中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030411

異〝次〞元的狙〝積〞手－探討數的倍數乘積和次方的關係

學校名稱：南投縣立大成國民中學

作者：	指導老師：
國一　洪雅榆 國一　陳　偉 國一　石玉琦	江奇婉 林勝國

關鍵詞：高斯、遞迴數列、同餘

摘要

本研究旨在探討科學研習月刊 57-8 期中「用三湊三」的問題。意即以 3 的次方數($3^0,3^1,3^2,3^3,3^4$…)用加法湊出 3 的倍數的方法數，第一步先以直接劃記的方法解題，算出其方法數，接著利用高斯符號、組合的方式直接計算其方法數。爾後將湊出 3n 的方法數藉由觀察數型規律進行分析探討，推論出符合數列的遞迴關係式，並以數學歸納法驗證它。我們亦進一步延伸探討其方法數之同餘關係。

秉著同樣的解題方向，研究以 2 的次方數($2^0,2^1,2^2,2^3,2^4$…)用加法湊出 2 的倍數的方法數、4 的次方數($4^0,4^1,4^2,4^3,4^4$…)用加法湊出 4 的倍數的方法數，然後加以驗證，最後進一步推廣到以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3...)用加法湊出 m 的倍數之方法數的解題策略、數學關係式和同餘關係。

壹、 研究動機

本研究源自於科學研習月刊 57-8 期中「用三湊三」的問題。說明如下：<u>小定</u>想要用 3 的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出 3 的倍數。比如湊成 6 有下列三種方法：

3+3

3+1+1+1

1+1+1+1+1+1

注意到:只要湊出來，選數字的順序不用管，即 3+1+1+1 和 1+3+1+1 是同一個方法。

期刊中提及(1)湊出 9 有五種方法,你能寫出來嗎?(2)湊出 12 有七種方法,你能寫出來嗎?(3)如果你一直試，可以算出湊出 3n(n=1,2,3,4,…)的方法數分別有 2,3,5,7,9,12,15,18,23,…。你可以找到這個數列的規律嗎?

我們初始先列出 3n 的所有方法數，在研究這個問題的過程中，我們發現可以運用高中的高斯符號性質、以及組合的概念來協助我們更快找到 3n 的方法數，我們亦透過數列的規律推論出遞迴關係式；進一步將問題延伸挑戰，探討方法數之同餘的關係；成功推論以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3...)用加法湊出 m 的倍數之方法數的解題策略、數學關係式和同餘關係。

貳、 研究目的

我們想深入探討每一個 3n 的所有方法數，並找出這個問題的一般性解法;以及延伸其方法數之同餘關係，進而推論到 2n、4n…的所有方法數，故我們的研究目的如下：

一、 探討並計算以 3 的次方數($3^0,3^1,3^2,3^3,3^4$…)用加法湊出 3 的倍數的方法數。意即計算 3n 的所有組合方法數。

二、 推論 3n(n=1,2,3,4,…)的所有組合方法數排成數列 2,3,5,7,9,12,15,18,23,…的規律。

三、 數列規律性之數學遞迴關係式的驗證。

四、 探討 3n(n=1,2,3,4,…)的所有組合方法數之同餘關係。

五、 推論以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3...)用加法湊出 m 的倍數之方法數的解題策略、數學關係式和同餘關係。

參、 研究設備及器材

紀錄單、計算機、紙、筆、電腦、數學課本、Microsoft Office Word。

肆、 研究過程或方法

【研究架構】

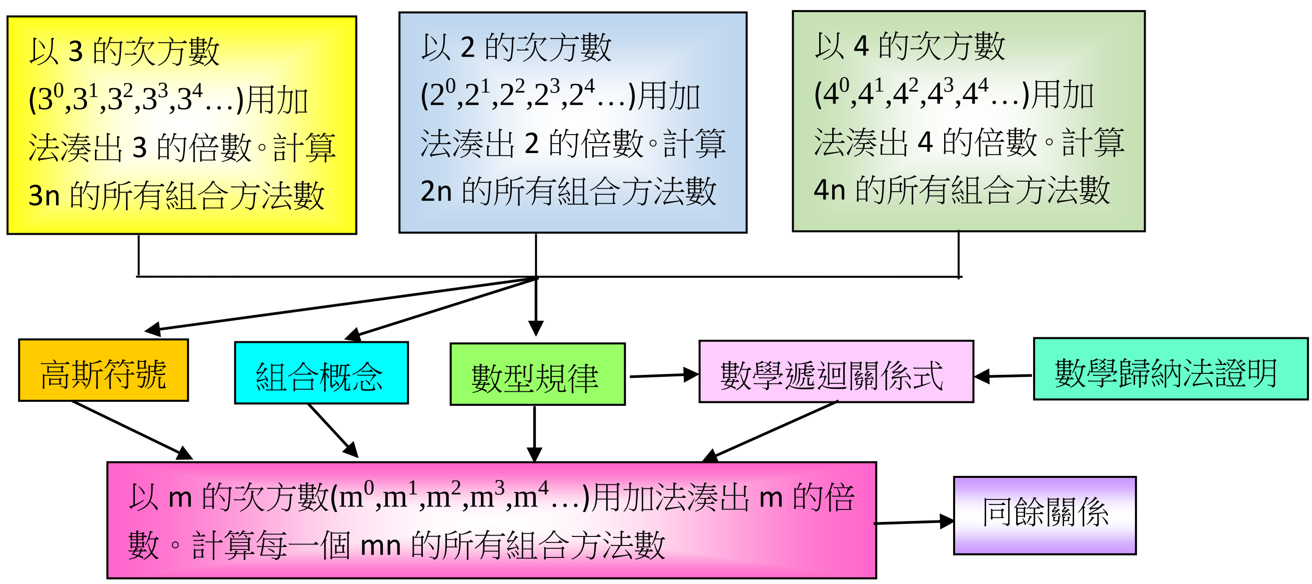


圖 4-1 研究架構

【數學概念和名詞定義】

(一) $f_m(mn)$：定義為以 m 的次方數($m^0,m^1,m^2,m^3,\ldots$)用加法湊出 m 的 n 倍數之組合方法數。

(二) 數列：將一些數字依序排成一列，我們稱之為數列。並以 a_n 表示數列中的第 n 項。

(三) 等差數列：一個數列中，從第二項起，每一項減去前一項的差都相同，那麼這個數列則稱為「等差數列」，而這個差稱為此數列的「公差」。

(四) 遞迴關係：若一個數列的後項可由前面的項，根據某個規則(稱為遞迴關係)而推得，這樣的數列稱為遞迴數列，一開始給定的項則稱為初始值。

(五) 高斯符號：是一個數學符號，形式為方括號$[x]$，表示不大於（等於或小於）數 x 的最大整數，即 $x-1<[x]\le x$ 。

(六) 數學歸納法：如果一個與正整數 n 有關的敘述滿足下列兩個條件：

(1)當 n=1 時敘述成立。

(2)設 n=k 時敘述成立，由此可以推得 n=k+1 時敘述也成立，則此敘述對於所有正整數 n 都成立。

(七) 同餘(mod)：數論中的一種等價關係，當兩個整數除以同一個正整數，若得相同餘數，則二整數同餘。

一、 探討以 3 的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出 3 的倍數

(一) 列出 3n 的所有組合方法數

定義 $f_3(3n)$ 為以 3 的次方數用加法湊出 3 的 n 倍之方法數。

1. 示例: 實際劃記如表 4-1.1

表 4-1.1

n	3xn	組合方法數	$f_3(3n)$
1	3	1+1+1	2
		3	
2	6	1+1+1+1+1+1	3
		3+1+1+1	
		3+3	
3	9	1+1+1+1+1+1+1+1+1	5

		3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1	
		3+3+3	
		9	
4	12	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	7
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3	
		9+1+1+1	
		9+3	
5	15	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	9
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3+3	
		9+1+1+1+1+1+1	
		9+3+1+1+1	
		9+3+3	
6	18	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	12
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3	
		9+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+1+1+1	
		9+3+3+3	
		9+9	
7	21	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	15
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	

		3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3	
		9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+1+1+1	
		9+3+3+3+3	
		9+9+1+1+1	
		9+9+3	
8	24	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	18
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+3	
		9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+3+1+1+1	
		9+3+3+3+3+3	
		9+9+1+1+1+1+1+1	
		9+9+3+1+1+1	
		9+9+3+3	
9	27	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	23
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	

		3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+3+3	
		9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+3+3+1+1+1	
		9+3+3+3+3+3+3	
		9+9+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+9+3+1+1+1+1+1+1	
		9+9+3+3+1+1+1	
		9+9+3+3+3	
		9+9+9	
		27	
10	30	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	28
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3+3+3+3+3+3+3	
		9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1	

		9+3+3+3+3+3+3+1+1+1	
		9+3+3+3+3+3+3+3	
		9+9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+9+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		9+9+3+3+1+1+1+1+1+1	
		9+9+3+3+3+1+1+1	
		9+9+3+3+3+3	
		9+9+9+1+1+1	
		9+9+9+3	
		27+1+1+1	
		27+3	

另外 n=11~20 的部分，依實際劃記結果，如下表 4-1.2:

表 4-1.2

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
方法數 $f_3(3n)$	33	40	47	54	63	72	81	93	105	117

(二) 利用高斯符號[ ]計算 3n 的所有組合方法數

由一個個實際排列中，發現若先固定某一個3^n數，即可以利用高斯符號算出其方法數。

1. 示例如表 4-2

表 4-2

n	3xn	先固定某一個3^n數目	利用高斯符號計算	$f_3(3n)$
1	3	全部都是$3^0=1$	1	2
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{3}{3^1}\right]=1$	
2	6	全部都是$3^0=1$		3
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{6}{3^1}\right]=2$	
3	9	全部都是$3^0=1$	1	5
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{9}{3^1}\right]=3$	
		至少一個$3^2=9$	$\left[\frac{9}{3^2}\right]=1$	

4	12	全部都是$3^0=1$	1	7
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{12}{3^1}\right]=4$	
		至少一個$3^2=9$和$3^0=1$	$\left[\frac{12}{3^2}\right]=1$	
		固定一個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{12-9}{3^1}\right]=1$	
5	15	全部都是$3^0=1$	1	9
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{15}{3^1}\right]=5$	
		至少一個$3^2=9$和$3^0=1$	$\left[\frac{15}{3^2}\right]=1$	
		固定一個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{15-9}{3^1}\right]=2$	
6	18	全部都是$3^0=1$	1	12
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{18}{3^1}\right]=6$	
		至少一個$3^2=9$和$3^0=1$	$\left[\frac{18}{3^2}\right]=2$	
		固定一個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{18-9}{3^1}\right]=3$	
7	21	全部都是$3^0=1$	1	15
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{21}{3^1}\right]=7$	
		至少一個$3^2=9$和$3^0=1$	$\left[\frac{21}{3^2}\right]=2$	
		固定一個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{21-9}{3^1}\right]=4$	
		固定二個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{21-18}{3^1}\right]=1$	
8	24	全部都是$3^0=1$	1	18
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{24}{3^1}\right]=8$	
		至少一個$3^2=9$和$3^0=1$	$\left[\frac{24}{3^2}\right]=2$	

		固定一個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{24-9}{3^1}\right]=5$	
		固定二個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{24-18}{3^1}\right]=2$	
9	27	全部都是$3^0=1$	1	23
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{27}{3^1}\right]=9$	
		至少一個$3^2=9$和$3^0=1$	$\left[\frac{27}{3^2}\right]=3$	
		固定一個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{27-9}{3^1}\right]=6$	
		固定二個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{27-18}{3^1}\right]=3$	
		至少一個$3^3=27$和$3^0=1$	$\left[\frac{27}{3^3}\right]=1$	
10	30	全部都是$3^0=1$	1	28
		至少一個$3^1=3$和$3^0=1$	$\left[\frac{30}{3^1}\right]=10$	
		至少一個$3^2=9$和$3^0=1$	$\left[\frac{30}{3^2}\right]=3$	
		固定一個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{30-9}{3^1}\right]=7$	
		固定二個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{30-18}{3^1}\right]=4$	
		固定三個$3^2=9$和$3^1=3$	$\left[\frac{30-27}{3^1}\right]=1$	
		至少一個$3^3=27$和$3^0=1$	$\left[\frac{30}{3^3}\right]=1$	
		固定一個$3^3=27$和$3^1=3$	$\left[\frac{30-27}{3^1}\right]=1$	

