{A_1T_3}$。同理$\overline{A_2T_2}=\overline{A_2P}=\overline{A_2T_4}$。

又兩圓相切有對稱性知$\overline{A_1P}=\overline{PA_2}$，故$\overline{T_1T_3}=\overline{T_2T_4}=\overline{A_1A_2}=2\sqrt{r_1r_2}$。

(ii)由**切線性質**知$\angle O_1A_1O_2=\dfrac{1}{2}(\angle T_1A_1P+\angle PA_1T_3)=90^\circ$，參見圖 9。

同理得到$\angle O_1A_2O_2=90^\circ$，即$\angle O_1A_1O_2+\angle O_1A_2O_2=180^\circ$，因此，$A_1,O_1,A_2,O_2$四點共圓。

(iii)由(ii)知四邊形$A_1O_1A_2O_2$為圓內接四邊形且由**內公切線性質**知$\overline{O_1O_2}\perp\overline{A_1A_2}$。

由**婆羅摩笈多定理**知四邊形$A_1O_1A_2O_2$為$B-$四邊形。 ■

(四)兩圓外離

利用兩圓外離的外公切線及內公切線的四個交點A_1,A_2,A_3,A_4來探討$B-$四邊形。可證明A_1,A_2,A_3,A_4四點必共圓，但兩對角線不一定相互垂直，參見圖 10(左)。由**性質 1** 知圖 10 中滿足$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$時，$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$，此時四邊形$A_1A_2A_3A_4$為$B-$四邊形，參見圖 10(右)。

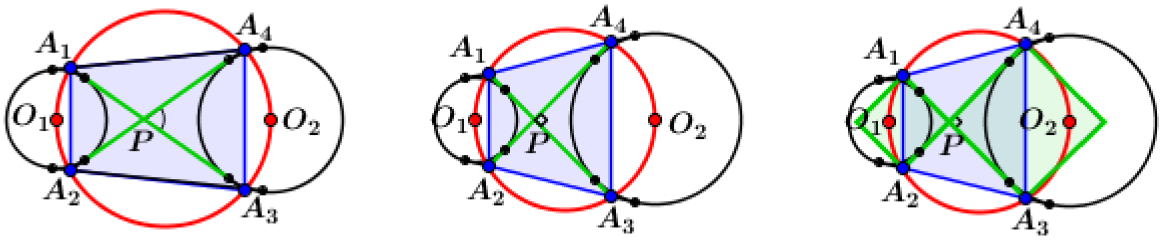


圖 10：兩圓外離的外公切線及內公切線之交點所成四邊形　　圖 11：與圖 7 相同

【定理 5】(兩圓外離中的 $B-$四邊形)

給定兩圓 Γ_1 與 Γ_2 外離，其兩內公切線交點為 P ，設其兩圓的圓心分別為 O_1 與 O_2 且半徑分別為 r_1 與 r_2 （$r_1 \le r_2$），若四點 A_1, A_2, A_3, A_4 為兩圓的外公切線與內公切線之交點，參見圖 10，則 (i) A_1, A_2, A_3, A_4 四點共圓。(ii)若 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$ ，則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$四邊形且 $\overline{A_1A_4} = \overline{A_2A_3} = \sqrt{2}r$ ，其中 r 為過 A_1, A_2, A_3, A_4 四點的圓之半徑。

【證明】(i)在 ΔPA_1A_2 與 ΔPA_4A_3 中，由於 $\overline{PA_1} = \overline{PA_2}$ 且 $\overline{PA_4} = \overline{PA_3}$ ，即 $\dfrac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_4}} = \dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}}$ 。

又 $\angle A_1PA_2 = \angle A_4PA_3$ ，所以 $\Delta PA_1A_2 \sim \Delta PA_4A_3$，故 $\angle A_1A_2P = \angle A_4A_3P$ 。由**圓內接四邊形判定性質**知 A_1, A_2, A_3, A_4 四點共圓。(ii)再由**婆羅摩笈多定理**知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$四邊形。事實上，我們可以將圖 10(右)增加兩個正方形，參見圖 11，美妙地與圖 7 相同，因此，由**定理 3** 知 $\overline{A_1A_4} = \overline{A_2A_3} = \sqrt{2}r$ 。 ■

(四)兩圓相交兩點

是否可利用相交兩點的兩圓來建構 $B-$四邊形呢？這答案是可以的，參見圖 12 與**定理 6**。

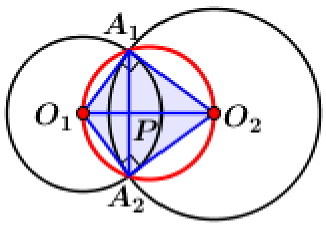


圖 12：兩圓相交兩點中的 $B-$四邊形

【定理 6】(兩圓相交兩點中的 $B-$四邊形)

給定兩圓 Γ_1 與 Γ_2 相交兩點於 A_1, A_2 ，設其兩圓的圓心分別為 O_1 與 O_2 且半徑分別為 r_1 與 r_2

$(r_1 \le r_2)$，若 $\overline{A_1O_2}, \overline{A_2O_2}$ 為圓 Γ_1 的切線，參見圖 12，則(i) A_1, O_1, A_2, O_2 四點共圓。(ii)四邊形 $A_1O_1A_2O_2$ 為 $B-$四邊形且 $r_1^2 + r_2^2 = 4r^2$，其中 r 為四邊形 $A_1O_1A_2O_2$ 的半徑。

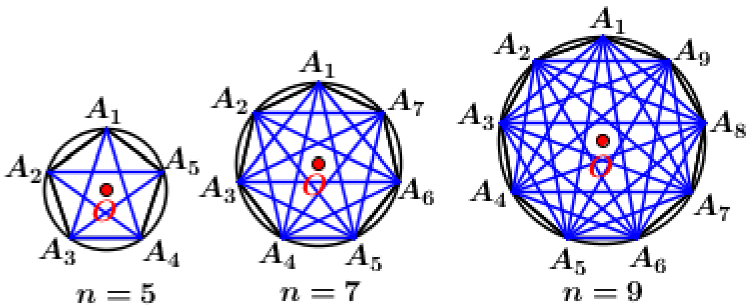
【證明】(i)由於 $\overline{O_2A_1}, \overline{O_2A_2}$ 為圓 Γ_1 的切線，所以 $\angle O_1A_1O_2 + \angle O_1A_2O_2 = 180^\circ$，故由**圓內接四邊形判定性質**知四點 A_1, O_1, A_2, O_2 共圓。

(ii)由**弦心距性質**知 $\overline{O_1O_2} \perp \overline{A_1A_2}$，故由**婆羅摩笈多定理**知四邊形 $A_1O_1A_2O_2$ 為 $B-$四邊形。

■

三、探討圓內接正 n 邊形中的 $B-$多邊形

現在要將**婆羅摩笈多定理**推廣至正 n 邊形，由於正 n 邊形必為圓內接 n 邊形，所以僅要考慮兩垂直對角線的情形。令 O 為正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，底下分成奇數邊及偶數邊來探討。



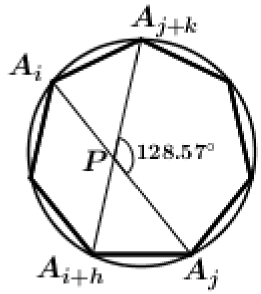


圖 13：圓內接正奇數邊 n 邊形的對角線　　圖 14：證明任兩對角線相互不垂直

(一)圓內接正奇數邊 n 邊形

當 $n=3$ 時，正三角形沒有對角線，所以無法討論**婆羅摩笈多定理**，底下就從 $n \ge 5$ 來探討。

【性質 2】設 $A_1A_2\cdots A_n$ 為圓內接正奇數邊 n 邊形，其中 $n \ge 5$，則其任兩對角線相互不垂直。

【證明】設正奇數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中存在兩對角線 $\overline{A_iA_j}$ 與 $\overline{A_{i+h}A_{j+k}}$ 相互垂直，其中 $1 \le i, j, h, k \le n$，即 $\angle A_jPA_{j+k} = 90^\circ$，參見圖 14。

由**圓內角性質**知 $\angle A_jPA_{j+k} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_iA_{i+h}} + \overset{\frown}{A_jA_{j+k}})$。又正多邊形各邊所對的外接圓的圓心角(中心角)為 $\frac{360^\circ}{n}$，所以

$$\angle A_jPA_{j+k} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_iA_{i+h}} + \overset{\frown}{A_jA_{j+k}}) = \frac{1}{2}\left(h\cdot\frac{360^\circ}{n} + k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right) = 90^\circ \qquad (1)$$

化簡得到 $n = 2(h+k)$，故 $2 \mid n$，與已知矛盾，故得證。■

【定理 7】設 $A_1A_2\cdots A_n$ 為圓內接正奇數邊 n 邊形，則 n 邊形中無法建構 $B-$多邊形。

【證明】由性質 2 知圓內接奇數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中任兩對角線相互不垂直，所以不存在**婆羅摩笈多定理**。因此，圓內接正奇數邊 n 邊形中無法建構 $B-$多邊形。 ■

在圓內接正奇數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，若採用<u>放寬一般角度條件</u>來探討，即推廣**預備定理 2**，取 $\overline{A_1A_{1+[n/2]}}$ 與 $\overline{A_2A_n}$ 夾角為 θ，其中[ ]為高斯符號，可推導出 $\dfrac{\overline{A_{1+[n/2]}N}}{\overline{NA_n}}$，參見圖 15。

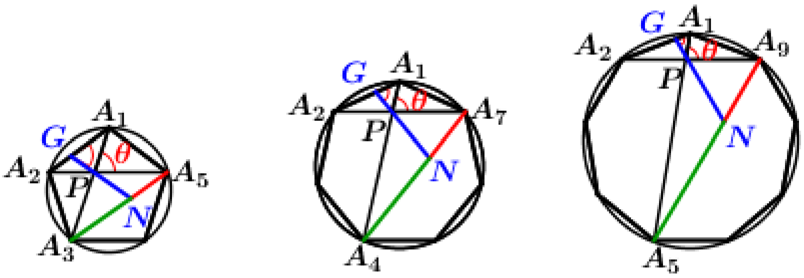


圖 15：圓內接正奇數邊 n 邊形中放寬一般角度條件來探討

【定理 8】(推廣預備定理 2)

設 $A_1A_2\cdots A_n$ 為圓內接正奇數邊 n 邊形，且 $\overline{A_1A_{1+[n/2]}}$ 與 $\overline{A_2A_n}$ 相交於 P，交角為 θ，若過 P 作直線分別與 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_{1+[n/2]}A_n}$ 相交於 G、N，則

$$\frac{\overline{A_{1+[n/2]}N}}{\overline{NA_n}}=\frac{\sin(\theta+\angle PA_nA_{1+[n/2]})}{\sin\angle PA_{1+[n/2]}A_n}$$，其中 $\theta=\dfrac{180^\circ[n/2]}{n}$ 且[ ]為高斯符號，參見圖 15。

【證明】由於圓內接正奇數邊 n 邊形的圓心角為 $\dfrac{360^\circ}{n}$ 且

$$\theta=\frac{1}{2}\left(\angle A_2PA_{1+[n/2]}+\angle A_1PA_n\right)=\frac{1}{2}\left[\left([n/2]-1\right)\cdot\frac{360^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{n}\right]=\frac{180^\circ[n/2]}{n}。$$

在多邊形 $A_1A_2\cdots A_{1+[n/2]}A_n$ 中，由**預備定理 2** 知 $\dfrac{\overline{A_{1+[n/2]}N}}{\overline{NA_n}}=\dfrac{\sin(\theta+\angle PA_nA_{1+[n/2]})}{\sin\angle PA_{1+[n/2]}A_n}$。 ■

(二)圓內接正偶數邊 n 邊形的對角線

探討兩垂直對角線交點如何區分呢？我們考慮交點在 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 為對稱軸上或過中心 O 與否來決定，觀察圖 16 可將兩垂直對角線的交點分為三種，詳見**性質 3**。

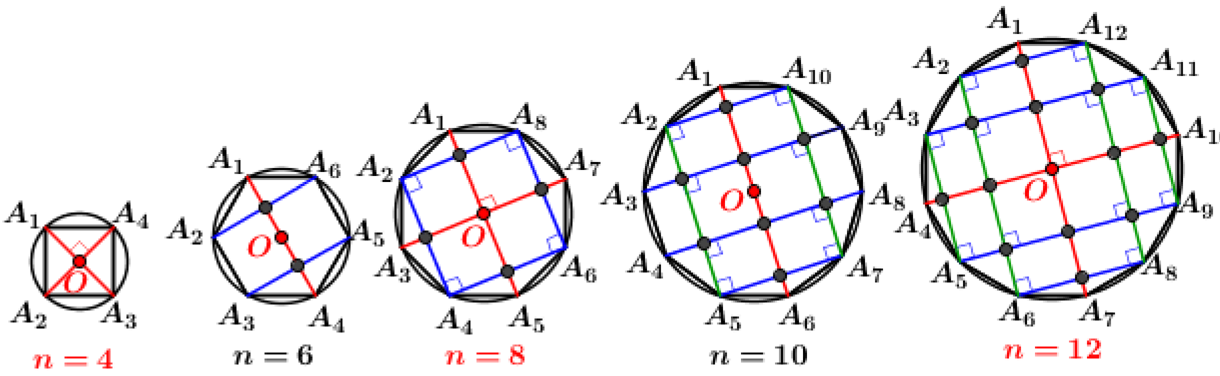


圖 16：圓內接正偶數邊 n 邊形的兩垂直對角線的交點（$n=4,6,8,10,12$）

【性質 3】 設 $A_1A_2\cdots A_n$ 為正偶數邊 n 邊形，其中 $n\geq 4$，則 n 邊形中至少一組兩垂直對角線。

【證明】 仿照**性質 2** 證明，設正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中存在兩對角線 $\overline{A_iA_j}$ 與 $\overline{A_{i+h}A_{j+k}}$ 相互垂直，其中 $1\leq i,j,h,k\leq n$，即 $\angle A_jPA_{j+k}=90^\circ$，參見圖 14。同樣地，由**圓內角性質**亦滿足(1)式：$\angle A_jPA_{j+k}=\dfrac{1}{2}\left(h\cdot\dfrac{360^\circ}{n}+k\cdot\dfrac{360^\circ}{n}\right)=90^\circ\Rightarrow n=2(h+k)$，即 $2|n$ 且 $h+k=\dfrac{n}{2}$。

故圓內接正偶數邊 n 邊形中至少有一組兩垂直對角線，分為三種：

當 $h=k=\dfrac{n}{4}$ 時，**兩垂直對角線的交點為中心 O**，其中 $4|n$，即 $n=4m, m\in N$ 時成立。

當 $h,k\neq\dfrac{n}{4}$ 但 $h+k=\dfrac{n}{2}$ 時，其中一種：**兩垂直對角線為一條通過中心 O 但另一條不通過中心 O**。例如：$n=8$ 時，$\overline{A_1A_5}\perp\overline{A_2A_8}$ 及 $\overline{A_1A_5}\perp\overline{A_4A_6}$，參見圖 16。另一種：**兩垂直對角線皆不過中心 O**。例如：$n=10$ 時，$\overline{A_2A_5}\perp\overline{A_3A_9}$ 及 $\overline{A_7A_{10}}\perp\overline{A_3A_9}$ 等等，參見圖 16。 ■

由**性質 3** 知兩垂直對角線交點可分三種情形，事實上，可歸納簡化為二種：

過對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 上的點與不過對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 上的點，底下依序來探討。

(三)過對稱軸上的點之 $B-$多邊形

兩垂直對角線的交點在對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 上的點有二種，其一即中心 O，現在就來探討。

【定理 9】在圓內接正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，設 O 為兩垂直對角線 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 與 $\overline{A_{m+1}A_{n-m+1}}$ 的交點，其中 $n=4m, m\in N$ ，則過中心 O 可建構 $B-$正 n 邊形，參見圖 17。

【證明】由於 ΔOA_1A_n 與 $\Delta OA_{n/2}A_{1+n/2}$ 皆為兩個全等的等腰三角形，所以過 O 向 $\overline{A_1A_n}$ 及 $\overline{A_{n/2}A_{1+n/2}}$ 作中線與垂直線均是同一條，中點即為垂足點，參見圖 17，故存在**婆羅摩笈多定理**。

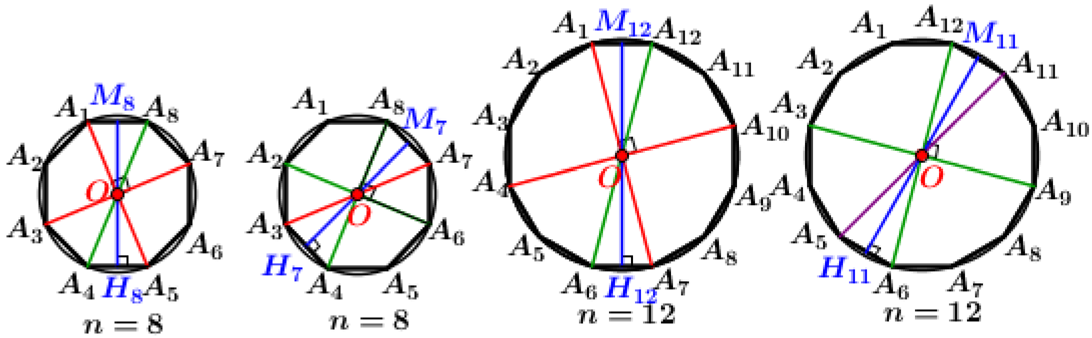


圖 17：過 O 可建構 $B-$正 n 邊形

同理類推知其他各邊均存在**婆羅摩笈多定理**，因此，過 O 可建構 $B-$正 n 邊形。 ■

【定理 10】($B-$正 n 邊形的 n 點共圓性質)

在圓內接正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，設 $\overline{A_1A_{1+n/2}}\perp\overline{A_{m+1}A_{n-m+1}}$ 交於 O，其中 $n=4m, m\in N$ 。若過 O 向各邊作垂直線且中線，其中垂足點為 H_1、H_2、…、H_n ，並且中點 M_1、M_2、…、M_n ，則 H_1、H_2、…、H_n、M_1、M_2、…、M_n 等 n 點共圓，參見圖 18。

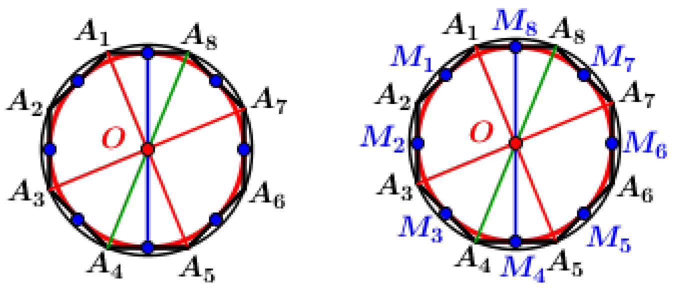


圖 18：過 O 的共圓性質

【證明】由定理 9 知過 O 向 $\overline{A_1A_n}$ 及 $\overline{A_{n/2}A_{1+n/2}}$ 作中線與垂直線時，均是同一條，所以過 O 向各邊作中線與垂直線共有 n 條，又 $\overline{OM_1}=\overline{OM_2}=\cdots=\overline{OM_n}$ ，所以 H_1、H_2、…、H_n、M_1、M_2、…、M_n 等 n 點共圓，參見圖 19，此圓為圓內接正偶數邊 n 邊形的內切圓。 ■