2. 藉由高斯符號的引入，我們可以馬上算出以 3 的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出 3 的倍數的方法，而無須再一一的劃記。例如當 n=18 時，3xn=54，以 3 的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出 3xn=54 的方法數 $f_3(3n)=f_3(54)=93$。高斯符號計算如下:

$$1+\left[\frac{54}{3^1}\right]+\left[\frac{54}{3^2}\right]+\left[\frac{54-9}{3^1}\right]+\left[\frac{54-18}{3^1}\right]+\left[\frac{54-27}{3^1}\right]+\left[\frac{54-36}{3^1}\right]+\left[\frac{54-45}{3^1}\right]+\left[\frac{54}{3^3}\right]+\left[\frac{54-27}{3^1}\right]$$

$$+\left[\frac{54-27}{3^2}\right]+\left[\frac{54-27-9}{3^1}\right]+\left[\frac{54-27-18}{3^1}\right]$$

=1+18+6+15+12+9+6+3+2+9+3+6+3=93。

(三) 利用組合的概念

由上述第一種和第二種方法，我們結合兩種的解題策略，發展出更快速的方法，如下表 4-4 所示。

表 4-4

n	3xn	組合方法數		$f_3(3n)$
5	15	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	1	9
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	5 (n)	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+1+1+1		
		3+3+3+3+3		
		9+1+1+1+1+1+1	1	
		9+3+1+1+1	5-3 (n-3)	
		9+3+3		
7	21	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	1	15
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	7 (n)	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+3+3+1+1+1		
		3+3+3+3+3+3+3		
		9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	1	
		9+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	7-3 (n-3)	
		9+3+3+1+1+1+1+1+1		
		9+3+3+3+1+1+1		
		9+3+3+3+3		
		9+9+1+1+1	1	
		9+9+3	7-2x3 (n-2x3)	

以此類推，歸納可得到之小結論如下:

小結論

$$
\begin{aligned}
f_3(3n) = &\{[1+n]+[1+(n-3)]+[1+(n-2\cdot 3]+[1+(n-3\cdot 3)]+\ldots\ldots\ \}+\\
&\{[1+(n-3^2)]+[1+(n-2\cdot 3^2)]+[1+(n-3\cdot 3^2)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}+\\
&\{[1+(n-3^3)]+[1+(n-2\cdot 3^3)]+[1+(n-3\cdot 3^3)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}+\\
&\{[1+(n-3^2-3^3)]+[1+(n-2\cdot 3^2-3^3)]+[1+(n-3\cdot 3^2-3^3)]+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

(四) 利用數型規律計算 3n 的所有組合方法數

我們將湊出的方法數列成一數列，觀察數列是否存在符合的數學關係式。

1. 我們將湊出 3n 的方法數的結果製成表格 4-5。

表 4-5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
湊出 3n 的方法數	2	3	5	7	9	12	15	18	23	28	33	40	47	54	63	72	81	93	105	117
$a_n - a_{n-1}$		1	2	2	2	3	3	3	5	5	5	7	7	7	9	9	9	12	12	12

2. 由表 4-5 我們發現將 $a_n - a_{n-1}$ 中不重複數字的項可視為一個新的數列{An}，而 An:2,3,5,7,9,12…，和原數列 a_n :2,3,5,7,9,12 數字是相同，如表 4-5 所示。

3. 由表 4-5 的 $a_n - a_{n-1}$ 我們亦發現某些項存在相同的公差 d;如：

(1) a_2=3、a_3=5、a_4=7、a_5=9，此四數為一個公差 d_1 為 2 的等差數列，

$$a_3 = a_2 + d_1 = a_2 + 2 = a_2 + a_1$$

$$a_4 = a_3 + d_1 = a_3 + 2 = a_3 + a_1 = a_2 + 2a_1$$

$$a_5 = a_4 + d_1 = a_4 + 2 = a_4 + a_1 = a_2 + 3a_1$$

(2) a_5=9、a_6=12、a_7=15、a_8=18，此四數為一個公差 d_2 為 3 的等差數列，

$$a_6 = a_5 + d_2 = a_5 + 3 = a_5 + a_2$$

$$a_7 = a_6 + d_2 = a_6 + 3 = a_5 + 2a_2$$

$$a_8 = a_7 + d_2 = a_7 + 3 = a_5 + 3a_2$$

(3) a_8=18、 a_9=23、 a_{10}=28、 a_{11}=33，此四數為一個公差 d_3 為 5 的等差數列，

$$a_9 = a_8 + d_3 = a_8 + 5 = a_8 + a_3$$

$$a_{10} = a_9 + d_3 = a_9 + 5 = a_8 + 2a_3$$

$$a_{11} = a_{10} + d_3 = a_{10} + 5 = a_8 + 3a_3$$

以此類推，從第二項開始，每四項會形成一個等差數列。進一步歸納可得到~

小結論

當 $k \geq 1$ 時，$n = 3k-1$，會以 a_n 為首項，依序四項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

4. 上述 3.將方法數分割成一段段四項的等差數列，我們想再進一步推論是否存在其他數學關係，所以我們將湊出 3n 的方法數 a_n 整理成下表 4-6:

表 4-6

$a_3 = a_2 + 2 = a_2 + a_1$	$a_{12} = a_{11} + 7 = a_{11} + a_4$
$a_4 = a_3 + 2 = a_3 + a_1$	$a_{13} = a_{12} + 7 = a_{12} + a_4$
$a_5 = a_4 + 2 = a_4 + a_1$	$a_{14} = a_{13} + 7 = a_{13} + a_4$
$a_6 = a_5 + 3 = a_5 + a_2$	$a_{15} = a_{14} + 9 = a_{14} + a_5$
$a_7 = a_6 + 3 = a_6 + a_2$	$a_{16} = a_{15} + 9 = a_{15} + a_5$
$a_8 = a_7 + 3 = a_7 + a_2$	$a_{17} = a_{16} + 9 = a_{16} + a_5$
$a_9 = a_8 + 5 = a_8 + a_3$	$a_{18} = a_{17} + 12 = a_{17} + a_6$
$a_{10} = a_9 + 5 = a_9 + a_3$	$a_{19} = a_{18} + 12 = a_{18} + a_6$
$a_{11} = a_{10} + 5 = a_{10} + a_3$	$a_{20} = a_{19} + 12 = a_{19} + a_6$

我們以等差數列為基礎，發現每一項都可以看成前一項再加上一個公差，但若改以每三項為一組，即推論得到下列遞迴關係式: $\begin{cases} a_1 = 2、a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{3}\right]}，n \geq 3 \end{cases}$ ，其中[ ]為高斯符號。

(五) 數學歸納法證明

從(四)的 4.我們推論得到一個遞迴關係式可以完整表示以 3 的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出 3 的倍數的方法數所形成的數列關係。

因為當 $k=1$，$n=3k$、$n=3k+1$、$n=3k+2$ 時，$\left[\frac{n}{3}\right]=k$，所以我們將項數再細分為 $3n$、$3n+1$、$3n+2$，利用遞迴關係式: $\begin{cases} a_1=2、a_2=3 \\ a_n=a_{n-1}+a_{\left[\frac{n}{3}\right]}, n\ge 3 \end{cases}$，分別推論為以下三種:

1. 當$\boxed{項數為 3n}$時，$a_{3n}=a_{3n-1}+a_{\left[\frac{3n}{3}\right]}$，亦即$\boxed{a_{3n}=a_{3n-1}+a_n}$

證明:

當 $n=1$ 時，$a_3=a_2+a_1$， 5 = 3 + 2 成立；

當 $n=2$ 時，$a_6=a_5+a_2$， 12 = 9 + 3 成立；

設當 $n=k$ 時，$a_{3k}=a_{3k-1}+a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，$a_{3(k+1)}=a_{3k+3}=a_{3k+2}+a_{\left[\frac{3k+3}{3}\right]}$

$$=a_{3(k+1)-1}+a_{\left[\frac{3(k+1)}{3}\right]} \qquad (m=k+1)$$

$$=a_{3m-1}+a_m$$

故 $a_{3m}=a_{3m-1}+a_m$ 得證。

2. 當$\boxed{項數為 3n+1}$時，$a_{3n+1}=a_{3n}+a_{\left[\frac{3n+1}{3}\right]}$，亦即$\boxed{a_{3n+1}=a_{3n}+a_n=a_{3n-1}+2a_n}$

$(\because a_{3n}=a_{3n-1}+a_n)$

證明:

當 $n=1$ 時，$a_4=a_2+2a_1$， 7 = 3 + 2x2 成立；

當 $n=2$ 時，$a_7=a_5+2a_2$， 15 = 9 + 2x3 成立；

設當 $n=k$ 時，$a_{3k+1}=a_{3k-1}+2a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，$a_{3(k+1)+1}=a_{3k+4}=a_{3k+3}+a_{\left[\frac{3k+4}{3}\right]}$

$$=a_{3m}+a_{\left[\frac{3m+1}{3}\right]} \qquad (m=k+1)$$

$$=a_{3m-1}+a_m+a_m$$

$$=a_{3m-1}+2a_m$$

故 $a_{3m+1}=a_{3m-1}+2a_m$ 得證。

3. 當$\boxed{項數為3n+2}$時，$a_{3n+2}=a_{3n+1}+a_{\left[\frac{3n+2}{3}\right]}$，亦即$\boxed{a_{3n+2}=a_{3n+1}+a_n=a_{3n-1}+3a_n}$

$(\because a_{3n+1}=a_{3n-1}+2a_n)$

證明:

當$n=1$時，$a_5=a_2+3a_1$， 9 = 3 + 3x2 成立；

當$n=2$時，$a_8=a_5+3a_2$， 18 = 9 + 3x3 成立；

設當$n=k$時，$a_{3k+2}=a_{3k-1}+3a_k$ 成立，

則當$n=k+1$時，$a_{3(k+1)+2}=a_{3k+5}=a_{3k+4}+a_{\left[\frac{3k+5}{3}\right]}$

$$=a_{3m+1}+a_{\left[\frac{3m+2}{3}\right]} \qquad (m=k+1)$$

$$=a_{3m-1}+2a_m+a_m$$

$$=a_{3m-1}+3a_m$$

故$a_{3m+2}=a_{3m-1}+3a_m$ 得證。

二、 探討 3n 的方法數之同餘關係

(一) 再進一步探討倍數 n 和 3 的次方、以及 3n 的方法數的關係，所以我們整理如下表 4-7:

表 4-7

n	以 3 的次方表示 n	$f_3(3n)$	$f_3(3n)\ (\mathrm{mod}3)$
1	$1\text{x}3^0$	2	2
2	$2\text{x}3^0$	3	0
3	$0\text{x}3^0+1\text{x}3^1$	5	2
4	$1\text{x}3^0+1\text{x}3^1$	7	1
5	$2\text{x}3^0+1\text{x}3^1$	9	0
6	$0\text{x}3^0+2\text{x}3^1$	12	0
7	$1\text{x}3^0+2\text{x}3^1$	15	0
8	$2\text{x}3^0+2\text{x}3^1$	18	0
9	$0\text{x}3^0+0\text{x}3^1+1\text{x}3^2$	23	2
10	$1\text{x}3^0+0\text{x}3^1+1\text{x}3^2$	28	1

(二) 從上表發現，當 n=2、 $f_3(3\cdot 2)\equiv 0\ (\mathrm{mod}3)$，n=5、 $f_3(3\cdot 5)\equiv 0\ (\mathrm{mod}3)$， n=6、 $f_3(3\cdot 6)\equiv 0\,(\mathrm{mod}3)$，n=7、 $f_3(3\cdot 7)\equiv 0\,(\mathrm{mod}3)$，n=8、 $f_3(3\cdot 8)\equiv 0\,(\mathrm{mod}3)$，

我們選其中 n=2、5、8 討論，當 n=3t-1， $f_3(3\cdot(3t-1)\equiv 0\,(\mathrm{mod}3)$。

我們歸納得到~

小結論

$$f_3(3(3n-1))\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}3)$$

(三) 從上表中發現，若將 $n=c_0\cdot 3^0+c_1\cdot 3^1+c_2\cdot 3^2+c_3\cdot 3^3+\ldots\ldots c_j 3^j$ 表示，3^i 的係數 c_i 數字為 0、1、2。

(四) $f_3(3n)\,(\mathrm{mod}3)$和 n 以 3 的次方表示時，和其係數存在一個關係。

例如當 n=3 時， $f_3(3\cdot 3)=f_3(9)=5$ ， $f_3(9)\equiv 2(\mathrm{mod}3)$

n=3=0x3^0+1x3^1，設 c_0=0、c_1=1，(c_0+1)(c_1+1)=1x2=2≡2(mod 3) 。

例如當 n=8 時， $f_3(3\cdot 8)=f_3(24)=18$ ， $f_3(24)\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ 。

n=8=2x3^0+2x3^1，設 c_0=2、c_1=2，(c_0+1)(c_1+1)=3x3=9≡0(mod 3)，

以此類推，我們歸納得到~

小結論

當 $n=c_0\cdot 3^0+c_1\cdot 3^1+c_2\cdot 3^2+c_3\cdot 3^3+\ldots\ldots c_j 3^j$ ，則 $f_3(3n)\equiv\prod_{i=0}^{j}(c_i+1)\ (\mathrm{mod}\,3)$

三、 探討以 2 的次方數(1,2,4,8,16…)用加法湊出 2 的倍數

由上述探討以 3 的次方數用加法湊出 3 的倍數之經驗歷程，讓我們在研究 2n 時更加順手，以下方法如同 3n，也藉此加以比較異同之處。

(一) 列出 2n 的所有組合方法數

定義 $f_2(2n)$ 為以 2 的次方數用加法湊出 2 的 n 倍之方法數。

1. 示例: 劃記如表 4-8

表 4-8

n	2xn	組合方法數	$f_2(2n)$
1	2	1+1	2
		2	
2	4	1+1+1+1	4
		2+1+1	
		2+2	
		4	
3	6	1+1+1+1+1+1	6
		2+1+1+1+1	
		2+2+1+1	
		2+2+2	
		4+1+1	
		4+2	
4	8	1+1+1+1+1+1+1+1	10
		2+1+1+1+1+1+1	
		2+2+1+1+1+1	
		2+2+2+1+1	
		2+2+2+2	
		4+1+1+1+1	
		4+2+1+1	
		4+2+2	
		4+4	
		8	
5	10	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	14
		2+1+1+1+1+1+1+1+1	
		2+2+1+1+1+1+1+1	
		2+2+2+1+1+1+1	
		2+2+2+2+1+1	
		2+2+2+2+2	
		4+1+1+1+1+1+1	
		4+4+1+1	
		4+2+1+1+1+1	
		4+2+2+1+1	
		4+2+2+2	
		4+4+2	

		8+1+1	
		8+2	

另外 n=6~10 的部分，依實際劃記結果，如下表 4-8.2:

表 4-8.2

n	6	7	8	9	10
方法數	20	26	36	46	60

(二)利用高斯符號[ ]計算 2n 的所有組合方法數

我們由 3n 的經驗，同樣的先固定某一個 2^n 數，利用高斯符號算出另外設定的 2^n 數，推論總方法數。

1.示例如表 4-9

表 4-9

n	2xn	先固定某一個 2^n 數目	利用高斯符號計算	$f_2(2n)$
1	2	全部都是 $2^0=1$	1	2
		至少一個 $2^1=2$ 和 $2^0=1$	$\left[\frac{2}{2^1}\right]=1$	
2	4	全部都是 $2^0=1$	1	4
		至少一個 $2^1=2$ 和 $2^0=1$	$\left[\frac{4}{2^1}\right]=2$	
		至少一個 $2^2=4$	$\left[\frac{4}{2^2}\right]=1$	
3	6	全部都是 $2^0=1$	1	6
		至少一個 $2^1=2$ 和 $2^0=1$	$\left[\frac{6}{2^1}\right]=3$	
		至少一個 $2^2=4$ 和 $2^0=1$	$\left[\frac{6}{2^2}\right]=1$	
		固定一個 $2^2=4$ 和 $2^1=2$	$\left[\frac{6-4}{2^1}\right]=1$	
4	8	全部都是 $2^0=1$	1	10
		至少一個 $2^1=2$ 和 $2^0=1$	$\left[\frac{8}{2^1}\right]=4$	
		至少一個 $2^2=4$ 和 $2^0=1$	$\left[\frac{8}{2^2}\right]=2$	

		固定一個$2^2=4$和$2^1=2$	$\left[\frac{8-4}{2^1}\right]=2$	
		至少一個$2^3=8$	$\left[\frac{8}{2^3}\right]=1$	
5	10	全部都是$2^0=1$	1	14
		至少一個$2^1=2$和$2^0=1$	$\left[\frac{10}{2^1}\right]=5$	
		至少一個$2^2=4$和$2^0=1$	$\left[\frac{10}{2^2}\right]=2$	
		固定一個$2^2=4$和$2^1=2$	$\left[\frac{10-4}{2^1}\right]=3$	
		固定二個$2^2=4$和$2^1=2$	$\left[\frac{10-8}{2^1}\right]=1$	
		至少一個$2^3=8$和$2^0=1$	$\left[\frac{10}{2^3}\right]=1$	
		固定一個$2^3=8$和$2^1=2$	$\left[\frac{10-8}{2^1}\right]=1$	

2. 我們發現利用高斯符號的方法，概念的運用和之前計算以 3 的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出 3 的倍數的方法是一樣的。

例如當 n=9 時，2xn=18，以 2 的次方數(1,2,4,8,16…)用加法湊出 2xn=18 的方法數 $f_2(2n)=f_2(18)=46$。高斯符號計算如下:

$$1+\left[\frac{18}{2^1}\right]+\left[\frac{18}{2^2}\right]+\left[\frac{18-4}{2^1}\right]+\left[\frac{18-8}{2^1}\right]+\left[\frac{18-16}{2^1}\right]+\left[\frac{18-2\times4}{2^1}\right]+\left[\frac{18-3\times4}{2^1}\right]+\left[\frac{18-4\times4}{2^1}\right]+$$

$$\left[\frac{18-2\times8}{2^1}\right]+\left[\frac{18}{2^3}\right]+\left[\frac{18}{2^4}\right]+\left[\frac{18-8}{2^2}\right]+\left[\frac{18-8-4}{2}\right]+\left[\frac{18-8-4\times2}{2^2}\right]$$

=1+9+4+7+5+1+5+3+1+1+2+1+2+3+1=46。

(三) 利用組合的概念

由 3n 的小結論，應用在 2n，結果如下表 4-10 所示。

表 4-10

n	2xn	組合方法數		$f_2(2n)$
5	10	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	1	14
		2+1+1+1+1+1+1+1+1	5 (n)	
		2+2+1+1+1+1+1+1		
		2+2+2+1+1+1+1		

		2+2+2+2+1+1		
		2+2+2+2+2		
		4+1+1+1+1+1+1	1	
		4+2+1+1+1+1	5-2 (n-2)	
		4+2+2+1+1		
		4+2+2+2		
		4+4+1+1	1	
		4+4+2	5-2x2 (n-2x2)	
		8+1+1	1	
		8+2	$5\text{-}2^2$ $(n\text{-}2^2)$	

歸納可得到之小結論如下:

小結論

$$
\begin{aligned}
f_2(2n) = &\{[1+n]+[1+(n-2)]+[1+(n-2\cdot 2]+[1+(n-3\cdot 2)]+\ldots\ldots\ \}+\\
&\{[1+(n-2^2)]+[1+(n-2\cdot 2^2)]+[1+(n-3\cdot 2^2)]+\ldots\ldots\ldots\ \}+\\
&\{[1+(n-2^3)]+[1+(n-2\cdot 2^3)]+[1+(n-3\cdot 2^3)]+\ldots\ldots\ldots\ \}+\\
&\{[1+(n-2^2-2^3)]+[1+(n-2\cdot 2^2-2^3)]+[1+(n-3\cdot 2^2-2^3)]+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

(四) 利用數型規律計算 2n 的所有組合方法數

1. 我們將由(一)或(二)所得到的結果製成表格 4-11。

表 4-11

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
湊出 2n 的方法數	2	4	6	10	14	20	26	36	46	60	74	94	114	140	166
$a_n - a_{n-1}$		2	2	4	4	6	6	10	10	14	14	20	20	26	26

2. 由表4-11 我們發現和 3n 一樣，將 $a_n - a_{n-1}$ 中不重複數字的項視為一個新的數列{An}，An:2,4,6,10,14,20,26…，和原數列 a_n:2,4,6,10,14,20,26 的數字是相同。

3. 由表 4-11 我們同樣也發現某些項 a_n 存在相同的公差 d; 3n 是四數形成一等差數列，而 2n 則是三數形成一等差數列，如:

(1) a_1=2、a_2=4、a_3=6 此三數為一個公差 d_1 為 2 的等差數列，

$a_2 = a_1 + d_1 = a_1 + 2 = a_1 + a_1$

$a_3 = a_2 + d_1 = a_2 + 2 = a_2 + a_1$

(2) a_3=6、a_4=10、a_5=14 此三數為一個公差 d_2 為 4 的等差數列，

$a_4 = a_3 + d_2 = a_3 + 4 = a_3 + a_2$

$a_5 = a_4 + d_2 = a_4 + 4 = a_3 + 2a_2$

以此類推，從第一項開始，每三項會形成一個等差數列。進一步歸納可以得到~

小結論

當 $k \geq 1$ 、$n = 2k-1$ 時，會以 a_n 為首項，依序三項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

4.因為上述 3.只能將方法數分割成一段段只有三項的等差數列，同樣的我們想再推論出其他數學關係，所以我們將湊出 2n 的方法數 a_n 整理成下表 4-12：

表 4-12

$a_2 = a_1 + 2 = a_1 + a_1$	$a_{10} = a_9 + 14 = a_9 + a_5$
$a_3 = a_2 + 2 = a_2 + a_1$	$a_{11} = a_{10} + 14 = a_{10} + a_5$
$a_4 = a_3 + 4 = a_3 + a_2$	$a_{12} = a_{11} + 20 = a_{11} + a_6$
$a_5 = a_4 + 4 = a_4 + a_2$	$a_{13} = a_{12} + 20 = a_{12} + a_6$
$a_6 = a_5 + 6 = a_5 + a_3$	$a_{14} = a_{13} + 26 = a_{13} + a_7$
$a_7 = a_6 + 6 = a_6 + a_3$	$a_{15} = a_{14} + 26 = a_{14} + a_7$
$a_8 = a_7 + 10 = a_7 + a_4$	
$a_9 = a_8 + 10 = a_8 + a_4$	

我們以等差數列為基礎，同理可推論得到下列的遞迴關係式:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{2}\right]},\ n \geq 2 \end{cases}$$

，其中[ ]為高斯符號。

(四) 數學歸納法證明

從 3n 的經驗，我們直接將項數再細分為 $2n$ 、 $2n+1$，利用遞迴關係式:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{2}\right]},\ n \geq 2 \end{cases}$$

，分別推論為以下二種:

1. 當$\boxed{\text{項數為}2n}$時，$a_{2n}=a_{2n-1}+a_{\left[\frac{2n}{2}\right]}$，亦即$\boxed{a_{2n}=a_{2n-1}+a_n}$

證明:

當$n=1$時，$a_2=a_1+a_1$，　4 = 2 + 2　成立；

當$n=2$時，$a_4=a_3+a_2$，　10 = 6 + 4　成立；

設當$n=k$時，$a_{2k}=a_{2k-1}+a_k$ 成立，

則當$n=k+1$時，$a_{2(k+1)}=a_{2k+2}=a_{2k+1}+a_{\left[\frac{2k+2}{2}\right]}$

$$=a_{2(k+1)-1}+a_{\left[\frac{2(k+1)}{2}\right]} \qquad (m=k+1)$$

$$=a_{2m-1}+a_m$$

故$a_{2m}=a_{2m-1}+a_m$　得證。

2. 當$\boxed{\text{項數為}2n+1}$時，$a_{2n+1}=a_{2n}+a_{\left[\frac{2n+1}{2}\right]}$，亦即$\boxed{a_{2n+1}=a_{2n}+a_n=a_{2n-1}+2a_n}$

$$(\because a_{2n}=a_{2n-1}+a_n)$$

證明:

當$n=1$時，$a_3=a_1+2a_1$，　6 = 2 + 2x2　成立；

當$n=2$時，$a_5=a_3+2a_2$，　14 = 6 + 2x4　成立；

設當$n=k$時，$a_{2k+1}=a_{2k-1}+2a_k$ 成立，

則當$n=k+1$時，$a_{2(k+1)+1}=a_{2k+3}=a_{2k+2}+a_{\left[\frac{2k+3}{2}\right]}$

$$=a_{2m}+a_{\left[\frac{2m+1}{2}\right]} \qquad (m=k+1)$$

$$=a_{2m-1}+a_m+a_m$$

$$=a_{2m-1}+2a_m$$

故$a_{2m+1}=a_{2m-1}+2a_m$　得證。

四、 探討 2n 的方法數之同餘關係

(一) 再進一步探討倍數 n 和 2 的次方、以及 2n 的方法數的關係，整理如下表 4-13:

表 4-13

1	以 2 的次方表示 n	$f_2(2n)$	$f_2(2n)\ (\mathrm{mod}2)$

1	$1x2^0$	2	0
2	$0x2^0+1x2^1$	4	0
3	$1x2^0+1x2^1$	6	0
4	$0x2^0+0x2^1+1x2^2$	10	0
5	$1x2^0+0x2^1+1x2^2$	14	0
6	$0x2^0+1x2^1+1x2^2$	20	0
7	$1x2^0+1x2^1+1x2^2$	26	0
8	$0x2^0+0x2^1+0x2^2+1x2^3$	36	0
9	$1x2^0+0x2^1+0x2^2+1x2^3$	46	0
10	$0x2^0+1x2^1+0x2^2+1x2^3$	60	0