由**定理 9** 知過 O 可建構 $B-$**正** n **邊形**，那麼其他兩垂直對角線的交點是否也可建構呢？

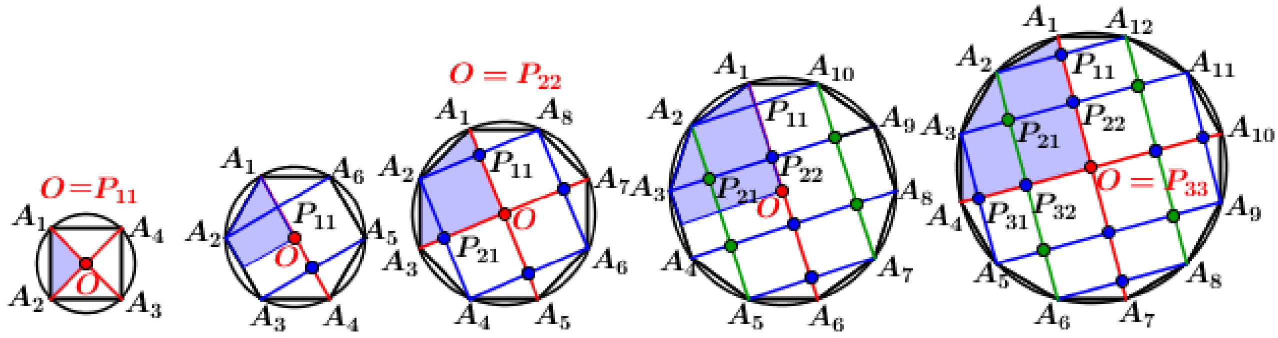


圖 19：分類兩垂直對角線的交點

不失一般性，圓內接正偶數邊 n 邊形為線對稱圖形，所以僅探討對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 的左半部之上方(含對角線 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 上)中的兩垂直對角線的交點，參見圖 19 的藍色區域，其餘的交點同理可得。為了方便，考慮以對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 為基準，與 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 垂直的直線稱為**水平分線**，與 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 平行的直線稱為**垂直分線**。定義其**交點** P_{cr} **為由上而下的第** c **條水平分線與在第** c **條水平分線上由左而右的第** r **條垂直分線的交點**，其中 $1 \le c, r \le \left[\dfrac{n}{4}\right]$，參見圖 19。

當 $n=4$ 時，僅有 $P_{11}=O$；當 $n=6$ 時，僅有 P_{11}；當 $n=8$ 時，有 $P_{11}, P_{21}, P_{22}=O$；當 $n=10$ 時，有 P_{11}, P_{21}, P_{22}；當 $n=12$ 時，有 $P_{11}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}, P_{33}=O$。以此類推知

當 $n \equiv 2 \pmod 4$ 時，有 $P_{11}, P_{21}, P_{22}, \cdots, P_{n1}, P_{n2}, \cdots, P_{[n/4],[n/4]}$，其中 [ ] 為高斯符號。

當 $n \equiv 0 \pmod 4$ 時，有 $P_{11}, P_{21}, P_{22}, \cdots, P_{n1}, P_{n2}, \cdots, P_{[n/4],[n/4]}=O$，其中 [ ] 為高斯符號。

現在探討在對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 上點 P_{ii}，其中 $1 \le i \le \left[\dfrac{n}{4}\right]$，那麼過 P_{ii} 向各邊可建構 $B-$**多邊形**嗎？不一定的，關鍵在要符合**對邊建構原則**包含過 P_{ii} 向各邊作垂直線交對邊中點的移動原則**(簡稱垂直線移動原則)**及過 P_{ii} 向各邊作中線交對邊垂足點的移動原則**(簡稱中線移動原則)**。

【性質 4】(過 P_{ii} 向邊作垂直線交對邊中點的移動原則，簡稱垂直線移動原則)

設 P_{ii} 為圓內接正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中兩垂直對角線的交點，若過 P_{ii} 向邊 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 作垂直線 $\overleftrightarrow{P_{11}H_1}$ 交對邊中點 M_1，其中 $1 \le j \le \dfrac{n}{2}$，則 $\overline{P_{ii}H_1} \perp \overline{A_jA_{j+1}} \Leftrightarrow \overline{A_mM_1} = \overline{M_1A_{n-i+1}}$，其中

$m = 2j + n/2 - i$ ，但 $m > n$ 時， $2j + n/2 - i \equiv m \pmod n$ 。

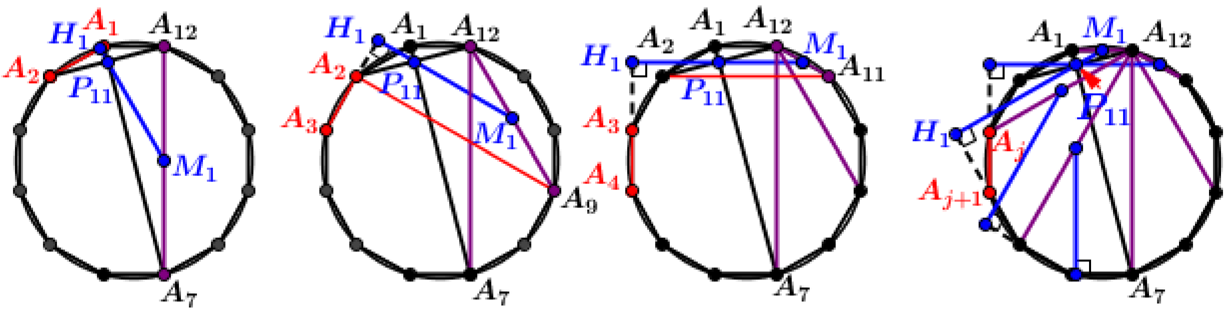


圖 20：證明垂直線的移動原則

【證明】由於圓內接四邊形 $A_1A_2A_{1+n/2}A_n$ 必存在**婆羅摩笈多定理**，所以當過 P_{11} 必滿足

$\overline{P_{11}H_1} \perp \overline{A_1A_2} \Leftrightarrow \overline{A_{1+n/2}M_1} = \overline{M_1A_n}$ ，參見圖 20。由於圖形是以 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 為對稱軸，底下僅要考慮弧 $\overset{\frown}{A_1A_2A_{1+n/2}}$ 上的邊，可令邊為 $\overline{A_jA_{j+1}}$ ，其中 $2 \le j \le \frac{n}{2}$ 。

垂直線移動原則：先考慮過 P_{11} 向邊 $\overline{A_jA_{j+1}}$ **作垂直線** $\overleftrightarrow{P_{11}H_1}$ **交對邊的規律**。由**外角性質**知 $\angle A_{j-1}A_jH_1 = \frac{360^\circ}{n}$ ，又 P_{11} 在對稱軸上，所以過 P_{11} 向 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 的對邊會以 A_n 為旋轉中心，由 $\overline{A_{1+n/2}A_n}$ 依序逆時鐘旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ 而得，即對邊的一個端點為 A_n ，另一個端點從 $A_{1+n/2}$ 依序逆時鐘移動兩個頂點的位置，故邊 $\overline{A_jA_{j+1}}$ $(1 \le j \le \frac{n}{2})$ 對應對邊為 $\overline{A_mA_n}$ ，其中 $m = 2j + n/2 - 1$，但 $m > n$ 時， $2j + n/2 - 1 \equiv m \pmod n$ ，參見圖 21。

例如：圖 20 中當 $n = 12$ 時，邊 $\overline{A_jA_{j+1}}$ $(1 \le j \le 6)$ 對應對邊依序為

$$\overline{A_7A_{12}} \to \overline{A_9A_{12}} \to \overline{A_{11}A_{12}} \to \overline{A_1A_{12}} \to \overline{A_3A_{12}} \to \overline{A_5A_{12}} \text{ 。}$$

由於 $\overleftrightarrow{P_{11}H_1} \perp \overline{A_jA_{j+1}}$ ，所以過 A_2 作 $\overleftrightarrow{P_{11}H_1}$ 的平行線必交於 $A_{2j+n/2-1}$ ，參見圖 20。

在 $\Delta A_2A_{2j+n/2-1}A_n$ 中，由於 $\overline{P_{11}H_1} // \overline{A_2A_{2j+n/2-1}}$ 且 $\overline{A_2P_{11}} = \overline{P_{11}A_n}$ ，所以由**平行線截比例線段性質**知 $\overline{A_{2j+n/2-1}M_1} = \overline{M_1A_n}$ 。

由於 P_{22} 為 P_{11} 的往下一個水平分線，所以所有對邊移動是以 A_{n-1} 為旋轉中心，也跟隨往下移動一個頂點，故邊 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 對應對邊為 $\overline{A_mA_{n-1}}$ ，其中 $m = 2j + n/2 - 2$ ，但 $m > n$ 時，

$2j+n/2-2\equiv m\ (\mathrm{mod}\ n)$，參見圖 22。以此類推至 P_{ii} (包含 P_{11})時，邊 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 對應對邊為 $\overline{A_mA_{n-i+1}}$ ，其中 $m=2j+n/2-i$ ，但 $m>n$ 時， $2j+n/2-i\equiv m\ (\mathrm{mod}\ n)$ 。

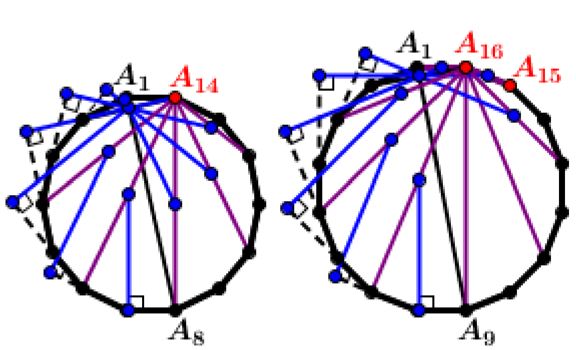


圖 21：過 P_{11} 的垂直線的移動原則 ($n=14,16$)

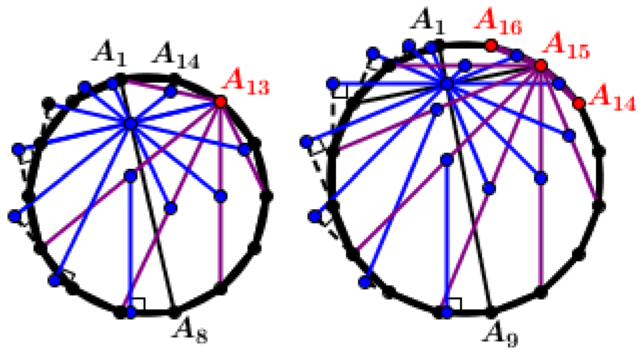


圖 22：過 P_{22} 的垂直線的移動原則 ($n=14,16$)

上述已證明 P_{11} 時，垂直線連線為對邊中點，而 P_{ii} 時，其對邊是 P_{11} 的對邊往下移動 $(i-1)$ 個頂點，所以仍保持垂直線連線為對邊中點，參見圖 22。

因此， $\overline{P_{ii}H_1}\perp\overline{A_jA_{j+1}}\Leftrightarrow\overline{A_mM_1}=\overline{M_1A_{n-i+1}}$ 。 ■

【定理 11】(過 P_{ii} 向邊作中線交對邊垂足點的移動原則，簡稱中線移動原則；對邊建構原則)

設 P_{ii} 為正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中兩垂直對角線的交點，則符合建構原則的邊僅有兩組：

$$\overline{A_iA_{i+1}}\text{ 與 }\overline{A_1A_n}\ (i=1),\overline{A_{n-i+1}A_{n-i+2}}\ (i\neq 1)\text{ 、 }\overline{A_{i+1}A_{i+2}}\text{ 與 }\overline{A_{n-i}A_{n-i+1}}\text{ ，其中 }1\leq i\leq\left[\frac{n}{4}\right]\text{ 。}\qquad(2)$$

【註】為了方便，將(2)式中前者稱為**第 i 條水平分線前緊連的邊**且後者稱為**第 i 條水平分線後緊連的邊**。注意當 $n=4i+2$ 時，過 P_{ii} 向**第 i 條水平分線後緊連的邊**作垂直線時，此垂直線為 $\overline{A_{i+1}A_{n-i+1}}$ ，是不符合建構原則的，(2)式中要扣除這種情形。

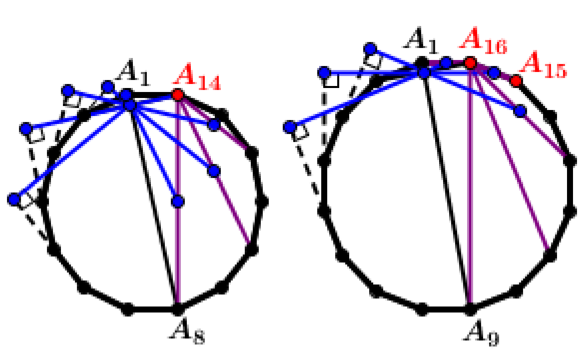


圖 23： 過 P_{11} 的垂直線符合建構原則

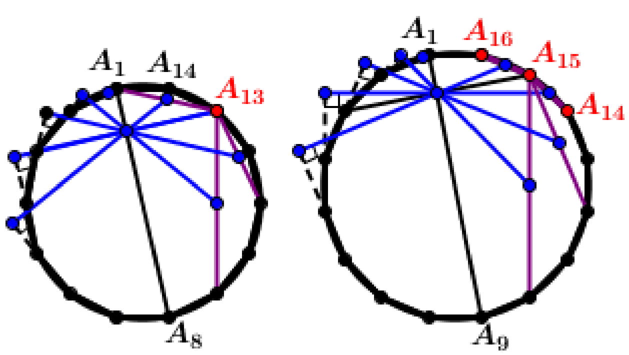


圖 24： 過 P_{22} 的垂直線符合建構原則

【證明】由性質 **4** 知**過 P_{ii} 的垂直線移動原則**，若再滿足**過 P_{ii} 的中線移動原則**，則符合 **$B-$多邊形的建構原則**。注意圖 21 與圖 22 中，要符合 **$B-$多邊形的建構原則**其對邊必須是在 $\overset{\frown}{A_1A_nA_{n-i+1}}$ 及 $\overset{\frown}{A_{1+n/2}A_{2+n/2}A_{n-i+1}}$ 內的邊或對角線，參見圖 23 與圖 24。

例如：圖 23 中當 $n=14,16$ 時，過 P_{11} 符合邊為 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 及 $\overline{A_3A_4}$ ，其中前兩個邊為**第1條水平分線前緊連的邊及後緊連的邊**。圖 24 中當 $n=14,16$ 時，過 P_{22} 符合邊為 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 及 $\overline{A_4A_5}$ ，其中後兩個邊為**第2條水平分線前緊連的邊及後緊連的邊**。由於**前緊連的邊及後緊連的邊**為共同有的邊為**第 i 條水平分線前緊連的邊及後緊連的邊**，所以可猜測出上述兩個邊符合 **$B-$多邊形的建構原則**，現在先證明上述兩個邊再證其他邊。

(i)**第 i 條水平分線前緊連的邊**即 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 與 $\overline{A_1A_n}$ $(i=1),\overline{A_{n-i+1}A_{n-i+2}}$ $(i\neq 1)$：由於圓內接四邊形 $A_iA_{i+1}A_{i+n/2}A_{n-i+1}$ 必存在**婆羅摩笈多定理**，而在 $\overset{\frown}{A_1A_{i+n/2}}$ 及 $\overset{\frown}{A_{n-i+1}A_n}$ 上增加正偶數邊 n 邊形的頂點，其構成多邊形也存在**婆羅摩笈多定理**，得到 **$B-$多邊形** $A_1\cdots A_i\cdots A_{i+n/2}A_{n-i+1}\cdots A_n$ ，故符合建構原則的邊為 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 。同時由兩垂直對角線 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 與 $\overline{A_{i+1}A_{n-i+1}}$ 形成**蝴蝶的構形**- $\Delta P_{ii}A_iA_{i+1}$ 與 $\Delta P_{ii}A_{i+n/2}A_{n-i+1}$ ，參見圖 25 (a) 。

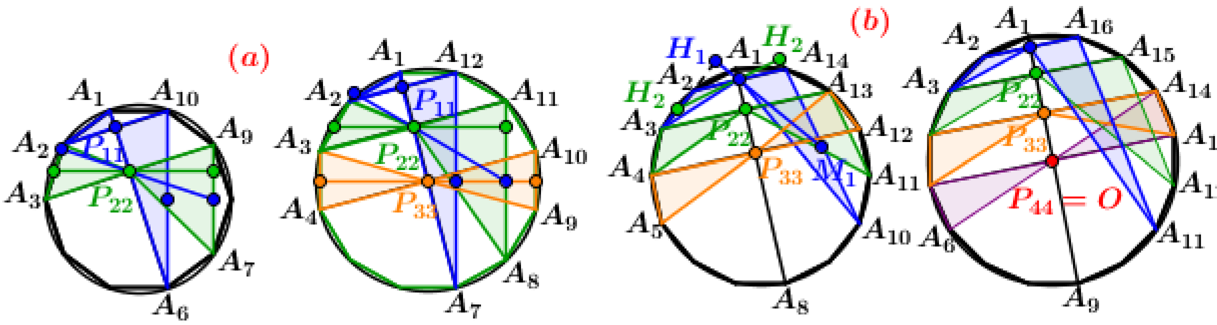


圖 25：過 P_{ii} 向第 i 條水平分線前緊連的邊(圖 (a))及後緊連的邊的建構原則(圖 (b))

由於為線對稱圖形，所以 $\overline{A_1A_n}$ $(i=1),\overline{A_{n-i+1}A_{n-i+2}}$ $(i\neq 1)$ 也是符合建構原則的邊。

(ii)**第 i 條水平分線後緊連的邊**即 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 與 $\overline{A_{n-i}A_{n-i+1}}$ 。由性質 **4** 知**過 P_{ii} 的垂直線移動原則**，現在證明符合**中線移動原則**：過 P_{ii} 向邊 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 作中線 $\overleftrightarrow{M_4P_{ii}}$ 交對邊垂足點 H_4 。

中，由於 $\overline{A_{i+1}M_2}=\overline{A_{i+1}M_4}$，所以 $\overline{A_{i+1}A_{n-i+1}}$ 為 $\angle H_2P_{ii}H_4$ 的角平分線，參見圖 26。

又 $\overline{M_2H_2}\perp\overline{A_{i+n/2}A_{n-i+1}}$，所以由**垂直線移動原則**知 $\overline{M_4H_4}\perp\overline{A_{i+2+n/2}A_{n-i+1}}$，故 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 為符合建構原則的邊。由於為線對稱圖形，所以 $\overline{A_{n-i}A_{n-i+1}}$ 也是符合建構原則的邊。

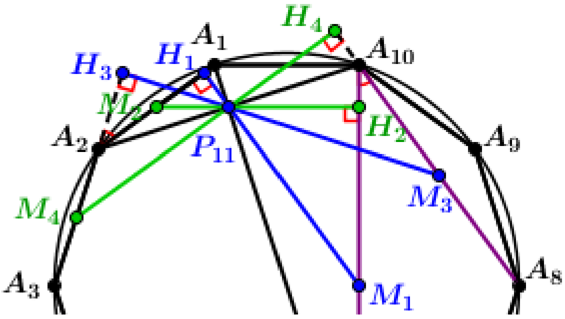


圖 26：第 i 條水平分線後緊連的邊

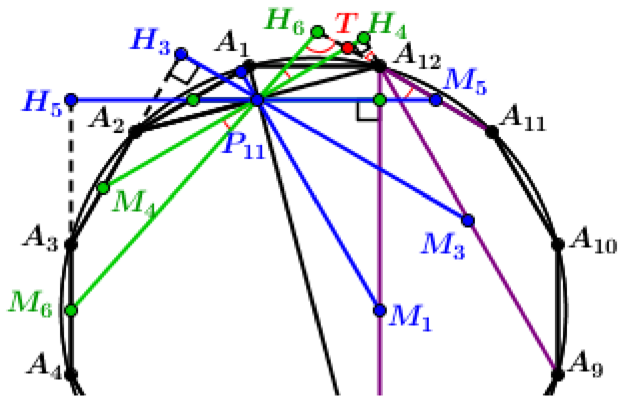


圖 27：第 i 條水平分線後緊連的邊之下一邊

(iii)接著證明除了(i)與(ii)之外的其他邊，先探討**第 i 條水平分線後緊連的邊下一邊**：$\overline{A_{i+2}A_{i+3}}$ 與 $\overline{A_{n-i-1}A_{n-i}}$。**例如**：圖 27 中過 P_{11} 向 $\overline{A_3A_4}$ **作中線** $\overleftrightarrow{M_6P_{11}}$ **交對邊垂足點** H_6，在 $\Delta TP_{11}H_6$ 與 ΔTH_4A_{12} 中，由於 $\angle A_9A_{12}A_{11}=\angle TA_{12}H_4=\dfrac{360^\circ}{n}$ 為正 12 邊形的圓心角，但 $\angle TP_{11}H_6<\dfrac{360^\circ}{n}$，所以由**外角性質**知 $\angle H_4TH_6=\angle TH_6P_{11}+\angle TP_{11}H_6=90^\circ+\dfrac{360^\circ}{n}$，得知 $\angle TH_6P_{11}$ 為鈍角，即作中線連線無法過對邊的垂足點。同理可證，過 P_{ii} 向邊 $\overline{A_{i+2}A_{i+3}}$ 與 $\overline{A_{n-i-1}A_{n-i}}$ 作中線連線無法過對邊的垂足點或垂直線在對角線 $\overline{A_{i+2}A_{n-i-1}}$ 上。

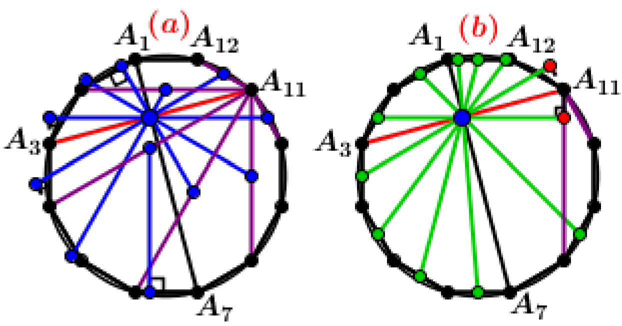


圖 28：過 P_{22} 向各邊的垂直建構原則(圖 (a))及中線建構原則(圖 (b))

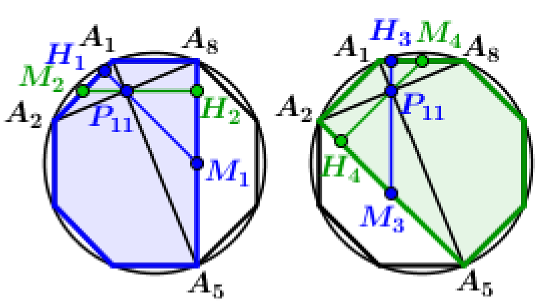
對於 $\overline{A_{i+2}A_{i+3}}$ 與 $\overline{A_{n-i-1}A_{n-i}}$ 之下的其他邊，若在 $\overset{\frown}{A_1A_{i+1}}$ 上邊作中線會通過 $\overset{\frown}{A_{1+n/2}A_{n-i+1}}$ 上，

而在 $\overset{\frown}{A_{i+1}A_{1+n/2}}$ 上邊作中線會通過 $\overset{\frown}{A_1A_{n-i+1}}$ 上，越靠近 $\overline{A_{n/2}A_{1+n/2}}$ 的邊其中線皆通過 $\overline{A_1A_n}$，由**垂直線移動原則**知這些對邊是接穿過兩垂直對角線，所以不符合**建構原則**。

例如：當 $n=12$ 時，過 P_{22} 向邊的垂直建構原則(圖 28 (a))及中線建構原則(圖 28 (b))。

因此，以上(i)~(iii)得知建構原則的邊僅有兩組。 ■

由**定理 11** 知理論上應該過 P_{ii} 可建構**兩個** $B-$**多邊形**。**例如**：**第** i **條水平分線前緊連的邊**：考慮 P_{11}，當 $n=8$ 時，向 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_1A_8}$ 可建構**兩個** $B-$**六邊形**，參見圖 29。而**第** i **條水平分線後緊連的邊**：考慮 P_{11}，當 $n=10$ 時，向 $\overline{A_2A_3}$ 與 $\overline{A_9A_{10}}$ 可建構**兩個** $B-$**九邊形**，參見圖 30。由對邊建構原則可見**特例情形**，包含僅建構**一個** $B-$**多邊形** (即正偶數邊 n 邊形本身) 或無法建構 $B-$**多邊形**，我們統整分類成三種：



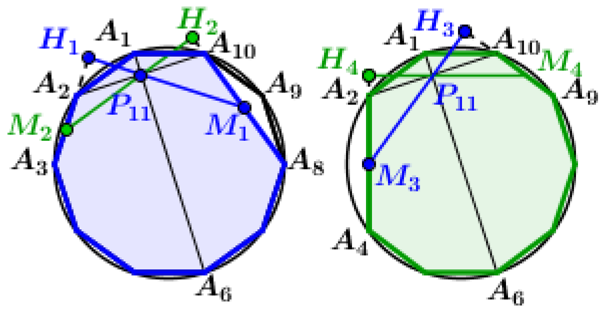


圖 29：前緊連的邊可建構兩個 $B-$六邊形 圖 30：後緊連的邊可建構兩個 $B-$九邊形

一是當 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 且 $i=\left[\dfrac{n}{4}\right]$ 時， P_{ii} 為中心 O，由**定理 9** 得證，參見圖 17。

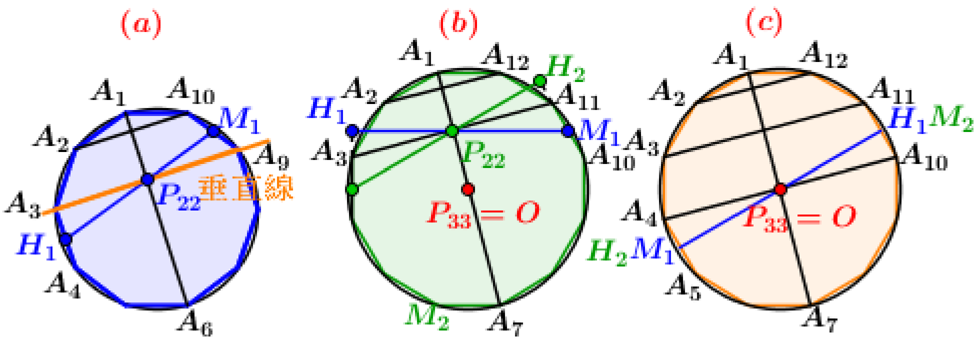


圖 31：特例情形

二是當 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 且 $i=\left[\dfrac{n}{4}\right]-1$ 時，過 P_{ii} 向**第** i **條水平分線後緊連的邊**，建構 $B-$**正** n **邊形**。

例如：過 P_{22} 及 $P_{33}=O$ 皆建構 $B-$ 正十二邊形，參見圖 31(b)與圖 31(c)。

三是當 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 且 $i=\left[\dfrac{n}{4}\right]$ 時，過 P_{ii} 向第 i 條水平分線後緊連的邊，由於垂直線為對角線 $\overline{A_iA_{n-i+1}}$，所以不符合建構原則，故無法建構 $B-$ 多邊形，參見 圖 31(a)。

定理 12 與 **定理 13** 中要談**兩個** $B-$ 多邊形的性質，要扣除上述三種特例，由於當 $n=4$ 時，建構 $B-$ 正方形，所以**定理 12 中前緊連的邊**之 n 與 i **的範圍**：$n\ge 6$；當 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 時，$1\le i\le\left[\dfrac{n}{4}\right]$；當 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 時，$1\le i<\left[\dfrac{n}{4}\right]$。考慮**後緊連的邊**時，當 $n=8$ 時，有 P_{11} 及 P_{22}，由對邊建構原則知過 P_{11} 及 P_{22} 均建構 $B-$ 正八邊形。所以**定理 13 中後緊連的邊**之 n 與 i **的範圍**：$n\ge 10$；當 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 時，$1\le i<\left[\dfrac{n}{4}\right]$；當 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 時，$1\le i<\left[\dfrac{n}{4}\right]-1$。

【定理 12】(過 P_{ii} 向第 i 條水平分線前緊連的邊建構 $B-$ 多邊形的邊數及共圓性質)

設 P_{ii} 為正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ($n\ge 6$)中兩垂直對角線的交點，則(i) P_{ii} 向第 i 條水平分線前緊連的邊可建構**兩個** $B-(2i+n/2)$ **邊形**。(ii)其兩個 $B-(2i+n/2)$ 邊形中邊上或延長線上垂足點 H_1,H_2,H_3,H_4 與邊上中點 M_1,M_2,M_3,M_4 等八點共圓。

【證明】(i)由**定理 11** 知對於正整數 $n\ge 6$，由對邊建構原則知過 P_{ii} 向 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 可建構 $B-$ 多邊形 $A_1A_2\cdots A_{i+n/2}A_{n-i+1}\cdots A_n$，所以其邊數為

$A_1\to A_{i+n/2}$ 的邊數 $+1$ $(\overline{A_{i+n/2}A_{n-i+1}})+i$ $(A_{n-i+1}\to A_n\to A_1)$，即

$$(i+n/2-1)+1+i=2i+n/2。$$

又由對稱性質知過 P_{ii} 向 $\overline{A_1A_n}$ $(i=1),\overline{A_{n-i+1}A_{n-i+2}}$ $(i\ne 1)$ 同樣可建構 $B-(2i+n/2)$ **邊形**。

例如：圖 29 中過 P_{11} 向 $\overline{A_1A_2}$ 或 $\overline{A_1A_8}$ 皆建構 $B-(2\cdot 1+8/2)$ **邊形**，即 $B-$ 六**邊形**。

因此，$\overline{A_iA_{i+1}}$ 與 $\overline{A_1A_n}$ $(i=1),\overline{A_{n-i+1}A_{n-i+2}}$ $(i\ne 1)$ 可建構**兩個** $B-(2i+n/2)$ **邊形**。

(ii)在 $\Delta P_{ii}H_1M_2$ 與 $\Delta P_{ii}H_2M_1$ 中，參見圖 32，因為 $\angle H_1P_{ii}M_2=\angle H_2P_{ii}M_1$(對頂角相等)且 $\angle P_{ii}H_1M_2=\angle P_{ii}H_2M_1=90^\circ$，所以 $\Delta P_{ii}H_1M_2\sim\Delta P_{ii}H_2M_1$ (AA 相似性質)，得到 $\angle H_1M_2P_{ii}=\angle H_2M_1P_{ii}$，故由**圓內接四邊形判別性質**知四邊形 $H_1M_2M_1H_2$ 為圓內接四邊形。

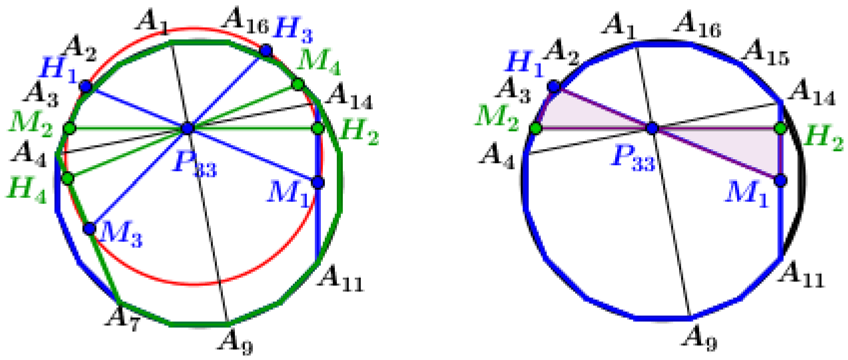


圖 32：過 P_{ii} 中兩個 $B-(2i+n/2)$ 邊形的共圓性質($n=16$)

同理可知四邊形 $H_4M_3M_4H_3$ 為圓內接四邊形。由於 P_{ii} 為二組交弦共同的交點，所以兩個四邊形的外接圓是同一個圓，因此，$H_1,H_2,H_3,H_4,M_1,M_2,M_3,M_4$ 等八點共圓。 ■

【定理 13】(過 P_{ii} 向第 i 條水平分線後緊連的邊建構 $B-$多邊形的邊數及共圓性質)

設 P_{ii} 為正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ($n\geq 10$)中兩垂直對角線的交點，則(i)過 P_{ii} 向第 i 條水平分線後緊連的邊可建構 $B-(2i+2+n/2)$ **邊形**。(ii)其兩個 $B-(2i+2+n/2)$ 邊形中邊上或邊的延長線上垂足點 H_1,H_2,H_3,H_4 與邊上中點 M_1,M_2,M_3,M_4 等八點共圓，但當 $n=4i+2$ 時，過 P_{ii} 時，沒有共圓性質。

【證明】(i)仿照**定理 12** 證明。由對邊建構原則知過 P_{ii} 向 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 可建構 $B-$多邊形

$A_1A_2\cdots A_{i+2+n/2}A_{n-i+1}A_n$ ，所以其邊數為 $A_1\rightarrow A_{i+2+n/2}$ 的邊數

$+1\,(\overline{A_{i+2+n/2}A_{n-i+1}})+i\,(A_{n-i+1}\rightarrow A_n\rightarrow A_1)$ ，即 $(i+2+n/2-1)+1+i=2i+2+n/2$ 。

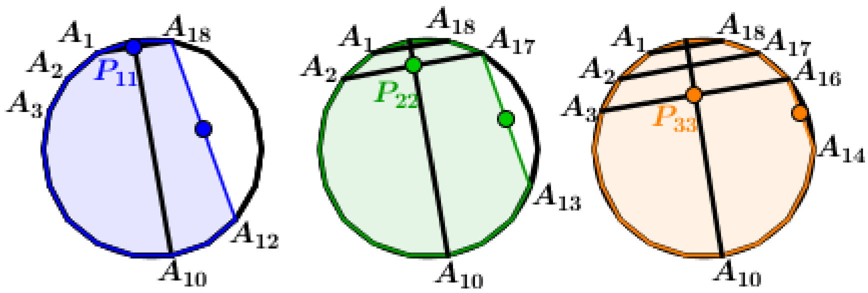


圖 33：過 P_{ii} 可建構 $B-(2i+2+n/2)$ 邊形 ($n=18$)

例如：圖 30 中過 P_{11} 向 $\overline{A_2A_3}$ 或 $\overline{A_9A_{10}}$ 皆建構 $B-(2\cdot 1+2+10/2)$ **邊形**，即 $B-$九邊形。

圖 33 中過 P_{11}、P_{22}、P_{33} 向**後緊連的邊**建構 $B-$多邊形的邊數分別為 13、15、17。

若考慮$\overline{A_{n-i}A_{n-i+1}}$，由**對稱性質**知其邊數也是相同，故得證。

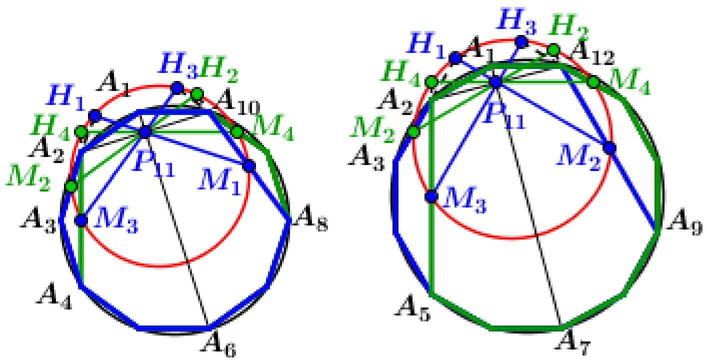


圖 34：過P_{ii}中兩個$B-(2i+2+n/2)$邊形的共圓性質（$n=10.12$）

(ii)仿照**定理 12** 來證明得知$H_1,H_2,H_3,H_4,M_1,M_2,M_3,M_4$等八點共圓，但當$n=4i+2$時，過$P_{ii}$向**第$i$條水平分線後緊連的邊**作垂直線時，此垂直線為$\overline{A_{i+1}A_{n-i+1}}$，無法建構$B-$**多邊形**且沒有共圓性質。 ■

(四)不過對稱軸上的點之$B-$多邊形

前面已探討過對稱軸上的點情形，那麼**不過對稱軸上的點**是否皆能建構$B-$多邊形呢？**不過對稱軸上的點**分二種來討論：點P_{i1}及P_{ij}，其中$i>j,1\le i\le\left[\dfrac{n}{4}\right],2\le j<\left[\dfrac{n}{4}\right]$。

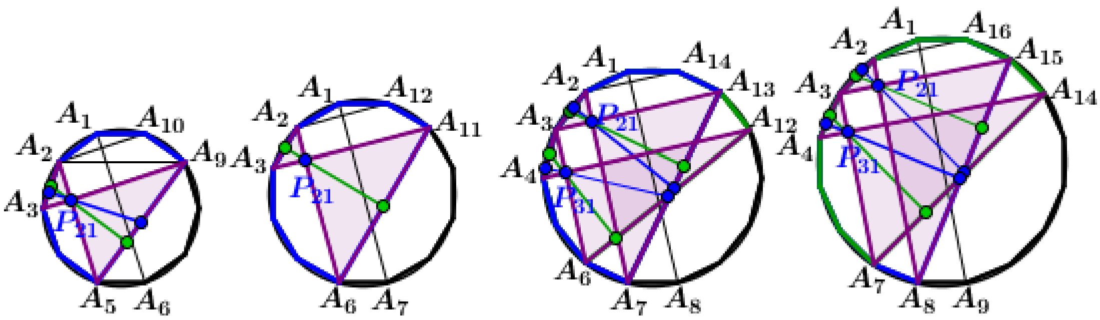


圖 35：過P_{i1}建構$B-(2+n/2)$邊形

先探討P_{i1}的情形，注意當$n=8$時，僅有點P_{21}，這點剛好是$\overline{A_3A_7}$為對稱軸與第1條垂直分線的交點，所以此點視為對稱軸上點，底下所談的P_{i1}必不在對稱軸上，所以從$n\ge 10$探討。

定理 14 中前緊連的邊之n與i的範圍：$n\ge 10$；當$n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$時，$1\le i\le\left[\dfrac{n}{4}\right]$；當$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$時，$1\le i<\left[\dfrac{n}{4}\right]$。注意**第$i$條水平分線前緊連的邊**的情形，僅能邊為$\overline{A_iA_{i+1}}$。

【定理 **14**】(過 P_{i1} 向第 i 條水平分線前緊連的邊之 $B-$多邊形及其共圓性質)

設 P_{i1} 為正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ $(n\ge 10)$ 中兩垂直對角線的交點，則(i)過 P_{i1} 向 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 可建構 $B-(2+n/2)$ **邊形**。(ii)其 $B-(2+n/2)$ 邊形中邊上垂足點 H_1、H_2 與中點 M_1、M_2 四點共圓，但當 $n=8i-4$ 時，過 P_{i1} 時，沒有共圓性質。

【證明】(i)由於過 P_{i1} 向 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 建構 $B-$**多邊形**時，兩垂直對角線形成**蝴蝶的構形**，所以由**婆羅摩笈多定理**知四邊形 $A_iA_{i+1}A_{2-i+n/2}A_{n-i+1}$ 為 $B-$**四邊形**，參見圖 35。對於增加兩弧 $\overset{\frown}{A_{i+1}A_{2-i+n/2}}$ 與 $\overset{\frown}{A_iA_{n-i+1}}$ 的邊也不影響建構原則，故可建構 $B-$**多邊形** $A_iA_{i+1}\cdots A_{2-i+n/2}A_{n-i+1}\cdots A_n$。由**圓心角性質**知 $\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots=\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}=\overset{\frown}{A_nA_1}$ 知

$$\angle A_iP_{i1}A_{n-i+1}=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_{i+1}A_{i+2}\cdots A_{2-i+n/2}}+\overset{\frown}{A_i\cdots A_1A_n\cdots A_{n-i+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{2}\times\overset{\frown}{A_1A_2}\right)=\frac{n}{4}\times\overset{\frown}{A_1A_2}\right.,$$