(二) 從上表中發現， $f_2(2n) \equiv 0 \pmod 2$，其結果和 $f_3(3(3n-1)) \equiv 0 \pmod 3$是成立的。歸納可得到~

小結論

$$f_2(2(2n-1)) \equiv 0 \pmod 2$$

(三) 從上表中發現，若將 $n = c_0 \cdot 2^0 + c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 2^2 + c_3 \cdot 2^3 + \ldots\ldots c_j 2^j$ 表示， 2^i 的係數 c_i 數字為 0、1。

(四) 由 $f_3(3n) \pmod 3$的小結論，在此亦可成立。

例如當 n=3 時， $f_2(2 \cdot 3) = f_2(6) = 6$ ， $f_2(6) \equiv 0 \pmod 2$

$n=3=1x2^0+1x2^1$，設 $c_0=1$、$c_1=1$，$(c_0+1)(c_1+1)=2x2=4 \equiv 0 \pmod 2$ 。

小結論

當 $n = c_0 \cdot 2^0 + c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 2^2 + c_3 \cdot 2^3 + \ldots\ldots c_j 2^j$ ，則 $f_2(2n) \equiv \prod_{i=0}^{j}(c_i+1) \pmod 2$

五、 探討以 4 的次方數(1,4,16,64,…)用加法湊出 4 的倍數

因為藉由上述 3n 和 2n 兩個問題的研究探討，我們列出 4n 的幾組組合方法數，並比較驗證其結果，如表 4-14 所示。

(一) 列出 4n 的所有組合方法數

1. 示例: 劃記如表 4-14

定義 $f_4(4n)$ 為以 4 的次方數用加法湊出 4 的 n 倍之方法數。

表 4-14

n	4xn	組合方法數	$f_4(4n)$
1	4	1+1+1+1	2
		4	
2	8	1+1+1+1+1+1+1+1	3
		4+1+1+1+1	
		4+4	
3	12	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	4
		4+1+1+1+1+1+1+1+1	
		4+4+1+1+1+1	
		4+4+4	
4	16	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	6
		4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		4+4+1+1+1+1+1+1+1+1	
		4+4+4+1+1+1+1	
		4+4+4+4	
		16	
5	20	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	8
		4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		4+4+4+1+1+1+1+1+1+1+1	
		4+4+4+4+1+1+1+1	
		4+4+4+4+4	
		16+1+1+1+1	
		16+4	

(二) 利用高斯符號[ ]計算 4n 的所有組合方法數

由上述二次經驗，這次我們決定直接利用高斯符號算出總方法數。例如當 n=5 時，4xn=20，以 4 的次方數(1,4,16…)用加法湊出 4xn=20 的方法數 $f_4(4n)=f_4(20)=8$ 。高斯符號計算如下:1+$\left[\frac{20}{4^1}\right]+\left[\frac{20}{4^2}\right]+\left[\frac{20-16}{4^1}\right]$=1+5+1+1=8。結果符合。

(三) 利用組合的概念

由 3n 的解題策略，應用在 4n 結果亦成立。

當 n=5， $f_4(4n)=f_4(20)=[1+5]+[1+(5-4)]=8$

小結論

$$
\begin{aligned}
f_4(4n)=&\{[1+n]+[1+(n-4)]+[1+(n-2\cdot4]+[1+(n-3\cdot4)]+\ldots\ldots\}+\\
&\{[1+(n-4^2)]+[1+(n-2\cdot4^2)]+[1+(n-3\cdot4^2)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+\\
&\{[1+(n-4^3)]+[1+(n-2\cdot4^3)]+[1+(n-3\cdot4^3)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+\\
&\{[1+(n-4^2-4^3)]+[1+(n-2\cdot4^2-4^3)]+[1+(n-3\cdot4^2-4^3)]+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

(四) 利用數型規律計算 4n 的所有組合方法數

1. 同理，我們製成表 4-15。

表 4-15

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
湊出 4n 的方法數	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40
$a_n - a_{n-1}$		1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4

2. 由表 4-15 我們發現和 3n、2n 一樣，將 $a_n - a_{n-1}$ 中不重複數字的項視為一個新的數列 {An}，An:2,3,4,⋯，和原數列 a_n:2,3,4,⋯的數字是相同。

3. 由表 4-15 某些項存在相同的公差 d;但是 4n 是五數形成一等差數列，如:

(1) a_3=4、a_4=6、a_5=8、a_6=10、a_7=12 此五數為一個公差 $d_1=a_1$ 為 2 的等差數列，

(2) a_8=4、a_9=6、a_{10}=8、a_{11}=10、a_{12}=12 此五數為一個公差 $d_2=a_2$ 為 3 的等差數列，

以此類推，從第一項開始，每項會形成一個等差數列。進一步歸納可以得到~

小結論

當 $k\ge1$，n= $4k-1$，會以 a_n 為首，依序五項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

4. 同理我們也將湊出 4n 的方法數 a_n 整理成下表 4-16:

表 4-16

$a_4=a_3+2=a_3+a_1$	$a_8=a_7+3=a_7+a_2$
$a_5=a_4+2=a_4+a_1$	$a_9=a_8+3=a_8+a_2$
$a_6=a_5+2=a_5+a_1$	$a_{10}=a_9+3=a_9+a_2$
$a_7=a_6+2=a_6+a_1$	$a_{11}=a_{10}+3=a_{10}+a_2$

我們以等差數列為基礎，推論得到下列的遞迴關係式:

$$\begin{cases} a_1 = 2、a_2 = 3、a_3 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{4}\right]},\ n \ge 4 \end{cases}$$ ，其中[ ]為高斯符號。

(四)數學歸納法證明

我們將項數再細分為 $4n$ 、 $4n+1$ 、 $4n+2$ 、 $4n+3$ ，利用遞迴關係式:

$$\begin{cases} a_1 = 2、a_2 = 3、a_3 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{4}\right]},\ n \ge 4 \end{cases}$$ ，分別推論為以下四種:

1. 當$\boxed{\text{項數為 } 4n}$時， $a_{4n} = a_{4n-1} + a_{\left[\frac{4n}{4}\right]}$ ，亦即$\boxed{a_{4n} = a_{4n-1} + a_n}$

證明:

當 $n=1$時， $a_4 = a_3 + a_1$ ，　6 = 4 + 2　成立；

當 $n=2$時， $a_8 = a_7 + a_2$ ，　15 = 12 + 3　成立；

設當 $n=k$ 時， $a_{4k} = a_{4k-1} + a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$時， $a_{4(k+1)} = a_{4k+4} = a_{4k+3} + a_{\left[\frac{4k+4}{4}\right]}$

$$= a_{4(k+1)-1} + a_{\left[\frac{4(k+1)}{4}\right]} \qquad (m=k+1)$$

$$= a_{4m-1} + a_m$$

故 $a_{4m} = a_{4m-1} + a_m$　得證。

2. 當$\boxed{\text{項數為 } 4n+1}$時， $a_{4n+1} = a_{4n} + a_{\left[\frac{4n+1}{4}\right]}$ ，亦即$\boxed{a_{4n+1} = a_{4n} + a_n = a_{4n-1} + 2a_n}$

$(\because a_{4n} = a_{4n-1} + a_n)$

證明:

當 $n=1$時， $a_5 = a_3 + 2a_1$ ，　8 = 4 + 2x2　成立；

當 $n=2$時， $a_9 = a_7 + 2a_2$ ，　18 = 12 + 2x3　成立；

設當 $n=k$ 時， $a_{4k+1} = a_{4k-1} + 2a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$時， $a_{4(k+1)+1} = a_{4k+5} = a_{4k+4} + a_{\left[\frac{4k+5}{4}\right]}$

$$= a_{4m} + a_{\left[\frac{4m+1}{4}\right]} \qquad (m=k+1)$$

$$= a_{4m-1} + a_m + a_m$$

$= a_{4m-1} + 2a_m$

故 $a_{4m+1} = a_{4m-1} + 2a_m$　得證。

3. 當$\boxed{\text{項數為 } 4n+2}$時，$a_{4n+2} = a_{4n+1} + a_{\left\lceil \frac{4n+2}{4} \right\rceil}$，亦即$\boxed{a_{4n+2} = a_{4n+1} + a_n = a_{4n-1} + 3a_n}$

$(\because a_{4n+1} = a_{4n-1} + 2a_n)$

證明:

當 $n=1$時，$a_6 = a_3 + 3a_1$，　　10 = 4 + 3x2　成立；

當 $n=2$時，$a_{10} = a_7 + 3a_2$，　　21= 12 + 3x3　成立；

設當 $n=k$ 時，$a_{4k+2} = a_{4k-1} + 3a_k$　成立，

則當 $n=k+1$時，　$a_{4(k+1)+2} = a_{4k+6} = a_{4k+5} + a_{\left\lceil \frac{4k+6}{4} \right\rceil}$

$= a_{4m+1} + a_{\left\lceil \frac{4m+2}{4} \right\rceil}$　　$(m=k+1)$

$= a_{4m-1} + 2a_m + a_m$

$= a_{4m-1} + 3a_m$

故 $a_{4m+2} = a_{4m-1} + 3a_m$　得證。

4. 當$\boxed{\text{項數為 } 4n+3}$時，$a_{4n+3} = a_{4n+2} + a_{\left\lceil \frac{4n+3}{4} \right\rceil}$，亦即$\boxed{a_{4n+3} = a_{4n+2} + a_n = a_{4n-1} + 4a_n}$

$(\because a_{4n+2} = a_{4n-1} + 3a_n)$

證明:

當 $n=1$時，$a_7 = a_3 + 4a_1$，　　12 = 4 + 4x2　成立；

當 $n=2$時，$a_{11} = a_7 + 4a_2$，　24= 12 + 4x3　成立；

設當 $n=k$ 時，$a_{4k+3} = a_{4k-1} + 4a_k$　成立，

則當 $n=k+1$時，　$a_{4(k+1)+3} = a_{4k+7} = a_{4k+6} + a_{\left\lceil \frac{4k+7}{4} \right\rceil}$

$= a_{4m+2} + a_{\left\lceil \frac{4m+3)}{4} \right\rceil}$　　$(m=k+1)$

$= a_{4m-1} + 3a_m + a_m$

$= a_{4m-1} + 4a_m$

故 $a_{4m+3} = a_{4m-1} + 4a_m$　得證。

六、 探討 4n 的方法數之同餘關係

(一) 再進一步探討倍數 n 和 4 的次方、以及 4n 的方法數的關係，整理如下表 4-17:

表 4-17

n	以 4 的次方表示 n	$f_4(4n)$	$f_4(4n)\ (\mathrm{mod}4)$
1	$1\mathrm{x}4^0$	2	2
2	$2\mathrm{x}4^0$	3	3
3	$3\mathrm{x}4^0$	4	0
4	$0\mathrm{x}4^0+1\mathrm{x}4^1$	6	2
5	$1\mathrm{x}4^0+1\mathrm{x}4^1$	8	0
6	$2\mathrm{x}4^0+1\mathrm{x}4^1$	10	2
7	$3\mathrm{x}4^0+1\mathrm{x}4^1$	12	0
8	$0\mathrm{x}4^0+2\mathrm{x}4^1$	15	3
9	$1\mathrm{x}4^0+2\mathrm{x}4^1$	18	2
10	$2\mathrm{x}4^0+2\mathrm{x}4^1$	21	1

(二) 從上表發現，當 n=3、 $f_4(4\cdot 3)\equiv 0\ (\mathrm{mod}4)$，n=7、 $f_4(4\cdot 7)\equiv 0\ (\mathrm{mod}4)$ 。歸納可得到~

小結論

$$f_4(4(4n-1))\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ 4)$$

(三) 從上表中發現，若將 $n=c_0\cdot 4^0+c_1\cdot 4^1+c_2\cdot 4^2+c_3\cdot 4^3+\ldots\ldots c_j 4^j$ 表示， 4^i 的係數 c_i 數字為 0、1、2、3。

(四) $f_3(3n)\ (\mathrm{mod}3)$ 的小結論，在此亦可成立。

例如當 n=3 時， $f_4(4\cdot 3)=f_4(12)=28$ ， $f_4(12)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$

n=3=3x4^0，設 c_0=3，(c_0+1)=4≡0 (mod 4) 。

小結論

當 $n=c_0\cdot 4^0+c_1\cdot 4^1+c_2\cdot 4^2+c_3\cdot 4^3+\ldots\ldots c_j 4^j$ ，則 $f_4(4n)\equiv\prod_{i=0}^{j}(c_i+1)\ \ (\mathrm{mod}\ 4)$

伍、 研究結果

一、 利用高斯符號，得到以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3 …)用加法湊出 m 的 n 倍數的方法數。

計算 mxn 的方法數 $f_m(mn)$ ，其數學式子為：

$$f_m(mn) = \sum_{p=1} \frac{mn}{m^p} + \sum_{a=1}\left(\sum_{p=1} \frac{mn - am^p}{m}\right) + \sum_{a=1}\left(\sum_{p=1} \frac{mn - m^p - am^{p-1}}{m}\right) + \ldots\ldots$$

例如：用 7 的次方湊成 7x10=70 的方法數為：

$$f_7(70) = 1 + \left\lfloor \frac{70}{7^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{70}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{70-7}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{70-2\times 7}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{70-3\times 7}{7^2} \right\rfloor = 1+10+1+1+1+1+1=15\text{。}$$

二、 利用組合數的概念，得到以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3 …)用加法湊出 m 的 n 倍數的方法數。

計算 mxn 的方法數 $f_m(mn)$ ，其數學式子為：

$$\begin{aligned} f_m(\mathrm{mn}) = &\{[1+n]+[1+(n-m)]+[1+(n-2m]+[1+(n-3m)]+\ldots\ldots\}+ \\ &\{[1+(n-m^2)]+[1+(n-2m^2)]+[1+(n-3m^2)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+ \\ &\{[1+(n-m^3)]+[1+(n-2m^3)]+[1+(n-3m^3)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+ \\ &\{[1+(n-m^2-m^3)]+[1+(n-2m^2-m^3)]+[1+(n-3m^2-m^3)]+\ldots\ldots \end{aligned}$$

例如：用 7 的次方湊成 7x10=70 的方法數為： $f_7(70) = [1+10]+[1+(10-7)] = 15$

三、 利用數型規律，其關係為：

若以 a_n 代表湊出 mn 的方法數，我們發現數列< a_n >，

1. 從 m-1 項開始，依序每(m+1)項一組會形成一個等差數列。

2. 當 $k \geq 1$時，n=mk-1，會以 a_n 為首，依序 m+1 項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

例如：m=7，數列< a_n >代表湊出 7n 的方法數，則從 a_6 為首項，依序八項形成一個公差 d= a_1 的等差數列。

四、 遞迴關係式：

以 a_n 代表湊出 mn 的方法數，我們發現數列< a_n >可以推論出一個遞迴關係式，如下:

$$\begin{cases} a_1 = x\text{、}a_2 = y\text{、}a_3 = z\ldots\ldots a_{m-1} = u \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{m}\right]}\text{，}n \geq m \end{cases}$$

其中[ ]為高斯符號

例如： a_n 代表湊出 7n 的方法數，

$$\begin{cases} a_1 = 2、a_2 = 3、a_3 = 4、a_4 = 5、a_5 = 6、a_6 = 7 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{7}\right]},\ n \ge 7 \end{cases}$$ 其中[ ]為高斯符號

五、 利用數學歸納法證明遞迴式的過程中，必須再將數列< a_n >中的項數細分，意即在以 a_n 代表湊出 mn 的方法數中，將數列< a_n >中的每一項再分成 a_{mn+1}、a_{mn+2}、a_{mn+3}、......、$a_{mn+(m-1)}$ 等，然後推論得到以下關係式:

$$a_{mn} = a_{mn-1} + a_n$$

$$a_{mn+1} = a_{mn-1} + 2a_n$$

$$a_{mn+2} = a_{mn-1} + 3a_n$$

$$a_{mn+3} = a_{mn-1} + 4a_n$$

.

.

$$a_{mn+(m-1)} = a_{mn-1} + ma_n$$

以 a_n 代表湊出 mn 的方法數中

故 $a_{mn+p} = a_{mn-1} + (p+1)a_n$，其中 $1 \le p < m$、p 為正整數。

例如：數列< a_n >代表湊出 7n 的方法數，

數列< a_n >中的每一項再分成 a_{7n+1}、a_{7n+2}、a_{7n+3}、......、a_{7n+6}，

$a_7 = a_6 + a_1$、$a_8 = a_6 + 2a_1$、$a_9 = a_6 + 3a_1$......

六、 同餘關係，以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3...)用加法湊出 m 的 n 倍數的方法數 $f_m(mn)$。

其同餘關係如下

1. $f_m(\mathrm{m}(mn-1)) \equiv 0 \pmod{m}$。

2. 當 $n = c_0 \cdot m^0 + c_1 \cdot m^1 + c_2 \cdot m^2 + c_3 \cdot m^3 + \ldots\ldots c_j m^j$，$m^i$ 的係數 c_i 數字為 0、1、2…(m-1)。

3. 當 $n = c_0 \cdot m^0 + c_1 \cdot m^1 + c_2 \cdot m^2 + c_3 \cdot m^3 + \ldots\ldots c_j m^j$，則 $f_m(\mathrm{mn}) \equiv \prod_{i=0}^{j} (c_i + 1) \pmod{m}$

陸、 討論省思與未來展望

一、 討論省思

(一) 開始著手思考科學研習月刊 57-8 期中「用三湊三」的問題時，因為月刊上有先提及湊出 9 有五種方法，湊出 12 有七種方法，所以先用最基本的解題策略-畫圖，然後成功地分別找到五種方法和七種方法，然後逐次的成功劃記所有的方法數。

(二) 在過程中，我們發現好像和「整除、因數」有相關，意即若 3n=3x5=15，我們思考到底可以放幾個 3?幾個 9？ 這就可以用 $\frac{15}{3}=5$ ，可以放 5 個 3； $\frac{15}{9}=1...6$ ，可以放 1 個 9，因此利用高斯符號[ ]，和組合數的概念進行解題。

(三) 月刊中提到湊出 3n(n=1,2,3,4,…)的方法數分別有 2,3,5,7,9,12,15,18,23,…。這個數列的規律為何?所以我們從觀察數列著手，從聚焦在兩項之間的差和原數列相同，接著發現數列中某幾項的差相同，找到了等差數列，觀察公差是數列中的某一項，但整個數列並非是同一公差的等差數列，進而發現了遞迴數列，收穫如排山倒海而來呀!

(四) 為了證明找到的遞迴關係式是正確的，因此利用數學歸納法予以證明，證實並推論用遞迴關係式表示以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3…)用加法湊出 m 的 n 方法數。

(五) 最後將期刊中的問題進一步做延伸挑戰，藉由觀察 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3…)用加法湊出 m 的 n 方法數中，討論其同餘的關係，也成功找到了關係式。

二、 未來展望

這一次的研究，藉由高斯符號、組合概念、以及數列規律推論得到遞迴關係式，成功計算並推論出以 m 的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3…)用加法湊出 m 的 n 倍方法數的方法，也延伸探討了同餘的關係，但我們尚未藉由遞迴關係式成功推論出一般式，以及未將推導而獲得的同餘關係予以證明，這將是我們後續研究的方向。

柒、 參考資料

一、 左台益(2014)。國中數學課本第四冊第一章：等差數列與等差級數。南一版。

二、 游森棚(2018)。森棚教官的數學題。科學研習月刊，57-8，52。

三、 游森棚(2019)。高中數學課本第二冊第一章：數列與級數。翰林版。

【評語】030411

此作品是研究 3n 整數的 3 的乘冪分拆方法數，作者進一步考慮 m 的倍數的 m 乘冪分拆方法數的解題策略、數學關係式和同餘關係，結果完整。可惜的是因此類問題已有相關文獻探討且論證的部份有改進空間。

作品海報

摘要

本研究旨在探討科學研習月刊57-8期中「用三湊三」的問題。意即以3的次方數($3^0,3^1,3^2,3^3,3^4\cdots$)用加法湊出3的倍數的方法數。先以直接劃記的方法解題，算出其方法數，接著利用高斯符號、組合的方式直接計算其方法數。爾後將湊出3n的方法數藉由數型規律進行分析探討，推論出遞迴關係式，並以數學歸納法驗證。亦進一步延伸探討其方法數之同餘關係。也研究以2的次方數($2^0,2^1,2^2,2^3,2^4\cdots$)用加法湊出2的倍數的方法數、4的次方數($4^0,4^1,4^2,4^3,4^4\cdots$)用加法湊出4的倍數的方法數，然後加以驗證，最後推廣到以m的次方數用加法湊出m的倍數之方法數的解題策略、數學關係式和同餘關係。

壹、研究動機：

本研究源自於科學研習月刊57-8期中「用三湊三」的問題。說明如下：小定想要用3的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出3的倍數。比如湊成6有下列三種方法：3+3、3+1+1+1 、1+1+1+1+1+1。

注意到:只要湊出來，選數字的順序不用管，即3+1+1+1和1+3+1+1是同一個方法。

貳、研究目的：

一、探討並計算以3的次方數($3^0,3^1,3^2,3^3,3^4\cdots$)用加法湊出3的倍數的方法數。

二、推論3n(n=1,2,3,4,…)的所有組合方法數排成數列2,3,5,7,9,12,15,18,…的規律。

三、數列規律性之數學遞迴關係式的驗證。

四、探討3n(n=1,2,3,4,…)的所有組合方法數之同餘關係。

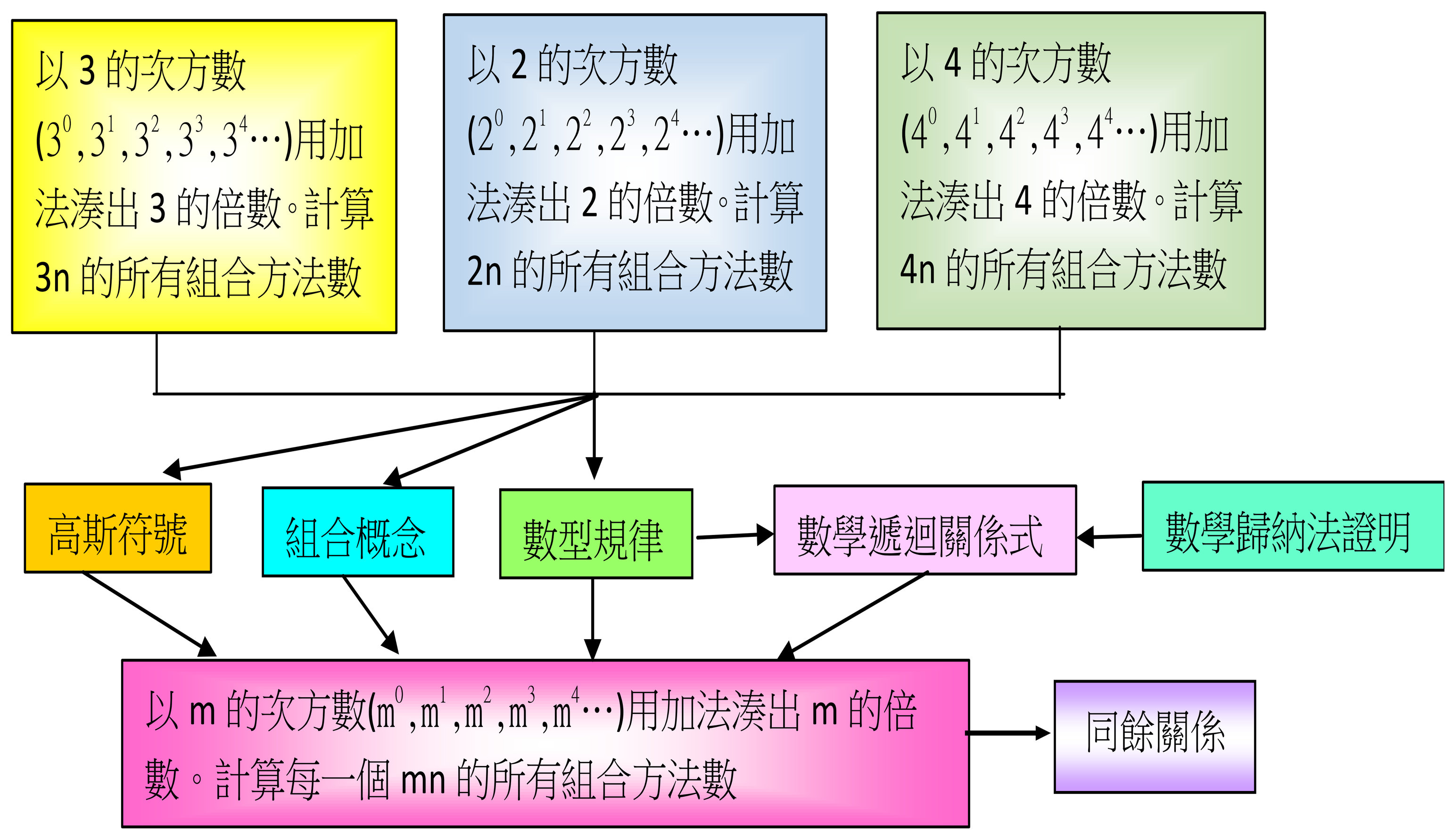
五、推論以m的次方數(m^0、m^1、m^2、m^3...)用加法湊出m的倍數之方法數的解題策略、數學關係式和同餘關係。