所以過 P_{i1} 向邊 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 建構 $B-$**多邊形**之邊數是相等的，其值為 $2+\dfrac{n}{2}$，參見圖 36。

因此，過 P_{i1} 向 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 建構 $B-(2+n/2)$ **邊形** $A_iA_{i+1}\cdots A_{2-i+n/2}A_{n-i+1}\cdots A_n$。

(ii)由(i)知符合建構原則的邊僅有 $\overline{A_iA_{i+1}}$，所以過 P_{i1} 向 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 建構中點僅有二點 M_1,M_2 與垂足點僅有二點 H_1,H_2，參見圖 36，故由**預備定理 1** 知 M_1,M_2,H_1,H_2 四點共圓。

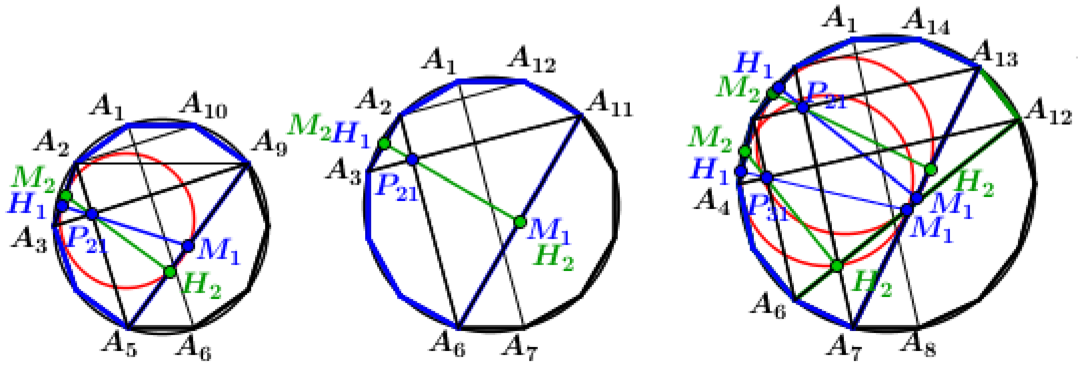


圖 36：過 P_{i1} 中 $B-(2+n/2)$ 邊形的共圓性質

特別地，圖 36(中)中 $n=12$ 時，由於過 P_{21} 中的中線與垂直線是同一條直線，所以 M_1,H_2 為同一點與 H_1,M_2 為同一點，此時沒有四點共圓性質。此外，當 $n=20$ 時，過 P_{31} 中的中線與垂直線也是同一條直線；當 $n=28$ 時，則是過 P_{41} 的情形；以此類推知當 $n=8i-4$ 時，過 P_{i1} 的中線與垂直線是同一條直線，所以沒有共圓性質。 ■

【**定理 15**】(過 P_{i1} 向第 i 條水平分線後緊連的邊之 $B-$多邊形及其共圓性質)

設 P_{i1} 為正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ $(n\geq 10)$中兩垂直對角線的交點，則過 P_{i1} 向 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 的 $B-$多邊形僅有當 $n=12$ 時，過 P_{21} 向 $\overline{A_3A_4}$ 可建構 $B-$九邊形。

【**證明**】由於 P_{i1} 不在對稱軸上點，所以過 P_{ii} 向 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的垂直線移動原則是不存在的。

我們觀察當 $n=12$ 時，過 P_{21} 向**前緊連的邊** $\overline{A_2A_3}$ 作中線或垂直線是同一條且過中心 O 時，再考慮**後緊連的邊**是符合建構原則，可建構 $B-$九邊形，參見圖 37。

又由**定理 15** 知當 $n=8i-4$ 時，過 P_{i1} 向**第 i 條水平分線後緊連的邊**作中線與垂直線是同一條直線，但 $i\geq 3$ 時，均無法符合建構原則，原因是<u>中線連線的對邊無法為邊或對角線</u>。

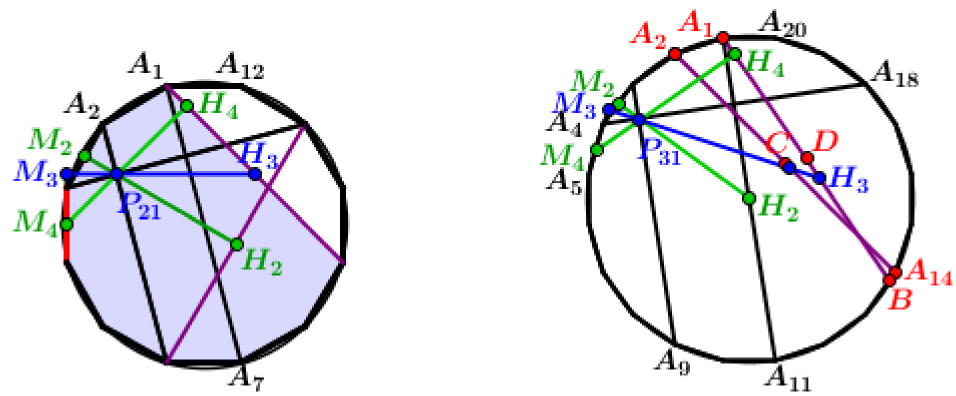


圖 37：僅有過 P_{21} 向 $\overline{A_3A_4}$ 可建構 $B-$九邊形(當 $n=20$ 時，過 P_{31} 向 $\overline{A_4A_5}$ 無法建構 $B-$多邊形)

故僅有當 $n=12$ 時，過 P_{21} 向 $\overline{A_3A_4}$ 可建構 $B-$九邊形。 ■

接著探討 P_{ij} 的情形。**例如**：當 $n=18$ 時，有 P_{32} 、 P_{42} 及 P_{43} 三點，參見圖 39(右)。

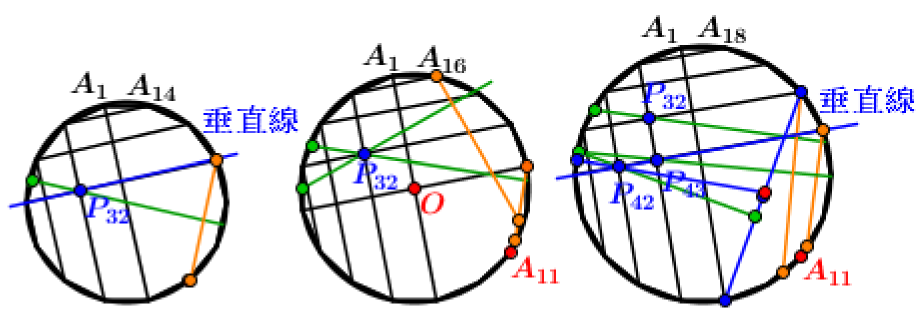


圖 38：過 P_{ij} 無法建構 $B-$多邊形

【定理 16】(過 P_{ij} 無法建構 $B-$多邊形)

設 P_{ij} 為正偶數邊 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ($n\ge 14$)中兩垂直對角線的交點，則過 P_{ij} 向各邊皆無法建構 $B-$多邊形，其中 $i>j, 1\le i\le\left[\frac{n}{4}\right], 2\le j<\left[\frac{n}{4}\right]$。參見圖 38。

【證明】注意到 P_{ij} 為不過對稱軸上的點且 $j\ne 1$，參見圖 38，是無法如過 P_{i1} 時，兩垂直對角線形成**蝴蝶的構形**或者垂直線與中線同一條的情形，所以由**定理 15** 知是無法建構 $B-$多邊形，其原因有四種，僅其一不符合就違背建構原則：

(i)垂直線在對角線上。(ii)垂直線或中線連線的對邊無法為邊或對角線。(iii)中線連線無法過對邊的垂足點。(iv)垂直線連線無法過對邊的中點。參見圖 38 與表 1。

表 1：無法建構 $B-$多邊形的原因

n	第 i 條水平分線前緊連的邊	第 i 條水平分線後緊連的邊
18	P_{32},P_{42}:原因**(ii)**　P_{42}：原因**(iv)**	P_{32}：原因為**(ii)**　P_{42},P_{43}：原因為**(i)**

因此，過 P_{ij} 無法建構 $B-$多邊形。 ■

四、探討圓內接多邊形及橢圓內接多邊形中的 $B-$多邊形

(一)圓內接多邊形

【定理 17】(圓內接 n 邊形的 $B-$多邊形)

在圓內接 n 邊形中，設 P 為兩垂直對角線的交點，則過 P 可建構無限多個的 $B-$多邊形。

【證明】由**定理 12** 與**定理 14** 知要能建構 $B-$多邊形關鍵在於**蝴蝶的構形**，現在來建構：

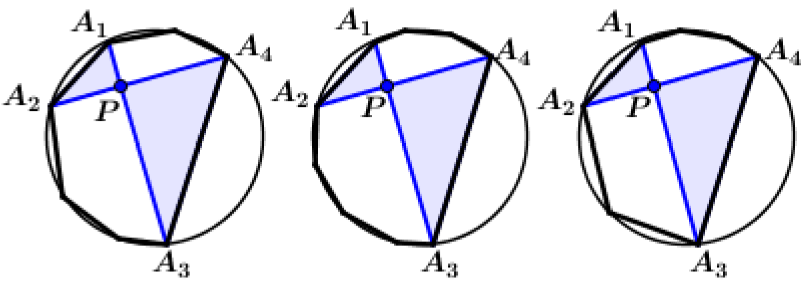


圖 39：過 P 可建構無限多個的 $B-$多邊形

兩垂直對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P 符合**蝴蝶的構形**，參見圖 39，在兩弧 $\overset{\frown}{A_2A_3}$ 與 $\overset{\frown}{A_1A_4}$ 上任

意取$n-4$點，記作$A_5, A_6, \cdots A_n$，即圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_n$為過P向$\overline{A_1A_2}$建構的$B-n$邊形。因此，對於任意正整數n，過P可建構無限多個的$B-n$邊形。■

(二)橢圓內接多邊形

圓是橢圓的特例，現在探討橢圓內接多邊形是否存在**婆羅摩笈多定理**呢？我們知道橢圓內接正n邊形，僅有$n=4$時成立，即僅存在橢圓內接正方形。在四邊形中，若要考慮兩對角線相互垂直的圖形，最常見就是菱形、鳶形及正方形，美妙地它們都存在橢圓內，說明：

<u>橢圓內接菱形</u>：此菱形為橢圓中長軸頂點與短軸頂點所成的四邊形，參見圖 40。

<u>橢圓內接鳶形</u>：此鳶形取橢圓中長軸頂點與平行短軸的弦兩頂點所成的四邊形，參見圖 41。

<u>橢圓內接正方形</u>：此正方形為橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中以$(t,t),(-t,t),(-t,-t),(t,-t)$所成四邊形，其中$t^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，參見圖 42。上述是否存在**婆羅摩笈多定理**呢？參見**定理 18** 及**定理 20**。

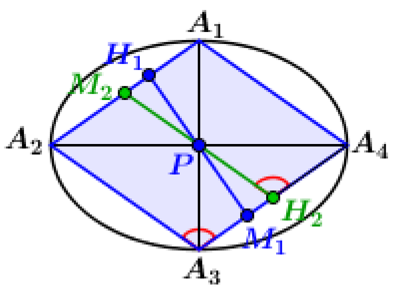


圖 40：橢圓內接菱形

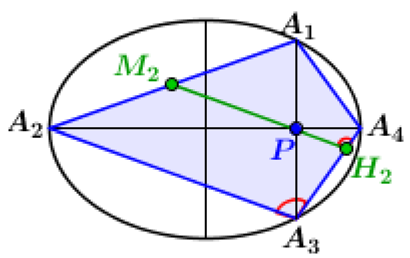


圖 41：橢圓內接鳶形

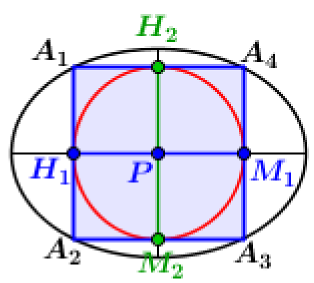


圖 42：橢圓內接正方形

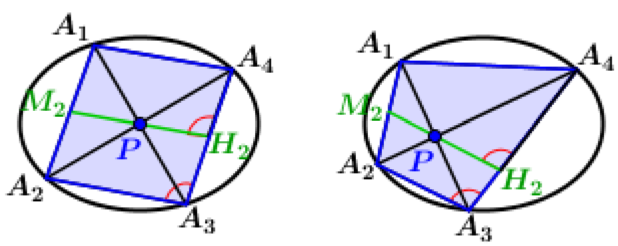
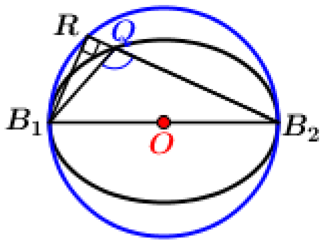


圖 43：橢圓內接菱形及鳶形中對角線不一定要平行長短軸

【註】(i)由於橢圓內平行弦的中點都落在通過橢圓中心的直線上，即可證明橢圓內接正方形的邊與橢圓的兩軸平行，參見圖 42。(ii)橢圓內接菱形及鳶形中對角線不一定要平行長短軸，參見圖 43。為了方便，定義橢圓內長軸上的周角稱為**橢圓周角**，其性質參見**性質 5**。

【性質 5】(橢圓內長軸上的橢圓周角且平行長軸的兩弦間同弧對的橢圓周角相等)

設 B_1, B_2 為橢圓的長軸頂點，若 Q, Q_1, Q_2, S, T 為橢圓上一動點且 $\overline{SQ_1}$ 與 $\overline{TQ_2}$ 均平行長軸，參見圖 44-45，則(i) $\angle B_1QB_2$ 為鈍角。(ii) $\angle SQ_1T = \angle SQ_2T$ 。



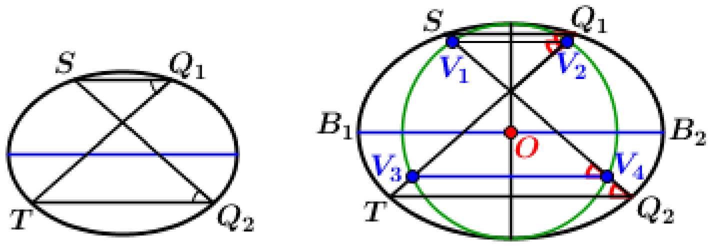


圖 44：橢圓內長軸上的橢圓周角　圖 45：平行長軸的兩弦間同弧對的橢圓周角相等

【證明】(i)作以橢圓中心 O 為圓心且半徑為長軸長的圓，參見圖 44。由**圓周角性質**知 $\angle B_1RB_2 = 90^\circ$ ，又由**外角性質**知 $\angle B_1QB_2 = 90^\circ + \angle RB_1Q > 90^\circ$ 。因此， $\angle B_1QB_2$ 為鈍角。

(ii)作以橢圓中心 O 為圓心且半徑為短軸長的圓 Γ，$\overline{SQ_2}$、$\overline{TQ_1}$ 分別與圓 Γ 相交於 V_1、V_4、V_2、V_3，參見圖 45。連接 $\overline{V_1V_2}$ 及 $\overline{V_3V_4}$，由**圓與橢圓對稱性質**知 $\overline{SQ_1} // \overline{TQ_2} // \overline{V_1V_2} // \overline{V_3V_4}$ 。又由**圓周角性質**知 $\angle V_1V_2V_3 = \angle V_1V_4V_3$，故 $\angle SQ_1T = \angle V_1V_2V_3 = \angle V_1V_4V_3 = \angle SQ_2T$ 。 ■

【定理 18】(橢圓內接菱形及鳶形不存在婆羅摩笈多定理)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為橢圓內接菱形或鳶形，則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 均不存在**婆羅摩笈多定理**。

【證明】(i)橢圓內接菱形的建構方式，參見圖 40 與圖 43。

由於橢圓為對稱圖形，所以取 $\overline{A_1A_2}$ 的中點 M_2 ，連接 $\overline{M_2P}$ 的延長線交 $\overline{A_3A_4}$ 於 H_2 ，由三角形中點連線性質知 $\overleftrightarrow{M_2P} // \overline{A_2A_3}$ ，再由**平行線截比例線段性質**知 H_2 必為 $\overline{A_3A_4}$ 的中點，且 $\angle A_2A_3A_4 = \angle M_2H_2A_4$ ，再由**性質 5** 知 $\angle A_2A_3A_4$ 為鈍角，即 $\angle M_2H_2A_4$ 必不為直角，故橢圓內接菱形不存在**婆羅摩笈多定理**。同理其餘邊均不存在**婆羅摩笈多定理**。

(ii)仿照(i)證明圖 41 與圖 43 中 $\angle A_2A_3A_4 = \angle M_2H_2A_4 \neq 90°$，故橢圓內接鳶形均不存在**婆羅摩笈多定理**。同理其餘邊均不存在**婆羅摩笈多定理**。 ■

現在要提出一個問題是**截半橢圓的直角存在**嗎？顯然可知**截半橢圓的直線必通過中心**O，則橢圓內接矩形中對角線所對**橢圓周角必為直角**，同時**性質 5** 中**橢圓內平行長軸的兩弦間同弧對的橢圓周角相等**，參見圖 46(a)。圖 46(b)中四邊形$A_1A_2A_3A_4$不為橢圓內接矩形，同弧對橢圓周角皆無法相等，但**定理 19** 中的證明會使用到**兩弦間同弧對橢圓周角相等性質**，推導出$\overline{A_2N}$與$\overline{NA_3}$的比值，所以**定理 19** 中橢圓內接四邊形必為矩形。

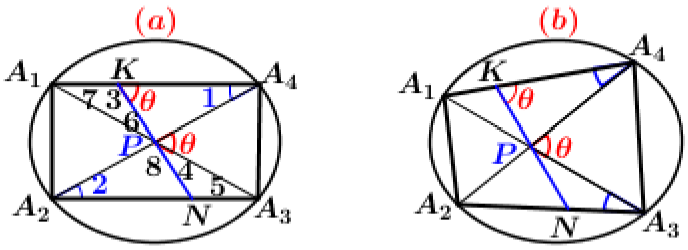


圖 46：橢圓內平行長軸的兩弦間同弧對的橢圓周角相等性質

【定理 19】(推廣預備定理 2：橢圓內接四邊形兩對角線交角為θ)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為橢圓內接矩形，若$\overline{A_1A_3}$與$\overline{A_2A_4}$交於P，夾角為θ，過P作直線分別與$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$相交於K、N，其中$\angle PKA_4=\theta$，參見圖 47(a)，則$\dfrac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}}=\dfrac{\sin(\theta+\angle PA_3A_2)}{\sin\angle PA_2A_3}$。

【證明】由**性質 5** 知$\angle 2=\angle 7$(對同弧$\overparen{A_3A_4}$)，又$\theta=\angle 6+\angle 7=\angle 2+\angle 5$，所以$\angle 6=\angle 5$。

又$\angle 4=\angle 6$(對頂角相等)，故$\angle 4=\angle 5$，即$\overline{NP}=\overline{NA_3}$。由**正弦定理**知

$$\frac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}}=\frac{\overline{A_2N}}{\overline{NP}}=\frac{\sin\angle 8}{\sin\angle 2}=\frac{\sin[180^\circ-(\theta+\angle 4)]}{\sin\angle PA_2A_3}=\frac{\sin(\theta+\angle 4)}{\sin\angle PA_2A_3}=\frac{\sin(\theta+\angle 5)}{\sin\angle PA_2A_3}=\frac{\sin(\theta+\angle PA_3A_2)}{\sin\angle PA_2A_3}。$$

因此，$\dfrac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}}=\dfrac{\sin(\theta+\angle PA_3A_2)}{\sin\angle PA_2A_3}$。 ■

【定理 20】(橢圓內接正方形存在婆羅摩笈多定理)

設正方形$A_1A_2A_3A_4$為橢圓內接正方形，則(i)橢圓內接正方形$A_1A_2A_3A_4$存在**婆羅摩笈多定理**。(ii)其正方形中邊上垂足點H_1,H_2,H_3,H_4與中點M_1,M_2,M_3,M_4等四點共圓。參見圖 42。

【證明】(i)由**定理 19** 知當$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$且四邊形為正方形時，$\theta=90^\circ$，參見圖 42，則

$$\frac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}}=\frac{\sin(90^\circ+\angle PA_3A_2)}{\sin\angle PA_2A_3}=\frac{\cos\angle PA_3A_2}{\sin\angle PA_2A_3}=\frac{\sin\angle PA_2A_3}{\sin\angle PA_2A_3}=1\text{，即}\overline{A_2N}=\overline{NA_3}\text{。}$$

因此，橢圓內接正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 存在**婆羅摩笈多定理**。

(ii)由**預備定理 1** 知點 H_1,H_2,H_3,H_4 ,M_1,M_2,M_3 ,M_4 等四點共圓。 ■

【**定理 21**】(**異於正方形的橢圓內接四邊形存在婆羅摩笈多定理**)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為異於正方形的橢圓內接四邊形中，則其四邊形不存在**婆羅摩笈多定理**。

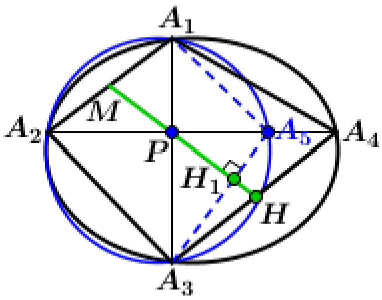


圖 47：異於正方形的橢圓內接四邊形不存在婆羅摩笈多定理

【**證明**】不失一般性，考慮橢圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，參見圖 47。

設 P 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中兩垂直對角線的交點，若過 P 向 $\overline{A_1A_2}$ 作中線 $\overrightarrow{MP}$ 交 $\overline{A_3A_4}$ 於 H ，

現在要證明是否 $\overline{MH}\perp\overline{A_3A_4}$ 。

過三點 A_1,A_2,A_3 作一圓 Γ ，參見圖 47，圓 Γ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 A_5 且過 P 向 $\overline{A_1A_2}$ 作中線交 $\overline{A_3A_5}$

於 H_1 ，則由**婆羅摩笈多定理**知 $\overline{MH_1}\perp\overline{A_3A_5}$ ，即 $\angle MH_1A_5=\angle A_3H_1H=90^\circ$ (對頂角相等)。

在 ΔA_3H_1H 中，由**外角性質**知 $\angle A_4HM=\angle A_3H_1H+\angle H_1A_3H>90^\circ$ ，故 $\overline{MH}\not\perp\overline{A_3A_4}$ ，即橢

圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不存在**婆羅摩笈多定理**。 ■

【**定理 22**】(**橢圓內接** n **邊形的** $B-$**多邊形之建構性質**)

在橢圓內接 n 邊形中，設 P 為兩垂直對角線的交點，則過 P 可建構無限多個的 $B-n$ **邊形**。

【**證明**】由**定理 21** 知在橢圓內接四邊形中，僅有橢圓內接正方形為 $B-$**正方形**。

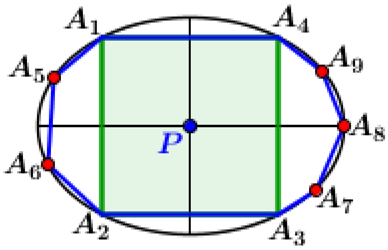


圖 48：橢圓內建構 $B-$九邊形

在橢圓內接正方形中的兩弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 與 $\overset{\frown}{A_3A_4}$ 上任意取 $n-4$ 點，記作 $A_5, A_6, \cdots A_n$，即橢圓內接 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 為過 P 的 $B-n$ **邊形**，參見圖 48。因此，對於任意正整數 n，過 P 可建構無限多個的 $B-n$ **邊形**。 ■

伍、研究結果

一、利用兩圓內離、外切、外離及相交兩點建構 $B-$**四邊形**，推導其邊長性質，參見**定理 1~6**。

二、證明圓內接正奇數邊 n 邊形無法建構 $B-$多邊形，參見**定理 7**。若採用放寬一般角度 θ 條件：兩對角線的夾角 90° 改為 θ （$0^\circ < \theta < 180^\circ$）及過兩對角線交點作一邊的垂直線改為作一邊夾角為 θ 的直線，即推廣**預備定理 2**，參見**定理** 8。進一步推廣至橢圓內接四邊形，美妙地，僅能在橢圓內接矩形成立，參見**定理 19**。

三、證明圓內接正偶數邊 n 邊形可建構 $B-$多邊形及共圓性質。將其兩垂直對角線交點分類為**過對稱軸上的點-中心** O **及** P_{ii} **與不過對稱軸上的** P_{i1} **及** P_{ij}，其結果參見**定理 9-16** 與**表 2**。

表 2：建構 $B-$多邊形及共圓性質

邊＼交點	中心 O	P_{ii}	P_{i1}	P_{ij}
前緊連的邊	$B-$正 n 邊形及 n 點共圓 **(蝴蝶的構形)**	$B-$正 $(2i+n/2)$ 邊形及八點共圓**(蝴蝶的構形及對邊移動原則)**	$B-$正 $(2+n/2)$ 邊形及四點共圓 **(蝴蝶的構形)**	無法建構 $B-$多邊形
後緊連的邊		$B-$正 $(2i+2+n/2)$ 邊形及八點共圓 **(對邊移動原則)**	僅有 $n=12$，過 P_{21} 建構 $B-$九邊形及四點共圓 **(垂直線與中線同一直線)**	
其他邊		除了前緊連的邊及後緊連的邊外，其他邊均不符合建構原則	除了前緊連的邊及 $n=12$ 時後緊連的邊外，其他邊不符合建構原則	

四、圓內接多邊形僅要遵循**蝴蝶的構形**可建構無限多個的 $B-$多邊形，參見**定理 17**。推廣至橢圓內接四邊形僅有橢圓內接正方形存在**婆羅摩笈多定理**，參見**定理 18-21**。進而橢圓內接多邊形僅要保有橢圓內接正方形的構形，就可建構無限多個的 $B-$**多邊形**，參見**定理 22**。

陸、結論與未來展望

本作品利用兩圓相交關係來探討 $B-$**四邊形**，及其四邊形的邊長性質，美妙地呈現多樣的 $B-$**四邊形**。特別地，**定理 5** 中兩圓外離中的 $B-$**四邊形**居然就是**定理 3** 中兩圓外切(與**畢氏定理**有關)中的 $B-$**四邊形**，此時感受到幾何性質的連貫之美。

將**婆羅摩笈多定理**推廣至圓內接正偶數邊 n 邊形中，將兩垂直對角線的交點分類為中心 O、P_{ii}、P_{i1} 及 P_{ij} 來探討，推導出過 O 及 P_{ii} 向各邊作**垂直線移動原則**，再考慮**中線移動原則**，得到 $B-$**多邊形**的建構原則，特別是並非每一邊均滿足建構原則。過 P_{i1} 及 P_{ij} 的邊與對角線符合**蝴蝶的構形**必可建構 $B-$**多邊形**，特別地當 P_{i1} 時，由圓內角性質推導出邊數皆相同，令人欣喜。若不符合**蝴蝶的構形**時，就無法導出垂直線移動原則，顯然僅能特例時，才能建構 $B-$**多邊形**。最後推廣至橢圓內接多邊形，若將**婆羅摩笈多定理**中放寬一般角度條件：其夾角 90° 皆改為任意角 θ，從證明中會用到橢圓內平行長軸的兩弦中同弧對的橢圓周角相等，推導出橢圓內接矩形可能存在**婆羅摩笈多定理**，但兩對角線相互垂直，僅有正方形成立。針對**婆羅摩笈多定理**中放寬一般角度條件的深入探討及其延伸幾何性質極感興趣，未來會繼續研發它，使之更完備與嚴謹。此外，每個定理的嚴謹度及完備性，仍會繼續編修至完美為止。

柒、參考資料

[1]沈康身 (2011)。**歷史數學名題賞析 03**。新北市：稻田出版社。

[2]黃家禮 (1997)。**幾何明珠**。台北市：九章出版社。

[3]Coxeter, H. S. M. (1967). Greitzer, S. L.*Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p. 59.

[4]Honsberger, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p.37.

【評語】030424

作者們針對如何構造滿足 Brahmagupta 定理條件的四邊形做了討論，給出了一些結果。對於如何構造具有類似特定性質的圓內接多邊形，也做了一些討論。對一些主要結果的論述說明的很清楚，內容也十分的豐富，作者們針對這個問題投入了許多的心力，研究精神值得鼓勵。討論的重心集中於”如何建構具有對角線相互垂直的四邊形”這個面向上，但如同說明書中所提可以建構無限多個具有類似性質（有一組對角線相互垂直）的多邊形，而由定理，只要具有這樣的性質，就會有相應的特性。構造的方式可能有非常多種，使得與定理的推廣沒有太多的關連性，是較為可惜之處。類比的諸多性質. 本質上還是原來四邊形結果加邊的結果，如果能調整研究方向聚焦在原本設定的問題上應該會更好。

作品海報

一、前言

圓內接四邊形有一個幾何定理：**若圓內接四邊形的兩對角線相互垂直，則連接對角線交點與一邊垂足點的連線過對邊的中點，稱為婆羅摩笈多定理**。

本作品將圓內接四邊形推廣至圓或橢圓內接多邊形的情形，定義其多邊形中若滿足「**連接兩垂直對角線交點與一邊垂足點的連線過對邊的中點，同時連接同一邊中點的連線垂直於對邊**」，則稱此多邊形為**婆羅摩笈多多邊形，簡稱為 $B-$多邊形**。

先由**兩圓相交關係**來建構**婆羅摩笈多四邊形**，接著從**圓內接正多邊形**來探討婆羅摩笈多多邊形的建構原則，推導出其邊數及共圓性質，進一步推導出圓內接多邊形的情形。最後探討**橢圓內接菱形、鳶形及正方形**是否存在婆羅摩笈多定理及其幾何性質，再推廣至橢圓內接多邊形的情形。

1.研究動機

上數學專題課時，從網路及書籍(參考資料[1]、[2]、[3]與[4])中研讀一些幾何定理，特別對「**婆羅摩笈多定理**」感興趣，於是提出三個問題：「**如何建構婆羅摩笈多四邊形呢？**」、「**婆羅摩笈多定理是否存在於圓內接多邊形呢？**」、「**婆羅摩笈多定理是否存在於橢圓內接多邊形呢？**」

2.研究目的

(1)利用兩圓相交關係來建構婆羅摩笈多四邊形，並且探討其邊長與半徑性質。
(2)探討正奇數邊多邊形不存在婆羅摩笈多定理，並且將直角改一般角度來探討其對邊性質。
(3)將正偶數邊多邊形中兩垂直對角線交點分類，探討過交點可建構婆羅摩笈多多邊形邊數及共圓性質。
(4)利用正偶數邊多邊形中的建構原則推廣至圓內接多邊形的情形。
(5)探討橢圓內的橢圓周角之性質，進而推導出橢圓內接四邊形存在婆羅摩笈多定理的情形，再推廣至橢圓內接多邊形的情形。

3.定義、參考文獻與預備定理

【婆羅摩笈多定理】 設 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 及 $\overline{A_2A_4}$ 垂直相交於 P，過 P 作直線分別與 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_3A_4}$ 相交於 H,M，(i)若 $\overline{PH}\perp\overline{A_1A_2}$，則 $\overline{A_3M}=\overline{MA_4}$。(ii)若 $\overline{A_3M}=\overline{MA_4}$，則 $\overline{PH}\perp\overline{A_1A_2}$。

對邊建構原則保持唯一性

(i)垂直線移動原則 — $\overline{PH_1}\perp\overline{A_1A_2}\Leftrightarrow\overline{A_5M_1}=\overline{M_1A_8}$

(ii)中線移動原則 — $\overline{A_1M_2}=\overline{M_2A_2}\Leftrightarrow\overline{PH_2}\perp\overline{A_5A_8}$

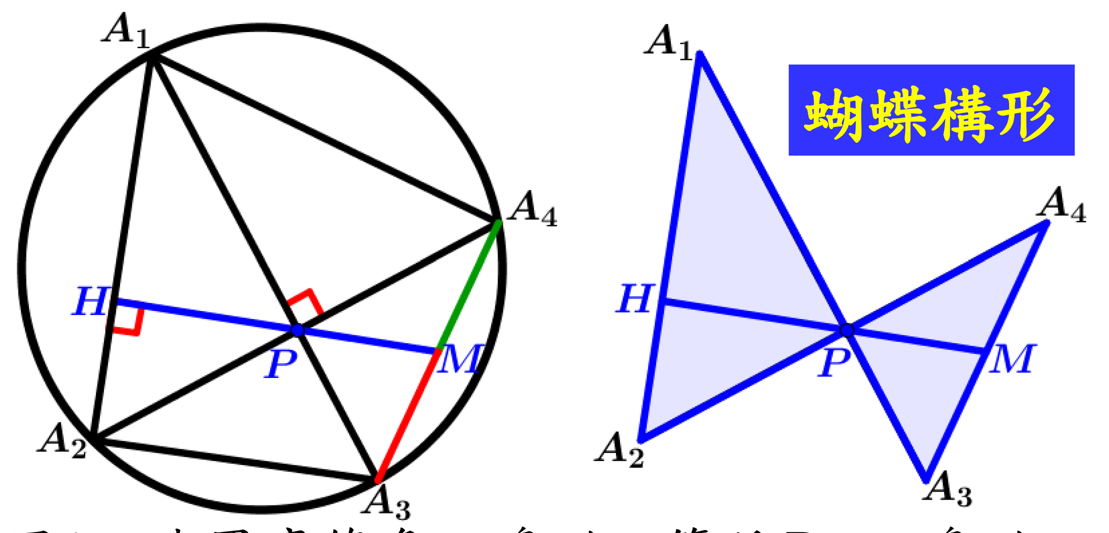


圖1：婆羅摩笈多四邊形，簡稱$B-$四邊形

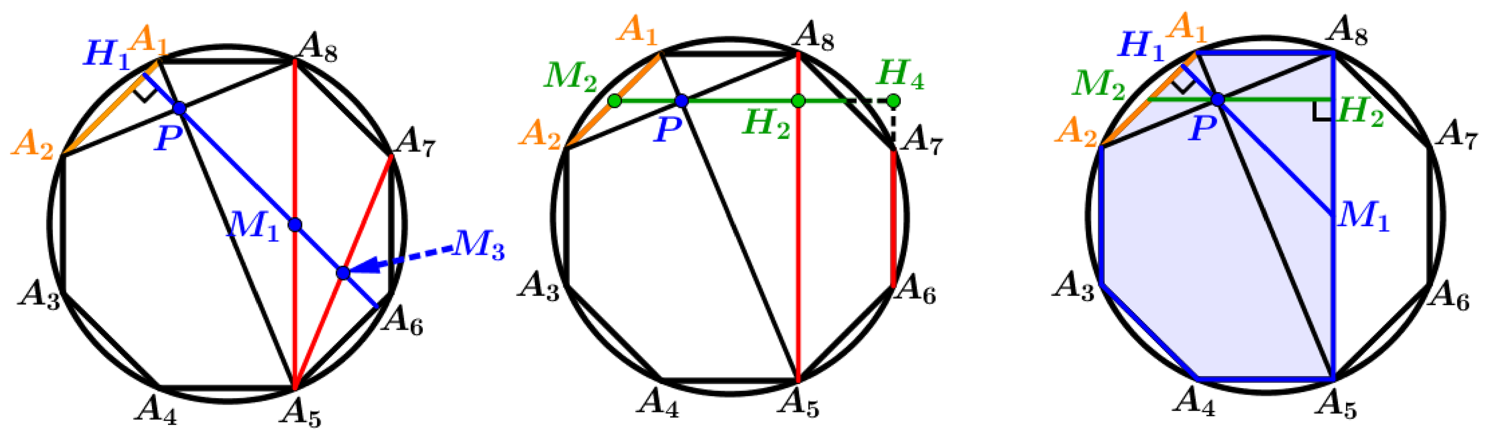


圖2：婆羅摩笈多多邊形，簡稱$B-$多邊形

【定義2】 定義**建構原則**為在圓內接多邊形及橢圓內接多邊形中兩條對角線相互垂直且符合「**連接兩垂直對角線交點與一邊垂足點的連線過對邊的中點，同時連接同一邊中點的連線垂直於對邊**」，則稱此多邊形為**婆羅摩笈多多邊形，簡稱為 $B-$多邊形**。

【預備定理1】 **【預備定理2】** **放寬一般角度條件** **【預備定理3】(圓內兩垂直交弦定理)**

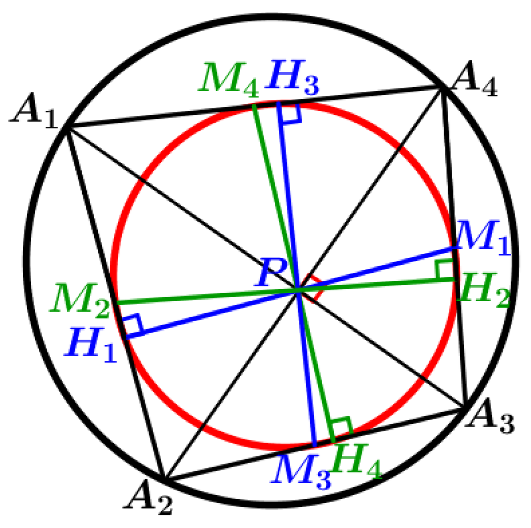
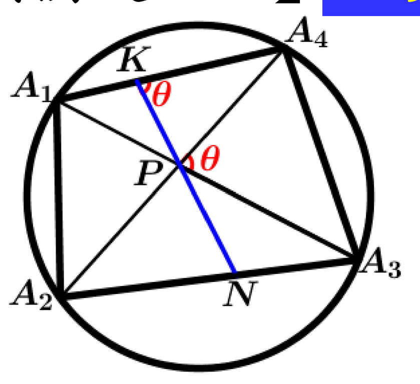


圖3：八點共圓性質



$\dfrac{\pi}{2}\rightarrow\theta$ $(0<\theta<\pi)$

$\dfrac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}}=\dfrac{\sin(\theta+\angle PA_3A_2)}{\sin\angle PA_2A_3}$

圖4：兩對角線交角為θ

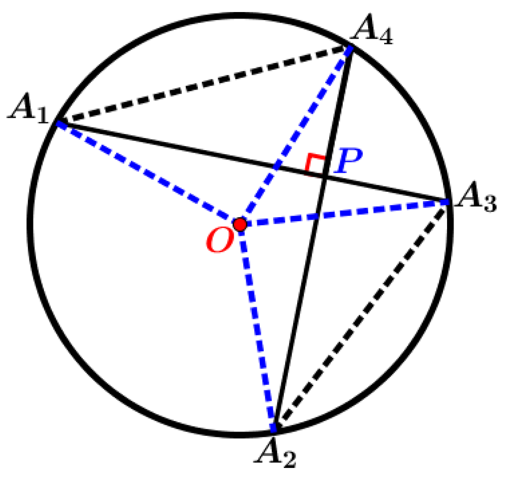


圖5：圓內兩垂直交弦定理

$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}\Rightarrow\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$