參、研究設備及器材：

紀錄單、計算機、紙、筆、電腦、數學課本、Microsoft Office Word。

肆、研究過程及方法：

【研究架構】



【數學概念和名詞定義】

(一) $f_m(mn)$ (二)數列 (三)等差數列 (四)遞迴關係
(五)高斯符號 (六)數學歸納法 (七)同餘(mod)

一、探討以3的次方數(1,3,9,27,81…)用加法湊出3的倍數:

(一)列出3n的所有組合方法數

下表4-1.1為以直接劃記的方法計算3的倍數的所有組合方法數。

表4-1.1

n	3xn	組合方法數	
1	3	1+1+1	2
		3	
2	6	1+1+1+1+1+1	3
		3+1+1+1	
		3+3	
3	9	1+1+1+1+1+1+1+1+1	5
		3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1	
		3+3+3	
		9	
4	12	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	7
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3	
		9+1+1+1	
		9+3	

n	3xn	組合方法數	
5	15	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	9
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+1+1+1+1+1+1	
		3+3+3+3+1+1+1	
		3+3+3+3+3	
		9+1+1+1+1+1+1	
		9+3+1+1+1	
		9+3+3	

我們將組合方法數的統計圖表整理如下表4-1.2

表4-1.2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
方法數 $f_3(3n)$	2	3	5	7	9	12	15	18	23	28

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
33	40	47	54	63	72	81	93	105	117

(二)利用高斯符號[ ]計算3n的所有組合方法數

1.由一個個實際排列中，發現若先固定某一個 數，即可以利用高斯符號算出其方法數。示例如表4-2

表4-2

n	3xn	先固定某一個3^n 數目	利用高斯符號計算	$f_3(3n)$
1	3	全部都是 $3^0=1$	1	2
		至少一個 $3^1=3$ 和 $3^0=1$	$\left[\frac{3}{3^1}\right]=1$	
2	6	全部都是 $3^0=1$	1	3
		至少一個 $3^1=3$ 和 $3^0=1$	$\left[\frac{6}{3^1}\right]=2$	
3	9	全部都是 $3^0=1$	1	5
		至少一個 $3^1=3$ 和 $3^0=1$	$\left[\frac{9}{3^1}\right]=3$	
		至少一個 $3^2=9$	$\left[\frac{9}{3^2}\right]=1$	
4	12	全部都是 $3^0=1$	1	7
		至少一個 $3^1=3$ 和 $3^0=1$	$\left[\frac{12}{3^1}\right]=4$	
		至少一個 $3^2=9$ 和 $3^0=1$	$\left[\frac{12}{3^2}\right]=1$	
		固定一個 $3^2=9$ 和 $3^1=3$	$\left[\frac{12-9}{3^1}\right]=1$	

2.利用高斯符號計算。例如當n=18時，3xn=54，用加法湊出3xn=54的方法數 $f_3(3n)=f_3(54)$ =93。

$$1+\left[\frac{54}{3^1}\right]+\left[\frac{54}{3^2}\right]+\left[\frac{54-9}{3^1}\right]+\left[\frac{54-18}{3^1}\right]+\left[\frac{54-27}{3^1}\right]+\left[\frac{54-36}{3^1}\right]+\left[\frac{54-45}{3^1}\right]+\left[\frac{54}{3^3}\right]+\left[\frac{54-27}{3^1}\right]$$
$$+\left[\frac{54-27}{3^2}\right]+\left[\frac{54-27-9}{3^1}\right]+\left[\frac{54-27-18}{3^1}\right]$$

=1+18+6+15+12+9+6+3+2+9+3+6+3=93。

(三)由上述第一種和第二種方法，我們結合兩種的解題策略，發展出更快速 的方法。如下表4-4

表4-4

n	3xn	組合方法數		$f_3(3n)$
5	15	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	1	9
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	5 (n)	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+1+1+1		
		3+3+3+3+3		
		9+1+1+1+1+1+1	1	
		9+3+1+1+1	5-3 (n-3)	
		9+3+3		
7	21	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	1	15
		3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	7 (n)	
		3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+3+1+1+1+1+1+1		
		3+3+3+3+3+3+1+1+1		
		3+3+3+3+3+3+3		
		9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	1	
		9+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1	7-3 (n-3)	
		9+3+3+1+1+1+1+1+1		
		9+3+3+3+1+1+1		
		9+3+3+3+3		
		9+9+1+1+1	1	
		9+9+3	7-2x3 (n-2x3)	

以此類推，得到的小結論如下:

$$\begin{aligned} f_3(3n)=&\{[1+n]+[1+(n-3)]+[1+(n-2\cdot 3]+[1+(n-3\cdot 3)]+\ldots\ldots\}+\\ &\{[1+(n-3^2)]+[1+(n-2\cdot 3^2)]+[1+(n-3\cdot 3^2)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+\\ &\{[1+(n-3^3)]+[1+(n-2\cdot 3^3)]+[1+(n-3\cdot 3^3)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+\\ &\{[1+(n-3^2-3^3)]+[1+(n-2\cdot 3^2-3^3)]+[1+(n-3\cdot 3^2-3^3)]+\ldots\ldots \end{aligned}$$

(四)利用數型規律計算3n的所有組合方法數

我們將湊出的方法數列成一數列，觀察數列是否存在符合的數學關係式。

1.我們將湊出3n的方法數的結果製成表格4-5。

表4-5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
湊出 3n 的方法數 a_n	2	3	5	7	9	12	15	18	23	28	33	40	47	54	63	72	81	93	105	117
$a_n - a_{n-1}$		1	2	2	2	3	3	3	5	5	5	7	7	7	9	9	9	12	12	12

2.由表4-5我們發現將 $a_n - a_{n-1}$ 中不重複數字的項可視為一個新的數列{An}，而 An:2,3,5,7,9,12...，和原數列 a_n :2,3,5,7,9,12數字是相同，如表4-5所示。

3.由表4-5的 $a_n - a_{n-1}$ 我們亦發現某些項存在相同的公差d;如：

(1) $a_2=3$、 $a_3=5$、 $a_4=7$、 $a_5=9$，此四數為一個公差 d_1 為 2 的等差數列，

$$a_3 = a_2 + d_1 = a_2 + 2 = a_2 + a_1, \quad a_4 = a_3 + d_1 = a_3 + 2 = a_3 + a_1 = a_2 + 2a_1$$

$$a_5 = a_4 + d_1 = a_4 + 2 = a_4 + a_1 = a_2 + 3a_1$$

(2) $a_5=9$、 $a_6=12$、 $a_7=15$、 $a_8=18$，此四數為一個公差 d_2 為 3 的等差數列，

$$a_6 = a_5 + d_2 = a_5 + 3 = a_5 + a_2, \quad a_7 = a_6 + d_2 = a_6 + 3 = a_5 + 2a_2$$

$$a_8 = a_7 + d_2 = a_7 + 3 = a_5 + 3a_2$$

(3) $a_8=18$、 $a_9=23$、 $a_{10}=28$、 $a_{11}=33$，此四數為一個公差 d_3 為 5 的等差數列，

$$a_9 = a_8 + d_3 = a_8 + 5 = a_8 + a_3, \quad a_{10} = a_9 + d_3 = a_9 + 5 = a_8 + 2a_3$$

$$a_{11} = a_{10} + d_3 = a_{10} + 5 = a_8 + 3a_3$$

以此類推，從第二項開始，每四項會形成一個等差數列。進一步歸納可得到:

當 $k \ge 1$ 時，$n = 3k-1$，會以 a_n 為首項，依序四項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

4.上述3.將方法數分割成一段段四項的等差數列，我們想再進一步推論是否存在其他數學關係，所以我們將湊出3n的方法數 a_n 整理成下表4-6

表4-6

$a_3 = a_2 + 2 = a_2 + a_1$	$a_{12} = a_{11} + 7 = a_{11} + a_4$
$a_4 = a_3 + 2 = a_3 + a_1$	$a_{13} = a_{12} + 7 = a_{12} + a_4$
$a_5 = a_4 + 2 = a_4 + a_1$	$a_{14} = a_{13} + 7 = a_{13} + a_4$
$a_6 = a_5 + 3 = a_5 + a_2$	$a_{15} = a_{14} + 9 = a_{14} + a_5$
$a_7 = a_6 + 3 = a_6 + a_2$	$a_{16} = a_{15} + 9 = a_{15} + a_5$
$a_8 = a_7 + 3 = a_7 + a_2$	$a_{17} = a_{16} + 9 = a_{16} + a_5$
$a_9 = a_8 + 5 = a_8 + a_3$	$a_{18} = a_{17} + 12 = a_{17} + a_6$
$a_{10} = a_9 + 5 = a_9 + a_3$	$a_{19} = a_{18} + 12 = a_{18} + a_6$
$a_{11} = a_{10} + 5 = a_{10} + a_3$	$a_{20} = a_{19} + 12 = a_{19} + a_6$

我們以等差數列為基礎，發現每一項都可以看成前一項再加上一個公差，但若改以每三項為一組，

即推論得到下列遞迴關係式: $\begin{cases} a_1 = 2、a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{3}\right]}, \ n \ge 3 \end{cases}$

(五)數學歸納法證明

從(四)的4.我們推論得到一個遞迴關係式可以完整表示以3的次方數(1,3,9,27...)用加法湊出3的倍數的方法數所形成的數列關係。

因為當 $k = 1$，$n = 3k$、$n = 3k+1$、$n = 3k+2$ 時，$\left[\frac{n}{3}\right] = k$，所以我們將項數再細分為 $3n$、$3n+1$、$3n+2$，利用遞迴關係式: $\begin{cases} a_1 = 2、a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{3}\right]}, \ n \ge 3 \end{cases}$，分別推論為以下三種:

1. 當 $\boxed{項數為 3n}$ 時，$a_{3n} = a_{3n-1} + a_{\left[\frac{3n}{3}\right]}$，亦即 $\boxed{a_{3n} = a_{3n-1} + a_n}$

證明:

當 $n=1$ 時，$a_3 = a_2 + a_1$，5 = 3 + 2 成立 ; 當 $n=2$ 時，$a_6 = a_5 + a_2$，12 = 9 + 3 成立 ;設當 $n=k$ 時，$a_{3k} = a_{3k-1} + a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，$a_{3(k+1)} = a_{3k+3} = a_{3k+2} + a_{\left[\frac{3k+3}{3}\right]} = a_{3(k+1)-1} + a_{\left[\frac{3(k+1)}{3}\right]}$

$= a_{3m-1} + a_m$ 故 $a_{3m} = a_{3m-1} + a_m$ 得證。

2. 當 $\boxed{項數為 3n+1}$ 時，$a_{3n+1} = a_{3n} + a_{\left[\frac{3n+1}{3}\right]}$，亦即 $\boxed{a_{3n+1} = a_{3n} + a_n = a_{3n-1} + 2a_n}$ （$\because a_{3n} = a_{3n-1} + a_n$）

證明:

當 $n=1$ 時，$a_4 = a_2 + 2a_1$，7 = 3 + 2x2 成立;當 $n=2$ 時，$a_7 = a_5 + 2a_2$，15 = 9 + 2x3 成立;設當 $n=k$ 時，$a_{3k+1} = a_{3k-1} + 2a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，$a_{3(k+1)+1} = a_{3k+4} = a_{3k+3} + a_{\left[\frac{3k+4}{3}\right]} = a_{3m} + a_{\left[\frac{3m+1}{3}\right]} = a_{3m-1} + a_m + a_m$

$= a_{3m-1} + 2a_m$ 故 $a_{3m+1} = a_{3m-1} + 2a_m$ 得證。

3. 當 $\boxed{項數為 3n+2}$ 時，$a_{3n+2} = a_{3n+1} + a_{\left[\frac{3n+2}{3}\right]}$，亦即 $\boxed{a_{3n+2} = a_{3n+1} + a_n = a_{3n-1} + 3a_n}$ （$\because a_{3n+1} = a_{3n-1} + 2a_n$）

證明:

當 $n=1$ 時，$a_5 = a_2 + 3a_1$，9 = 3 + 3x2 成立;當 $n=2$ 時，$a_8 = a_5 + 3a_2$，18 = 9 + 3x3 成立;設當 $n=k$ 時，$a_{3k+2} = a_{3k-1} + 3a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，$a_{3(k+1)+2} = a_{3k+5} = a_{3k+4} + a_{\left[\frac{3k+5}{3}\right]} = a_{3m+1} + a_{\left[\frac{3m+2}{3}\right]} = a_{3m-1} + 2a_m + a_m$