其中 r 為外接圓半徑

逆定理也成立：性質1

$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2\Rightarrow\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$

二、研究方法或過程或結果

1.探討 $B-$四邊形

【定理1】($B-$四邊形的邊長與半徑性質)

設 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形滿足 $\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$，則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 **$B-$四邊形**。

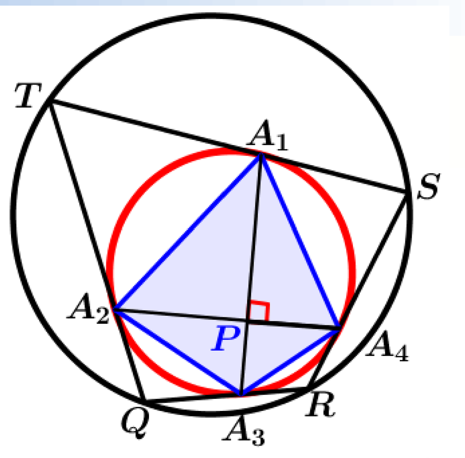


圖6：內離中的雙心四邊形

探究方法(I)：利用兩圓內離、外切、外離及相交兩點性質建構 $B-$四邊形

兩圓關係	性質	建構方式	共圓或垂直性質	增加條件	邊長與半徑性質	圖形
內離	**定理2**	建構**雙心四邊形**	$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$		$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$	圖6
外切 (I)	**定理3**	類似**畢氏定理**建構方式	A_1,A_2,A_3,A_4 共圓 及 $\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$		**斜邊** $c=\sqrt{2}r=\overline{A_2A_3}$	**圖7** (a)
外切 (II)	**定理4**	內外公切線相交兩點 A_1,A_2 與兩圓心 O_1,O_2 所成四邊形	A_1,O_1,A_2,O_2 共圓 及 $\overline{O_1O_2}\perp\overline{A_1A_2}$		$\overline{A_1A_2}=2\sqrt{r_1r_2}=\overline{T_1T_3}$	圖7 (b)
外離	**定理5**	內外公切線相交四點 A_1,A_2,A_3,A_4 所成四邊形	A_1,A_2,A_3,A_4 共圓	$\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$	$\overline{A_1A_4}=\overline{A_2A_3}=\sqrt{2}r$	**圖8**
相交兩點	**定理6**	$\overline{A_1O_2},\overline{A_2O_2}$ 為圓 Γ_1 的切線 A_1,O_1,A_2,O_2 所成四邊形	A_1,O_1,A_2,O_2 共圓 及 $\overline{O_1O_2}\perp\overline{A_1A_2}$		$r_1^2+r_2^2=4r^2$	圖9

相同

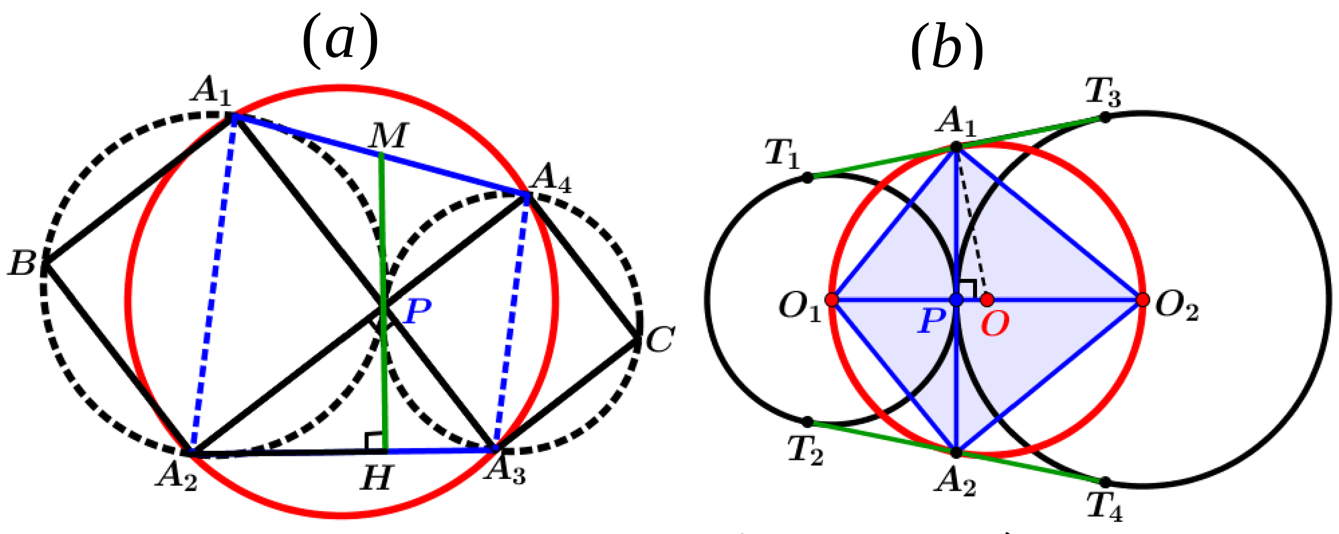


圖7：外切二種(I)(II)中的$B-$四邊形

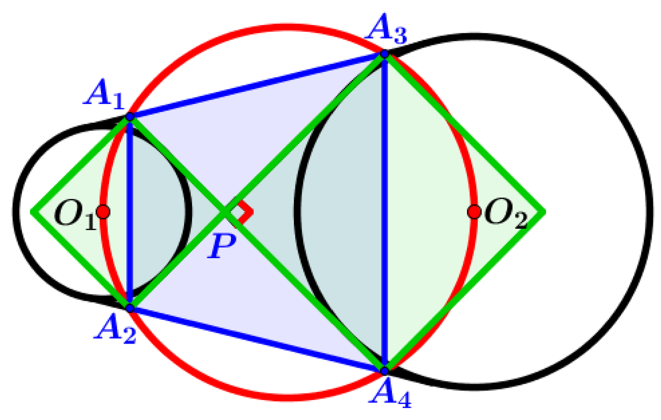


圖8：外離中的$B-$四邊形

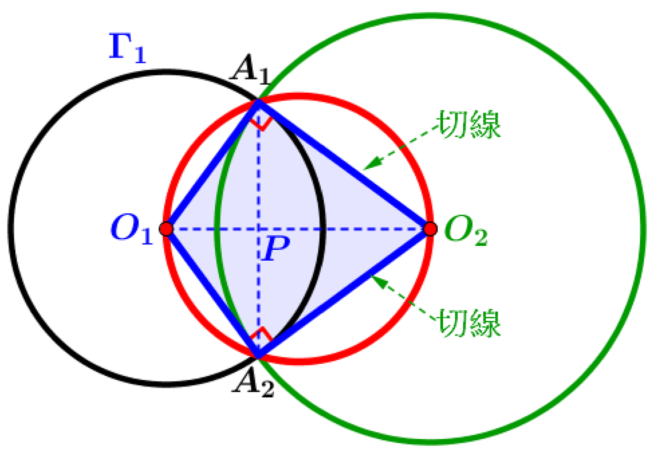


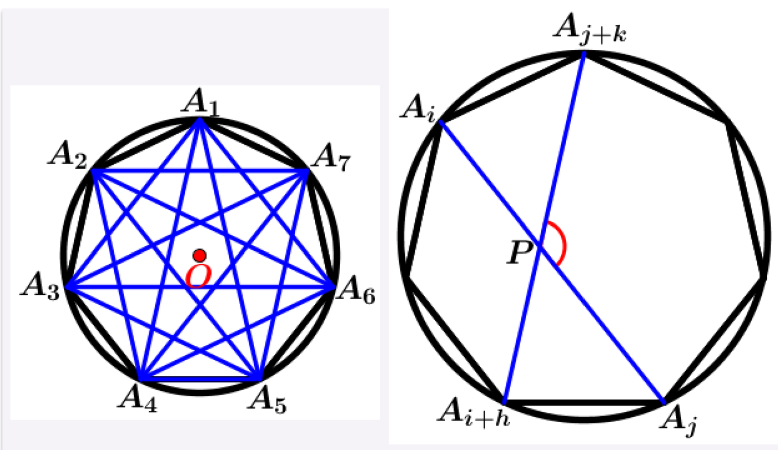
圖9：相交兩圓中的$B-$四邊形

2.探討圓內接正n邊形中的$B-$多邊形

圓內接正奇數邊 $n(\geq 5)$ 邊形

【性質 2】任兩對角線相互不垂直

【定理 7】無法建構 $B-$多邊形



由圓內角性質知

$\angle A_jPA_{j+k}=\frac{1}{2}\left(h\cdot\frac{2\pi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{\pi}{2}$

化簡得到 $n=2(h+k)$

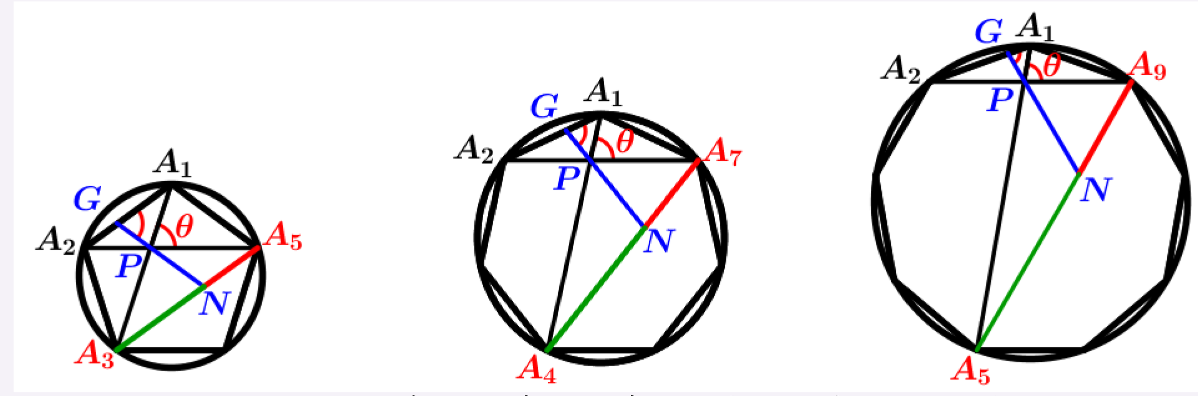
故 $2\mid n$，與已知矛盾。

圖10：圓內接正奇數邊 n 邊形對角線性質

放寬一般角度條件：$\frac{\pi}{2}\to\theta\quad(0<\theta<\pi)$

【定理 8】(推廣預備定理 2)設 $\overline{A_1A_{1+[n/2]}}$ 與 $\overline{A_2A_n}$ 相交於 P，交角為 θ，$\angle A_1GP=\theta$

則 $\frac{\overline{A_{1+[n/2]}N}}{\overline{NA_n}}=\frac{\sin(\theta+\angle PA_nA_{1+[n/2]})}{\sin\angle PA_{1+[n/2]}A_n}$。



$\theta=\frac{[n/2]\pi}{n}$

圖11：圓內接正奇數邊 n 邊形中放寬一般角度條件來探討

圓內接正偶數邊 n 邊形

【性質 3】(兩垂直對角線性質) (i) 兩垂直對角線($\overline{A_1A_{1+n/2}}\perp\overline{A_{m+1}A_{n-m+1}}$)的交點為中心 O：$n=4m$

(ii) 兩垂直對角線為一條通過中心 O 及另一條不通過中心 O

(iii)兩垂直對角線不通過中心 O

探究方法(II)：取對稱軸為 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$，$1\leq c,r\leq\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$

【定義】交點 P_{cr} 代表由上而下的第 c 條水平分線與在第 c 條水平分線上由左而右的第 r 個垂直分線的交點。

當 $n\equiv 2\pmod 4$ 時，其交點為 $P_{11},P_{21},P_{22},\cdots,P_{n1},P_{n2},\cdots,P_{[n/4][n/4]}$。

當 $n\equiv 0\pmod 4$ 時，其交點為 $P_{11},P_{21},P_{22},\cdots,P_{n1},P_{n2},\cdots,P_{[n/4][n/4]}=O$。

在對稱軸上的點：O 及 P_{ii}，其中 $1\leq i\leq\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$。

不在對稱軸上的點：P_{i1} 及 P_{ij}，其中 $i>j,2\leq j<\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$。

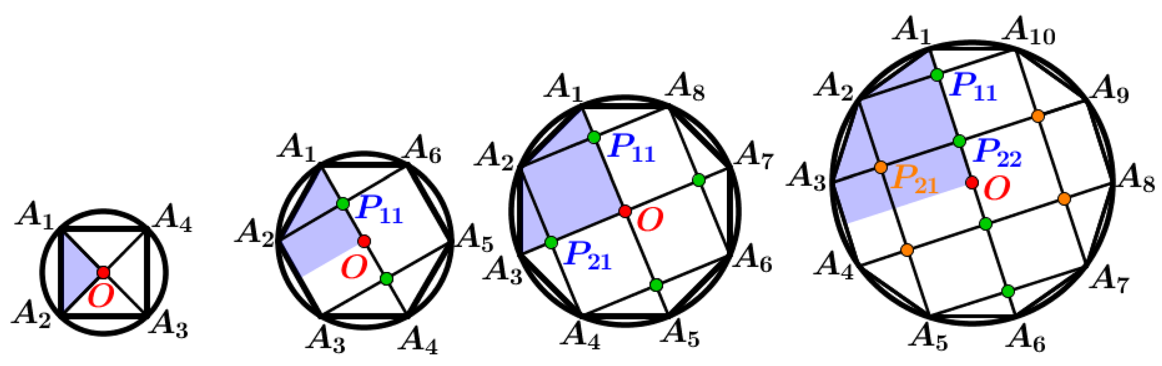


圖12：圓內接正偶數邊 n 邊形對角線性質

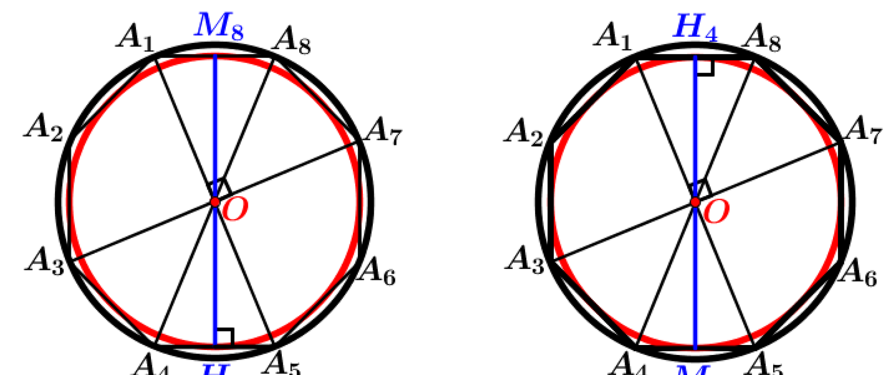


圖13：$B-$正 n 邊形及 n 點共圓 (內切圓)

利用解析幾何來證明

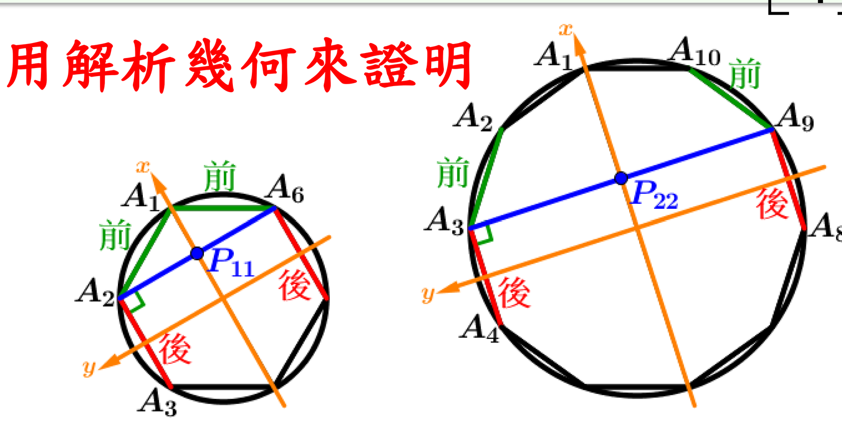


圖14：第 i 條水平分線後緊連的邊特例

過在對稱軸上的點之 $B-$多邊形

【定理 9】過中心 O 可建構 $B-$正 n 邊形。 【定理 10】(共圓性質) 邊上所有中點及垂足點為 n 點共圓。

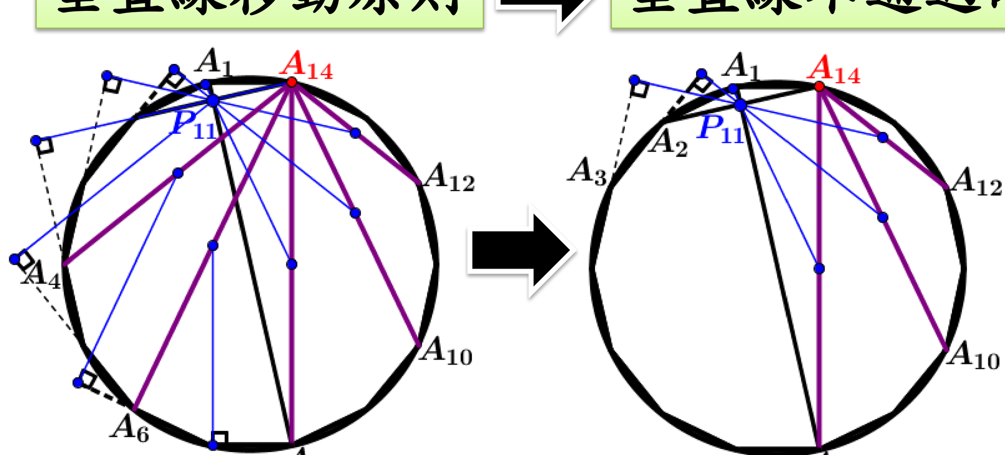
【性質 4】(過 P_{ii} 的垂直線移動原則) $\overline{P_{ii}H_1}\perp\overline{A_jA_{j+1}}\Leftrightarrow\overline{A_mM_1}=\overline{M_1A_{n-i+1}}$，其中 $m=2j+n/2-i$，但 $m>n,2j+n/2-i\equiv m\pmod n$。

【定理 11】(過 P_{ii} 的中線移動原則；對邊建構原則) 過 P_{ii} 符合建構原則的邊僅有兩組：

第 i 條水平分線前緊連的邊-$\overline{A_iA_{i+1}}$ 與 $\overline{A_1A_n}$ $(i=1)$，$\overline{A_{n-i+1}A_{n-i+2}}$ $(i\neq 1)$；第 i 條水平分線後緊連的邊-$\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 與 $\overline{A_{n-i}A_{n-i+1}}$，其中 $1\leq i\leq\lceil n/4\rceil$，但 $n\neq 4i+2$。

探究方法(III)

垂直線移動原則 ➡ 垂直線不通過兩對角線 ➡ 中線移動原則 ➡ 對邊建構原則



以 $n=14$ 為例

前緊連的邊滿足對邊：$\overline{A_8A_{14}}$

後緊連的邊滿足對邊：$\overline{A_{10}A_{14}}$

後緊連的下一邊滿足對邊：$\overline{A_{12}A_{14}}$

圖15：過 P_{11} 的垂直線移動原則

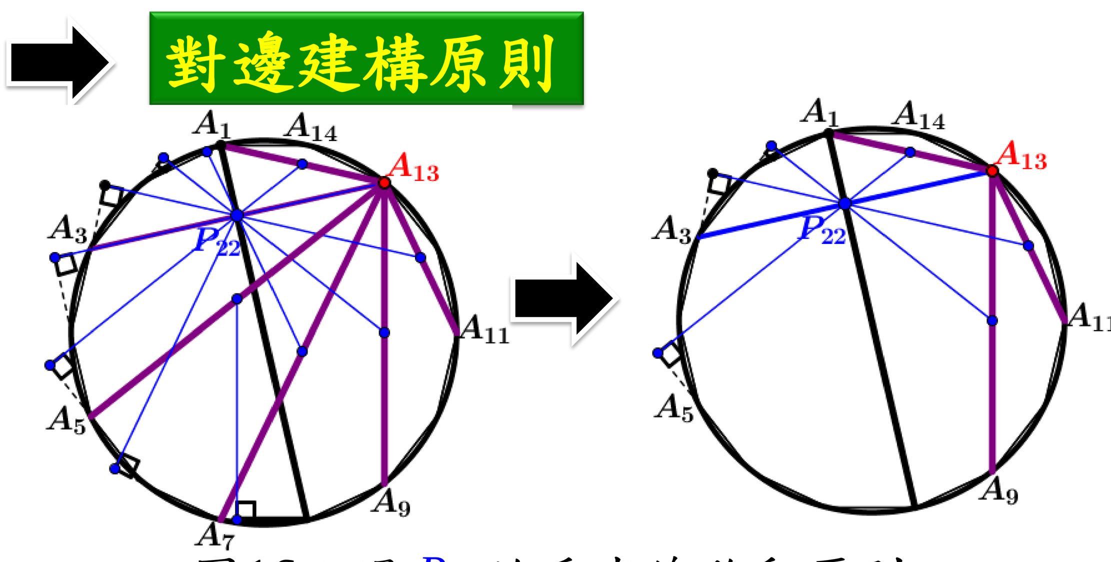


圖16：過 P_{22} 的垂直線移動原則

蝴蝶的構形 對邊移動原則

第 i 條水平分線前緊連的邊-由 $\overline{A_{1+n/2}A_n}$ 平行移動至下一個頂點的距離共 $i-1$ 次，得到對邊為 $\overline{A_{i+n/2}A_{n-i+1}}$。

第 i 條水平分線後緊連的邊-由 $\overline{A_{3+n/2}A_n}$ 平行移動至下一個頂點的距離共 $i-1$ 次，得到對邊為 $\overline{A_{i+2+n/2}A_{n-i+1}}$。

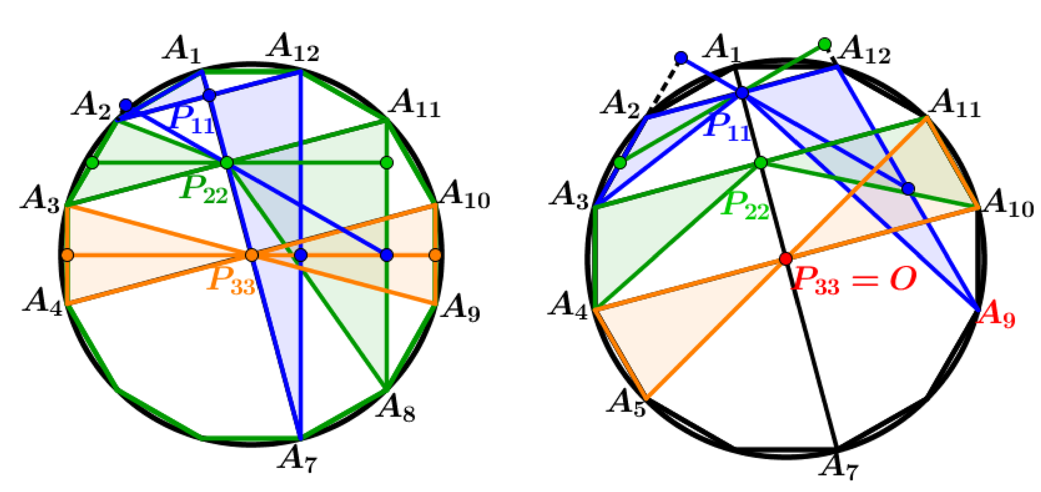


圖17：前(後)緊連的邊的對邊建構原則

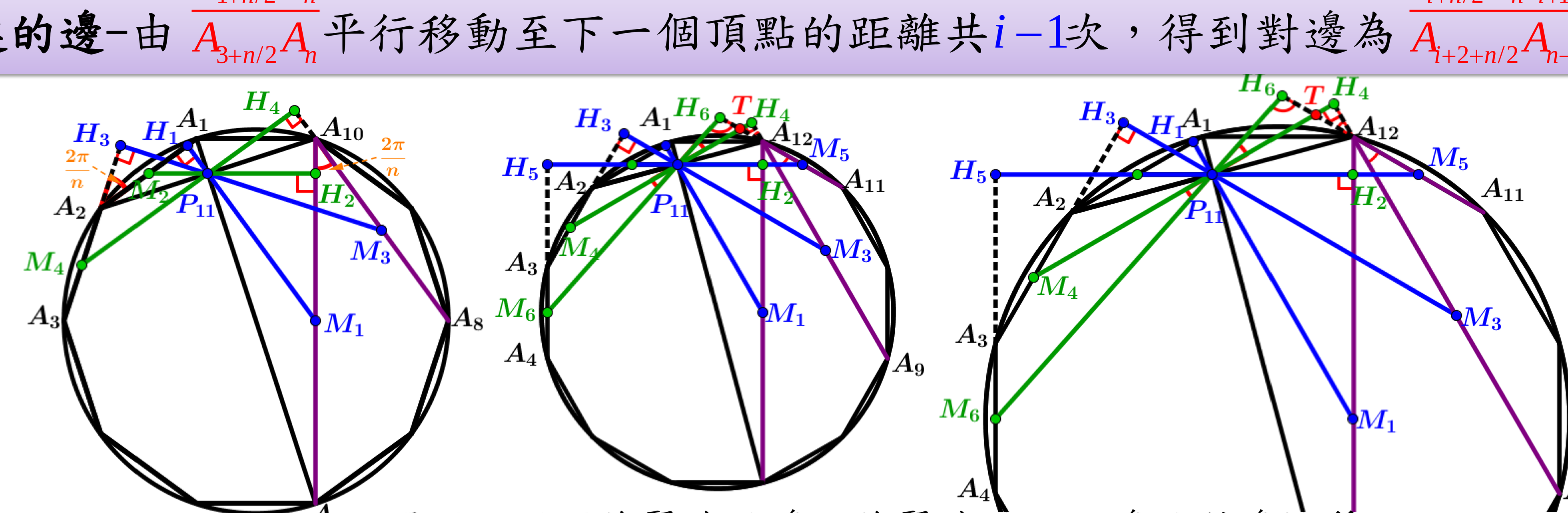


圖18：證明後緊連的邊及後緊連的下一邊的對邊性質

特例：正偶數邊 n 邊形本身(建構 $B-$正n邊形)及無法建構 $B-$多邊形

n	P_{11}	P_{22}	P_{33}
$n=6$	0個		
$n=8$	1個	1個	
$n=10$	0,2個	0個	
$n=12$	2個	1 個	1個
$n=14$	0,2個	0,2個	0個

(i)過 O $n\equiv 0\pmod 4,i=\lceil n/4\rceil$

(ii)過 P_{ii} 向邊 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$

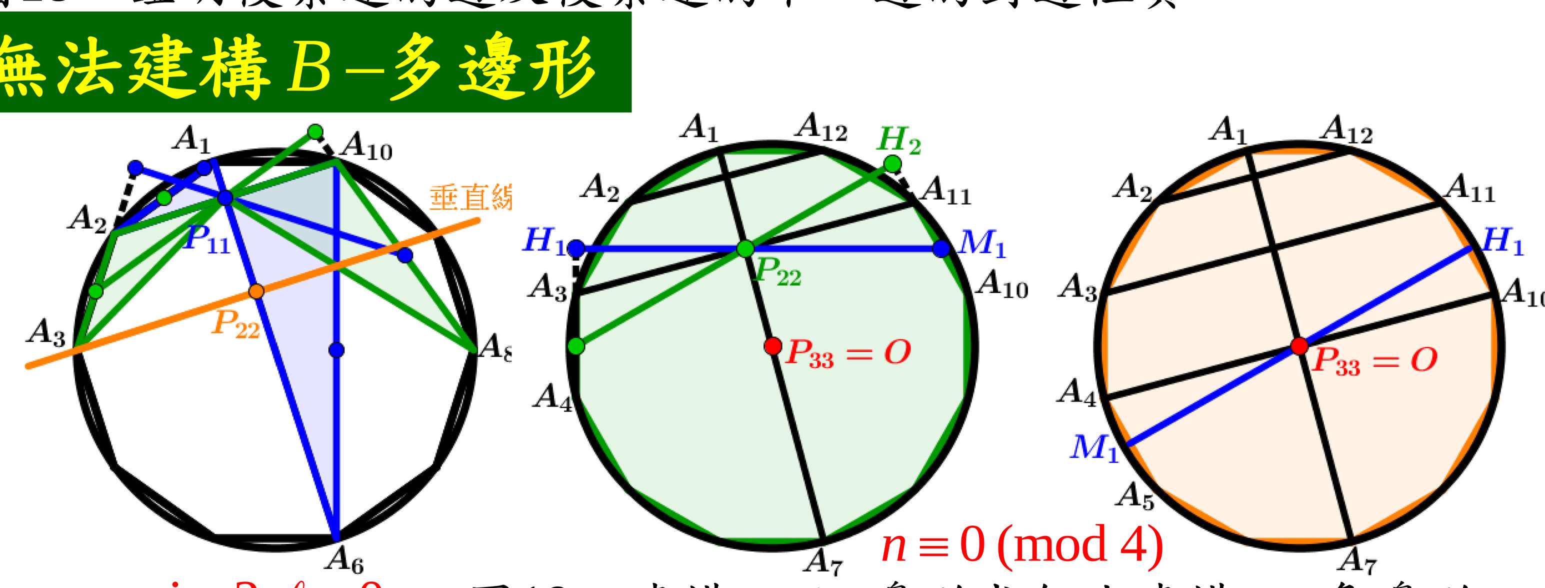
1個 $n\equiv 0\pmod 4,i=\lceil n/4\rceil-1$

(iii) 過 P_{ii} 向邊 $\overline{A_{[n/4]+1}A_{[n/4]+2}}$

0個

$n\equiv 2\pmod 4,i<\lceil n/4\rceil+1$

$n=4i+4\ell+2$



$i=2,\ \ell=0$ 圖19：建構 $B-$正n邊形或無法建構 $B-$多邊形

【定理 12】(過 P_{ii} 向第 i 條水平分線前緊連的邊建構 $B-$多邊形的邊數及其共圓性質)

(i)可建構兩個 $B-(2i+n/2)$ 邊形。(ii)邊上或延長線上垂足點 H_1,H_2,H_3,H_4 與中點 M_1,M_2,M_3,M_4 等八點共圓。

【定理 13】(過 P_{ii} 向第 i 條水平分線後緊連的邊建構 $B-$多邊形的邊數及其共圓性質)

(i)可建構兩個 $B-(2i+2+n/2)$ 邊形。(ii)邊上或延長線上垂足點 H_1,H_2,H_3,H_4 與中點 M_1,M_2,M_3,M_4 等八點共圓。

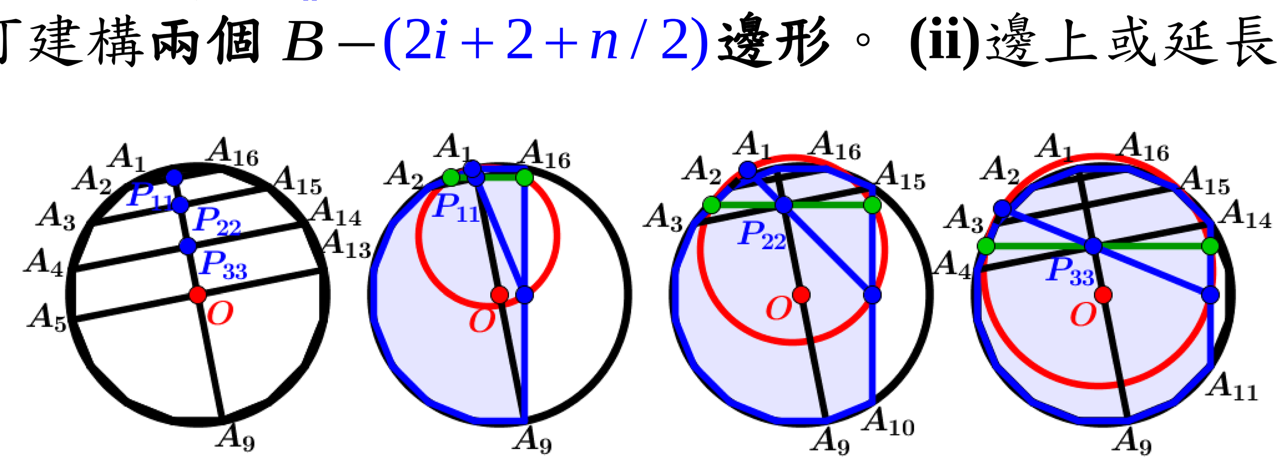


圖20：前緊連的邊之 $B-(2i+n/2)$ 邊形及證明共圓性質

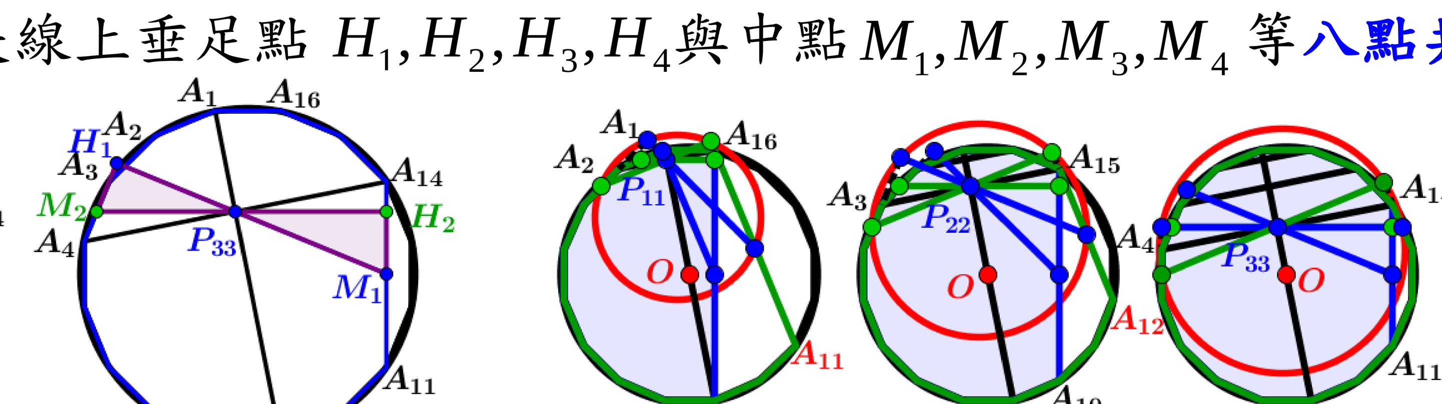


圖21：後緊連的邊之 $B-(2i+2+n/2)$ 邊形及其共圓性質

過不在對稱軸上的點之$B-$多邊形

【定理 14】(過P_{i1}向第i條水平分線前緊連的邊之$B-$多邊形及其共圓性質)

(i)過點P_{i1}向$\overline{A_iA_{i+1}}$可建構$B-(2+n/2)$**邊形**。**(ii)**邊上垂足點H_1,H_2及中點M_1,M_2**四點共圓**，但當$n=8i-4$時，過P_{i1}時，**沒有共圓性質**。

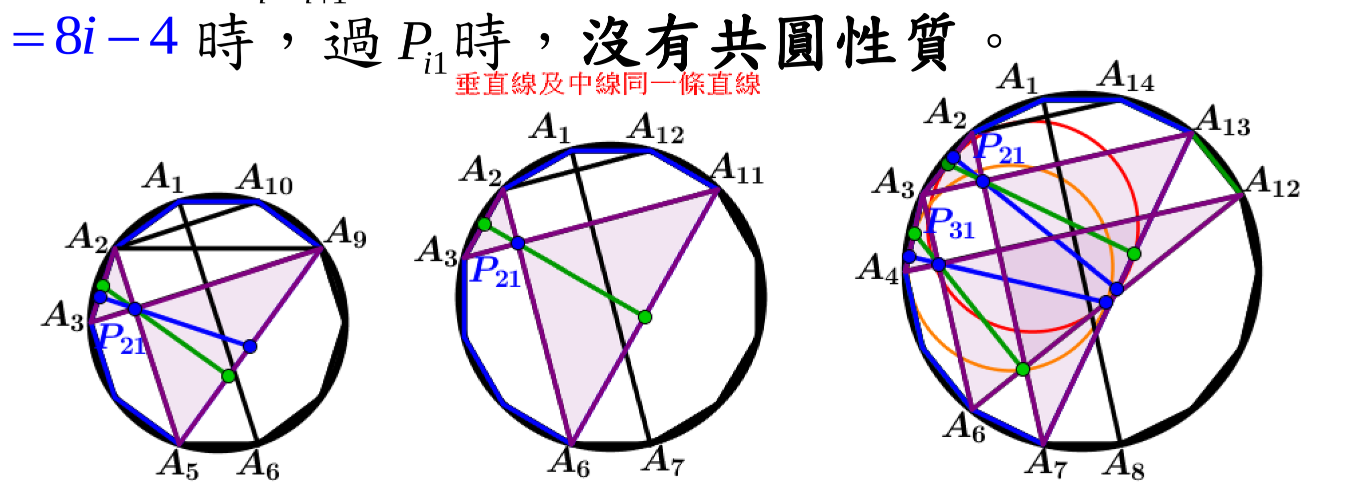


圖22：過P_{i1}向前緊連的邊的$B-(2+n/2)$邊形及其共圓性質

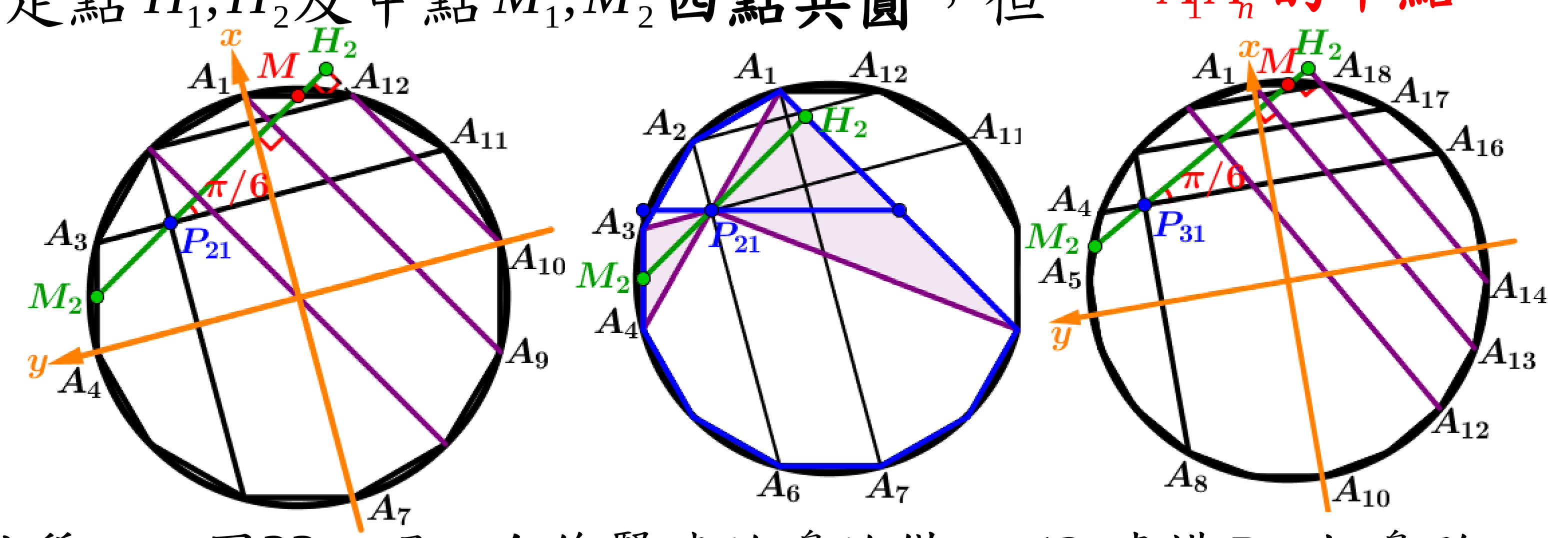


圖23：過P_{i1}向後緊連的邊的僅$n=12$建構$B-$九邊形

探究方法(IV)：建構關鍵角度及利用解析幾何來證明

交點	關鍵角度	中線移動原則	垂直線移動原則	$B-$多邊形的邊數	例如
P_{i1}	$\angle A_{n-i+1}P_{i1}M=\frac{\pi}{6}$	**性質 5**：若過P_{i1}向後緊連的邊$\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$作中線$\overleftrightarrow{P_{i1}M_2}$，中線通過$\overline{A_1A_n}$的中點，則$n=6i$。	$i=2,n=6i=12$	**定理 15：邊數為** 9	$n=12,P_{21}$
P_{i2}	$\angle A_{n-i}P_{i2}M=\frac{\pi}{6}$	**性質 6**：若過P_{i2}向前緊連的邊$\overline{A_iA_{i+1}}$作中線$\overleftrightarrow{P_{i2}M_2}$，中線通過$\overline{A_{4i-4}A_{4i-3}}$的中點，則$n=6(i-1)$。	**i為大於4的奇數**	**定理 16：邊數為** $n-6[i/2]+3$	$n=24,P_{52}$ $n=36,P_{72}$ $n=48,P_{92}\cdots$
P_{ij}	$\angle A_{n-i+1}P_{ij}M=\frac{2\pi}{n}$	**性質 7**：若過P_{ij}向後緊連的邊$\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$作中線$\overleftrightarrow{P_{ij}M_2}$，中線通過$\overline{A_{9i-9j+3}A_{9i-9j+4}}$的中點，則$n=10i-9j+1$。	$i>j\geq 3$ 注意$n=30,P_{42}$不滿足垂直線移動原則	**定理 17：邊數為** $n-4i+4j+1$	$n=24,P_{53}$ $n=36,P_{85}$ $n=48,P_{11,7}\cdots$