$= a_{3m-1} + 3a_m$ 故 $a_{3m+2} = a_{3m-1} + 3a_m$ 得證。

二、探討3n的方法數之同餘關係

(一)再進一步探討倍數n和3的次方、以及3n的方法數的關係，所以我們整理如下表4-7

表4-7

n	以 3 的次方表示 n	$f_3(3n)$	$f_3(3n)$ (mod3)
1	$1x3^0$	2	2
2	$2x3^0$	3	0
3	$0x3^0+1x3^1$	5	2
4	$1x3^0+1x3^1$	7	1
5	$2x3^0+1x3^1$	9	0
6	$0x3^0+2x3^1$	12	0
7	$1x3^0+2x3^1$	15	0
8	$2x3^0+2x3^1$	18	0
9	$0x3^0+0x3^1+1x3^2$	23	2
10	$1x3^0+0x3^1+1x3^2$	28	1

(二)從上表發現，當 n=2、 $f_3(3\cdot2) \equiv 0\,(\text{mod}3)$，n=5、 $f_3(3\cdot5) \equiv 0\,(\text{mod}3)$，n=6、 $f_3(3\cdot6) \equiv 0\,(\text{mod}3)$，n=7、 $f_3(3\cdot7) \equiv 0\,(\text{mod}3)$，n=8、 $f_3(3\cdot8) \equiv 0\,(\text{mod}3)$，

我們選其中 n=2、5、8 討論，當 n=3t-1， $f_3(3\cdot(3t-1) \equiv 0\,(\text{mod}3)$。

因此，我們歸納得到:

$$f_3(3(3n-1)) \equiv 0 \ \ (\text{mod}3)$$

(三) 從上表中發現，若將 $n = c_0 \cdot 3^0 + c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 3^2 + c_3 \cdot 3^3 + \ldots\ldots c_j 3^j$ 表示，

3^i 的係數 c_i 數字為 0、1、2。

(四) $f_3(3n)$ (mod3)和 n 以 3 的次方表示時，和其係數存在一個關係。

例如當 n=3 時， $f_3(3\cdot3) = f_3(9) = 5$， $f_3(9) \equiv 2(\text{mod}3)$

n=3=0x3^0+1x3^1，設 c_0=0、c_1=1，(c_0+1)(c_1+1)=1x2=2≡2(mod 3) 。

例如當 n=8 時， $f_3(3\cdot8) = f_3(24) = 18$， $f_3(24) \equiv 0(\text{mod}3)$

n=8=2x3^0+2x3^1，設 c_0=2、c_1=2，(c_0+1)(c_1+1)=3x3=9≡0(mod 3)。

以此類推，我們歸納得到

當 $n = c_0 \cdot 3^0 + c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 3^2 + c_3 \cdot 3^3 + \ldots\ldots c_j 3^j$，則 $f_3(3n) \equiv \prod_{i=0}^{j} (c_i + 1) \ (\text{mod}\,3)$

三、探討以2的次方數(1,2,4,8,16...)用加法湊出2的倍數

我們利用找出3的所有方法數的做法，同樣計算2的所有組合方法數。

(一)實際劃記結果，如下表4-8.2

表4-8.2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
方法數	2	4	6	10	14	20	26	36	46	60

(二)接著利用高斯符號計算其過程

例如當n=9時，2xn=18，以2的次方數(1,2,4,8,16...)用加法湊出2xn=18的方法數=46。

$$1+\left[\frac{18}{2^1}\right]+\left[\frac{18}{2^2}\right]+\left[\frac{18-4}{2^1}\right]+\left[\frac{18-8}{2^1}\right]+\left[\frac{18-16}{2^1}\right]+\left[\frac{18-2\times4}{2^1}\right]+\left[\frac{18-3\times4}{2^1}\right]+\left[\frac{18-4\times4}{2^1}\right]+$$

$$\left[\frac{18-2\times8}{2^1}\right]+\left[\frac{18}{2^3}\right]+\left[\frac{18}{2^4}\right]+\left[\frac{18-8}{2^2}\right]+\left[\frac{18-8-4}{2}\right]+\left[\frac{18-8-4\times2}{2^2}\right]$$

=1+9+4+7+5+1+5+3+1+1+2+1+2+3+1=46。

(三)利用組合的概念

計算過程及方法相同，因此我們推得的結論為:

$$\begin{aligned} f_2(2n) = &\{[1+n]+[1+(n-2)]+[1+(n-2\cdot2]+[1+(n-3\cdot2)]+\ldots\ldots\ \}+ \\ &\{[1+(n-2^2)]+[1+(n-2\cdot2^2)]+[1+(n-3\cdot2^2)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}+ \\ &\{[1+(n-2^3)]+[1+(n-2\cdot2^3)]+[1+(n-3\cdot2^3)]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}+ \\ &\{[1+(n-2^2-2^3)]+[1+(n-2\cdot2^2-2^3)]+[1+(n-3\cdot2^2-2^3)]+\ldots\ldots \end{aligned}$$

(四)利用數型規律計算2n的所有組合方法數

1.我們由上述的計算過程所得結果製成表格4-11

表4-11

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
湊出 2n 的方法數 a_n	2	4	6	10	14	20	26	36	46	60	74	94	114	140	166
$a_n - a_{n-1}$		2	2	4	4	6	6	10	10	14	14	20	20	26	26

2.我們發現，和3n一樣，將 $a_n - a_{n-1}$ 中不重複數字的項視為一個新的數列{An}，An:2,4,6,10,...，和原數列 :2,4,6,10,...的數字是相同。

3.由表4-11我們同樣也發現某些項存在相同的公差d; 3n是四數形成一等差數列，而2n則是三數形成一等差數列。因此，從第一項開始，每三項會形成一個等差數列。進一步歸納可以得到:

當 $k \ge 1$、 $n = 2k-1$ 時，會以 a_n 為首項，依序三項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

4.同樣的我們想再推論出其他數學關係，所以我們將湊出2n的方法數整理成下表4-12

表4-12

$a_2 = a_1 + 2 = a_1 + a_1$	$a_{10} = a_9 + 14 = a_9 + a_5$
$a_3 = a_2 + 2 = a_2 + a_1$	$a_{11} = a_{10} + 14 = a_{10} + a_5$
$a_4 = a_3 + 4 = a_3 + a_2$	$a_{12} = a_{11} + 20 = a_{11} + a_6$
$a_5 = a_4 + 4 = a_4 + a_2$	$a_{13} = a_{12} + 20 = a_{12} + a_6$
$a_6 = a_5 + 6 = a_5 + a_3$	$a_{14} = a_{13} + 26 = a_{13} + a_7$
$a_7 = a_6 + 6 = a_6 + a_3$	$a_{15} = a_{14} + 26 = a_{14} + a_7$
$a_8 = a_7 + 10 = a_7 + a_4$	
$a_9 = a_8 + 10 = a_8 + a_4$	

同理可推論得到下列的遞迴關係式:

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{2}\right]}, \ n \ge 2 \end{cases}$ 其中[ ]為高斯符號

(四)我們同樣以數學歸納法證明所得的遞迴關係式，發現也會成立。

1. 當 $\boxed{項數為 2n}$ 時，$a_{2n} = a_{2n-1} + a_{\left[\frac{2n}{2}\right]}$，亦即 $\boxed{a_{2n} = a_{2n-1} + a_n}$

證明:

當 $n=1$ 時，$a_2 = a_1 + a_1$，4 = 2 + 2 成立;當 $n=2$ 時，$a_4 = a_3 + a_2$，10 = 6 + 4 成立 ;

設當 $n=k$ 時，$a_{2k} = a_{2k-1} + a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = a_{2k+1} + a_{\left[\frac{2k+2}{2}\right]} = a_{2(k+1)-1} + a_{\left[\frac{2(k+1)}{2}\right]} = a_{2m-1} + a_m$

故 $a_{2m} = a_{2m-1} + a_m$ 得證。

2. 當 $\boxed{項數為 2n+1}$ 時，$a_{2n+1} = a_{2n} + a_{\left[\frac{2n+1}{2}\right]}$，亦即 $\boxed{a_{2n+1} = a_{2n} + a_n = a_{2n-1} + 2a_n}$ （$\because a_{2n} = a_{2n-1} + a_n$）

證明:

當 $n=1$ 時，$a_3 = a_1 + 2a_1$，6 = 2 + 2x2 成立;當 $n=2$ 時，$a_5 = a_3 + 2a_2$，14 = 6 + 2x4 成立;設當 $n=k$ 時，$a_{2k+1} = a_{2k-1} + 2a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，$a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} = a_{2k+2} + a_{\left[\frac{2k+3}{2}\right]} = a_{2m} + a_{\left[\frac{2m+1}{2}\right]} = a_{2m-1} + a_m + a_m$

$= a_{2m-1} + 2a_m$ 故 $a_{2m+1} = a_{2m-1} + 2a_m$ 得證。

四、探討2n的方法數之同餘關係

計算過程與3n相同，因此，我們整理出下表4-13

表4-13

n	以 2 的次方表示 n	$f_2(2n)$	$f_2(2n)$ (mod2)
1	$1x2^0$	2	0
2	$0x2^0+1x2^1$	4	0
3	$1x2^0+1x2^1$	6	0
4	$0x2^0+0x2^1+1x2^2$	10	0
5	$1x2^0+0x2^1+1x2^2$	14	0
6	$0x2^0+1x2^1+1x2^2$	20	0
7	$1x2^0+1x2^1+1x2^2$	26	0
8	$0x2^0+0x2^1+0x2^2+1x2^3$	36	0
9	$1x2^0+0x2^1+0x2^2+1x2^3$	46	0
10	$0x2^0+1x2^1+0x2^2+1x2^3$	60	0

藉由上述表格，我們得到的結論為:

$$f_2(2(2n-1)) \equiv 0 \ \ (\text{mod}\,2)$$

五、探討以4的次方數(1,4,16,64,...)用加法湊出4的倍數

(一) 我們同樣以一一劃記的方式找4n的所有組合方法數。結果如表4-14所示。

表4-14

n	1	2	3	4	5
方法數	2	3	4	6	8

(二)接著，我們藉由之前的經驗，直接利用高斯符號計算組合方法數。
例如當n=5時，4xn=20，以4的次方數(1,4,16...)用加法湊出4xn=20的方法數
$f_4(4n)=f_4(20)=8$。 計算過程如下:

$$1+\left[\frac{20}{4^1}\right]+\left[\frac{20}{4^2}\right]+\left[\frac{20-16}{4^1}\right]=1+5+1+1=8\text{。}$$

(三)利用組合的概念

當 n=5， $f_4(4n)=f_4(20)=[1+5]+[1+(5-4)]=8$

$$\begin{aligned}f_4(4n)=&\{[1+n]+[1+(n-4)]+[1+(n-2\cdot4]+[1+(n-3\cdot4)]+\ldots\ldots\}+\\&\{[1+(n-4^2)]+[1+(n-2\cdot4^2)]+[1+(n-3\cdot4^2)]+\ldots\ldots\ldots\}+\\&\{[1+(n-4^3)]+[1+(n-2\cdot4^3)]+[1+(n-3\cdot4^3)]+\ldots\ldots\ldots\}+\\&\{[1+(n-4^2-4^3)]+[1+(n-2\cdot4^2-4^3)]+[1+(n-3\cdot4^2-4^3)]+\ldots\ldots\end{aligned}$$

(四)利用數型規律計算4n的所有組合方法數

1.利用3n及2n相同的道理，我們整理了表格4-15

表4-15

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
湊出 4n 的方法數 a_n	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40
a_n - a_{n-1}		1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4

2.由表4-15我們發現和3n、2n一樣，將 a_n - a_{n-1} 中不重複數字的項視為一個新的數列{An}，An:2,3,4,...，和原數列 a_n :2,3,4,...的數字是相同。

3. 由表4-15某些項存在相同的公差d;但是4n是五數形成一等差數列，如:

(1) a_3=4、 a_4=6、 a_5=8、 a_6=10、 a_7=12 此五數為一個公差 $d_1=a_1$ 為 2 的等差數列，
(2) a_8=4、 a_9=6、 a_{10}=8、 a_{11}=10、 a_{12}=12 此五數為一個公差 $d_2=a_2$ 為 3 的等差數列，
以此類推，從第一項開始，每項會形成一個等差數列。進一步歸納可以得到:

當 $k\ge1$，n= $4k-1$，會以 a_n 為首，依序五項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

4.我們也將湊出4n的方法數整理成下表4-16:

表4-16

$a_4=a_3+2=a_3+a_1$	$a_8=a_7+3=a_7+a_2$
$a_5=a_4+2=a_4+a_1$	$a_9=a_8+3=a_8+a_2$
$a_6=a_5+2=a_5+a_1$	$a_{10}=a_9+3=a_9+a_2$
$a_7=a_6+2=a_6+a_1$	$a_{11}=a_{10}+3=a_{10}+a_2$

我們以等差數列為基礎，推得下列的遞迴關係式:

$$\begin{cases}a_1=2、a_2=3、a_3=4\\a_n=a_{n-1}+a_{\left[\frac{n}{4}\right]},\ n\ge4\end{cases}$$ 其中[ ]為高斯符號。

(四)數學歸納法證明

我們將項數再細分為 $4n$ 、 $4n+1$ 、 $4n+2$ 、 $4n+3$ ，利用遞迴關係式:

$$\begin{cases}a_1=2、a_2=3、a_3=4\\a_n=a_{n-1}+a_{\left[\frac{n}{4}\right]},\ n\ge4\end{cases}$$

利用3n及2n相同的解題方式，發現也全都會成立。

1. 當$\boxed{\text{項數為 }4n}$時， $a_{4n}=a_{4n-1}+a_{\left[\frac{4n}{4}\right]}$ ，亦即$\boxed{a_{4n}=a_{4n-1}+a_n}$

證明:

當 $n=1$時， $a_4=a_3+a_1$ ，6 = 4 + 2 成立;當 $n=2$時， $a_8=a_7+a_2$ ，15 = 12 + 3 成立 ;

設當 $n=k$ 時， $a_{4k}=a_{4k-1}+a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$時， $a_{4(k+1)}=a_{4k+4}=a_{4k+3}+a_{\left[\frac{4k+4}{4}\right]}=a_{4(k+1)-1}+a_{\left[\frac{4(k+1)}{4}\right]}=a_{4m-1}+a_m$

故 $a_{4m}=a_{4m-1}+a_m$ 得證。

2.當$\boxed{\text{項數為 }4n+1}$時， $a_{4n+1}=a_{4n}+a_{\left[\frac{4n+1}{4}\right]}$ ，亦即$\boxed{a_{4n+1}=a_{4n}+a_n=a_{4n-1}+2a_n}$ ($\because a_{4n}=a_{4n-1}+a_n$)

證明:

當 $n=1$時， $a_5=a_3+2a_1$ ，8 = 4 + 2x2 成立;當 $n=2$時， $a_9=a_7+2a_2$ ，18 = 12 + 2x3 成立;設當 $n=k$ 時， $a_{4k+1}=a_{4k-1}+2a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$時， $a_{4(k+1)+1}=a_{4k+5}=a_{4k+4}+a_{\left[\frac{4k+5}{4}\right]}=a_{4m}+a_{\left[\frac{4m+1}{4}\right]}=a_{4m-1}+a_m+a_m$

$=a_{4m-1}+2a_m$ 故 $a_{4m+1}=a_{4m-1}+2a_m$ 得證。

3. 當$\boxed{\text{項數為 }4n+2}$時， $a_{4n+2}=a_{4n+1}+a_{\left[\frac{4n+2}{4}\right]}$ ，亦即$\boxed{a_{4n+2}=a_{4n+1}+a_n=a_{4n-1}+3a_n}$ ($\because a_{4n+1}=a_{4n-1}+2a_n$)

證明:

當 $n=1$時， $a_6=a_3+3a_1$ ，10 = 4 + 3x2 成立;當 $n=2$時， $a_{10}=a_7+3a_2$ ，21= 12 + 3x3 成立;設當 $n=k$ 時， $a_{4k+2}=a_{4k-1}+3a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$時， $a_{4(k+1)+2}=a_{4k+6}=a_{4k+5}+a_{\left[\frac{4k+6}{4}\right]}=a_{4m+1}+a_{\left[\frac{4m+2}{4}\right]}=a_{4m-1}+2a_m+a_m$

$=a_{4m-1}+3a_m$ 故 $a_{4m+2}=a_{4m-1}+3a_m$ 得證。

4. 當$\boxed{\text{項數為 }4n+3}$時， $a_{4n+3}=a_{4n+2}+a_{\left[\frac{4n+3}{4}\right]}$ ，亦即$\boxed{a_{4n+3}=a_{4n+2}+a_n=a_{4n-1}+4a_n}$ ($\because a_{4n+2}=a_{4n-1}+3a_n$)

證明:

當 $n=1$時， $a_7=a_3+4a_1$ ，12 = 4 + 4x2 成立;當 $n=2$時， $a_{11}=a_7+4a_2$ ，24= 12 + 4x3 成立 ;設當 $n=k$ 時， $a_{4k+3}=a_{4k-1}+4a_k$ 成立，

則當 $n=k+1$時， $a_{4(k+1)+3}=a_{4k+7}=a_{4k+6}+a_{\left[\frac{4k+7}{4}\right]}=a_{4m+2}+a_{\left[\frac{4m+3)}{4}\right]}=a_{4m-1}+3a_m+a_m$

$=a_{4m-1}+4a_m$ 故 $a_{4m+3}=a_{4m-1}+4a_m$ 得證。

六、探討4n的方法數之同餘關係

(一)進一步探討倍數n和4的次方、以及4n的方法數的關係，整理如表4-17

表4-17

n	以 4 的次方表示 n	$f_4(4n)$	$f_4(4n)$ (mod4)
1	$1\text{x}4^0$	2	2
2	$2\text{x}4^0$	3	3
3	$3\text{x}4^0$	4	0
4	$0\text{x}4^0+1\text{x}4^1$	6	2
5	$1\text{x}4^0+1\text{x}4^1$	8	0
6	$2\text{x}4^0+1\text{x}4^1$	10	2
7	$3\text{x}4^0+1\text{x}4^1$	12	0
8	$0\text{x}4^0+2\text{x}4^1$	15	3
9	$1\text{x}4^0+2\text{x}4^1$	18	2
10	$2\text{x}4^0+2\text{x}4^1$	21	1

(二)從上表發現，當 n=3、 $f_4(4\cdot3)\equiv0\ (\text{mod}4)$，n=7、 $f_4(4\cdot7)\equiv0\ (\text{mod}4)$。歸納可得到~

$$f_4(4(4n-1))\equiv0\pmod 4$$

(三)從上表中發現，若將 $n=c_0\cdot4^0+c_1\cdot4^1+c_2\cdot4^2+c_3\cdot4^3+\ldots\ldots c_j4^j$ 表示， 4^i 的係數 c_i 數字為 0、1、2、3。

(四) $f_3(3n)\ (\text{mod}3)$ 的小結論，在此亦可成立。

例如當 n=3 時， $f_4(4\cdot3)=f_4(12)=28$ ， $f_4(12)\equiv0(\text{mod}\,4)$

n=3=3x4^0，設 c_0=3，(c_0+1)=4 ≡ 0 (mod 4) 。

當 $n=c_0\cdot4^0+c_1\cdot4^1+c_2\cdot4^2+c_3\cdot4^3+\ldots\ldots c_j4^j$ ，則 $f_4(4n)\equiv\prod_{i=0}^{j}(c_i+1)\pmod 4$

伍、研究結果

一、利用高斯符號，得到以m的次方數(...)用加法湊出m的n倍數的方法數。

計算 mxn 的方法數 $f_m(mn)$ ，其數學式子為：

$$f_m(mn)=\sum_{p=1}\frac{mn}{m^p}+\sum_{a=1}\left(\sum_{p=1}\frac{mn-am^p}{m}\right)+\sum_{a=1}\left(\sum_{p=1}\frac{mn-m^p-am^{p-1}}{m}\right)+\ldots\ldots$$

例如：用 7 的次方湊成 7x10=70 的方法數為：

$$f_7(70)=1+\left[\frac{70}{7^1}\right]+\left[\frac{70}{7^2}\right]+\left[\frac{70-7}{7^2}\right]+\left[\frac{70-2\times7}{7^2}\right]+\left[\frac{70-3\times7}{7^2}\right]=1+10+1+1+1+1=15\text{。}$$

二、利用組合數的概念，得到以m的次方數(...)用加法湊出m的n倍數的方法數。

計算 mxn 的方法數 $f_m(mn)$ ，其數學式子為：

$$\begin{aligned}f_m(mn)=&\{[1+n]+[1+(n-m)]+[1+(n-2m]+[1+(n-3m)]+\ldots\ldots\}+\\&\{[1+(n-m^2)]+[1+(n-2m^2)]+[1+(n-3m^2)]+\ldots\ldots\ldots\}+\\&\{[1+(n-m^3)]+[1+(n-2m^3)]+[1+(n-3m^3)]+\ldots\ldots\ldots\}+\\&\{[1+(n-m^2-m^3)]+[1+(n-2m^2-m^3)]+[1+(n-3m^2-m^3)]+\ldots\ldots\end{aligned}$$

例如：用 7 的次方湊成 7x10=70 的方法數為： $f_7(70)=[1+10]+[1+(10-7)]=15$

三、利用數型規律，其關係為：

若以 a_n 代表湊出 mn 的方法數，我們發現數列< a_n >，

1. 從 m-1 項開始，依序每(m+1)項一組會形成一個等差數列。

2. 當 $k\ge1$時，n=mk-1，會以 a_n 為首，依序 m+1 項形成一個公差 d= a_k 的等差數列。

例如：m=7，數列< a_n >代表湊出 7n 的方法數，則從 a_6 為首項依序八項形成一個公差 d= a_1 的等差數列。

四、遞迴關係式：

以 a_n 代表湊出 mn 的方法數，我們發現數列< a_n >可以推論出一個遞迴關係式，如下:

$$\begin{cases}a_1=x、a_2=y、a_3=z\ldots\ldots a_{m-1}=u\\a_n=a_{n-1}+a_{\left[\frac{n}{m}\right]},\ n\ge m\end{cases}$$ 其中[ ]為高斯符號

例如： a_n 代表湊出 7n 的方法數，

$$\begin{cases}a_1=2、a_2=3、a_3=4.、a_4=5、a_5=6、a_6=7\\a_n=a_{n-1}+a_{\left[\frac{n}{7}\right]},\ n\ge7\end{cases}$$ 其中[ ]為高斯符號

五、利用數學歸納法證明遞迴式的過程中，必須將數列< a_n >中的項數細分，意即在以 a_n 代表湊出mn的方法數中，將數列< a_n >中的每一項再分成 a_{mn+1}、a_{mn+2}、a_{mn+3}、......、$a_{mn+(m-1)}$ 等，然後推論得到以下關係式:

$a_{mn}=a_{mn-1}+a_n$ 、 $a_{mn+1}=a_{mn-1}+2a_n$ 、 $a_{mn+2}=a_{mn-1}+3a_n$

$a_{mn+3}=a_{mn-1}+4a_n$ 、 $a_{mn+(m-1)}=a_{mn-1}+ma_n$

以 a_n 代表湊出 mn 的方法數中

故 $a_{mn+p}=a_{mn-1}+(p+1)a_n$ ，其中 $1\le p<m$ 、 p 為正整數。

例如：數列< a_n >代表湊出 7n 的方法數，

數列< a_n >中的每一項再分成 a_{7n+1}、a_{7n+2}、a_{7n+3}、......、a_{7n+6} ，

$a_7=a_6+a_1$ 、 $a_8=a_6+2a_1$ 、 $a_9=a_6+3a_1\cdots\cdots$

六、同餘關係，以m的次方數(m^0、m^1、m^2、$m^3\cdots$)用加法湊出m的n倍數的方法數 。

其同餘關係如下

1. $f_m(\text{m}(mn-1))\equiv0\pmod m$ 。

2. 當 $n=c_0\cdot m^0+c_1\cdot m^1+c_2\cdot m^2+c_3\cdot m^3+\ldots\ldots c_jm^j$ ， m^i 的係數 c_i 數字為 0、1、2⋯(m-1)。

3. 當 $n=c_0\cdot m^0+c_1\cdot m^1+c_2\cdot m^2+c_3\cdot m^3+\ldots\ldots c_jm^j$ ，則 $f_m(\text{m}n)\equiv\prod_{i=0}^{j}(c_i+1)\pmod m$

陸、討論省思與未來展望

一、討論省思

(一)我們一開始利用最基本的解題策略-畫圖，依序找出9及12的所有組合方法數。

(二)接著發現似乎和[因數、倍數}相關，意即若3x5=15，可以放5個3；可以放1個9，15/3=5，15/9=1...6，利用高斯符號[ ]及組合數計算。

(三)3n的方法數分別有2,3,5,7,9,12,...。我們觀察數列，發現兩項之間的差和原數列相同，接著發現數列中某幾項的差相同，找到了等差數列。公差是數列中的某一項，但整個數列並非是同一公差的等差數列，進而發現了遞迴數列。

(四)為了證明找到的遞迴關係式，我們利用數學歸納法證明，發現都會成立。

(五)最後，討論其同餘關係，找到關係式。

二、未來展望

我們尚未藉由遞迴關係式成功推論出一般式，以及未將推導而獲得的同餘關係予以證明，這將是我們後續研究的方向。

柒、參考資料

一、左台益(2014)。國中數學課本第四冊第一章：等差數列與等差級數。南一版。

二、游森棚(2018)。森棚教官的數學題。科學研習月刊，57-8，52。

三、游森棚(2019)。高中數學課本第二冊第一章：數列與級數。翰林版。