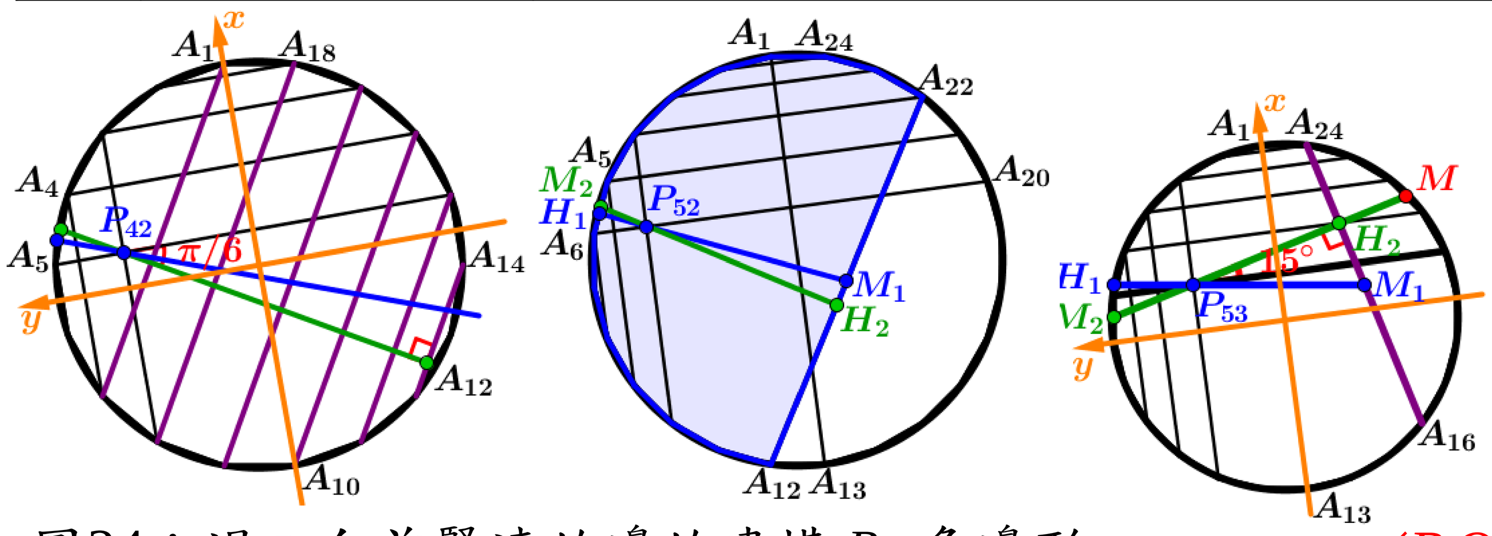


圖24：過P_{i2}向前緊連的邊的建構$B-$多邊形

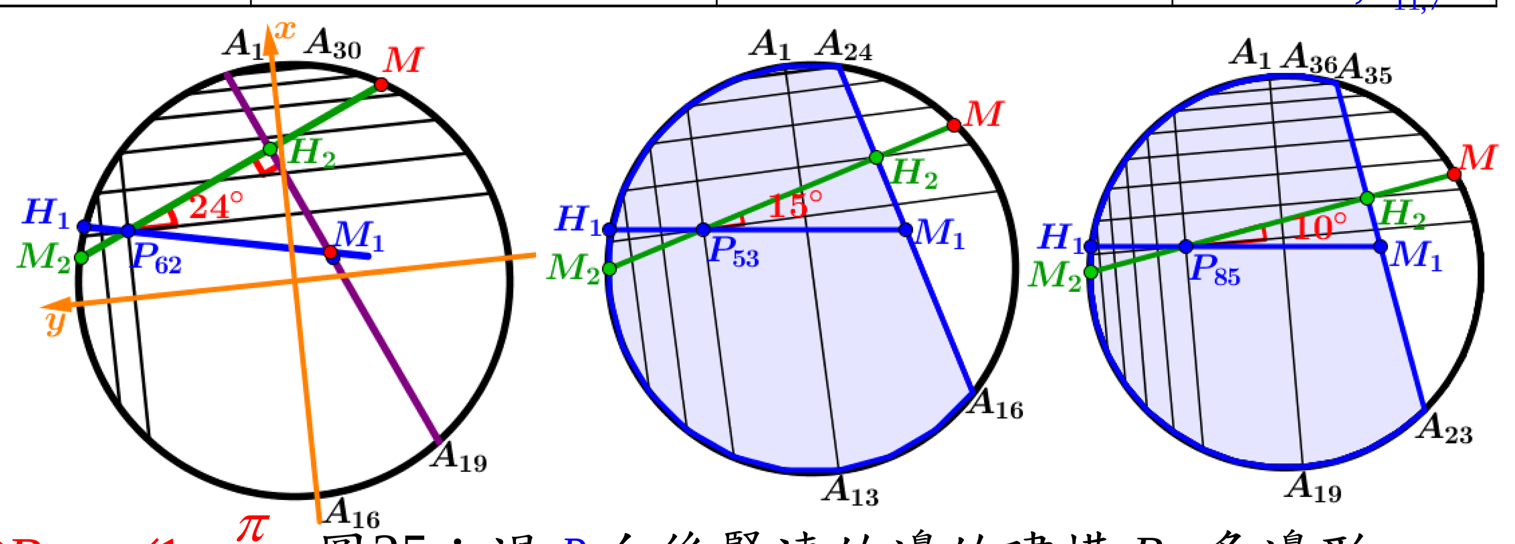


圖25：過P_{ij}向後緊連的邊的建構$B-$多邊形

【定理 18】 過P可建構無限多個的$B-$多邊形。

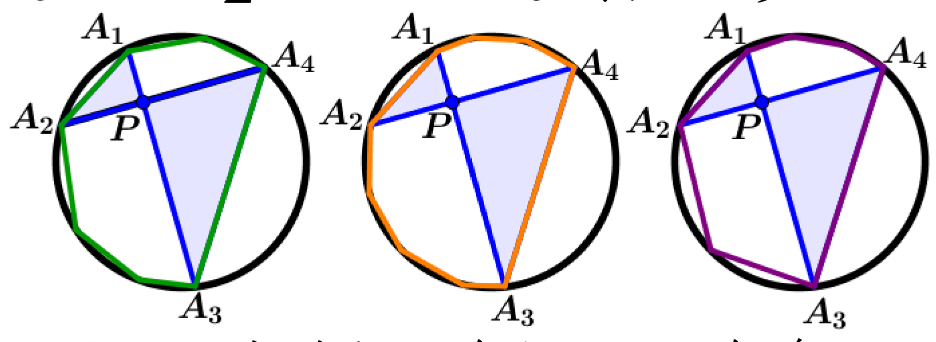


圖26：建構無限多個的$B-$多邊形

$\angle B_1QB_2=\angle 1+\frac{\pi}{2}$

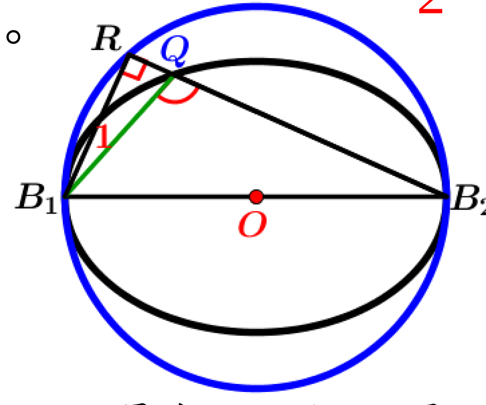


圖27：長軸上的橢圓周角

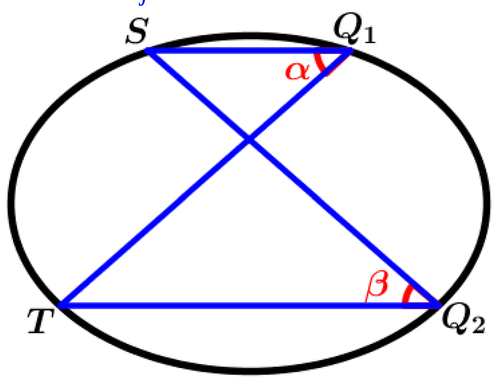


圖28：$\alpha=\beta$

在平行長軸間的弧，同弧或等弧所對的橢圓周角相等

3.探討橢圓內接多邊形中的$B-$多邊形

【性質 8】(橢圓內橢圓周角性質) (i)$\angle B_1QB_2$為鈍角。(ii)$\angle SQ_1T=\angle SQ_2T$。

【定理 19】(橢圓內接菱形及鳶形不存在婆羅摩笈多定理)

橢圓內接菱形或鳶形$A_1A_2A_3A_4$均不存在**婆羅摩笈多定理**。

$\overline{M_2P}//\overline{A_2A_3}\Rightarrow\angle A_2A_3A_4=\angle M_2H_2A_4\neq\pi/2$

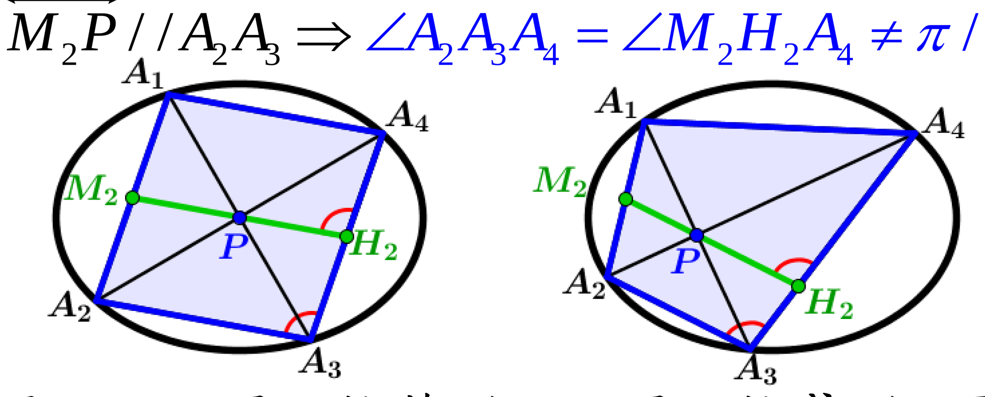


圖29：橢圓內接菱形及橢圓內接鳶形

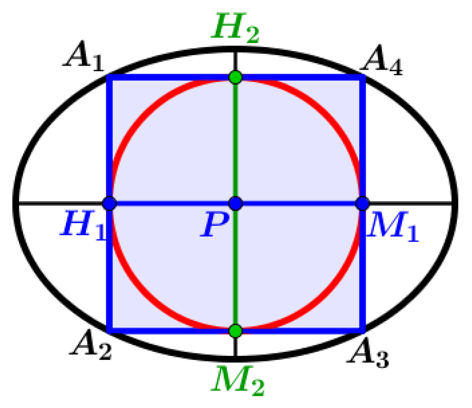


圖30：橢圓內接正方形

放寬一般角度條件：$\frac{\pi}{2}\rightarrow\theta\quad(0<\theta<\pi)$

【定理 20】 $\frac{\overline{A_2N}}{\overline{NA_3}}=\frac{\sin(\theta+\angle PA_3A_2)}{\sin\angle PA_2A_3}$

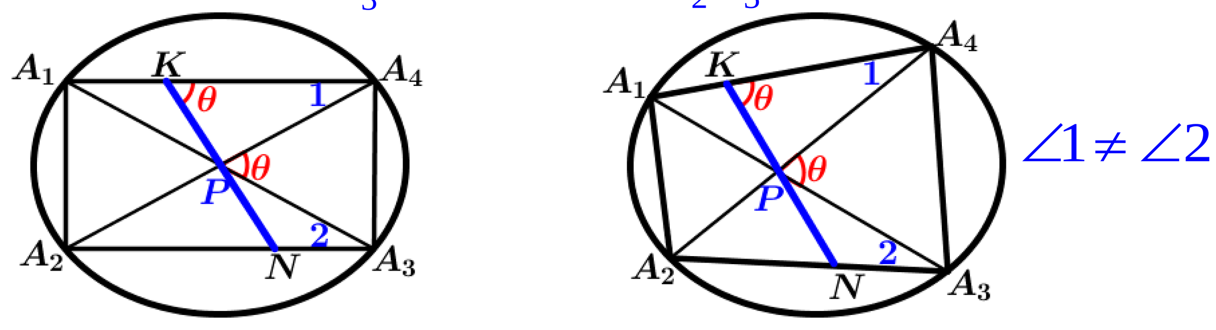


圖31：同弧所對的橢圓周角性質

【定理 21】(橢圓內接正方形存在婆羅摩笈多定理)

橢圓內接正方形**存在婆羅摩笈多定理**且其正方形中邊上垂足點與中點**四點共圓**。

【定理 22】(橢圓內接四邊形存在婆羅摩笈多定理)

異於正方形的橢圓內接四邊形不存在**婆羅摩笈多定理**。

【定理 23】(橢圓內接n邊形的$B-$多邊形之建構性質)

過P可建構出無限多個的$B-$多邊形。

$\angle 1=\angle 2+\pi/2>\pi/2$

保持正方形的構形

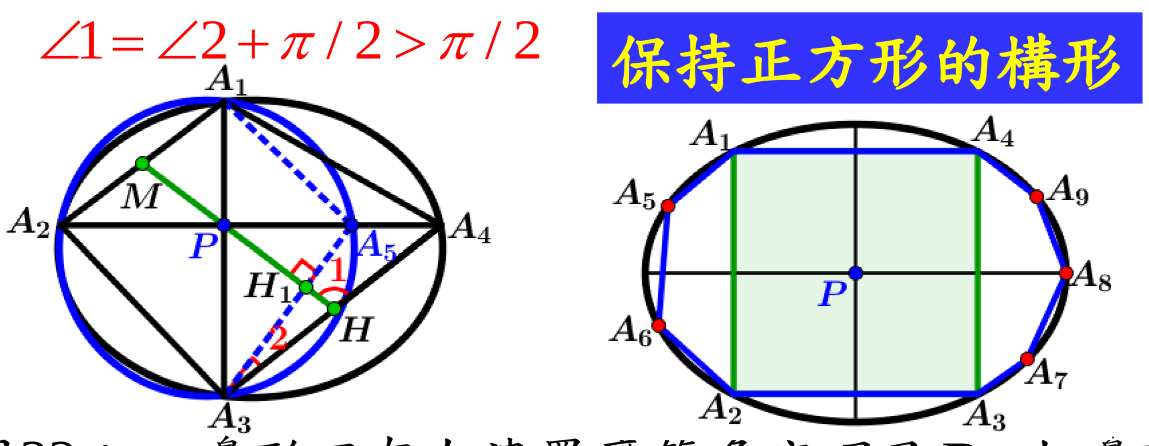


圖32：四邊形不存在婆羅摩笈多定理及$B-$九邊形

三、結論與未來展望

1. 結論

(1)圓內接四邊形滿足$\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$為$B-$四邊形或者利用兩圓關係建構$B-$四邊形。

(2)證明**圓內接正奇數邊n邊形不存在婆羅摩笈多定理**，將直角改一般角度來探討，即**推廣預備定理 2**。又將**預備定理 2**推廣至橢圓內接矩形，進而推導出**橢圓內接正方形存在婆羅摩笈多定理**。

(3)將圓內接正偶數邊n邊形中兩垂直對角線交點分為**過對稱軸上的點與不過對稱軸上的點**：O,P_{ii},P_{i1},P_{ij}。推導出過四種交點建構$B-$多邊形的原則，除了過O每個邊均符合建構原則，其餘的邊符合建構原則的邊僅有兩組或兩種：**第i條水平分線前緊連的邊及後緊連的邊**，再者關鍵在於符合對邊建構原則：垂直線移動原則及中線移動原則。特別是過P_{i1},P_{ij}可建構$B-$多邊形滿足**三種關鍵角度，我們利用解析幾何來證明建構$B-$多邊形的存在性質**。同時也探討出邊上垂足點及中點的共圓性質。

(4)遵循**蝴蝶的構形或保有橢圓內接正方形的構形**分別可建構無限多個的圓或橢圓內接$B-$多邊形。

2.未來展望

(1)過不對稱軸上的點所談到**三種關鍵角度**，僅探討出**存在性性質**，至於**唯一性性質**呢？值得進一步探索。

(2)過不對稱軸上的點P_{i1}及P_{ij}所談到**垂直移動原則未嚴謹證明**，深信有規律，未來繼續研發使之完備 。

(3)針對婆羅摩笈多定理中放寬一般角度條件至橢圓的幾何性質及推廣至拋物線的情形，仍繼續努力研發。

四、參考資料

[1]沈康身 (2011)。**歷史數學名題賞析03**。新北市：稻田出版社。

[2]黃家禮 (1997)。**幾何明珠**。台北市：九章出版社。

[3]Coxeter, H. S. M. (1967). Greitzer, S. L.*Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p. 59.

[4]Honsberger, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p.37.